AST

Séminaire sur les pinceaux de courbes elliptiques (à la recherche de «Mordell effectif») - Pages préliminaires

Astérisque, tome 183 (1990), p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1990__183__1_0>

183 ASTÉRISQUE

1990

SÉMINAIRE SUR LES PINCEAUX DE COURBES ELLIPTIQUES

(à la recherche de «Mordell effectif»)

Lucien SZPIRO

Avec la participation de :
Daniel BERTRAND, Jean-Benoît BOST, Renée ELKIK
Marguerite FLEXOR, David W. MASSER, Jean-François MESTRE
Laurent MORET-BAILLY, Joseph OESTERLÉ, Christophe SOULÉ
Lucien SZPIRO

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

A.M.S. subjects Classification : 11, 14

INTRODUCTION

Ce séminaire s'est tenu en 1988 à l'Institut Henri Poincaré à Paris. Il est centré sur la "conjecture du discriminant" énoncée dans l'exposé 1 : Sur un corps de nombres donné le "discriminant minimal d'une courbe elliptique doit avoir une borne supérieure polynomiale en le "conducteur" de cette courbe.

Les raisons géométriques et la difficulté arithmétique de cette conjecture sont montrées dans l'exposé 1. On y note aussi que le "grand théorème" de Fermat s'en déduit. L'exposé 2 de D.W. Masser (qui a été donné oralement par M. Hindry) montre qu'on ne peut guère avoir mieux qu'un polynôme de degré "$6+\varepsilon$" dans la "conjecture du discriminant". L'exposé 3 de M. Flexor et J. Oesterlé indique une conséquence, due essentiellement à G. Frey sur les points de torsion des courbes elliptiques. Notons qu'une autre conséquence, sur les points d'ordre infini des courbes elliptiques : la conjecture de S. Lang, est montrée dans un article récent de Hindry et Silverman.

Les exposés 4, 5, 6 s'occupent de l'amont de la conjecture : quelles autres conjectures l'impliqueraient ? On pourrait craindre que cet exercice (conjecture implique conjecture) est aurorétique. Nous espérons qu'il n'en est rien. L'exposé 4 de L. Moret-Bailly explique une idée fameuse de Parshin : Une inégalité analogue au théorème de Bogomolov-Miyaoka "$C_1^2 \leq 3\, C_2$" implique un "Mordell effectif" très fort. On montre ensuite qu'un tel "Mordell effectif" très fort pour une courbe modulaire implique la conjecture du discriminant. Notons que récemment L.Moret-Bailly et moi-même avons réussi à montrer qu'un"Mordell effectif" très fort pour une courbe (i.e. non forcément modulaire) implique le même résultat (à paraître).

L'exposé 5, de R. Elkik, démontre le théorème de Manin-Drinfeld par la méthode inédite de P. Deligue. Ce théorème est utilisé dans l'exposé 4. Il s'énonce : la différence entre deux pointes d'une courbe modulaire, est de torsion. L'exposé 6 de J.B. Bost, J.F. Mestre, L. Moret-Bailly explicite les "classes de Chern" de certaines surfaces arithmétiques de genre 2. Une des conséquences des résultats exposé est la prudence requise dans la conjecture analogue à $C_1^2 \leq 3\, C_2$ en arithmétique !

Les exposés 7 et 8 ne sont ni en amont, ni en aval mais rive gauche et rive droite du courant. L'exposé 7 de D. Bertand établit une constante bornant le degré d'isogénies entre courbes elliptiques sur un corps donné (comparer à l'exposé 3). Ce thème a été traité précédemment (et ailleurs) par Faltings, Masser, Wüstholz. L'exposé 8 de C. Soulé compare les théories de Nevanlinna et Arakelov sur l'espace projectif.

L. SZPIRO.

TABLE DES MATIÈRES

SÉMINAIRE SUR LES PINCEAUX DE COURBES ELLIPTIQUES

(à la recherche de "Mordell effectif")

L. Szpiro

Page

SZPIRO (L.) Discriminant et conducteur des courbes elliptiques. ... 7

MASSER (D. W.) Note on a Conjecture of Szpiro. ... 19

FLEXOR (M.), OESTERLÉ (J.) Sur les points de torsion des courbes elliptiques. ... 25

MORET-BAILLY (L.) Hauteurs et classes de Chern sur les surfaces arithmétiques. ... 37

ELKIK (R.) Le théorème de Manin-Drinfeld. ... 59

BOST (J.B.), MESTRE (J.F.), MORET-BAILLY (L.) Sur le calcul explicite des "classes de Chern" des surfaces arithmétiques de genre 2. ... 69

BERTRAND (D.) Hauteurs et isogénies. ... 107

SOULÉ (C.) Théorie de Nevanlinna et théorie d'Arakelov 127

RÉSUMÉS DES EXPOSÉS

SZPIRO (L.) *Discriminant et conducteur des courbes elliptiques.*
Cet article présente une conjecture naturelle sur le discriminant des courbes elliptiques. On démontre d'abord cette conjecture sur le corps de fonctions, par une preuve jamais publiée. On explicite ensuite la conjecture pour les courbes de Frey et pour les courbes de Weil. On termine enfin par un exemple du à A. DOUADY qui montre la difficulté d'ordre arithmétique des problèmes qui se posent.

MASSER (D. W.) *Note on a Conjecture of Szpiro.*
A conjecture of Szpiro states that $|D| \leq C(\varepsilon)N^{6+\varepsilon}$ for every elliptic curve defined over the rationals with minimal discriminant D and conductor N. We show that this inequality, if true, cannot be much improved ; for example, it would be false with N^{ε} replaced by any fixed power of $\log N$.

FLEXOR (M.), OESTERLÉ (J.) *Sur les points de torsion des courbes elliptiques.*
Soit K un corps de nombres. On conjecture que le nombres de points de torsion, rationnels sur K, d'une courbe elliptique définie sur K est majoré par une constante qui ne dépend que de K. (Pour $K = \mathbb{Q}$, cet énoncé a été démontré par Mazur, et la constante peut être prise égale à 16). G. Frey, le premier, a vu que la conjecture précédente est impliquée par une autre conjecture, énoncée par Szpiro en 1982, reliant discriminants et conducteurs des courbes elliptiques sur K. Nous présentons ici une démonstration de ce fait, en explicitant les liens entre les constantes qui interviennent dans les deux conjectures.

MORET-BAILLY (L.) *Hauteurs et classes de Chern sur les surfaces arithmétiques.*
Parshin a montré qu'un analogue arithmétique de l'inégalité de Bogomolov-Miyaoka pour les surfaces complexes impliquerait, via une version effective de la conjecture de Mordell, la conjecture du discriminant de Szpiro (et par suite la "conjecture *abc*" et le grand théorème de Fermat en degré assez grand). On donne une démonstration complète de ces résultats, en partant d'une version affaiblie de l'inégalité de Bogomolov-Miyaoka.

ELKIK (R.) *Le théorème de Manin-Drinfeld.*
Si Γ est un sous-groupe de congruence de $S\ell(2,\mathbb{Z})$ et X_Γ la compactification de la courbe $\mathfrak{h}|_\Gamma$, le Théorème de Manin Drinfeld affirme que tout diviseur de degré 0 de X_Γ à support dans les pointes, définit un élément de torsion du groupe de Picard. Cet énoncé est réinterprété par Deligne comme un énoncé de scindage de la structure de Hodge-mixte sur $H^1(\mathfrak{h}|_\Gamma,\mathbb{Q})$, qui est établi en séparant les valeurs propres d'une correspondance de Hecke sur la composante de poids 0 et sur la composante de poids 1 de ce groupe de cohomologie.

BOST (J.B.), MESTRE (J.F.), MORET-BAILLY (L.) *Sur le calcul explicite des "classes de Chern" des surfaces arithmétiques de genre 2.*

Dans cet exposé, nous décrivons comment calculer explicitement les invariants

$\deg f_*\omega_{X/B}$ et $(\omega_{X/B}.\omega_{X/B})$ définis à la Arakelov, attachés à une courbe semi-stable $f : X \to B = \operatorname{Spec} O_K$ de fibre générique lisse et de genre 2 sur l'anneau des entiers d'un corps de nombres K.

Nous calculons ensuite numériquement ces invariants sur deux exemples, à savoir une courbe ayant réduction semi-stable sur $\mathbb{Q}$ (nous présentons une construction de telles courbes), puis la courbe dont la fibre générique admet comme équation affine $y^2 + y = x^5$.

BERTRAND (D.) *Hauteurs et isogénies.*

Soit d un entier > 0. Dans un récent travail [MW2], Masser et Wüstholz ont établi l'existence d'une constante effectivement calculable $c(d)$ telle que si k désigne un corps de nombres de degré d et E une courbe elliptique définie sur k, de hauteur de Faltings $h(E/k)$, toutes les courbes elliptiques définies sur k et isogènes à E sont liées à E par une isogénie de degré $\leq c(d)h(E/k)^4$. On donne ici une autre démonstration de ce résultat (sous une forme d'ailleurs un peu plus faible). L'outil nouveau est formé par les modèles de Néron, qui permettent d'éviter le recours à des calculs explicites sur les invariants de Weierstrass.

SOULÉ (C.) *Théorie de Nevanlinna et théorie d'Arakelov.*

On exhibe dans ce texte un parallélisme entre les théories de Nevanlinna et d'Arakelov dans le cas de l'espace projectif $\mathbb{P}^n$. La forme de Levine est un courant sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ qui joue un rôle central dans la théorie de Nevanlinna à valeurs dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. On montre que c'est aussi le courant de Green associé à une classe de Chern arithmétique, au sens de la théorie d'Arakelov en dimension supérieure développée par H. Gillet et l'auteur.