PH. SATGÉ

Quelques problèmes de rationalité liés au théorème de Poncelet

Astérisque, tome 198-199-200 (1991), p. 295-304

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1991__198-199-200__295_0>

QUELQUES PROBLÈMES DE RATIONALITÉ LIÉS AU THÉORÈME DE PONCELET

par

Ph. SATGÉ

§0. Introduction. Soit S une conique non singulière du plan projectif sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0, soit c un entier naturel, et soit Λ un pinceau linéaire (i.e. un système linéaire de dimension 1) de diviseurs effectifs de degré $c+1$ de la conique S ; le théorème de Poncelet affirme l'existence d'une, et d'une seule, courbe C de degré c possédant la propriété suivante : pour chaque élément D de Λ, tous les points d'intersections des tangentes à S issues des différents points du support de D sont sur la courbe C. Récemment plusieurs auteurs ont donné des démonstrations très élégantes de ce théorème et ont étudiés en détail les propriétés géométriques des courbes C que ce théorème attache aux systèmes linéaires (courbes que, dans la suite, nous appellons courbes de Poncelet) ; on peut, par exemple, trouver un résumé de ces travaux dans le papier de Trautmann [Tr]. Notons que ces travaux sont essentiellement géométriques, c'est à dire qu'ils ne s'interessent qu'aux propriétés et à la classification des courbes sur un corps de base algébriquement clos. Ici, au contraire, nous fixons notre attention sur un corps de base quelconque de caractéristique 0 (par exemple un corps de nombres) et nous discutons les propriétés des courbes de Poncelet relatives à ce corps de base k. Plus précisément nous supposons, dans le théorème de Poncelet, que la conique non singulière S du plan projectif est définie sur k; nous nous interessons alors aux deux problèmes suivants : d'une part trouver les conditions à imposer à un pinceau de S pour que la courbe de Poncelet qui lui est associée soit définie sur k, et d'autre part classer les courbes sur k obtenues de cette manière. Curieusement, ces deux questions très naturelles ne semblent pas avoir fait l'objet d'une étude systématique ; c'est cette étude que nous commençons ici. Ce travail est divisé en deux paragraphes. Dans le paragraphe 1 nous résolvons le premier de ces problèmes en montrant que la courbe de Poncelet associée à un pinceau de S est définie sur k si et seulement si le pinceau est invariant par le groupe de Galois $Gal(\overline{k}/k)$ dans un sens que nous précisons ; nous discutons ensuite quelques propriétés des pinceaux qui possèdent cette propriété. Dans le paragraphe 2, nous abordons le deuxième problème en nous limitant au cas $c = 2$, donc au cas où les courbes de Poncelet sont des coniques ; nous montrons alors le résultat suivant : chaque fois qu'une telle conique de Poncelet est définie sur k, elle est isomorphe sur le corps k à la conique de base S.

Nous avons cherché, dans ce papier, à rester le plus élémentaire possible du point de vue du langage géométrique employé. Nous précisons assez longuement au début du paragraphe 1 le vocabulaire et les notations que nous employons dans la suite (principalement en ce qui concerne les corps de définition). Nous nous sommes limité dans le second paragraphe à l'étude du cas $c = 2$ qui est particulièrement simple ; signalons cependant que c'est le cas $c = 3$ qui a motivé notre étude ; dans ce cas les courbes de Poncelet sont des cubiques, donc des courbes arithmétiquement beaucoup plus intéressantes que les coniques. Techniquement l'étude de ce cas, et plus généralement des cas $c > 2$, est beaucoup plus difficile ; nous comptons revenir sur ces questions dans un autre travail.

Je remercie J.L. Colliot-Thélène pour ses nombreuses remarques (et en particulier pour la démonstration du Lemme 2.5.)

§1. Les questions de rationalités. Commençons par préciser le cadre géométrique dans lequel nous nous plaçons et les notations que nous utilisons. Nous désignons par $\overline{k}[X_0, X_1, X_2]$ l'anneau des polynômes à trois variables et à coefficients dans $\overline{k}$, et par $\mathbf{P}^2$ l'ensemble des points du plan projectif à valeur dans $\overline{k}$, c'est à dire l'ensemble des classes d'homothétie de triplets non nuls d'éléments de $\overline{k}$. Par courbe nous entendons un fermé de Zariski de dimension 1 de $\mathbf{P}^2$ (i.e. un fermé de Zariski dont toutes les composantes irréductibles sont de dimension 1); si X est une courbe, nous notons $I(X)$ l'ideal homogène de l'anneau $\overline{k}[X_0, X_1, X_2]$ formé des polynômes qui s'annulent sur X; enfin si la courbe X est irréductible, i.e. si l'idéal $I(X)$ est premier, nous notons $\overline{k}(X)$ le corps des fonctions rationnelles sur X.

Le fait que l'on travaille en caractéristique 0 justifie les définitions et les assertions qui suivent (celles ci résultent, par exemple, du Lemme 2 et du théorème 7 du chapitre 1, paragraphe 7 de [We]). Nous faisons agir le groupe de Galois $G = Gal(\overline{k}/k)$ sur l'anneau de polynômes $\overline{k}[X_0, X_1, X_2]$, et sur l'ensemble des points du plan, de la façon suivante : l'image par $\sigma \in G$ du polynôme P est le polynôme ${}^{\sigma}P$ obtenu en remplaçant les coefficients de P par leurs images par σ; le résultat de l'action de $\sigma \in G$ sur le point $\underline{x}$ de coordonnées projectives

(x_0, x_1, x_2) est le point ${}^\sigma\underline{x}$ de coordonnées projectives $(\sigma(x_0), \sigma(x_1), \sigma(x_2))$. Si X est une courbe et si σ est un élément du groupe de galois G, on note ${}^\sigma X$ l'image de X par σ (i.e. l'ensemble des $({}^\sigma\underline{x})_{\underline{x}\in X}$) ; il est clair que ${}^\sigma X$ est une courbe et que $I({}^\sigma X) = {}^\sigma(I(X))$ (i.e. l'ensemble des $({}^\sigma P)_{P\in I(X)}$). Si X est irréductible, si f est un élément de $\overline{k}(X)$ qui s'écrit $\frac{P}{Q}$ avec P et Q polynômes homogènes de même degré de $\overline{k}[X_0, X_1, X_2]$, et si σ est un élément de G, alors la fonction sur ${}^\sigma X$ représentée par le quotient $\frac{{}^\sigma P}{{}^\sigma Q}$ ne dépend que de f (et non des choix de P et Q) ; on la note ${}^\sigma f$. L'application qui à f associe ${}^\sigma f$ est un isomorphisme du corps $\overline{k}(X)$ sur le corps $\overline{k}({}^\sigma X)$ (dont la restriction à $\overline{k}$ est σ). On dira que X est définie sur k si ${}^\sigma X = X$ pour tout $\sigma \in G$, c'est à dire ([We], lemme 2, loc.cit.) si l'idéal $I(X)$ admet une base sur le corps k. Ainsi ([We], théorème 7, loc.cit.), si X est irréductible et définie sur k, le sous corps $k(X)$ de $\overline{k}(X)$ formé des fonctions qui peuvent s'écrire comme quotient de deux polynômes homogènes de même degré à coefficients dans k, est une extension régulière de k; on sait que cela implique que $k(X)$ est le sous corps de $\overline{k}(X)$ fixé par l'action (semi linéaire) de G. En plus du corps k, nous aurons à considérer des extensions K de k contenues dans $\overline{k}$; pour un tel corps K nous notons G_K le groupe de galois $Gal(\overline{k}/K)$ (on a donc $G = G_k$), et $K(X)$ le sous corps de $\overline{k}(X)$ formé des fonctions qui peuvent s'écrire comme quotient de deux polynomes homogènes de même degré à coefficients dans K; comme ci dessus, $K(X)$ est une extension régulière de K, et donc est le sous corps de $\overline{k}(X)$ fixé par le groupe G_K.

Un diviseur sur une courbe X sera un diviseur au sens de Weil, i.e. une combinaison formelle à coefficients dans $\mathbf{Z}$ (l'anneau des entiers rationnels) de points lisses de X. Si X est irréductible et si Δ est un diviseur sur X, on note $L(\Delta)$ le sous espace vectoriel de $\overline{k}(X)$ formé des fonctions f dont le diviseur (f) vérifie $(f) + \Delta \geq 0$. Si σ est un élément de G et si $\Delta = n_1(\mathrm{P}_1) + .. + n_r(\mathrm{P}_r)$ est un diviseur de X (les n_i sont des éléments de $\mathbf{Z}$ et les P_i des éléments de X), alors $n_1({}^\sigma\mathrm{P}_1) + .. + n_r({}^\sigma\mathrm{P}_r)$ est un diviseur de ${}^\sigma X$ que l'on note ${}^\sigma\Delta$ et que l'on appelle l'image de Δ par σ; si X est irréductible, on a $L({}^\sigma\Delta) = {}^\sigma[L(\Delta)]$ (i.e. l'ensemble des $({}^\sigma f)_{f\in L(\Delta)}$). Si X est définie sur k, et si K est une extension de k contenue dans $\overline{k}$, on dit que Δ est rationnel sur K si ${}^\sigma\Delta = \Delta$ pour tout σ de G_K. Ainsi, si X est irréductible et définie sur k, et si Δ est un diviseur rationnel sur K, le groupe G_K agit semi linéairement sur le $\overline{k}$−espace vectoriel $L(\Delta)$; on note $L_K(\Delta)$ le sous ensemble de $L(\Delta)$ formé des éléments invariants par G_K. Les éléments de $L_K(\Delta)$ sont les éléments de $L(\Delta)$ qui appartiennent à $K(X)$, et la dimension du K−espace vectoriel $L_K(\Delta)$ est égale à la dimension du $\overline{k}$−espace vectoriel $L(\Delta)$. Enfin, si Λ est un pinceau linéaire sur la courbe irréductible X et si Δ est un diviseur sur X linéairement équivalent aux diviseurs du pinceau Λ, on note $L_\Lambda(\Delta)$ le sous ensemble de $L(\Delta)$ formé des fonctions dont le diviseur est de la forme $\text{D} - \Delta$ avec D dans Λ; dire que Λ est un pinceau linéaire est équivalent à dire que $L_\Lambda(\Delta)$ est un $\overline{k}$−espace vectoriel de dimension 2. Si la courbe X est définie sur k, et si K est une extension de k contenue dans $\overline{k}$, on dit qu'un pinceau linéaire Λ est un K−pinceau si l'on peut trouver un diviseur Δ rationnel sur K, linéairement équivalent aux éléments de Λ, et tel que l'espace vectoriel $L_\Lambda(\Delta)$ est défini sur K, i.e. admet une base formée d'éléments de $L_K(\Delta)$; il en est ainsi si et seulement si $L_\Lambda(\Delta)$ est stable sous l'action de G_K. Notons que cette propriété ne dépend pas du choix du diviseur rationnel Δ, linéairement équivalent aux éléments de Λ, que l'on a choisi.

DÉFINITION 1.1. *Soit X une courbe définie sur le corps k, soit Λ un pinceau linéaire sur X, et soit K une extension de k contenue dans $\overline{k}$. On dit que le pinceau Λ est G_K−invariant si, pour tout diviseur D de Λ et tout $\sigma \in G_K$, l'image de D par σ est encore dans Λ.*

Dans la suite la courbe de base est une conique; nous la notons S plutôt que X. Il est clair qu'un K−pinceau est un pinceau G_K−invariant; nous verrons qu'il existe des pinceaux G_K−invariants qui ne sont pas des K−pinceaux. L'introduction de la notion de pinceau G_K−invariant est justifiée par la proposition suivante :

PROPOSITION 1.2. *Soit S une conique non singulière définie sur le corps k, Λ un pinceau linéaire sur S, et K une extension de k contenue dans $\overline{k}$. La courbe de Poncelet C associée à Λ est définie sur K si et seulement si le pinceau Λ est G_K−invariant.*

Démonstration : Soit σ un élément de G; par la définition des courbes de Poncelet, la courbe ${}^\sigma C$, transformée de la courbe de Poncelet attachée à Λ par σ, est la courbe de Poncelet attachée au pinceau ${}^\sigma\Lambda$, transformé de Λ par σ (c'est à dire au pinceau dont les éléments sont les transformés par σ des diviseurs de Λ). On a donc ${}^\sigma C = C$ si et seulement si ${}^\sigma\Lambda = \Lambda$, et notre assertion en résulte immédiatement.

Étudions plus en détail les pinceaux G_K−invariants sur une conique non singulière définie sur k.

LEMME 1.3. *Soit S une conique non singulière définie sur le corps k, soit $d > 0$ un entier naturel, et soit K une extension de k contenue dans $\overline{k}$. Si la conique S possède un diviseur effectif de degré d rationnel sur K, alors tout pinceau linéaire de degré d sur S qui est G_K−invariant est un K−pinceau.*

Démonstration : Désignons par Δ un diviseur sur S qui est effectif, de degré

d, et rationnel sur K, et par Λ un pinceau linéaire de degré d sur S qui est G_K−invariant. Comme S est une courbe de genre 0, le diviseur Δ est linéairement équivalent aux éléments de Λ; en conséquence, notre assertion est équivalente à l'assertion suivante : l'espace vectoriel $L_\Lambda(\Delta)$ est défini sur K. Comme on l'a rappellé plus haut, il suffit pour cela de prouver que cet espace est stable sous l'action de G_K; soit donc $f \in L_\Lambda(\Delta)$ et $\sigma \in G_K$, et soit D l'élément de Λ tel que $D - \Delta$ est le diviseur de f; le diviseur de ${}^\sigma f$ est ${}^\sigma D - {}^\sigma\Delta = {}^\sigma D - \Delta$ puisque le diviseur Δ est rationnel sur K; le pinceau Λ étant G_K−invariant, le diviseur ${}^\sigma D$ est un élément de Λ, donc ${}^\sigma f$ est dans $L_\Lambda(\Delta)$; cela prouve l'invariance de $L_\Lambda(\Delta)$ sous l'action de G_K, ce que nous voulions.

Pour mémoire rappelons le lemme suivant :

LEMME 1.4. *Soit S une conique non singulière définie sur le corps k et d un entier naturel ;*

i) si d est pair la conique S possède des diviseurs effectifs de degré d rationnels sur k;

ii) si d est impair et si la conique S possède un diviseur de degré d rationnel sur k, alors S possède des points rationnels sur k.

Démonstration : *i*) Il est clair que l'intersection d'une droite rationnelle sur k avec S est un diviseur sur S qui est effectif, de degré 2, et rationnel sur k; les multiples de tels diviseurs donnent des diviseurs rationnels effectifs de n'importe quel degré pair. *ii*) Si $d = 1$ l'assertion est triviale ; sinon on écrit $d = 2d' + 1$, et on note D_1 un diviseur sur S qui est rationnel sur k et qui est de degré d; on choisit alors sur S un diviseur D_2 rationnel sur k de degré $2d'$, diviseur dont l'existence résulte de *i*). Le diviseur $D{=}D_1{-}D_2$ est un diviseur sur S rationnel sur k et de degré 1. Le k−espace vectoriel $L_k(D)$ est de dimension 2, donc contient des fonctions non nulles ; soit f une telle fonction, le diviseur $(f) + D$ est un diviseur sur S qui est effectif, de degré 1, et rationnel sur k; cela achève la démonstration.

Plaçons nous maientenant dans le cas d impair ; la conjonction des deux lemmes précédents montre que, soit la conique S est triviale (i.e. possède des points rationnels sur k) et alors tout pinceau G−invariant est un k−pinceau, soit elle ne l'est pas et alors elle ne possède pas de k−pinceau (puisque elle ne possède pas de diviseur de degré d rationnel sur k). Dans ce dernier cas les pinceaux G−invariants se décrivent de la manière suivante :

PROPOSITION 1.5. *Soit S une conique non singulière définie sur le corps k et qui ne possède pas de points rationnels sur k, soit d un entier naturel impair, soit K une extension quadratique de k qui est contenue dans $\overline{k}$ et sur laquelle la conique*

S possède des points, et soit Δ un diviseur effectif de degré d qui est rationnel sur K; il existe un et un seul un pinceau linéaire $G-$invariant contenant Δ. De plus tous les pinceaux $G-$invariants sont obtenus de cette manière.

Démonstration : Désignons par σ un élément de G qui n'est pas trivial sur K; le diviseur ${}^{\sigma}\Delta - \Delta$ est rationnel sur K et de degré 0, donc est le diviseur d'une fonction g définie sur K. Le transformé ${}^{\sigma}\Delta$ de Δ par σ n'est pas égal à Δ puisque (lemme 1.4. *ii*)) S ne possède pas de diviseur rationnel de degré d sur k, donc la fonction g n'est pas constante. Désignons par Λ le pinceau linéaire dont les éléments sont les $(\alpha + \beta.g) + \Delta$ où α et β sont dans $\overline{k}$; ce pinceau contient le diviseur ${}^{\sigma}\Delta$ puisque ${}^{\sigma}\Delta = (g) + \Delta$, donc c'est le pinceau engendré par les deux diviseurs Δ et ${}^{\sigma}\Delta$. Le diviseur de ${}^{\sigma}g$ est $\Delta - {}^{\sigma}\Delta$, donc ${}^{\sigma}g = \frac{\lambda}{g}$ où λ est un élément de K; ainsi, si $(\alpha + \beta.g) + \Delta$ est un élément de Λ, son image par σ est ${}^{\sigma}[(\alpha + \beta.g) + \Delta] = ({}^{\sigma}\alpha + {}^{\sigma}\beta.{}^{\sigma}g) + {}^{\sigma}\Delta = ({}^{\sigma}\alpha + {}^{\sigma}\beta.\frac{\lambda}{g}) + {}^{\sigma}\Delta = ({}^{\sigma}\alpha.g + {}^{\sigma}\beta.\lambda) - (g) + {}^{\sigma}\Delta = ({}^{\sigma}\alpha.g + {}^{\sigma}\beta.\lambda) + \Delta$ qui est encore dans Λ. Cela montre que Λ est invariant par σ ; comme il est aussi clairement invariant par $Gal(\overline{k}/K)$, il est $G-$invariant. Le pinceau Λ est donc un pinceau $G-$invariant qui contient Δ; c'est le seul puisque tout pinceau $G-$invariant contenant Δ contient aussi ${}^{\sigma}\Delta$, et que Λ est engendré par ces deux diviseurs. Enfin, si Λ est un pinceau $G-$invariant, alors c'est aussi un pinceau G_K-invariant ; comme S possède des points rationnels sur K, le lemme 1.3. affirme que Λ est un $K-$pinceau ; en conséquence Λ contient des diviseurs rationnels sur K; si Δ est un tel diviseur, le pinceau Λ est donc l'unique pinceau $G-$invariant contenant Δ dont on vient de prouver l'existence.

2. Le cas c=2. Dans ce paragraphe S est, comme précédemment, une conique non singulière, et Λ est un pinceau linéaire sur lequel nous faisons les hypothèses suivantes : Λ est de degré 3 (i.e. $c + 1$ avec $c = 2$) et sans point base. La première hypothèse implique que la courbe de Poncelet C associée au pinceau Λ est une courbe de degré 2; remarquons que la deuxième implique que C est non singulière, i.e. montrons le lemme suivant :

LEMME 2.1. *Soit S une conique non singulière et Λ un pinceau linéaire de degré 3 sans point base, alors la courbe de Poncelet associée à Λ est non singulière.*

Démonstration : On sait ([Tr], paragraphe 5, corollaire de la proposition 5.1.) que la courbe de Poncelet associée au pinceau sans point base Λ est non singulière si et seulement si la condition suivante est réalisée : si $n_1(\mathrm{P}_1) + .. + n_r(\mathrm{P}_r)$ est un diviseur appartennant au pinceau Λ (les n_i sont des entiers naturels positifs et les P_i sont des points de S), alors tous les n_i sont inférieurs ou égaux à 3 et l'un d'eux au plus est différent de 1. Dans le cas qui nous interesse, si $n_1(\mathrm{P}_1) + .. + n_r(\mathrm{P}_r)$ est un élément de Λ, la somme des n_i est égale à 3 donc la condition énoncée ci dessus est satisfaite.

En plus des hypothèses faites au début de ce paragraphe, supposons que S est définie sur k et que le faisceau Λ est $G-$invariant ; la courbe de Poncelet C est alors une conique non singulière (comme nous venons de le voir), qui est définie sur k (comme nous l'avons vu au paragraphe précédent). On a :

PROPOSITION 2.2. *Soit S une conique non singulière définie sur k, et soit Λ un pinceau linéaire de degré 3 sur S qui est $G-$invariant et sans point base. La courbe de Poncelet C associée à Λ est une conique non singulière, définie sur k, et qui possède des points rationnels sur k si et seulement si S en possède.*

Démonstration : Les deux premières assertions ont déja été prouvées. Supposons que la courbe S possède des points rationnels sur k; elle possède alors des diviseurs effectifs de degré 3 rationnels sur k, donc (lemme 1.3.) le pinceau Λ est un $k-$pinceau, et donc il contient des diviseurs rationnels sur k. Soit D un tel diviseur, et soient $\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2,\mathrm{Q}_3$ les trois points d'intersections (non nécessairement tous distincts) des trois tangentes à S issues des trois points du support de D (si D contient un point avec une multiplicité m, on compte m-fois la tangente correspondante) ; pour tout $\sigma \in G$, on a ${}^{\sigma}\mathrm{D} = \mathrm{D}$; en conséquence, pour tout $\sigma \in G$, on a $({}^{\sigma}\mathrm{Q}_1) + ({}^{\sigma}\mathrm{Q}_2) + ({}^{\sigma}\mathrm{Q}_3) = (\mathrm{Q}_1)+(\mathrm{Q}_2)+(\mathrm{Q}_3)$ c'est à dire que le diviseur $(\mathrm{Q}_1)+(\mathrm{Q}_2)+(\mathrm{Q}_3)$ de la conique C est rationnel sur k; on en déduit (lemme 1.3. *ii*)) que la conique C admet des points rationnels. Réciproquement, supposons que la conique C admet des points rationnels sur k; rappelons ([Tr], *b*) de la démonstration de la proposition 1.3.) que, pour tout point Q de C, il existe un diviseur D de S et un seul appartenant au pinceau Λ tel que Q est l'un des points d'intersections des tangentes à S issues des points du support de D. Choisissons pour Q un point de C rationnel sur k, et désignons par D l'unique diviseur de S appartenant à Λ qui est associé à Q comme on vient de l'expliquer ; pour tout $\sigma \in G$, on a ${}^{\sigma}\mathrm{Q} = \mathrm{Q}$, donc on a ${}^{\sigma}\mathrm{D} = \mathrm{D}$, c'est à dire que le diviseur D est rationnel sur k; on en déduit (lemme 1.3. *ii*)) que la conique S admet des points rationnels ; cela achève la démonstration.

COROLLAIRE 2.3. *Soit S une conique non singulière définie sur le corps k et soit K un corps contenant k (non nécessairement contenu dans $\overline{k}$). Soit Λ un pinceau linéaire de degré 3 sur S qui est $G-$invariant et sans point base. La courbe de Poncelet C associée à Λ est une conique non singulière, définie sur k, et qui possède des points rationnels sur K si et seulement si S en possède.*

Démonstration : On introduit une cloture algébrique $\overline{K}$ de K; par extension des scalaires, les données S et Λ définissent une conique du plan projectif sur $\overline{K}$ qui est non singulière et définie sur K, et un pinceau $Gal(\overline{K}/K)-$invariant sur cette conique. La courbe de Poncelet associée à cette conique et à ce pinceau est la courbe obtenue à partir de C par extension des scalaires à K. Notre résultat est donc le résultat de la proposition précédente avec k remplacé par K.

Nous pouvons maintenant prouver le résultat annoncé dans l'introduction :

THÉORÈME 2.4. *Soit S une conique non singulière définie sur k, et soit Λ un pinceau linéaire de degré 3 sur S qui est $G-$invariant et sans point base ; la courbe de Poncelet C associée à Λ est isomorphe à S sur le corps k.*

Démonstration : En vertu du corollaire 2.3. ce théorème résulte du lemme suivant :

LEMME 2.5. *Deux coniques non singulières définies sur le corps k sont isomorphes sur k si et seulement si les extensions de k dans lesquels elles ont des points sont les mêmes.*

Démonstration : Désignons par C_1 et C_2 ces deux coniques ; par hypothèse, où bien elles possèdent toutes les deux des points sur le corps k, où bien aucune d'elles ne possèdent de points sur ce corps. Dans le premier cas les deux coniques sont triviales sur k, i.e. sont isomorphes, sur k, à la droite projective, donc elles sont isomorphes sur k. Dans le deuxième cas nous considérons le corps $k(C_1)$ des fonctions rationnelles sur la conique C_1 qui sont définies sur k; c'est une extension de k dans laquelle C_1 a des points ; par hypothèse cela implique que C_2 a des points dans cette extension. Notons $[C_1]$ (resp. $[C_2]$) les éléments du groupe de Brauer $Br(k)$ de k associés à la conique C_1 (resp. C_2) par le dictionnaire classique. Aucun des deux éléments $[C_1]$ et $[C_2]$ ne sont nuls puisque ni C_1, ni C_2 n'ont de points rationnels sur k, et ces deux éléments sont dans le noyau de l'inflation de $Br(k)$ vers $Br(k(C_1))$ puisque C_1 et C_2 ont toutes les deux des points dans $k(C_1)$. Mais le noyau de l'inflation de $Br(k)$ vers $Br(k(C_1))$ est, comme nous le rappellons ci dessous (Lemme 2.6.), isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$; on en déduit que $[C_1]$ et $[C_2]$ sont tous les deux égaux à l'élément non nul de ce noyau, donc que $[C_1] = [C_2]$; cela signifie que les coniques C_1 et C_2 sont isomorphes sur k et prouve le "si" du lemme ; le "seulement si" est trivial.

LEMME 2.6. *Soit C une conique plane, projective, non singulière, définie sur k, et sans point rationel sur k; le noyau de l'inflation du groupe de Brauer $Br(k)$ du corps k vers le groupe de Brauer $Br(k(C)$ du corps $k(C)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.*

Démonstration : On note $Div(C)$ le groupe des diviseurs sur C, $P(C)$ le sous groupe de $Div(C)$ formé des diviseurs principaux (i.e. des diviseurs des éléments non nuls de $\overline{k}(C)$), et $Pic(C)$ le groupe quotient $Div(C)/P(C)$. Comme nous l'avons rappelé au début du premier paragraphe, le groupe de Galois $G = Gal(\overline{k}/k)$ agit sur les points et sur les fonctions de C; ces actions induisent des actions naturelles de G sur les trois groupes $Div(C), P(C)$, et $Pic(C)$. L'application de $\overline{k}(C)^{\times}$ vers $P(C)$ qui envoie une fonction non nulle sur son diviseur est, par définition de $P(C)$, surjective; comme C est une courbe projective, le noyau de cette surjection est $\overline{k}^{\times}$. On a donc une suite exacte de G−modules $0 \to \overline{k}^{\times} \to \overline{k}(C)^{\times} \to P(C) \to 0$; de la suite exacte longue de cohomologie associée, nous extrayons $H^1(G, \overline{k}(C)^{\times}) \to H^1(G, P(C)) \to Br(k) \to H^2(G, \overline{k}(C)^{\times})$. Rappelons que G s'identifie au groupe de Galois de l'extension $\overline{k}(C)/k(C)$; il en résulte d'une part que $H^1(G, \overline{k}(C)^{\times}) = 0$ (Théorème 90 de Hilbert), et d'autre part que $H^2(G, \overline{k}(C)^{\times})$ s'injecte par inflation dans le groupe de Brauer $Br(k(C))$ du corps $k(C)$. Le composé de cette inflation et de la flèche de $Br(k)$ vers $H^2(G, \overline{k}(C)^{\times})$ de la suite exacte longue de cohomologie est l'inflation de $Br(k)$ vers $Br(\overline{k}(C))$, donc le noyau de cette inflation est isomorphe à $H^1(G, P(C))$. Nous devons donc montrer que $H^1(G, P(C))$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Pour cela nous remarquons que, par définition de $Pic(C)$, on a une suite exacte de G−modules $0 \to P(C) \to Div(C) \to Pic(C) \to 0$; de la suite exacte longue de cohomologie associée on extrait la suite exacte $Div(C)^G \to Pic(C)^G \to H^1(G, P(C)) \to H^1(G, Div(C))$. Rappelons que $H^1(G, Div(C)) = 0$: en effet, pour chaque orbite $c = \{\mathrm{P}_1, .., \mathrm{P}_d\}$ de l'action de G sur les points de C, notons $Div_c(C)$ le sous groupe de $Div(C)$ formé des diviseurs dont le support est inclus dans l'ensemble $\{\mathrm{P}_1, .. \mathrm{P}_d\}$; il est clair que $Div_c(C)$ est un sous G−module de $Div(C)$ et que $Div(C)$ est la somme directe $\bigoplus_c Div_c(C)$ où c décrit toutes les orbites de l'action de G sur C; on a donc $H^1(G, Div(C)) = \bigoplus_c H^1(G, Div_c(C))$, et on conclut en remarquant que, pour tout orbite c, le G−module $Div_c(C)$ est induit au sens de [*Se*.1] (i.e. coinduit au sens de [*Se*.2]), donc que $H^1(G, Div_c(C)) = 0$). La courbe C étant de genre 0, un élément de $Div(C)$ est dans $P(C)$ si et seulement si il est de degré 0 ; on en déduit d'une part que l'application "degré" de $Div(C)$ sur $\mathbf{Z}$ induit un isomorphisme de $Pic(C)$ sur $\mathbf{Z}$, et d'autre part que l'action de G sur $Pic(C)$ est triviale (en effet, si x est un élément de $Pic(C)$ et si D est un diviseur dont l'image dans $Pic(C)$ est x, alors, pour tout σ dans G, la classe de ${}^{\sigma}\mathrm{D}$ est par définition l'image de x par σ; mais le diviseur ${}^{\sigma}\mathrm{D} - \mathrm{D}$ est de degré 0, donc les images de ${}^{\sigma}\mathrm{D}$ et de D dans $Pic(C)$ sont égales). Par hypothèse la conique C ne possède pas de points rationnels, donc (lemme 1.4 *ii*)) elle ne possède pas de diviseurs de degré 1 rationnel sur k, c'est à dire qu'il n'y a pas de diviseur de degré 1 dans le sous groupe $Div(C)^G$ de $Div(C)$. Par contre, $Div(C)^G$ contient les diviseurs intersections de C et des droites rationnels, et ceux ci sont de degré

2. On déduit de ces deux derniers points que le quotient de $Pic(C)^G$ par l'image de $Div(C)^G$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, ce qu'on voulait.

REFERENCES

[Se.1] SERRE J.P., *Cohomologie Galoisienne*, L.N. n^0 5, Springer-Verlag, (1965).

[Se.2] SERRE J.P., *Corps locaux*, Pub. Math. Université de Nancago, Hermann, deuxième édition (1968).

[Tr] TRAUTMANN G., *Poncelet curves and associated Theta characteristic*, Expositiones Mathematematicae, Band 6, Heft 1, (1988), pp.29-64.

[We] WEIL A., *Foundations of algebraic geometry*, A.M.S. Colloquium Publications, vol. XXIX, (1946).

Ph. SATGÉ
Université de Caen
Département de Mathématiques
Esplanade de la Paix
14032 CAEN CEDEX
FRANCE