Astérisque

JEAN-PIERRE SERRE

Motifs

Astérisque, tome 198-199-200 (1991), p. 333-349

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1991__198-199-200__333_0>

MOTIFS

Jean-Pierre SERRE

1. Introduction

Voici déjà 25 ans que Grothendieck a eu l'idée de la théorie des motifs. Dans l'introduction à "Récoltes et Semailles" ([9], p.xviii), il en dit ceci :

"Parmi toutes les choses mathématiques que j'avais eu le privilège de découvrir et d'amener au jour, cette réalité des motifs m'apparaît encore comme la plus fascinante, la plus chargée de mystère - au coeur même de l'identité profonde entre la "géométrie" et l' "arithmétique". Et le "yoga des motifs" auquel m'a conduit cette réalité longtemps ignorée est peut-être le plus puissant instrument de découverte que j'aie dégagé dans cette première période de ma vie de mathématicien."

Grothendieck lui-même n'a à peu près rien publié[1] sur le "yoga des motifs", à part de brèves allusions dans [7] et [8]. La théorie est restée longtemps confidentielle - tout en étant une source constante d'inspiration dans les questions les plus diverses : structures de Hodge, conjectures de Weil, fonctions L, sommes exponentielles, périodes, etc.

Le présent exposé n'est qu'une introduction. Pour plus de détails, on pourra consulter les textes cités dans la Bibliographie, et notamment [1], [2], [4], [6], [10], [11], [14], [15], [20]. Une Annexe reproduit la première lettre que j'aie reçue de Grothendieck sur les motifs (août 1964), ainsi que deux passages de "Récoltes et Semailles" ([9], 206-207 et 209-211).

[1] Il a fait un séminaire là-dessus à l'IHES en 1967 (cité dans [6]), mais ce séminaire n'a pas été rédigé. Il aurait également aimé en faire le sujet d'une série d'exposés au séminaire Bourbaki, mais il réclamait pour cela un minimum de dix séances ; étant à l'époque responsable du séminaire, j'avais refusé.

2. Méthodes topologiques en géométrie algébrique (groupes de cohomologie)

L'usage de telles méthodes, dans le cas classique où le corps de base est $\mathbf{C}$, remonte à Poincaré, et a été particulièrement développé par Lefschetz, Hodge et bien d'autres. Que cela puisse aussi se faire en caractéristique p a été pressenti par Weil, à la fin des années quarante, lorsqu'il a énoncé les "conjectures de Weil" (cf.[**21**]) après en avoir démontré le cas particulier de la dimension 1. Une dizaine d'années plus tard, l'introduction par Grothendieck de la *topologie étale* (SGA 4 et SGA 5) a permis de définir des groupes de cohomologie ayant les propriétés voulues.

De façon plus précise, soit X une variété algébrique sur un corps k ; supposons pour simplifier que X soit projective et lisse. Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k , et soit $\overline{X}$ la $\overline{k}$-variété déduite de X par extension des scalaires de k à $\overline{k}$. Alors, pour tout nombre premier $\ell \neq$ caract.k , les groupes de cohomologie étale $H^i_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ sont des $\mathbf{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie ayant toutes les propriétés requises : dualité de Poincaré, formule de Künneth, formule de Lefschetz, etc. De plus, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ opère de façon naturelle sur ces espaces, ce qui donne naissance à des représentations ℓ-adiques particulièrement intéressantes, surtout lorsque k est un corps de nombres, cf.[**19**].

D'autres groupes de cohomologie peuvent être définis. Ainsi, si caract.k = 0, l'hypercohomologie du complexe des formes différentielles fournit des groupes de cohomologie "de de Rham" $H^i_{DR}(X, k)$; ce sont des k-espaces vectoriels filtrés de dimension finie. Si de plus k est plongeable dans $\mathbf{C}$, le choix d'un tel plongement conduit à des groupes de cohomologie "de Betti" $H^i_B(X, \mathbf{Q})$, qui sont des $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels de dimension finie ; leurs produits tensoriels avec $\mathbf{C}$ sont bigradués (structure de Hodge).

Pour X et i fixés, tous ces espaces ont même dimension : le i-ème nombre de Betti de la variété X. Ils sont liés entre eux par des isomorphismes de compatibilité variés ; par exemple, si k est plongé dans $\mathbf{C}$, on a un isomorphisme "de périodes" :

$$H^i_B(X, \mathbf{Q}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \simeq H^i_{DR}(X, k) \otimes_k \mathbf{C}.$$

3. Motifs

La situation décrite ci-dessus n'est pas tout à fait satisfaisante. On dispose de trop de groupes de cohomologie qui ne sont pas suffisamment liés entre eux

- malgré les isomorphismes de compatibilité. Par exemple, si X et Y sont deux variétés (projectives, lisses), et $f : H^i_{et}(X, \mathbf{Q}_\ell) \rightarrow H^i_{et}(Y, \mathbf{Q}_\ell)$ une application $\mathbf{Q}_\ell$-linéaire, où ℓ est un nombre premier fixé, il n'est pas possible en général de déduire de f une application analogue pour la cohomologie ℓ'-adique, où ℓ' est un autre nombre premier. Pourtant, on a le sentiment que c'est possible pour certains f, ceux qui sont "motivés" (par exemple ceux qui proviennent d'un morphisme de Y dans X, ou plus généralement d'une correspondance algébrique entre X et Y). Encore faut-il savoir ce que "motivé" veut dire !

Une façon plus précise de poser cette question est de demander si l'on peut construire une catégorie $\mathbf{Q}$-abélienne $\underline{M}(k)$ ainsi qu'un foncteur contravariant

$$X \longmapsto h(X) = \oplus\, h^i(X) \qquad , \qquad h^i(X) \in \mathrm{ob}(\underline{M}(k)),$$

ayant (entre autres) les propriétés suivantes :

a) Si A et B sont des objets de $\underline{M}(k)$, $\mathrm{Hom}(A, B)$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension finie (i.e. les objets de $\underline{M}(k)$ se comportent comme des espaces vectoriels de dimension finie).

b) Il existe pour tout $\ell \neq$ caract.k un foncteur

$$T_\ell : \underline{M}(k) \ \rightarrow\ G\text{-}\mathbf{Q}_\ell \text{ -représentations (où } G = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k))$$

tel que $H^i_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ se déduise de $h^i(X)$ par application du foncteur T_ℓ.

c) Enoncé analogue à b) pour la cohomologie de de Rham, lorsque caract.$k =$ 0.

d) Enoncé analogue pour la cohomologie de Betti lorsque k est plongé dans $\mathbf{C}$.

Bref, $h(X)$ devrait jouer le rôle d'une *cohomologie rationnelle* dont les autres cohomologies se déduisent.

Comment définir $\underline{M}(k)$ et le foncteur h ? La première question que l'on se pose est celle-ci : que sont les objets de $\underline{M}(k)$? En fait, ce n'est pas là un point important ; comme Grothendieck nous l'a appris, les objets d'une catégorie ne jouent pas un grand rôle, ce sont les morphismes qui sont essentiels[2]. On peut donc, comme première approximation, définir une catégorie $\underline{M}^0(k)$ dont les

[2] Exemple élémentaire : si l'on veut construire une catégorie équivalente à celle des k-espaces vectoriels de dimension finie, on peut prendre pour objets les entiers ≥ 0 et définir $\mathrm{Hom}(m,n)$ comme l'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans k ; c'est le point de vue "matriciel" en algèbre linéaire.

objets sont les variétés projectives lisses sur k, et définir h comme le foncteur qui, à une telle variété X, attache X elle-même ; bien sûr, il faut aussi dire ce qu'est $\mathrm{Hom}(X,Y)$ dans la catégorie $\underline{M}^0(k)$, et c'est là le point décisif.

Le premier choix fait par Grothendieck est le suivant (je l'énonce en supposant que toutes les composantes de X ont même dimension - le cas général se ramène à celui-là par additivité) :

$\mathrm{Hom}(X,Y) = \mathbf{Q}\otimes C(X,Y)$, où $C(X,Y)$ est le *groupe des classes de cycles algébriques* de $X \times Y$, de codimension égale à $\dim X$, modulo l'équivalence numérique[3].

(Les éléments de $C(X,Y)$ peuvent être vus comme des correspondances algébriques allant de Y vers X : le foncteur h est contravariant.)
La composition des morphismes se définit sans difficulté.

En fait, la construction ci-dessus n'est qu'une première étape dans la définition de la catégorie des motifs. Il est nécessaire d'agrandir $\underline{M}^0(k)$:

a) En ajoutant (de façon purement formelle) les *noyaux des projecteurs* (un "projecteur" est un élément idempotent d'un $\mathrm{Hom}(X,X)$).

On obtient ainsi la catégorie $\underline{M}^{eff}(k)$ des *motifs effectifs* sur k. Ses objets sont les couples (X,π), où X est un objet de $\underline{M}^0(k)$ et π un idempotent de $\mathrm{End}(X)$. Cette catégorie est munie de produits tensoriels ; elle a un élément unité 1 qui est $h(X)$ pour X réduit à un point.

b) En ajoutant (de façon également formelle) l'inverse L^{-1} du motif L défini par $h(\mathbf{P}_1) = 1 \oplus L$ (i.e. $L = h^2(\mathbf{P}_1)$).

Le motif L^{-1} est le *motif de Tate* ; il correspond, du point de vue galoisien, aux caractères cyclotomiques.

Soit $\underline{M}(k)$ la catégorie obtenue après les deux opérations a) et b). C'est la catégorie des motifs cherchée (ou en tout cas l'une de ses incarnations). Si l'on admet les "conjectures standard", cette catégorie est une $\mathbf{Q}$-catégorie abélienne semi-simple (cf. [6], [11], [14] pour plus de détails) ; c'est même une *catégorie tannakienne*, au sens de [5] et [16] : les produits tensoriels et Hom internes ont toutes les propriétés habituelles. Les foncteurs

$$T_\ell : \underline{M}(k) \to \mathbf{G}\text{-}\mathbf{Q}_\ell\text{-représentations} \quad (\ell \neq \text{caract.}k)$$

[3] A la place de l'équivalence numérique, on pourrait prendre l'équivalence *linéaire*, qui conduit aux groupes de Chow ; cela donne une théorie plus fine, cf. [20].

se définissent sans difficulté, et il en est de même des foncteurs liés aux cohomologies de de Rham et de Betti. Enfin, $\underline{M}(k)$ est *graduée* : tout élément h a une décomposition canonique $h = \sum_{i \in \mathbf{Z}} h^i$ qui reflète celle de la cohomologie. Un élément h tel que $h^j = 0$ pour $j \neq i$ est dit *pur de poids* i ; ainsi, le motif de Tate est pur de poids -2.

4. Autres définitions

La définition de $\underline{M}(k)$ donnée ci-dessus n'est réellement commode que si l'on admet les "conjectures standard" (cf. [7]) ainsi que la conjecture de Hodge (et aussi celle de Tate, qui est son analogue ℓ-adique). Malheureusement, aucun progrès n'a été fait sur ces conjectures depuis les années soixante. On ignore par exemple si les projecteurs associés à la décomposition de Künneth

$$H^n(X \times Y) = \bigoplus_{a+b=n} H^a(X) \otimes H^b(Y)$$

sont donnés par des cycles algébriques (ils sont pourtant aussi bien motivés qu'on peut l'être). Or l'algébricité de ces projecteurs est nécessaire si l'on veut prouver que tout motif est somme directe de motifs purs, ce qui est l'une des propriétés les plus importantes des motifs.

On est ainsi conduit (suivant les besoins) à changer la théorie en modifiant la définition de Hom, c'est-à-dire la définition des flèches "motivées". A l'heure actuelle, la définition qui semble la plus commode est celle utilisée par Deligne [3], basée sur les "cycles de Hodge absolus", le corps k étant supposé de caractéristique 0. *Grosso modo* (voir [3] pour des énoncés précis), cela revient à définir $\mathrm{Hom}(X, Y)$ comme l'ensemble des familles de flèches

$$H_\lambda(X) \to H_\lambda(Y),$$

définies pour toutes les cohomologies H_λ du n°2 (ℓ-adique, de Rham, Betti) et satisfaisant à toutes les compatibilités naturelles ; les projecteurs de Künneth en sont des exemples. Pour les variétés abéliennes, Deligne a prouvé que

"Hodge $\Rightarrow$ Hodge absolu".

C'est là un résultat très utile. Il entraîne (cf. [3], [19]) que les groupes de Galois ℓ-adiques attachés aux modules de Tate des variétés abéliennes sont contenus dans les points ℓ-adiques des groupes de Mumford-Tate correspondants.

5. Exemples de décompositions de motifs

Je me borne à des cas simples, qui ne nécessitent aucune conjecture, comme l'a montré Manin [**14**].

- *Espace projectif* $\mathbf{P}_n$

La formule donnant le nombre de points de $\mathbf{P}_n$ sur un corps à q éléments :

$$|\mathbf{P}_n(\mathbf{F}_q)| = 1 + q + \cdots + q^n,$$

suggère la décomposition suivante du motif $h(\mathbf{P}_n)$:

$$h(\mathbf{P}_n) = 1 \oplus L \oplus \cdots \oplus L^n,$$

et cela peut effectivement se démontrer (sur un corps de base quelconque).

- *Eclatements*

Soit Y une sous-variété fermée lisse de X, et soit X_Y l'éclatée de X le long de Y. Supposons que Y soit partout de codimension d dans X. On a alors :

$$h(X_Y) = h(X) \oplus h(Y) \otimes (L \oplus L^2 \oplus \cdots \oplus L^{d-1})$$

comme le suggère le calcul du nombre de points de $X_Y(k)$ lorsque $k = \mathbf{F}_q$:

$$\begin{aligned} |X_Y(\mathbf{F}_q)| &= |X(\mathbf{F}_q)| - |Y(\mathbf{F}_q)| + |Y(\mathbf{F}_q)|.|\mathbf{P}_{d-1}(\mathbf{F}_q)| \\ &= |X(\mathbf{F}_q)| + |Y(\mathbf{F}_q)|(q + q^2 + \cdots + q^{d-1}). \end{aligned}$$

- *Courbes*

Supposons que X soit une courbe projective lisse, géométriquement connexe. On a

$$h(X) = 1 \oplus h^1(X) \oplus L,$$

avec $h^1(X) = h^1(\text{Jac } X)$, où Jac X est la jacobienne de X.

(On peut presque écrire "$h^1(X) = \text{Jac } X$" ; en effet, la catégorie des motifs effectifs de poids 1 est équivalente à la catégorie des variétés abéliennes à isogénie près - ce qui explique le succès des méthodes de Weil en dimension 1.)

- *Surfaces cubiques dans* $\mathbf{P}_3$

Si X est une telle surface, supposée lisse, on a :

$$h(X) = 1 \oplus h^2(X) \oplus L^2 \quad \text{et} \quad h^2(X) = L \otimes (1 \oplus V_6),$$

où V_6 est un motif de poids 0 et de rang 6, provenant d'une représentation galoisienne $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \to \mathbf{GL}_6(\mathbf{Q})$, à image contenue dans le groupe de Weyl du système de racines de type E_6, cf. [**14**].

On pourrait multiplier les exemples, élémentaires ou non (hypersurfaces cubiques de $\mathbf{P}_4$, surfaces $K3, \ldots$). Dans chaque cas, la théorie des motifs donne une décomposition en morceaux qui permet d'isoler les facteurs les plus intéressants (tel le facteur V_6 pour une surface cubique) ; et ces morceaux eux-mêmes peuvent se recombiner pour former d'autres motifs. Ce jeu de construction (le *meccano* des motifs) se traduit, lorsque k est fini, par des relations entre nombres de points, et, lorsque k est un corps global, par des identités entre fonctions L. C'est l'un des charmes de la théorie.

6. Groupes de Galois motiviques

Admettons les conjectures standard, ainsi que la conjecture de Hodge, et supposons k plongeable dans $\mathbf{C}$. La catégorie $\underline{M}(k)$ est alors une $\mathbf{Q}$-catégorie abélienne semi-simple tannakienne. De plus, cette catégorie possède un *foncteur fibre* sur $\mathbf{Q}$, à savoir le foncteur de Betti relatif à un plongement fixé de k dans $\mathbf{C}$. Il en résulte (cf.[**5**],[**16**]) que $\underline{M}(k)$ est équivalente, comme catégorie tannakienne, à la catégorie des représentations linéaires d'un groupe pro-algébrique $\underline{G}_k$ sur $\mathbf{Q}$, le *groupe de Galois motivique* (cf.[**9**], p.206-207, reproduit en Annexe). Ce groupe est réductif. A torsion galoisienne près, il ne dépend pas du plongement choisi de k dans $\mathbf{C}$. Le quotient de $\underline{G}_k$ par sa composante neutre $\underline{G}_k^0$ s'identifie au groupe de Galois usuel $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$, vu comme groupe pro-algébrique de dimension 0.

Si k est un corps de nombres, le plus grand quotient abélien de $\underline{G}_k$ n'est autre que la limite projective des groupes $S_{\mathfrak{m}}$ définis et étudiés dans [**18**], chap.II.

Lorsqu'on remplace $\underline{M}(k)$ par la sous-catégorie tannakienne $\underline{M}_X(k)$ engendrée par un motif X, le groupe pro-algébrique $\underline{G}_k$ est remplacé par un quotient $\underline{G}_{k,X}$ qui est un groupe linéaire réductif (algébrique, i.e. de type fini sur $\mathbf{Q}$) ; sa composante neutre $\underline{G}_{k,X}^0$ est le *groupe de Mumford-Tate* de X. Ainsi, si E est une courbe elliptique sans multiplications complexes, le groupe $\underline{G}_{k,E}$

est le groupe $\mathbf{GL}_2$; il en résulte, vu la classification des représentations de ce groupe, que tout objet de $\underline{M}_E(k)$ est somme directe de motifs de la forme

$$L^r \otimes \mathrm{Sym}^s E \ , \text{ avec } r \in \mathbf{Z} \text{ et } s \geq 0.$$

Si ℓ est un nombre premier, et si X est un motif, l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ sur la cohomologie ℓ-adique de X se fait par l'intermédiaire d'un groupe de Lie ℓ-adique qui est un sous-groupe compact du groupe $\underline{G}_{k,X}(\mathbf{Q}_\ell)$. Lorsque k est de type fini sur $\mathbf{Q}$, on conjecture que ce sous-groupe est *ouvert*, i.e. que l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ est "aussi grosse que possible" ; dans certains cas (voir [**19**], C.3.8 pour un énoncé précis), on conjecture même que ce groupe est un sous-groupe compact maximal de $G_{k,X}(\mathbf{Q}_\ell)$ pour presque tout ℓ.

7. Motifs et formes automorphes

En 1967, Weil [**22**] énonce une conjecture (dite "de Weil", ou "de Shimura-Taniyama", ou "de Taniyama-Weil", suivant les auteurs) affirmant que toute courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$ est "modulaire". Dès cette date, il était clair (cf. par exemple [**17**]) que cette conjecture devait s'étendre à tout motif sur tout corps de nombres, à condition d'utiliser des "formes automorphes" plus générales - celles pour lesquelles Langlands [**12**] venait justement de définir des fonctions L ayant les propriétés habituelles (avec Hecke remplaçant Frobenius). En d'autres termes, la catégorie des motifs sur un corps de nombres devrait être plongeable dans la catégorie des représentations automorphes des groupes réductifs (pour des énoncés plus précis, voir [**1**] , [**13**]). C'est là l'un des aspects les plus passionnants de ce que l'on appelle la "philosophie de Langlands".

8. Motifs mixtes

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des motifs associés à des variétés projectives lisses. Que peut-on dire dans le cas général ?

Supposons pour simplifier que k soit de caractéristique 0. Soit X une k-variété quelconque. On peut écrire X comme union disjointe de sous-variétés localement fermées X_α qui soient quasi-projectives et lisses ; d'après le théorème de résolution des singularités, chaque X_α est de la forme $\overline{X}_\alpha - D_\alpha$, avec $\overline{X}_\alpha$ projective lisse et $\dim D_\alpha < \dim X$. En procédant par récurrence sur $\dim X$, on obtient une décomposition :

$$x = \coprod Y_i - \coprod Z_j \ ,$$

où les Y_i et les Z_j sont projectives et lisses. On est ainsi amené à définir le "motif virtuel"

$$h(X) = \sum_i h(Y_i) - \sum_j h(Z_j),$$

la somme de droite étant prise dans le groupe de Grothendieck $M(k)$ de la catégorie $\underline{M}(k)$, cf. Annexe 1. Bien entendu, on doit vérifier que $h(X)$ ne dépend pas de la décomposition de X choisie, ce qui résulte des conjectures[4] sur les représentations ℓ-adiques mentionnées au n°6.

Exemple. Si Y est une variété projective lisse et si X est le cône affine de base Y, on a $h(X) = 1 + L \otimes h(Y) - h(Y)$.

La construction ci-dessus revient à faire une somme du genre "Jordan-Hölder", ce qui est raisonnable dans la catégorie $\underline{M}(k)$ puisque celle-ci est (conjecturalement) semi-simple. On peut cependant être plus exigeant, et vouloir définir des "Ext" non triviaux entre motifs. Cela revient à introduire une nouvelle catégorie, celle des "motifs mixtes". La définition que l'on doit adopter n'est nullement évidente, cf. Deligne **[4]** et Jannsen **[10]**. Je n'en dirai rien, et je me bornerai pour terminer à citer deux énoncés conjecturaux montrant l'intérêt des Ext dans la catégorie en question :

- Si k est un corps de nombres, on a :

$$\mathrm{Ext}^1(1, L^{-n}) \overset{?}{=} \mathbf{Q} \otimes K_{2n-1}(k) \qquad \text{pour tout } n \geq 1,$$

ce qui relie motifs et K-théorie.

- Si A est une variété abélienne sur k, on a :

$$\mathrm{Ext}^1(h^1(A), 1) \overset{?}{=} \mathbf{Q} \otimes A(k).$$

Ce dernier énoncé est particulièrement satisfaisant ; il montre que le groupe de Mordell-Weil peut se lire dans la catégorie des motifs mixtes (plus généralement, tous les termes figurant dans la formule de Birch et Swinnerton-Dyer doivent avoir une interprétation motivique).

****

Note : Une première rédaction de cet exposé, faite par Michel Waldschmidt, m'a été très utile. Je l'en remercie vivement.

[4] J'ignore si cette indépendance peut se démontrer sans utiliser aucune conjecture.

ANNEXE
Quelques textes de Grothendieck sur les motifs

1. *Extrait d'une lettre datée du 16.8.1964*

"Cher Serre,

...Cette question est d'ailleurs liée à la suivante, sans doute bien hors de notre portée. Soit k un corps, algébriquement clos pour fixer les idées, et soit $L(k)$ le "groupe K" défini par les schémas de type fini sur k, avec comme relations celles qui proviennent d'un découpage en morceaux (l'initiale L est suggérée bien sûr par les liens avec les fonctions L). Soit $M(k)$ le "groupe K" défini par les "motifs" sur k. J'appelle "motif" sur k quelque chose comme un groupe de cohomologie ℓ-adique d'un schéma algébrique sur k, mais considéré comme indépendant de ℓ, et avec sa structure "entière", ou disons pour l'instant "sur $\mathbf{Q}$", déduite de la théorie des cycles algébriques. La triste vérité, c'est que pour le moment je ne sais pas définir la catégorie abélienne des motifs, bien que je commence à avoir un yoga assez précis sur cette catégorie, disons $\underline{M}(k)$. Par exemple, pour tout ℓ premier $\neq p$, on a un foncteur exact T_ℓ de $\underline{M}(k)$ dans la catégorie des vectoriels de dimension finie sur $\mathbf{Q}_\ell$, avec opérations du pro-groupe $(\mathrm{Gal}(\overline{k_i}/k_i))_i$ dessus, où k_i parcourt les sous-extensions[5] de type fini de k et $\overline{k_i}$ est la clôture algébrique de k_i dans $\overline{k}$; ce foncteur est fidèle, mais bien entendu pas pleinement fidèle. Si k est de caractéristique 0, il y a également un foncteur T_∞ de $\underline{M}(k)$ dans la catégorie des vectoriels de dimension finie sur k (le "foncteur de De Rham-Hodge", alors que T_ℓ est le "foncteur de Tate"). En tout cas, si on admet les deux ingrédients que tu sais (Hodge-Künneth) de l'hyp. de Riemann-Weil, je sais construire explicitement (en fait sur tout préschéma de base plus ou moins, pas seulement sur un corps) la sous-catégorie des objets *semi-simples* de $\underline{M}(k)$ (essentiellement comme des facteurs directs, définis par des classes de correspondances algébriques, d'un $H^i(X, \mathbf{Z}_\ell)$, où X est une variété projective non singulière). Il n'en faut pas plus pour construire le groupe $M(k)$ (et je pense qu'on pourrait en donner une description indépendante des conjectures que j'ai dites, si on voulait). Ainsi, pour tout ℓ, on a un homomorphisme de $M(k)$ dans le "groupe K", soit $M_\ell(k)$, défini par les $\mathbf{Q}_\ell$-G-modules de type fini sur $\mathbf{Q}_\ell$, où G est le groupe profini défini plus haut, ou si tu préfères, la pro-algèbre de Lie associée (qui a l'avantage sur le groupe d'être un pro-objet *strict*, i.e. à morphismes de transition surjectifs). Ceci dit, prenant des sommes alternées de cohomologies à support compact, on trouve un homomorphisme naturel

$$L(k) \to M(k),$$

[5] Les k_i sont les sous-corps de k qui sont de type fini sur le corps premier.

qui est d'ailleurs un homomorphisme d'anneaux (pour le produit cartésien à gauche, le produit tensoriel à droite). La question générale qui se pose est alors de savoir ce qu'on peut dire sur cet homomorphisme, est-il très loin d'être bijectif ? Note que les deux membres de cet homomorphisme sont munis de filtrations naturelles, via la dimension des préschémas, et l'homomorphisme est compatible avec ces filtrations. La question ci-dessus sur les jacobiennes[6] peut encore se formuler ainsi : $L^{(1)} \to M^{(1)}$ est-il surjectif ? (En effet, à un facteur trivial $\mathbf{Z}$ près, provenant de la dimension 0, $M^{(1)}$ n'est autre que le groupe K défini par les VA définies sur k).

Je ne me hasarde à aucune conjecture générale sur l'homomorphisme plus haut, j'espère simplement par des considérations heuristiques de ce genre finir par arriver à une construction effective de la catégorie des motifs, ce qui me semble un point essentiel de mon "long-run program". Par contre, il y a d'autres conjectures en pagaille que je ne me prive pas de faire, pour préciser le yoga. Par exemple, que $M(k) \to M_\ell(k)$ est injectif, plus précisément que deux motifs simples non isomorphes (je devrais peut-être dire plutôt : non isogènes) donnent lieu à des composants simples ℓ-adiques deux à deux distincts. La conjecture de Tate se généralise en énonçant que, pour X projective non singulière, la filtration "arithmétique" des $H^i(X)$ (via la filtration de X par la dimension) est déterminée par la filtration déjà signalée de $M(k)$, ou encore la filtration de $H^i(X, \mathbf{Z}_\ell)$ est déterminée par la structure de module galoisien (ou plutôt pro-galoisien) à l'aide de la filtration correspondante de $M(k)$. Par exemple, en dimension impaire, le morceau de filtration maximale de $H^{2i-1}(X, \mathbf{Z}_\ell(i))$ est aussi le plus grand "morceau abélien" et correspond au module de Tate de la jacobienne intermédiaire $J^i(X)$ (définie par les cycles algébriquement équivalents à 0 de codimension i sur X).

Je te signale d'ailleurs que j'ai bel et bien une construction de telles jacobiennes intermédiaires (de dimension majorée par $b_{2i-1}/2$ comme il se doit). Malheureusement, même conjecturalement, je n'ai pas encore compris le lien entre la positivité à la Hodge et la forme de Néron-Tate relative à l'autodualité de J^i pour $\dim X = 2i - 1$, et j'aimerais en parler avec toi un jour avant ton départ. Pour les surfaces, on obtient bien une démonstration du théorème de l'index de Hodge à l'aide des fourbis de Néron et Tate, essentiellement en se ramenant à la positivité de l'autodualité d'une jacobienne d'une courbe ; et je

[6] Il s'agit de la question suivante : le groupe K des variétés abéliennes (à isogénie près) est-il engendré par les jacobiennes ? (Note de J-P. Serre.)

ne suis toujours pas convaincu que ce principe de démonstration par réduction à la dimension 1 n'a pas une portée plus générale.

...

Bien à toi.

A. Grothendieck "

2. *Extrait de "Récoltes et Semailles", p.206-207*

"... Quand, il y a trois semaines à peine, je me suis étendu en une page ou deux sur le yoga des motifs, comme un de mes "orphelins" et qui me tenait à coeur plus qu'aucun autre, j'ai dû être bien à côté de la plaque ! Sans doute ai-je rêvé, quand il me semblait me souvenir d'années de gestation d'une vision, ténue et élusive d'abord, et s'enrichissant et se précisant au cours des mois et des années, dans un effort obstiné pour essayer de saisir le "motif" commun, la quintessence commune, dont les nombreuses théories cohomologiques connues alors étaient autant d'incarnations différentes, nous parlant chacune dans son propre langage sur la nature du "motif" dont elle était l'une des manifestations directement tangibles. Sans doute je rêve encore, en me souvenant de la forte impression que m'avait faite telle intuition de Serre, qui avait été amené à voir un groupe de Galois profini, un objet donc qui semblait de nature essentiellement discrète (ou, du moins, se réduisant tautologiquement à de simples systèmes de groupes *finis*), comme donnant naissance à un immense système projectif de groupes ℓ-adiques *analytiques*, voire de groupes *algébriques* sur $\mathbf{Q}_\ell$ (en passant à des enveloppes algébriques convenables), qui avaient même une tendance à être réductifs - avec du coup l'introduction de tout l'arsenal des intuitions et méthodes (à la Lie) des groupes analytiques et algébriques. Cette construction avait un sens pour tout nombre premier ℓ, et je sentais (ou je rêve que j'ai senti...) qu'il y avait un mystère à sonder sur la relation de ces groupes algébriques pour des nombres premiers différents ; qu'ils devaient tous provenir d'un même système projectif de groupes algébriques sur le seul sous-corps commun naturel à tous ces corps de base, savoir le corps $\mathbf{Q}$, le corps "absolu" de caractéristique nulle. Et puisque j'aime rêver, je continue à rêver que je me souviens être entré dans ce mystère entrevu, par un travail qui sûrement n'était qu'un rêve puisque je ne "démontrais" rien ; que j'ai fini par comprendre comment la notion de motif fournissait la clé de ce mystère - comment, par le seul fait de la présence d'une catégorie (ici celle des motifs "lisses" sur un schéma de base donné, par exemple les motifs sur un corps de base donné), ayant des structures internes similaires à celles qu'on trouve sur la catégorie des représentations linéaires d'un pro-groupe algébrique sur un corps k (le charme de la notion de pro-groupe algébrique m'ayant été révélé précédemment par SERRE également), on arrive à reconstituer bel et bien un tel pro-groupe (dès qu'on dispose d'un "foncteur fibre" convenable), et à interpréter la catégorie "abstraite" comme la catégorie de ses représentations linéaires.

Cette approche vers une "théorie de Galois motivique" m'était soufflée par l'approche que j'avais trouvée, des années avant, pour décrire le groupe fondamental d'un espace topologique ou d'un schéma (ou même d'un topos quelconque - mais là je sens que je vais blesser des oreilles délicates que "les topos n'amusent pas"...), en termes de la catégorie des revêtements étales sur l' "espace" envisagé, et les foncteurs fibres sur celle-ci. Et le langage même des "*groupes de Galois motiviques*" (que j'aurais pu aussi bien appeler "groupes fondamentaux" motiviques, les deux genres d'intuitions étant pour moi la même chose, depuis la fin des années cinquante...), et celui des "foncteurs fibres" (qui correspondent très exactement aux "incarnations manifestes" dont il était question plus haut, savoir aux différentes "théories cohomologiques" qui s'appliquent à une catégorie de motifs donnée) - ce langage était fait pour exprimer la nature profonde de ces groupes et suggérer à l'évidence leurs liens immédiats avec les groupes de Galois et avec les groupes fondamentaux ordinaires.

Je me rappelle encore du plaisir et de l'émerveillement, dans ce jeu avec des foncteurs fibres, et avec les torseurs sous les groupes de Galois qui font passer des uns aux autres en "twistant", de retrouver dans une situation particulièrement concrète et fascinante tout l'arsenal des notions de cohomologie non commutative développée dans le livre de Giraud, avec la gerbe des foncteurs-fibres (ici au-dessus du topos étale, ou mieux, du topos *fpqc* de $\mathbf{Q}$ - des topos non triviaux et intéressants s'il en fût !), avec le "lien" (en groupes ou pro-groupes algébriques) qui lie cette gerbe, et les avatars de ce lien, se réalisant par des groupes ou pro-groupes algébriques divers, correspondant aux différentes "sections" de la gerbe, c'est-à-dire aux divers foncteurs cohomologiques. Les différents points complexes (par exemple) d'un schéma de caractéristique nulle donnaient naissance (via les foncteurs de Hodge correspondants) à autant de sections de la gerbe, et à des torseurs de passage de l'une à l'autre, ces torseurs et les pro-groupes opérant sur eux étant munis de structures algébrico-géométriques remarquables, exprimant les structures spécifiques de la cohomologie de Hodge ... "

3. *Extrait de "Récoltes et Semailles", p.209-211*

"... Puis il y a eu un troisième "rêve motifs", qui était comme le mariage des deux rêves précédents - quand il s'est agi d'interpréter, en termes de structures sur les groupes de Galois motiviques et sur les torseurs sous ces groupes qui servent à "tordre" un foncteur fibre pour obtenir (canoniquement) tout autre foncteur fibre[7], les différentes structures supplémentaires dont est munie la catégorie des motifs et dont une des toutes premières est justement celle de la filtration par les poids. Je crois me souvenir que là moins que jamais il n'était question de devinettes, mais bien de traductions mathématiques en bonne et due forme. C'étaient autant "d'exercices" inédits sur les représentations linéaires de groupes algébriques que j'ai faits avec grand plaisir pendant des jours et des semaines, sentant bien que j'étais en train de cerner de plus en plus près un mystère qui me fascinait depuis des années ! La notion la plus subtile peut-être qu'il a fallu appréhender et formuler en termes de représentations a été celle de "polarisation" d'un motif, en m'inspirant de la théorie de Hodge et en essayant d'en décanter ce qui gardait un sens dans le contexte motivique. C'était là une réflexion qui a dû se faire vers le moment de ma réflexion sur une formulation des "conjectures standard", inspirées l'une et l'autre par l'idée de Serre (toujours lui !) d'un analogue "kählérien" des conjectures de Weil.

Dans une telle situation, quand les choses elles-mêmes nous soufflent quelle est leur nature cachée et par quels moyens nous pouvons le plus délicatement et le plus fidèlement l'exprimer, alors que pourtant beaucoup de faits essentiels semblent hors de la portée immédiate d'une démonstration, le simple instinct nous dit d'écrire simplement noir sur blanc ce que les choses nous soufflent avec insistance, et d'autant plus clairement que nous prenons la peine d'écrire sous leur dictée ! Point n'est besoin de se soucier de démonstrations ou de constructions complètes - s'encombrer de telles exigences à ce stade-là du travail reviendrait à s'interdire l'accès de l'étape la plus délicate, la plus essentielle d'un travail de découverte de vaste envergure - celle de la naissance d'une vision, prenant forme et substance hors d'un apparent néant. Le simple fait d'*écrire*, de *nommer*, de *décrire* - ne serait-ce d'abord que décrire des intuitions élusives ou de simples "soupçons" réticents à prendre forme - a un *pouvoir créateur*. C'est là l'instrument entre tous de la passion de connaître, quand celle-ci s'investit en des choses que l'intellect peut appréhender. Dans la démarche de la découverte en ces choses-là, ce travail en est l'étape créatrice entre toutes, qui toujours

[7] Tout comme les groupes fondamentaux $\pi_1(x)$,$\pi_1(y)$ de quelque "espace" X en deux "points" x et y se déduisent l'un de l'autre en "tordant" par le torseur $\pi_1(x,y)$ des classes de chemins de x à y ...

précède la démonstration et nous en donne les moyens - ou, pour mieux dire, sans laquelle la question de “démontrer” quelque chose ne se pose même pas, avant que rien encore de ce qui touche l’essentiel n’aurait été formulé et vu. Par la seule vertu d’un effort de formulation, ce qui était informe prend forme, se prête à examen, faisant se décanter ce qui est visiblement faux de ce qui est possible, et de cela surtout qui s’accorde si parfaitement avec l’ensemble des choses connues, ou devinées, qu’il devient à son tour un élément tangible et fiable de la vision en train de naître. Celle-ci s’enrichit et se précise au fil du travail de formulation. Dix choses soupçonnées seulement, dont aucune (la conjecture de Hodge disons) n’entraîne conviction, mais qui mutuellement s’éclairent et se complètent et semblent concourir à une même harmonie encore mystérieuse, acquièrent dans cette harmonie force de vision. Alors même que toutes les dix finiraient par se révéler fausses, le travail qui a abouti à cette vision provisoire n’a pas été fait en vain, et l’harmonie qu’il nous a fait entrevoir et qu’il nous a permis de pénétrer tant soit peu n’est pas une illusion mais une réalité, nous appelant à la connaître. Par ce travail, seulement, nous avons pu entrer en contact intime avec cette réalité, cette harmonie cachée et parfaite. Quand nous savons que les choses ont raison d’être ce qu’elles sont, que notre vocation est de les connaître, non de les dominer, alors le jour où une erreur éclate est jour d’exultation - tout autant que le jour où une démonstration nous apprend au-delà de tout doute que telle chose que nous imaginions était bel et bien l’expression fidèle et véritable de la réalité elle-même… ”

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. CLOZEL, *Motifs et formes automorphes : applications du principe de fonctorialité,* in *Automorphic Forms, Shimura Varieties and L-Functions* (L. Clozel et J.S. Milne édit.), vol. 1, 77-159, Acad. Press (1990).

[2] P. DELIGNE, *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, Proc. Symp. Pure Math. 33, A.M.S., vol. 2, 313-346 (1979).

[3] P. DELIGNE, *Hodge cycles on abelian varieties* (notes by J.S. Milne), Lect. Notes in Math. 900, 9-100, Springer-Verlag (1982).

[4] P. DELIGNE, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points,* in *Galois Groups over* **Q** (Y. Ihara, K. Ribet, J-P. Serre édit.), 79-297, Springer-Verlag (1989).

[5] P. DELIGNE et J.S. MILNE, *Tannakian categories*, Lect. Notes in Math. 900, 101-228, Springer-Verlag (1982).

[6] M. DEMAZURE, *Motifs des variétés algébriques*, Sém. Bourbaki 1969-1970, exposé 365, Lect. Notes in Math. 180, Springer-Verlag (1971).

[7] A. GROTHENDIECK, *Standard conjectures on algebraic cycles*, Bombay Coll. on Algebraic Geometry, Oxford, 193-199 (1969).

[8] A. GROTHENDIECK, *Hodge general conjecture is false for trivial reasons*, Topology 8 (1969), 299-303.

[9] A. GROTHENDIECK, *Récoltes et Semailles : réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien*, Montpellier (1985).

[10] U. JANNSEN, *Mixed motives and algebraic K-theory*, Lect. Notes in Math. 1400, Springer-Verlag (1990).

[11] S. KLEIMAN, *Motives*, in Proc. 5th Nordic Summer School, Oslo (1970), 53-82, Wolters-Noordhoff, Groningen (1972).

[12] R.P. LANGLANDS, *Euler Products*, Yale (1967).

[13] R.P. LANGLANDS, *Automorphic representations, Shimura varieties, and motives. Ein Märchen*, in *Automorphic Forms, Representations and L-Functions*, Proc. Symp. Pure Math. 33, vol. 2, 205-246 (1979).

[14] Y. MANIN, *Correspondances, motifs et transformations monoïdales* (en russe), Mat. Sbornik 77 (1968), 475-507 (trad. anglaise : Math. USSR Sb. 6 (1968), 439-470).

[15] M. RAPOPORT, N. SCHAPPACHER et P. SCHNEIDER (édit.), *Beilinson's conjectures on special values of L-functions*, Perspectives in Maths. 4, Acad. Press (1988).

[16] N. SAAVEDRA RIVANO, *Catégories tannakiennes*, Lect. Notes in Math. 265, Springer-Verlag (1972).

[17] J-P. SERRE, *Résumé des cours de 1966-1967*, Annuaire du Collège de France, 51-52 (1967) (= *Oe*.78).

[18] J-P. SERRE, *Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves*, Benjamin, New-York (1968), (2ème édition : Addison-Wesley (1989)).

[19] J-P. SERRE, *Représentations ℓ-adiques*, Kyoto Symp. on Number Theory, 177-193 (1977) (= *Oe*.112).

[20] C. SOULÉ, *Groupes de Chow et K-théorie de variétés sur un corps fini*, Math. Ann. 268 (1984), 317-345.

[21] A. WEIL, *Numbers of solutions of equations in finite fields*, Bull. A.M.S. 55 (1949), 497-508 (= C.P. [1949*b*]).

[22] A. WEIL, *Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen*, Math. Ann. 168 (1967), 149-156 (= C.P. [1967*a*]).

J-P. SERRE
Collège de France
75231 PARIS Cedex 05