JEAN-FRANÇOIS JAULENT

Noyau universel et valeurs absolues

Astérisque, tome 198-199-200 (1991), p. 187-208
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1991__198-199-200__187_0>

à la mémoire de Georges POITOU

NOYAU UNIVERSEL ET VALEURS ABSOLUES

par

Jean-François JAULENT

L'objet de l'exposé est de présenter quelques unes des relations entre la $\ell-$partie du noyau universel de la K-théorie pour un corps de nombres K contenant les racines ℓ-ièmes de l'unité, et le noyau des valeurs absolues principales définies sur le ℓ- adifié du groupe des idèles de K, et ce à la lumière des conjectures de Leopold et de Gross généralisées.

En fait, cette note trouve sa motivation dans de rècents travaux de M. Kolster (cf. [10]) et de K. Kramer (cf. [11]), qui recoupent des résultats antérieurs de l'auteur (cf. [9]) et de T. Nguyen Quang Do (cf. [13]) obtenus par d'autres voies, et mettent plus particulièrement en valeur le rôle non explicité jusqu'ici d'un noyau remarquable que l'on peut construire très facilement en s'aidant des valeurs absolues ℓ-adiques principales (c'est à dire des valeurs absolues à valeurs ℓ-adiques) attachées aux places non complexes d'un corps de nombres quelconque.

Notre point de départ sera donc la théorie ℓ-adique du corps de classes, élaborée dans [9], et que nous allons brièvement rappeler :

1 - Le ℓ-adifié du groupe des idèles d'un corps de nombres.

Fixons une fois pour toutes un nombre premier ℓ, et considérons un corps de nombres K arbitraire (mais de degré fini sur $\mathbb{Q}$).

Le groupe des idèles classique de K est défini depuis Chevalley comme le produit restreint

$$J_K = \prod_{\mathfrak{p}\in Pl(K)}^{res} K_{\mathfrak{p}}^{\times}$$

des groupes multiplicatifs des complétés respectifs de K en ses diverses places. Le facteur $K_{\mathfrak{p}}^{\times}$ désigne donc soit le groupe divisible $\mathbb{C}^{\times}$ si $\mathfrak{p}$ est complexe ; soit le groupe $\mathbb{R}^{\times} = \{\pm 1\} \times \mathbb{R}_{+}^{\times}$, si $\mathfrak{p}$ est réelle ; soit, si $\mathfrak{p}$ est ultramétrique au-dessus d'un premier p, le produit

$$K_{\mathfrak{p}}^{\times} = \mu_{\mathfrak{p}}^{\circ}.U_{\mathfrak{p}}^{1}.\pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}}$$

du groupe fini $\mu_{\mathfrak{p}}^{\circ}$ des racines de l'unité dans $K_{\mathfrak{p}}$ d'ordre étranger à $\mathfrak{p}$, du sous groupe $U_{\mathfrak{p}}^{1}$ des unités principales de $K_{\mathfrak{p}}$, et du $\mathbb{Z}$-module libre engendré par une uniformisante arbitraire $\pi_{\mathfrak{p}}$.

Dans aucun des cas $K_{\mathfrak{p}}^{\times}$ n'est donc un $\mathbb{Z}_{\ell}$-module. Aussi, pour construire un $\mathbb{Z}_{\ell}$-module à partir de $K_{\mathfrak{p}}^{\times}$, la solution la plus économique consiste-t-elle à former la limite projective

$$\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times} = \varprojlim_{n} K_{\mathfrak{p}}^{\times} K_{\mathfrak{p}}^{\times \ell^{n}}$$

des quotients ℓ-primaires de $K_{\mathfrak{p}}^{\times}$. Cela étant, le passage au quotient ayant pour effet de tuer la partie ℓ-divisible de $K_{\mathfrak{p}}^{\times}$, le groupe obtenu est évidemment trivial lorsque $\mathfrak{p}$ est complexe, et égal à $(-1)^{\mathbb{Z}_{\ell}/2\mathbb{Z}_{\ell}}$ lorsque $\mathfrak{p}$ est réelle, donc encore trivial sauf pour $\ell = 2$ auquel cas il est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Enfin, si $\mathfrak{p}$ est ultramétrique, deux cas se présentent :

- ou bien $\mathfrak{p}$ est modérée (i.e. étrangère à ℓ) et

$$\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times} = \mu_{\mathfrak{p}}.\pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}_{\ell}}$$

s'identifie au produit du ℓ-sous-groupe de Sylow $\mu_{\mathfrak{p}}$ de $\mu_{\mathfrak{p}}^{\circ}$ et du $\mathbb{Z}_{\ell}$-module libre engendré par l'image de l'uniformisante $\pi_{\mathfrak{p}}$ (image que nous continuerons par abus à noter $\pi_{\mathfrak{p}}$)

- ou bien $\mathfrak{p}$ est sauvage (i.e. au-dessus de ℓ) et

$$\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times} = U_{\mathfrak{p}}^{1}\pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}_{\ell}}$$

est le produit du sous-groupe $U_{\mathfrak{p}}^{1}$ des unités principales de $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}$ et du $\mathbb{Z}_{\ell}$-module libre engendré par l'image de $\pi_{\mathfrak{p}}$ (que nous écrirons encore $\pi_{\mathfrak{p}}$).

Dans tous les cas, $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}$ est ainsi un $\mathbb{Z}_{\ell}$-module noethérien (donc compact pour sa topologie naturelle de $\mathbb{Z}_{\ell}$-module) et il est commode d'écrire

$$\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times} = \mathcal{U}_{\mathfrak{p}}.\pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}_{\ell}}$$

en convenant de prendre $\pi_{\mathfrak{p}} = -1$, si $\mathfrak{p}$ est réelle, lorsque ℓ vaut 2.

Il est alors naturel de définir le ℓ-adifié $\mathcal{J}_K$ du groupe des idèles J_K comme le produit restreint

$$\mathcal{J}_K = \prod_{\mathfrak{p}\in Pl(K)}^{\mathrm{res}} \mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}$$

c'est-à-dire comme la réunion pour tous les ensembles finis S de places de K

$$\mathcal{J}_K = \bigcup_{S\subset Pl(K)} \mathcal{U}_K^S, \quad \text{avec} \quad \mathcal{U}_K^S = \prod_{\mathfrak{p}\in S} \mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times} \cdot \prod_{\mathfrak{p}\notin S} \mathcal{U}_{\mathfrak{p}};$$

et d'équiper $\mathcal{J}_K$ de la topologie limite inductive des topologies des $\mathcal{U}_K^S$, ces derniers étant regardés comme compacts en tant que produits de modules compacts (de sorte que la topologie de $\mathcal{J}_K$ n'est pas la restriction à $\mathcal{J}_K$ du produit des topologies des $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}$, mais fait cependant de $\mathcal{J}_K$ une réunion dénombrable de modules compacts).

Si maintenant on prend comme ℓ-adifié du groupe des idèles principaux le tensorisé ℓ-adique

$$\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^{\times}$$

du groupe multiplicatif de K (qui joue donc le rôle du rayon dans la théorie), et qu'on envoie $\mathcal{R}_K$ dans $\mathcal{J}_K$ en s'aidant du plongement diagonal de $K^{\times}$ dans J_K, le résultat fondamental du corps de classes ℓ-adique est le suivant (cf. [9], th. I.1.13) :

THÉORÈME 1. - *Isomorphisme ℓ-adique du corps de classes - Le groupe $\mathcal{R}_K$ des idèles principaux s'identifie canoniquement à un sous-groupe fermé du groupe des idèles $\mathcal{J}_K$, et le quotient topologique*

$$\mathcal{C}_K = \mathcal{J}_K / \mathcal{R}_K$$

est un groupe compact, isomorphe comme tel au groupe de Galois $G_K = Gal(\overline{K}^{ab}/K)$ de la pro-ℓ-extension abélienne maximale de K.

Sans doute n'est-il pas inutile de rappeler, puisqu'elle intervient plus loin, comment s'exprime dans ce contexte la conjecture de Leopoldt. Désignons par μ_K le ℓ-groupe des racines de l'unité dans K (i.e. le ℓ-sous-groupe de Sylow de $K^{\times}$), puis, pour toute place non complexe $\mathfrak{p}$ de K, écrivons $\mu_{\mathfrak{p}}$ son homologue dans $K_{\mathfrak{p}}$. Cela posé, nous avons (cf. [9], Ch. I) :

Conjecture de Leopold généralisée.- *Les idèles principaux (i.e. les éléments de $\mathcal{R}_K$), qui sont localement partout des racines de l'unité (dans $\mathcal{J}_K$) sont les racines globales de l'unité ; ce qui s'écrit :*

$$\mathcal{R}_K \cap \prod_{\mathfrak{p} \in Pl(K)} \mu_{\mathfrak{p}} = \mu_K.$$

Bien entendu, les idèles concernés étant trivialement des unités (i.e. des éléments du tensorisé ℓ-adique $\mathcal{E}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_K$ du sous-groupe des unités de $K^\times$), la conjecture précédente revient à affirmer que le rang ℓ-adique des unités de K est égal au nombre de Dirichlet, ce qui, lorsque K est totalement réel, est exactement le postulat initial de H.W. Leopoldt.

2 - Définition des valeurs absolues ℓ-adiques principales.

On sait que les valeurs absolues réelles (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}^\times$) attachées aux diverses places du corps K, définies sur le groupe des idèles J_K, sont telles que leurs restrictions à $K^\times$ satisfont la formule du produit :

$$\prod_{\mathfrak{p} \in Pl(K)} |x|_{\mathfrak{p}} = 1, \quad \forall x \in K^\times.$$

Pour obtenir un analogue dans $\mathcal{J}_K$, il est nécessaire de définir des valeurs absolues à valeurs non plus dans $\mathbb{R}_+^\times$, mais dans le groupe multiplicatif $\mathbb{Z}_\ell^\times$, en fait dans son sous-groupe principal $U = 1 + \ell\mathbb{Z}_\ell$. Pour cela, on peut procéder comme suit : soit

$$< \ > | \mathbb{Z}_\ell^\times \longrightarrow U = 1 + \ell\mathbb{Z}_\ell$$

la surjection canonique de $\mathbb{Z}_\ell^\times$ dans U, qui a pour noyau le sous-groupe des racines $(\ell - 1)$-ièmes de l'unité dans $\mathbb{Z}_\ell$.

Définition 2. - *Pour chaque place $\mathfrak{p}$ de K, on définit sur $\mathcal{J}_K$ une valeur absolue $| \ |_{\mathfrak{p}}$ à valeurs dans $U = 1 + \ell\mathbb{Z}_\ell$, qui se factorise via le complété profini $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^\times$, en posant pour tout $\mathfrak{x} = (x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ de $\mathcal{J}_K$:*

(i) $|\mathfrak{x}|_{\mathfrak{p}} = 1$, *si $\mathfrak{p}$ est complexe ;*

(ii) $|\mathfrak{x}|_{\mathfrak{p}} = < sg(x_{\mathfrak{p}}) >$, *si $\mathfrak{p}$ est réelle ;*

(iii) $|\mathfrak{x}|_{\mathfrak{p}} = < N\mathfrak{p}^{-v_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}})} >$, *si $\mathfrak{p}$ est ultramétrique, mais étrangère à ℓ ;*

(iv) $|\mathfrak{x}|_{\mathfrak{p}} = < N_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_\ell}(x_{\mathfrak{p}}) N\mathfrak{p}^{-v_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}})} >$, *enfin, si $\mathfrak{p}$ divise ℓ.*

Nous disons que $|\ |_\mathfrak{p}$ *est la valeur absolue* ℓ*-adique principale attachée à la place* $\mathfrak{p}$.

Remarque : La valeur absolue ainsi définie ne coïncide pas exactement avec celle donnée par J. Tate (cf. [15], Ch VI, déf. 1.1). Plus précisément elle est égale au crochet $<\ >$ de la valeur absolue de Tate.

Dans les trois premiers cas ((i) à (iii)) la définition donnée est la transposition de la définition réelle, le choix de la norme absolue $N\mathfrak{p}$ correspondant à une normalisation naturelle. La condition (iv) est alors dictée par la formule du produit. En effet, avec les conventions précédentes, on a immédiatement (cf. [9], prop. I.1.8):

$$\prod_{\mathfrak{p}\in Pl(K)} |x|_\mathfrak{p} = \prod_{\mathfrak{p}\in Pl(\mathbb{Q})} |N_{K/\mathbb{Q}}(x)|_\mathfrak{p} = 1,\ \forall x \in \mathcal{R}_K,$$

comme attendu.

D'un autre côté, pour chaque place finie $\mathfrak{p}$, l'image $|\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times|$ est évidemment un sous-module d'indice fini de U. En particulier, sauf peut-être pour $\ell = 2$, c'est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de rang 1, et, dans ce cas, le noyau $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^*$ de $|\ |_\mathfrak{p}$ alors un sous-module pur de $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times$. De fait :

PROPOSITION 3. - *Le noyau* $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^*$ *dans* $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times$ *de la valeur absolue* ℓ*-adique principale* $|\ |_\mathfrak{p}$ *est donné par les deux formules suivantes :*

(i) $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^* = \mathcal{U}_\mathfrak{p}$, *pour* $\mathfrak{p} \nmid \ell$. *Autrement dit,* $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^*$ *est trivial si* $\mathfrak{p}$ *est réelle ; et égal au sous-groupe de torsion* $\mu_\mathfrak{p}$ *de* $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times$, *si* $\mathfrak{p}$ *est ultramétrique mais modérée.*

(ii) $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^* = Ker(Log_{Iw} \circ N_{K_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_\ell})$, *où* Log_{Iw} *est le logarithme d'Iwasawa dans* $\mathbb{Q}_\ell^\times$, *pour* $\mathfrak{p} \mid \ell$, *sous réserve d'imparité de* ℓ. *Dans ce dernier cas,* $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times$ *est le produit direct du sous-module de torsion* $\mu_\mathfrak{p}$ *de* $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times$ *et d'un* $\mathbb{Z}_\ell$*-module libre de dimension* $[K_\mathfrak{p} : \mathbb{Q}_\ell]$ *; et c'est encore un sous-module pur de* $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times$.

Démonstration. Le cas (i) étant immédiat, examinons plus attentivement le cas (ii). Si $\mathfrak{p}$ divise ℓ, la condition $|x_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p} = 1$ pour un $x_\mathfrak{p}$ de $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times$ s'écrit :

$$< N_{K_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_\ell}(x_\mathfrak{p}) N\mathfrak{p}^{-v_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p})} >= 1.$$

Elle affirme donc que la norme de $x_\mathfrak{p}$ s'écrit comme produit d'une puissance de ℓ (qui est nécessairement $N\mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p})}$) et d'une racine de l'unité. Mais cette propriété caractérise précisément le noyau du logarithme d'Iwasawa dans $\mathbb{Q}_\ell$, ce qui conduit à l'égalité annoncée.

Nota : Lorsque ℓ vaut 2, la condition $|x_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p} = 1$ pour $\mathfrak{p} \mid \ell$ s'écrit :

$$N_{K_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_2}(x_\mathfrak{p}) \in 2^{\mathbb{Z}_2}.$$

Elle définit donc un sous-groupe d'indice 1 ou 2 du noyau de l'application composée de la norme locale et du logarithme d'Iwasawa dans $\mathbb{Q}_2^\times$. Cet indice s'interprète d'ailleurs très simplement par la théorie locale du corps de classes.

Considérons, en effet, l'extension abélienne, disons $L_\mathfrak{p}$, de $K_\mathfrak{p}$ qui est associée à $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^*$ par le corps de classes local : le groupe de Galois $G_\mathfrak{p} = Gal(\overline{K}_\mathfrak{p}^{ab}/K_\mathfrak{p})$ de la pro-ℓ-extension abélienne maximale de $K_\mathfrak{p}$ s'identifiant au groupe profini $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times = \varprojlim_n K_\mathfrak{p}^\times/K_\mathfrak{p}^{\times \ell^n}$, le corps $L_\mathfrak{p}$ est tout simplement la sous-extension de $\overline{K}_\mathfrak{p}^{ab}$ qui est fixée par $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^*$,

- si $\mathfrak{p}$ est réelle (i.e. si $K_\mathfrak{p} = \mathbb{R}$), c'est $\mathbb{R}$ si ℓ est impair, et $\mathbb{C}$ si ℓ vaut 2, et dans les deux cas c'est la ℓ-extension cyclotomique de $\mathbb{R}$;
- si $\mathfrak{p}$ est modérée, $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^*$ s'identifie au sous-groupe d'inertie de $G_\mathfrak{p}$, et $L_\mathfrak{p}$ est donc la pro-ℓ-extension abélienne maximale non ramifiée de $K_\mathfrak{p}$; c'est-à-dire sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique.
- si $\mathfrak{p}$ est sauvage et ℓ impair, $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^*$ est l'image réciproque par la norme locale $N_{K_\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_\ell$ du noyau dans $\mathbb{Q}_\ell^\times$ du logarithme d'Iwasawa, noyau qui est précisément constitué des normes cyclotomiques. De sorte que dans ce cas encore $L_\mathfrak{p}$ est exactement la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique de $K_\mathfrak{p}$;
- enfin, si $\mathfrak{p}$ est sauvage et ℓ vaut 2, la même description normique montre que $L_\mathfrak{p}$ est la 2-tour cyclotomique de $K_\mathfrak{p}$, c'est-à-dire que c'est une extension au plus quadratique de la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique de $K_\mathfrak{p}$.

3.- Le groupe des classes de valeurs absolues.

Nous avons vu dans la section précédente que les idèles principaux (i.e. les éléments de $\mathcal{R}_K$) satisfont la formule du produit pour les valeurs absolues ℓ-adiques :

$$\|x\| =_{\text{déf}} \prod_{\mathfrak{p} \in Pl(K)} |x|_\mathfrak{p} = 1$$

Désignons par $\tilde{\mathcal{J}}_K$ le sous-groupe fermé de $\mathcal{J}_K$ constitué de tous les idèles qui vérifient la formule du produit :

$$\tilde{\mathcal{J}}_K = \widetilde{\prod}_{\mathfrak{p}\in Pl(K)}\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times} = \{(x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}\in Pl(K)} \mid \ \|(x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}\| = \prod_{\mathfrak{p}\in Pl(K)} |x_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}} = 1\}.$$

C'est un sous-module fermé de $\mathcal{J}_K$ qui contient $\mathcal{R}_K$, et il lui correspond donc, par la théorie ℓ-adique du corps de classes une extension abélienne, disons K_∞, de K. Pour la déterminer, il suffit de remarquer que $\tilde{\mathcal{J}}_K$ est l'image réciproque par la norme arithmétique $N_{K/\mathbb{Q}}$ de son analogue $\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathcal{J}_{\mathbb{Q}}$. Maintenant, un calcul immédiat montre que $\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbb{Q}}$ est engendré par $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ et le produit $\prod_{p\neq\ell}\mathcal{U}_p$. La pro-$\ell$-extension abélienne de $\mathbb{Q}$ associée à $\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbb{Q}}$ est donc celle ℓ-ramifiée maximale, c'est-à-dire, tout simplement la ℓ-tour cyclotomique $\mathbb{Q}_\infty$ de $\mathbb{Q}$; et celle associée à $\tilde{\mathcal{J}}_K$ est ainsi la ℓ-tour cyclotomique $K_\infty = \mathbb{Q}_\infty K$ de K.

DÉFINITION 4. - *Soit, comme plus haut* $\tilde{\mathcal{J}}_K = \widetilde{\prod}_{\mathfrak{p}\in Pl(K)}\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}$ *le noyau dans* J_K *de la formule du produit, et* $J_K^* = \prod_{\mathfrak{p}\in Pl(K)}\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{*}$ *le noyau des valeurs absolues. Nous disons que le quotient*

$$\widetilde{C\ell}_K = \tilde{J}_K/J_K^*\mathcal{R}_K$$

est le ℓ-groupe des classes logarithmiques du corps K.

L'appellation de classes logarithmiques se comprend comme suit : aux places finies modérées, l'application composée de la valeur absolue ℓ-adique principale $|\ |_{\mathfrak{p}}$ sur $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}$ et de l'opposé du logarithme ℓ-adique Log_ℓ (défini sur le groupe multiplicatif $1+\ell\mathbb{Z}_\ell$ par son développement en série $-\mathrm{Log}_\ell(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^k x^k$) induit un isomorphisme du quotient $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}/\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{*}$ sur le sous-module de $\mathbb{Z}_\ell$ engendrée par le logarithme ℓ-adique de la norme absolue de l'idéal $\mathfrak{p}$:

$$\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}/\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{*} \simeq \mathbb{Z}_\ell\ \mathrm{Log}_\ell N\mathfrak{p}.$$

Comme un résultat semblable (bien que plus compliqué) vaut pour les places sauvages, le quotient $\tilde{\mathcal{J}}_K/\mathcal{J}_K^*$ représente en quelque sorte le ℓ-groupe des diviseurs logarithmiques du corps K ; et son quotient par le sous groupe principal $\mathcal{R}_K\mathcal{J}_K^*/\mathcal{J}_K^*$ est bien le ℓ-groupe des classes logarithmiques de K.

Cela posé, nous avons :

CONJECTURE DE GROSS GÉNÉRALISÉE. - *Le groupe* $\widetilde{C\ell}_K$ *est fini.*

Pour retrouver la conjecture initiale de Gross dans cette formulation, considérons la suite exacte canonique (où le tilde signifie que l'on se restreint aux familles qui vérifient la formule du produit) :

$$\mathcal{E}'_K \longrightarrow \widetilde{\prod}_{\mathfrak{p}|\ell} |\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}|_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \widetilde{C\ell}_K \longrightarrow Cl'_K$$

$$\mathcal{E}'_K \longrightarrow \widetilde{\prod}_{\mathfrak{p}|\ell} \mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}/\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{*} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}_K/\mathcal{J}_K^{*}\mathcal{R}_K \longrightarrow \mathcal{J}_K/\prod_{\mathfrak{p}|\ell\infty} \mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}.\prod_{\mathfrak{p}\nmid\ell} \mathcal{U}_{\mathfrak{p}}.\mathcal{R}_K$$

Dans celle-ci le terme de gauche $\mathcal{E}'_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E'_K$ est le tensorisé ℓ-adique du groupe des ℓ-unités de K ; le terme de droite Cl'_K n'est rien d'autre que le ℓ-groupe des ℓ-classes d'idéaux du corps K (i.e. le quotient du ℓ-groupe des classes d'idéaux au sens ordinaire par le sous-groupe engendré par les idéaux premiers au-desus de ℓ) ; le terme en $\tilde{\prod}$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module noethérien de dimension $l_K - 1$, si l_K est le nombre de places de K au-dessus de ℓ (qui est libre si ℓ est impair) ; et le terme de gauche $\mathcal{E}'_K$ est simplement le tensorisé ℓ-adique du groupe des ℓ-unités de K. Cela étant, affirmer la finitude de $\widetilde{C\ell}_K$ équivaut donc à affirmer que le sous-module de $\tilde{\prod}_{\mathfrak{p}|\ell} |\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}|_{\mathfrak{p}}$ qui est engendré par les valeurs absolues ℓ-adiques des ℓ-unités de K est encore de dimension $l_K - 1$; ce qui, appliqué aux seules composantes imaginaires pour un corps à conjugaison complexe (i.e. extension quadratique totalement imaginaire d'un sous-corps totalement réel), est bien la première conjecture de B.H. Gross.

Pour relier maintenant la conjecture de Gross à ses interprétations cyclotomiques, il est commode de réinterpréter le groupe $\widetilde{C\ell}_K$ à l'aide de la théorie ℓ-adique du corps de classes : Nous avons vu plus haut que le numérateur $\tilde{\mathcal{J}}_K$ est associé à la ℓ-extension cyclotomique K_∞ de K. D'un autre côté, nous savons par le corps de classes local que le facteur $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{*}$ de $\mathcal{J}_K^{*}$ est le sous-groupe de normes de $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}$ qui correspond à la ℓ-extension cyclotomique locale $L_{\mathfrak{p}}$ de $K_{\mathfrak{p}}$. L'extension globale associée au produit $\mathcal{J}_K^{*}\mathcal{R}_K$ est donc la plus grande ℓ-extension abélienne de K, qui est localement cyclotomique en chacune des places de K, autrement dit la pro-ℓ-extension maximale L_∞ de K_∞ qui est abélienne sur K et complètement décomposée partout sur K_∞. Naturellement, aux places modérées, la montée dans la ℓ-tour cyclotomique K_∞/K ayant épuisé les possibilités d'inertie, la condition de complète décomposition est simplement une condition de non ramification. Le corps L_∞ est donc aussi la pro-ℓ-extension abélienne maximale de K qui est non ramifiée et ℓ-décomposée sur K_∞ : c'est ce qu'il est convenu d'appeler le ℓ-corps des ℓ-genres de l'extension profinie K_∞/K. Par suite, lorsque K_∞ est procyclique sur K (ce qui est toujours le cas lorsque ℓ est impair), disons $K_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, avec K_n cyclique de degré ℓ^n sur K, le groupe $\widetilde{C\ell}_K$ s'identifie au quotient des genres

$$\widetilde{C\ell}_K \simeq \mathcal{C}'_{K_\infty}/\mathcal{C}'^{(\gamma-1)}_{K_\infty},$$

où $\mathcal{C}'_{K_\infty} = \varprojlim_n Cl'_{K_n}$ est le groupe de Galois de la ℓ-extension abélienne non ramifiée ℓ- décomposée maximale de K_∞, et γ un générateur topologique du groupe profini $\Gamma = Gal(K_\infty/K)$. On retrouve ainsi l'interprétation classique de la conjecture de Gross, qui consiste à postuler que le polynôme caractéristique $P \in \mathbb{Z}_\ell[\gamma-1]$ du $\mathbb{Z}_\ell[[\gamma-1]]$-module $\mathcal{C}'_{K_\infty}$ n'est pas un multiple de $(\gamma-1)$ (cf. [9]; p. 317).

4.- Le noyau des valeurs absolues.

Supposons, pour simplifier l'exposé, que la ℓ-tour cyclotomique K_∞/K soit procyclique (ce qui est automatique lorsque ℓ est impair, mais peut être en défaut si ℓ vaut 2). Dans ce cas, lorsque ℓ vaut 2, le corps K est nécessairement totalement imaginaire, de sorte que l'hypothèse faite implique en particulier que les valeurs absolues ℓ-adiques attachées aux places réelles n'interviennent plus (parce qu'elles sont triviales pour ℓ impair, parce qu'il n'y en a plus pour $\ell = 2$). Plus généralement, l'image $|\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times|_\mathfrak{p} \simeq \mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times/\mathcal{K}_\mathfrak{p}^*$ du complété profini $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times$ par la valeur absolue correspondante $|\ |_\mathfrak{p}$ est alors un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre quelle que soit la place $\mathfrak{p}$ (de rang 0 si $\mathfrak{p}$ est réelle, 1 sinon), et le noyau $\mathcal{N}_K = \mathcal{R}_K \cap \mathcal{J}_K^*$ des valeurs absolues dans $\mathcal{R}_K$ contenu dans le tensorisé $\mathcal{E}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} E'_K$ du groupe des ℓ-unités de K.

Plus précisément, dans la suite exacte déjà rencontrée :

$$1 \longrightarrow \mathcal{N}_K \longrightarrow \mathcal{E}'_K \longrightarrow \tilde{\prod}_{\mathfrak{p}|\ell}|\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times|_\mathfrak{p} \longrightarrow \widetilde{C\ell}_K \longrightarrow Cl'_K,$$

le terme médian $\tilde{\prod}_{\mathfrak{p}|\ell}|\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times|_\mathfrak{p}$ est alors un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de rang $l_K - 1$ (où l_K désigne le nombre de places sauvages de K), et $\mathcal{E}'_K$ le produit du sous-module de torsion μ_K de $\mathcal{R}_K$ (le ℓ-groupe des racines de l'unité dans K) par un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de dimension $r_K + c_K + l_K - 1$ (où r_K et c_K désignent respectivement les nombres de places réelles et complexes de K).

Nous pouvons donc énoncer :

PROPOSITION 5. - *Le noyau $\mathcal{N}_K = \mathcal{R}_K \cap \mathcal{J}_K^*$ dans $\mathcal{R}_K$ des valeurs absolues ℓ-adiques principales est un $\mathbb{Z}_\ell$-module noethérien de dimension*

$$r_K + c_K + \delta_K$$

où r_K est le nombre de places réelles de K, c_K le nombre de places complexes, et $\delta_K = dim_{\mathbb{Z}_\ell} \widetilde{C\ell}_K$ mesure le défaut de la conjecture de Gross dans K.

C'est un sous-module pur de $\mathcal{R}_K$ (contenu dans le groupe des ℓ-unités $\mathcal{E}'_K$) dès que la ℓ-tour cyclotomique K_∞/K est procyclique (ce qui est toujours le cas lorsque ℓ est impair).

SCOLIE 6. - *Le groupe dual $\mathfrak{N}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{N}_K$ est, lui, un $\mathbb{Z}_\ell$-module divisible de codimension $r_K + c_K + \delta_K$.*

On notera, en effet, que le produit tensoriel par $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ a pour conséquence de tuer le sous-groupe de torsion μ_K de $\mathcal{N}_K$.

Ce point acquis, le théorème principal de [10] (th. 1.12) peut s'énoncer comme suit : Désignons par $\mathfrak{H}_K$ le radical hilbertien attaché au corps K, défini par

$$\mathfrak{H}_K = \{\ell^{-k} \otimes x \in (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{R}_K | \ \ x \ \in \mathcal{J}_K^{\ell^k} \mathcal{J}_K^*\}.$$

Nous avons :

THÉORÈME 7. - *Lorsque l'extension cyclotomique K_∞/K est procyclique, il existe une suite exacte naturelle scindée*

$$1 \longrightarrow \mathfrak{N}_K \longrightarrow \mathfrak{H}_K \longrightarrow \widetilde{C\ell}_K^{\text{tor}} \longrightarrow 1,$$

où $\widetilde{C\ell}_K^{\text{tor}}$ est le sous-module de torsion du groupe des classes de valeurs absolues $\widetilde{C\ell}_K$ (autrement dit $\widetilde{C\ell}_K$ lui-même, sous la conjecture de Gross).

En particulier, $\mathfrak{N}_K$ est le sous-module divisible maximal de $\mathfrak{H}_K$.

Démonstration du théorème : Remarquons d'abord que $\mathcal{N}_K$ étant un sous-module pur de $\mathcal{R}_K$ (comme expliqué à la proposition 5), son dual $\mathfrak{N}_K$

est un sous-module de celui $\mathfrak{R}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{R}_K \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times$ de $\mathcal{R}_K$, et il est trivialement contenu dans $\mathfrak{H}$. Tout le problème est donc d'interpréter le quotient $\mathfrak{H}_K/\mathfrak{N}_K$.

Pour cela, considérons un élément $\ell^{-k} \otimes x$ de $\mathfrak{H}_K$. Par définition, nous pouvons écrire $x = \mathfrak{y}^{\ell^k}\mathfrak{z}$, avec $\mathfrak{z} \in \mathcal{J}_K^*$ et $\mathfrak{y} \in \mathcal{J}_K$, en fait $\mathfrak{y} \in \tilde{\mathcal{J}}_K$, (puisque x et $\mathfrak{z}$ sont tous deux contenus dans le noyau de la formule du produit). En associant à l'élément $\ell^{-k} \otimes x$ la classe $c\ell(\mathfrak{y})$ de $\mathfrak{y}$ dans $\widetilde{C\ell}_K = \tilde{J}_K/\mathcal{J}_K^*\mathcal{R}_K$, nous définissons ainsi un morphisme de $\mathfrak{H}_K$ dans $\widetilde{C\ell}_K$ dont l'image est exactement le sous-groupe de torsion de $\widetilde{C\ell}_K$. Quel est son noyau ? Supposons $c\ell(\mathfrak{y}) = 1$, i.e. $\mathfrak{y} = \mathfrak{z}'x'$ avec $\mathfrak{z}' \in \mathcal{J}_K^*$ et $x' \in \mathcal{R}_K$. Nous avons alors $\ell^{-k} \otimes x = \ell^{-k} \otimes (x/x'^{\ell^k})$, et $x/x'^{\ell^k} \in \mathcal{R}_K \cap \mathcal{J}_K^* = \mathcal{N}_K$; ce qui établit l'exactitude de la suite.

Interprétation du noyau hilbertien : Considérons l'image, disons $\mathfrak{H}'_K$, du radical hilbertien $\mathfrak{H}_K$ dans le dualisé $\mathfrak{J}_K = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{J}_K$ du groupe des idèles. Par définition les éléments de $\mathfrak{H}'_K$ sont ceux construits à partir des éléments de $\mathcal{J}_K^*$ c'est-à-dire, comme on l'a vu, à partir des normes cyclotomiques locales. Maintenant, dans l'extension procyclique K_∞/K le fait d'être norme ou non se lit localement, en vertu du principe de Hasse. Les éléments de $\mathfrak{H}_K$ sont donc tout simplement les éléments du radical $\mathfrak{R}_K \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times$ qui sont représentés par les normes cyclotomiques :

$$\mathfrak{H}_K = \{\ell^{-k} \otimes x \in \mathfrak{R}_K |\ \forall n \in \mathbb{N} \ \ x \in K_n^{\times^{\ell^k}} N_n(K^\times)\},$$

si l'on désigne par N_n la norme arithmétique dans la sous-extension K_n/K de degré ℓ^n de l'extension cyclotomique K_∞/K.

L'introduction du groupe $\mathfrak{H}_K$ dans la théorie cyclotomique, sous une forme naturellement très différente, remonte en fait à F. Bertrandias et J.-J. Payan qui l'ont utilisé dans [1] pour étudier une condition suffisante de la conjecture de Leopoldt. Enfin l'appellation radical hilbertien que nous préférons s'explique aisément : du point de vue de la K-théorie des corps de nombres, les normes cyclotomiques sont caractérisées comme noyau des symboles de Hilbert construits sur les racines de l'unité (cf. [9], Ch. I.2).

5 - Noyau universel et radical des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions.

Nous supposerons dans cette section que le corps K contient les racines 2ℓ-ièmes de l'unité (de sorte que la condition restrictive introduite au début de la section 4 sera en particulier remplie). Disons cependant que lorsque cette hypothèse n'est pas vérifiée, il est toujours possible de pallier cette difficulté (au moins pour ℓ impair), en raisonnant sur le sur-corps $K' = K[\zeta_\ell]$, puis en redescendant certains résultats sur K en s'aidant de la décomposition semi-locale de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[Gal(K'/K)]$ donnée par les idempotents primitifs associés aux caractère ℓ-adiques irréductibles du groupe $Gal(K'/K)$.

Commençons par fixer quelques notations : pour chaque naturel n écrivons K_n l'extension $K[\zeta_{\ell^n}]$ engendrée sur K par les racines ℓ^n-ièmes de l'unité (de sorte que nous avons $K = K_0 = ... = K_m$ jusqu'à un certain rang m, puis $[K_{n+1} : K_n] = \ell$ pour $n \geq m$) ; notons Γ le groupe de Galois $Gal(K_\infty/K)$ identifié à $\mathbb{Z}_\ell$ par le choix d'un générateur topologique γ, puis $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\gamma - 1]]$ l'algèbre d'Iwasawa associée, et $\Gamma_n = \Gamma^{\ell^{n-m}}$ (pour $n \geq m$) le sous-groupe $Gal(K_\infty/K_n)$. Introduisons enfin le module de Tate :

$$\mathsf{T}_\ell = \varprojlim_n \mu_{\ell^n}$$

limite projective des sous-groupes finis de μ_{ℓ^∞} (qui est isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell$ comme groupe abstrait), et

$$\overline{\mathsf{T}}_\ell = Hom(\mu_{\ell^\infty},\ \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$$

le module opposé, défini comme dual de Pontrjagin de la limite inductive des μ_{ℓ^n} (qui est encore $\mathbb{Z}_\ell$ comme groupe abstrait, mais avec une action galoisienne différente).

Cela posé, les résultats de [9] montrent que les radicaux respectifs

$$\mathfrak{R}_{K_n} = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{R}_{K_n},$$

associés aux corps K_{K_n}, vérifient la théorie de Galois dans K_∞/K ; c'est à dire que l'on a :

$$\mathfrak{R}_{K_n} \subset \mathfrak{R}_{K_\infty} = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} K_\infty^\times, \quad \text{en fait } \ \mathfrak{R}_{K_n} = \mathfrak{R}_{K_\infty}^{\Gamma_n}$$

(cf. [9], prop. I.2.2) ; et qu'un résultat analogue vaut pour les radicaux hilbertiens :

$$\mathfrak{H}_{K_n} = \mathfrak{H}_{K_\infty}^{\Gamma_n}, \text{ où } \mathfrak{H}_{K_n} = \{\ell^{-k} \otimes x \in \mathfrak{R}_{K_n} |\ \ x \in \mathcal{J}_{K_n}^{\ell^k} \mathcal{J}_{K_n}^*\}$$

(cf. [9], prop. I.2.18).

Nous sommes plus particulièrement intéressés ici par trois sous-groupes remarquables de $\mathfrak{H}_{K_\infty}$:

- le noyau $\mathfrak{U}_{K_\infty}$ dans $\mathfrak{R}_{K_\infty}$ des symboles $\{\ ,\ \}$ à valeurs dans le groupe universel $K_2(K_\infty)$:

$$\mathfrak{U}_{K_\infty} = \{\ell^{-k} \otimes x \in \mathfrak{R}_{K_\infty} |\ \ \{\zeta_{\ell^k}, x\} = 1, \ \text{ dans } K_2(K_\infty)\}.$$

- Le radical $\mathfrak{Z}_{K_\infty}$ attaché à la réunion $Z_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ des composées Z_n des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions des corps K_n :

$$\mathfrak{Z}_{K_\infty} = \{\ell^{-k} \otimes x \in \mathcal{R}_{K_\infty} |\ |\ K_\infty[\sqrt[\ell^k]{x}] \subset Z_\infty\}.$$

- Le radical $\mathfrak{N}_{K_\infty}$ construit sur le noyau $\mathcal{N}_{K_\infty}$ dans $\mathcal{R}_{K_\infty} = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K_\infty^\times$ des valeurs absolues :

$$\mathfrak{N}_{K_\infty} = \{\ell^{-k} \otimes x \in \mathcal{R}_{K_\infty} |\ \ x \in \mathcal{N}_{K_\infty} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{N}_{K_n}\}.$$

Avec ces notations, les résultats de J. Coates (cf. [2], th. 4) et de M. Koster (cf. [10], th. 2.6) peuvent être présentés synoptiquement comme suit :

THÉORÈME 8. - *En haut de la tour cyclotomique, on a les inclusions :*

(i) $\mathfrak{U}_{K_\infty} \subset \mathfrak{Z}_{K_\infty}$, *avec égalité si et seulement si le corps* K_∞ *vérifie la conjecture de Leopoldt.*

(ii) $\mathfrak{U}_{K_\infty} \subset \mathfrak{N}_{K_\infty}$, *avec égalité si et seulement si le corps* K_∞ *vérifie la conjecture de Gross.*

Démonstration. Désignons par $\mathcal{X}$ le dual de Pontrjagin de $\mathfrak{H}_{K_\infty}$. La théorie d'Iwasawa (cf. [7] §8) montre que le groupe $\mathcal{X}$ est un Λ-module noethérien qui n'a pas de sous-module fini non nul, et plus précisément qu'il existe une suite exacte de Λ-modules

$$1 \longrightarrow \mathcal{X} \longrightarrow \Lambda^c \oplus T \longrightarrow F \longrightarrow 1$$

où c est le nombre de places complexes de K, F un Λ-module fini qui sera précisé plus loin, et T une somme directe de quotients de Λ par des puissances d'idéaux premiers de hauteur 1. Les produits tensoriels par $\mathbf{T}_\ell$

et $\overline{\mathbf{T}}_\ell$ respectivement des divers termes de la suite fournissent alors deux autres suites analogues pour $\mathbf{T}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{X}$ et $\overline{\mathbf{T}}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{X}$ dans lesquelles le terme Λ^c est inchangé.

Choisissons donc n assez grand pour que le générateur $\gamma_n = \gamma^{\ell^{n-m}}$ de Γ_n opère trivialement sur F et ses tensorisés $\mathbf{T}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} F$ et $\overline{\mathbf{T}}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} F$; puis faisons agir l'élément $\omega_n = \gamma_n - 1$ sur chacun des termes des suites obtenues.

Partant par exemple de la suite courte écrite plus haut, nous obtenons par le lemme du serpent la suite exacte à quatre termes :

$$1 \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{X}/\mathcal{X}^{\omega_n} \longrightarrow (\Lambda/\omega_n\Lambda)^c \oplus T/\omega_n T \longrightarrow F \longrightarrow 1,$$

qui nous montre que la dimension sur $\mathbb{Z}_\ell$ du plus grand quotient de $\mathcal{X}/\mathcal{X}^{\omega_n}$ qui est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre (autrement dit la codimension du sous-module divisible maximal de son dual de Pontrjagin $\mathfrak{H}_n = \mathfrak{H}_{K_\infty}^{\Gamma_n}$ est égale à celle $c_n = c\ell^n$ du $\mathbb{Z}_\ell$-module libre $(\Lambda/\omega_n\Lambda)^c$
augmentée de celle du plus grand quotient de $T/\omega_n T$ qui est un $\mathbb{Z}_\ell-$ module libre. Et un résultat analogue vaut naturellement pour les suites tensorisées. Distinguons donc les trois cas :

(i) cas des valeurs absolues : le sous-module divisible maximal de $\mathfrak{H}_{K_n}$ est le groupe $\mathfrak{N}_{K_n}$ dont la codimension a été calculée au scolie 6. Cela montre que le défaut δ_n de la conjecture de Gross dans K_n est donné par la formule :

$$\delta_n = dim_{\mathbb{Z}_\ell}\, T/\omega_n\, T.$$

En d'autres termes, la conjecture de Gross dans K_∞ postule donc simplement que le polynôme caractéristique du Λ-module T n'a pas de facteur cyclotomique. Lorsqu'elle est satisfaite, le sous-groupe $\mathfrak{N}_{K_\infty}$ de $\mathfrak{H}_{K_\infty}$ est donc exactement l'orthogonal du sous-module de torsion $\mathcal{T} = \mathcal{X} \cap T$ de $\mathcal{X}$ dans la dualité de Pontrjagin ; il est strictement plus grand sinon.

(ii) cas des symboles : d'après la théorie de Tate (cf. [14]), la dimension du sous-module divisible maximal $\mathbf{T}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathfrak{U}_\infty$ est égale au nombre de places complexes $c_n = c\ell^n$ de K_n. Il en résulte par dualité que le polynôme caractéristique du Λ-module de torsion $\overline{\mathbf{T}}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T$ n'a pas de facteur cyclotomique. Le noyau universel $\mathfrak{U}_{K_\infty}$ est donc toujours l'orthogonal du sous-module de torsion $\mathcal{T}$. En particulier il est contenu dans $\mathfrak{N}_{K_\infty}$, et lui est égal sous la conjecture de Gross.

(iii) cas des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions : d'après la théorie de Kummer (cf. [9], I.2.1§c), le radical $\overline{\mathbf{T}}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathfrak{Z}_n$ correspondant à la composée des $\mathbb{Z}_\ell$- extensions du corps K_n est le sous-module divisible maximal du groupe des points fixes $(\overline{\mathbf{T}}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathfrak{H}_\infty)^{\Gamma_n}$ du tensorisé $\overline{\mathbf{T}}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathfrak{H}_\infty$. Il s'ensuit que le défaut δ_n^* de la conjecture de Leopoldt dans K_n (qui mesure le nombre des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions en excès) est donné par la formule :

$$\delta_n^* = dim_{\mathbb{Z}_\ell} (\mathbf{T}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{T})/\omega_n(\mathbf{T}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{T})$$

n'a pas de facteur cyclotomique. Lorsqu'elle est vérifiée le sous-groupe $\mathfrak{Z}_\infty = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{Z}_n$ est donc exactement l'orthogonal de $\mathcal{T}$; il est strictement plus grand sinon.

SCOLIE 9. - *Sous les conjectures de Leopoldt et de Gross, le radical $\mathfrak{Z}_{K_n}$ des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions de K_n, le noyau $\mathfrak{N}_{K_n}$ des valeurs absolues dans K_n, et le noyau $\mathfrak{U}_{K_n}$ des symboles universels à valeurs dans $K_2(K_n)$, sont tous trois des $\mathbb{Z}_\ell$-modules libres de dimension $c_n = c\ell^n$. En général cependant ils ne coïncident pas, car la descente galoisienne s'écrit :*

$$(\overline{\mathbf{T}}_\ell \otimes \mathfrak{Z}_{K_n}) = (\overline{\mathbf{T}}_\ell \otimes \mathfrak{Z}_{K_\infty})^{\Gamma_n}_{\text{div}} \ \ ; \ (\mathbf{T}_\ell \otimes \mathfrak{U}_{K_n}) = (\mathbf{T}_\ell \otimes \mathfrak{U}_{K_\infty})^{\Gamma_n}_{\text{div}};$$

$$\mathfrak{N}_{K_n} = (\mathfrak{N}^{\Gamma_n}_{K_\infty})_{\text{div}}$$

si l'on convient de désigner par $\mathfrak{M}_{\text{div}}$ le sous-groupe divisible maximal d'un $\mathbb{Z}_\ell$−module $\mathfrak{M}$.

Remarque. Sous la condition nécessaire et suffisante $\widetilde{C\ell}_K = 1$, les trois radicaux ci-dessus coïncident pour tout n avec le radical hilbertien $\mathfrak{H}_{K_n}$. On retrouve ainsi la condition suffisante des conjectures de Leopoldt et de Gross avancée dans [1] et discutée dans [8].

6 - La question de la capitulation

Conservons les hypothèses de la section 5, et supposons vérifiées en outre les deux conjectures de Leopoldt et de Gross aux divers étages finis de la tour cyclotomique K_∞/K. Dans ce cas, les résultats de R. Greenberg (cf. [6]) montrent que la seule obstruction à l'égalité des trois radicaux définis dans le scolie 9 ci-dessus réside dans le sous-quotient $C = \Lambda^c/\Lambda^c(\mathcal{X}+T)$ du groupe fini F évoqué plus haut. Avant de préciser ce point, disons un mot sur le groupe C lui-même. Les calculs d'Iwasawa (cf. [7], §5.4, 6.3, 8.4, et 8.5) prouvent implicitement que le dual de Pontrjagin $\hat{C}$ de C s'identifie à la limite projective, disons

$$Cap'_{K_\infty} = \varprojlim_{n} Cap'_{K_\infty}$$

des sous-groupes respectifs Cap'_{K_n} des ℓ-groupes de ℓ-classes des corps K_n formés des ℓ-classes de $C\ell'_{K_n}$ qui capitulent dans $C\ell'_{K_\infty}$, les groupes Cap'_{K_n} étant d'ailleurs finis et stationnaires à isomorphisme canonique près.

Pour retrouver directement ce résultat en termes de classes logarithmiques, nous pouvons procéder comme suit : Désignons par $\hat{\mathfrak{N}}_{K_\infty}$ le dual de Pontrjagin du noyau $\mathfrak{N}_{K_\infty}$, et partons de la suite exacte courte qui définit le groupe fini C :

$$1 \longrightarrow \hat{\mathfrak{N}}_{K_\infty} \longrightarrow \Lambda^c \longrightarrow C \longrightarrow 1$$

Faisant opérer Γ_n, en fixant n assez grand pour que l'élément $\omega_n = \gamma^{\ell^n} - 1$ annule C, nous obtenons la suite exacte à quatre termes

$$1 \longrightarrow C \longrightarrow \hat{\mathfrak{N}}_{K_\infty}/\hat{\mathfrak{N}}_{K_\infty}^{\omega_n} \longrightarrow (\Lambda/\omega_n\Lambda)^c \longrightarrow C \longrightarrow 1,$$

qui nous prouve, puisque le quotient $\Lambda/\omega_n\Lambda$ est un $\mathbb{Z}_\ell$ module libre, que C est exactement le sous-module fini du quotient $\hat{\mathfrak{N}}_{K_\infty}/\hat{\mathfrak{N}}_{K_\infty}^{\omega_n}$, autrement dit que son dual de Pontrjagin $\hat{C}$ s'identifie au quotient du sous groupe $\hat{\mathfrak{N}}_{K_\infty}^{\Gamma_n}$ de $\hat{\mathfrak{N}}_{K_\infty}$ par son sous-module divisible maximal.

Écrivons maintenant la suite exacte naturelle donnée par le théorème 7 :

$$1 \longrightarrow \mathfrak{N}_{K_n} \longrightarrow \mathfrak{H}_{K_n} \longrightarrow \widetilde{C\ell}_{K_n} \longrightarrow 1.$$

Passant à la limite inductive avec n, et prenant les points fixes par Γ_n, nous obtenons la suite exacte longue de cohomologie

$$1 \longrightarrow \mathfrak{N}_{K_\infty}^{\Gamma_n} \longrightarrow \mathfrak{H}_{K_\infty}^{\Gamma_n} \longrightarrow \widetilde{C\ell}_{K_\infty}^{\Gamma_n} \longrightarrow \dots$$

où le terme médian $\mathfrak{H}_{K_\infty}^{\Gamma_n}$ n'est autre que le radical hilbertien précédent $\mathfrak{H}_{K_n}$. Par le lemme du serpent, nous en concluons immédiatement que le quotient $\mathfrak{N}^{\Gamma_n}_{K_\infty}/\mathfrak{N}_{K_n}$ s'identifie au noyau de l'application naturelle de $\widetilde{C\ell}_{K_n}$ dans $\widetilde{C\ell}_{K_\infty}$, c'est-à-dire précisément au sous-groupe $\widetilde{Cap}_{K_n}$ de $\widetilde{C\ell}_{K_n}$ formé des ℓ-classes logarithmiques qui capitulent dans l'extension K_∞/K_n.

Bien entendu les mêmes calculs conduits cette fois à partir des suites exactes tordues

$$1 \longrightarrow \bar{\mathrm{T}}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \hat{\mathfrak{U}}_{K_\infty} \longrightarrow \overline{\mathrm{T}}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \Lambda^c \simeq \Lambda^c \longrightarrow \overline{\mathrm{T}}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} C \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow \mathrm{T}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \hat{\mathfrak{Z}}_{K_\infty} \longrightarrow \mathrm{T}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^c \simeq \Lambda^c \longrightarrow \mathrm{T}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} C \longrightarrow 1$$

conduisent à des interprétations analogues faisant intervenir soit le noyau de l'homomorphisme d'extension pour les noyaux hilbertiens $H_2(K_n)$ de la K-théorie, soit le même noyau pour les groupes $\bar{H}_2(K_n)$ (cf. [9], ch. 1.2) définis comme les duaux de Pontrjagin respectifs des sous-groupes de torsion des groupes de Galois $Gal(H_n/K_n)$ attachés aux composées H_n des ℓ-extensions cycliques des corps K_n qui sont localement $\mathbb{Z}_\ell$-plongeables (et dans ce dernier cas, la "capitulation" en question traduit le fait banal qu'une ℓ-extension cyclique d'un K_n qui est localement $\mathbb{Z}_\ell$-plongeable sur K_n peut l'être globalement sur K_m, pour m assez grand, sans l'être sur K_n).

Résumons ces résultats qui prolongent ceux de J. Coates sur le noyau régulier (cf. [2]) :

PROPOSITION 10. *Sous les conjectures de Leopoldt et de Gross, le dual de Pontrjagin du groupe fini C s'identifie comme module galoisien à chacun des quatre modules suivants :*

i) *à la limite projective Cap'_{K_∞} des sous-groupes de ℓ-classes K_n qui capitulent dans K_∞;*
ii) *à la même limite $\widetilde{Cap}_{K_\infty}$ pour les groupes de classes logarithmiques $\widetilde{C\ell}_{K_n}$;*
iii) *aux tensorisés $\overline{\mathrm{T}_\ell} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} Ker(H_2(K_n) \to H_2(K_\infty))$, pour tout n assez grand ;*
iv) *aux tensorisés $\mathrm{T}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} Ker(\bar{H}_2(K_n) \to \bar{H}_2(K_\infty))$, pour tout n assez grand.*

Il est alors possible de préciser comme suit les résultats de R. Greenberg (cf. [6]) :

THÉORÈME 11. *Choisissons n assez grand pour que le groupe fini C soit annulé par l'opérateur $\omega_n = \gamma_n - 1$ comme par ℓ^n. Dans ce cas, sous les conjectures de Leopoldt et de Gross, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *le groupe C est nul (autrement dit l'homomorphisme d'extension $C\ell'_n \to C\ell'_\infty$ est injectif.*
(ii) *il y a coïncidence entre les sous-groupes de ℓ^n-torsion respectifs du noyau universel $\mathfrak{U}_{K_n}$ et du noyau des valeurs absolues $\mathfrak{N}_{K_n}$.*
(iii) *Il y a coïncidence entre les sous-groupes de ℓ^n-torsion respectifs du radical $\mathfrak{Z}_{K_n}$ des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions de K_n et du noyau $\mathfrak{N}_{K_n}$ des valeurs absolues.*

Et, lorsque ℓ est impair, l'équivalence s'étend à la condition :
(iv) ${}_{\ell^n}\mathfrak{Z}_{K_n} = {}_{\ell^n}\mathfrak{N}_{K_n}$.

Remarque : L'intérêt du théorème 11 réside avant tout dans l'extrême inégalité des complexités numériques des trois radicaux concernés : lorsque le corps K_n est connu numériquement, le calcul du noyau ${}_{\ell^n}\mathfrak{N}_{K_n}$ est facile, les normes cyclotomiques étant définies par des formules explicites ; la détermination du radical initial des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions ${}_{\ell^n}\mathfrak{Z}_{K_n}$ est moins directe : il faut utiliser par exemple le logarithme de Gras défini sur les groupes de classes (cf. [5]) ; celle de ${}_{\ell^n}\mathfrak{U}_{K_n}$ est beaucoup plus difficile encore en présence de symboles exotiques.

Démonstration du théorème : Les calculs qui précèdent montrent que le noyau ${}_{\ell^n}\mathfrak{N}_{K_n}$ est l'ensemble des éléments de ℓ^n-torsion du sous-module divisible maximal du groupe des points fixes $\mathfrak{N}_{K_\infty}^{\Gamma_n}$. Dans la dualité de Pontrjagin entre $\mathfrak{N}_{K_\infty}$ et $\hat{\mathfrak{N}}_{K_\infty} \subset \Lambda^c$, son orthogonal, disons X_n, est donc le sous-module $\omega_n\Lambda^c + \ell^n\hat{\mathfrak{N}}_{K_\infty}$ du groupe, noté additivement, $\hat{\mathfrak{N}}_{K_\infty}$: En effet, n ayant été choisi assez grand pour que ω_n annule C, nous avons bien $\omega_n\Lambda^c \subset \hat{\mathfrak{N}}_{K_\infty}$ et le quotient correspondant $\omega_n\Lambda^c/\omega_n\hat{\mathfrak{N}}_{K_\infty}$ est exactement le sous-groupe de torsion de $\hat{\mathfrak{N}}_{K_\infty}/\omega_n\hat{\mathfrak{N}}_{K_\infty}$. Considérons donc le quotient Λ^c/X_n. D'un côté, puisque c'est un quotient de $\Lambda^c/\omega_n\Lambda^c \simeq \mathbb{Z}_\ell^{c_n}$, sa décomposition comme produit de groupes cycliques fait intervenir au plus c_n facteurs. D'un autre côté, son sous module $\hat{\mathfrak{N}}_{K_\infty}/X_n$, qui est le dual de Pontrjagin de ${}_{\ell^n}\mathfrak{N}_{K_n}$, est lui un $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$-module libre de dimension

c_n ; et il vient donc :

$$\Lambda^c/X_n \simeq \oplus_{i=1}^{c_n}\mathbb{Z}/\ell^{n+e_i}\mathbb{Z}, \quad \text{avec } \prod_{i=1}^{c_n}\ell^{e_i} = (\Lambda^c : \hat{\mathfrak{N}}_\infty) = |C|.$$

Le théorème sera donc établi si nous prouvons que chacune des quatre conditions énoncées équivaut à la nullité de tous les entiers naturels e_i. Or l'équivalence avec (i) résulte directement de la proposition 10. Celle avec (ii) ou (iii) s'établit comme suit : L'égalité de ${}_{\ell^n}\mathfrak{N}_{K_n}$ avec ${}_{\ell^n}\mathfrak{U}_{K_n}$ (respectivement avec ${}_{\ell^n}\mathfrak{Z}_{K_n}$) signifie que X_n reste inchangé lorsqu'on tord l'action de Γ_n sur Λ^c par le caractère cyclotomique (respectivement anticyclotomique), autrement dit que Γ_n agit trivialement sur

$$\mathbf{T}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} (\Lambda^c/X_n)$$

(respectivement $\bar{\mathbf{T}}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell}(\Lambda^c/X_n)$). Mais le groupe Γ_n étant engendré topologiquement par l'élément γ_n défini par l'identité

$$\zeta^{\gamma_n} = \zeta^{1+\ell^n}, \forall\zeta \in \mu_{\ell^\infty},$$

cela revient à dire dans les deux cas que $1+\ell^n$ agit trivialement sur Λ^c/X_n, i.e que Λ^c/X_n est d'exposant ℓ^n. Enfin, le cas (iv) se traite de façon analogue à ceci près qu'il convient de remplacer $1+\ell^n$ par $(1+\ell^n)^2$, ce qui nécessite d'exclure le cas $\ell = 2$.

SCOLIE 12. *Sous les conjectures de Leopoldt et de Gross, il existe un entier naturel k tel qu'on ait identiquement pour tout n assez grand :*

$${}_{\ell^{n-k}}\mathfrak{U}_{K_n} = {}_{\ell^{n-k}}\mathfrak{N}_{K_n} = {}_{\ell^{n-k}}\mathfrak{Z}_{K_n}.$$

Preuve. Il suffit, en effet, de choisir k tel que ℓ^k annule C.

Terminons par deux exemples pour lesquels le théorème de Baker-Brumer assure la validité des conjectures de Leopoldt et de Gross (cf. [8]).

EXEMPLE 1. - Prenons $\ell = 3$ et $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}, \sqrt{-3d}]$ biquadratique contenant les racines cubiques de l'unité. Supposons 3 non décomposé dans le sous-corps quadratique réel $k = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, et le 3-groupe de 3-classes $C\ell'_k$ trivial. Dans ce cas, la formule des classes ambiges (cf. [9], ch. III.1), appliquée aux sous-extensions finies k_n/k de la 3-tour cyclotomique sur k, montre que l'on a identiquement $C\ell'_{k_n} = 1$, pour tout n, donc qu'il n'y a pas de 3-capitulation dans k_∞/k et, partant, dans K_∞/K. Dans ce cas, on a donc pour tout n :

$$_{\ell^n}\mathfrak{U}_{K_n} =_{\ell^n} \mathfrak{N}_{K_n} =_{\ell^n} \mathfrak{Z}_{K_n}.$$

En particulier, le radical initial des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions, pris dans K^ℓ/K^{X^ℓ}, tout comme le noyau des symboles universels, sont $\mathbb{F}_\ell$-engendrés par les classes de la racine j, du nombre 3, et de l'unité fondamentale ϵ du corps quadratique k.

Bien entendu, ce résultat est en défaut en présence de capitulation (cf. [6]).

EXEMPLE 2. - Soit ℓ un nombre premier impair satisfaisant la conjecture de Vandiver, i.e. ne divisant pas le nombre des classes du sous-corps réel maximal K^+ du ℓ-ième corps cyclotomique $K = \mathbb{Q}[\zeta]$. Dans ce cas, la formule des classes ambiges montre que la même propriété est encore vraie à chaque étage fini de la ℓ-tour cyclotomique $K_n = \mathbb{Q}[\zeta_{\ell^n}]$. Il vient alors comme plus haut :

$$_{\ell^n}\mathfrak{U}_{K_n} =_{\ell^n} \mathfrak{N}_{K_n} =_{\ell^n} \mathfrak{Z}_{K_n}.$$

Et le groupe $\mathfrak{N}_{K_n}$ n'est autre que le $\mathbb{Z}_\ell$-module divisible construit sur les ℓ-unités de K_n.

RÉFÉRENCES

[1] F. BERTRANDIAS et J.-J. PAYAN - *Γ-extensions et invariants cyclotomiques*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., **5** (1972), *517-543.*

[2] J. COATES - *On K_2 and some classical conjectures in algebraic number theory*, Ann. Math. **95** (1972), *99-116.*

[3] L.J.FEDERER - *The non-vanishing of Gross p-adic regulator Galois cohomologically*, Astérisque **147-148** (1987), *71-77.*

[4] L. J. FEDERER et B.H. GROSS (avec un appendice de W. SINNOT) - *Regulators and Iwasawa modules*, Inv. Math. **62** (1981), *443-457*.

[5] G. GRAS - *Plongements kummériens dans les $\mathbb{Z}_p$-extensions*, Compositio Math. **55** (1985), *383-396*.

[6] R. GREENBERG - *A note on K_2 and the theory of $\mathbb{Z}_p$-extensions*, Am. J. Math. **100** (1978), *1235-1245*.

[7] K. IWASAWA - *On $\mathbb{Z}_\ell$-extensions of algebraic number fields*, Ann. Math. **98** (1973), *246-326*.

[8] J.-F. JAULENT - *Sur les conjectures de Leopoldt et de Gross*, Astérisque **147-148** (1987), *107-120*.

[9] J.-F. JAULENT - *L'arithmétique des ℓ- extensions (Thèse)*, Pub. Math. Fac. Sci. Besançon, Théor. Nomb. **1984-85** et **1985-86**, fasc. 1 (1986), *1-349*.

[10] M. KOLSTER - *An idelic approach to the wild kernel*, Prépublication.

[11] K. KRAMER - *On the Hilbert kernel of K-theory and the Gross regulator*, Prépublication.

[12] K. KRAMER et A. CANDIOTTI - On K_2 and $\mathbb{Z}_\ell$-extensions of number fields, Am. J. Math. **100** (1978), *177-196*.

[13] T. NGUYEN QUANG DO - *Sur la torsion de certains modules galoisiens II*, Sém. Th. Nombres Paris 1986-87 ; Progress in Math. **75** (1988), *271-298*.

[14] T. NGUYEN QUANG DO - *Sur la torsion de certains modules galoisiens p-ramifiés*, Théorie des Nombres (Québec, PQ, 1987) *740-754* (1989), de Gruyter, Berlin-New York.

[15] J. TATE - *Relations between K_2 and Galois cohomology*, Inv. Math. **36** (1976), *257-274*.

[16] J. TATE - *Les conjectures de Stark sur les fonctions L d'Artin en* $s = 0$, Progress in Math. **47**, Birkhäuser (1984).

[17] J.-F. JAULENT - *La théorie de Kummer et le K_2 des corps de nombres* Sém. Th. Nombres Bordeaux Sér. 2, **2** (1990).

Jean-François JAULENT
Université Bordeaux I
U.F.R. de Mathématiques et d'Informatique
351, cours de la Libération
TALENCE Cedex