LLUIS PUIG

Algèbre de source de certains blocs des groupes de Chevalley

Astérisque, tome 181-182 (1990), p. 221-236
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1990__181-182__221_0>

ALGÈBRES DE SOURCE DE CERTAINS BLOCS DES GROUPES DE CHEVALLEY

par **Lluis PUIG**

1. INTRODUCTION

1.1. Le point de départ du mémoire a été la constatation – il y a quelques années – qu'un simple argument sur des dimensions permet de déterminer l'algèbre de source de certains blocs des groupes de Chevalley. L'argument est le suivant : d'une part, on sait que toute algèbre de source d'un bloc b doit contenir l'algèbre de groupe convenablement tordue de l'extension d'un groupe de défaut P de b par le quotient d'inertie E d'un des blocs de $C_G(P)$ associés b (voir [4], proposition 14.6); et d'autre part, pour des choix convenables de b dans les groupes de Chevalley – ceci a été la constatation – l'algèbre A du bloc possède un idempotent i fixe par P – d'expression similaire celle de l'unité de l'algèbre de Hecke – tel que iAi contienne une algèbre de source du bloc et que l'on ait

1.1.1. $$dim(iAi) \leq |P|\,|E|\ .$$

Bien sûr, ceci est loin d'être le cas général dans ces groupes et en conséquence notre démarche n'a rien de systématique, nos hypothèses sur b (*cf.* §3) étant des conditions ***ad hoc*** pour faire apparaître la situation voulue. Nous avons exposé un résultat de ce type à l'Université de Essen en février 1985.

1.2. Ici nous allons discuter une situation plus générale demandant un argument plus sophistiqué – toujours sur le thème des dimensions– qui tient compte de la bonne connaissance des algèbres de source des blocs à structure locale nilpotente (voir [5], théorème 1.6 et 1.7). De plus, nous avons compris que l'argument dimensionnel reste utile même lorsque l'algèbre de source n'est déterminée "qu'en partie" : cet argument nous renseigne – dans une famille de blocs bien plus large – sur ***l'algèbre plongée associée à un groupe pointé local*** (*cf.* 2.4 ou [4], 2.13) qui n'est pas nécessairement maximal. Cette connaissance partielle de l'algèbre de source peut être suffisante pour le calcul de certains invariants du bloc. A titre d'exemple, nous discutons ici la possibilité de déterminer certains nombres de décomposition généralisés.

1.3. Soient donc p un nombre premier et G un groupe de Chevalley (ou du type de Lie, si l'on préfère) en caractéristique différente de p . Les p-blocs b de G que nous allons considérer sont les blocs induits – au sens soit de Brauer, soit de Harish-Chandra – à partir des p-blocs cuspidaux b' , des sous-groupes de Levi rationnels H de G , ayant un groupe de défaut P tel que $C_H(P) = C_G(P)$ et une structure locale nilpotente (*). Par bloc "cuspidal" b' de H nous entendons un bloc dont tous les caractères irréductibles associés sont cuspidaux au sens de Harish-Chandra : il est alors clair qu'il satisfait à la condition suivante :

1.3.1. *Il existe un p'-sous-groupe I de G , qui est normalisé par H et le rencontre trivialement, tel que $b'e_I\,x\,e_I = 0$ pour tout $x \in G - I.N_G(H).I$, où e_I est l'idempotent $\frac{1}{|I|}\sum_{y\in I} y$ de l'algèbre de groupe de I .*

Or, il se trouve que notre démarche ne dépend que de cette condition ; ainsi – bien que nous ne connaissions pas d'autre situation où 1.3.1 est satisfaite que celle décrite ci-dessus – il nous a semblé plus commode pour l'exposition d'oublier le caractère spécifique de G .

Ce travail est divisé en quatre sections. Dans la section 2, nous introduisons brièvement les notations et la terminologie utilisées, en donnant quelques compléments sur la fusion. Dans la section 3, nous énonçons notre résultat principal et discutons la possibilité de l'utiliser pour le calcul des nombres de décomposition généralisés. La section 4 contient la démonstration de notre résultat principal.

2. NOTATIONS, TERMINOLOGIE ET RÉSULTATS DE BASE

2.1. Nous empruntons les notations et suivons la terminologie développées dans [2] et [4]. Néanmoins, nous rappelons brièvement la plupart de celles qui sont employées ici. Dans tout ce mémoire, p est un nombre premier, k un corps algébriquement clos de caractéristique p et $\mathcal{O}$ un anneau de valuation discrète complet, ayant k comme corps résiduel (le cas $\mathcal{O} = \mathrm{k}$ n'est pas exclu).

2.2. Soit G un groupe fini. Une *G-algèbre intérieure* est une $\mathcal{O}$-algèbre A associative, unitaire et $\mathcal{O}$-libre de rang fini, munie d'un homomorphisme $\varphi : G \to A^*$; si $x, y \in G$ et $a \in A$, on écrit $x.a.y$ au lieu de $\varphi(x)a\varphi(y)$ et on pose $a^x = x^{-1}.a.x$.

(*) Dans les exemples que nous connaissons P est le p-sous-groupe de Sylow d'un tore maximal T de H de sorte que $C_H(P) = T$, et b' est le bloc induit, au sens de Brauer, du bloc de T déterminé par un p'-caractère linéaire appartenant à une orbite régulière de $N_H(T)/T$ sur $Irr_{\mathcal{K}}(T)$.

Si H est un groupe fini et $\psi : H \to G$ un homomorphisme, on désigne par $Res_\psi(A)$ la H-algèbre intérieure formée par A munie de $\psi \circ \varphi : H \to A^*$; lorsque H est un sous-groupe de G et ψ l'homomorphisme défini par l'inclusion $H \subset G$, on pose $Res^G_H(A) = Res_\psi(A)$. Si $\mathcal{O}$ est de caractéristique zéro et $\mathcal{K}$ est son corps des fractions, $Irr_{\mathcal{K}}(A)$ désigne l'ensemble des caractères des $\mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}} A$-modules simples et pour chaque $\chi \in Irr_{\mathcal{K}}(A)$ et chaque $x \in G$, on écrit $\chi(x)$ au lieu de $\chi(\varphi(x))$; lorsque $A = \mathcal{O}Gb$ où b est un bloc de G , on note $Irr_{\mathcal{K}}(G, b)$ cet ensemble.

2.3. Un *groupe pointé* H_β sur A est un couple formé d'un sous-groupe H de G et d'une classe de conjugaison β d'idempotents primitifs de l'algèbre A^H d'éléments $a \in A$ tels que $a^x = a$ pour tout $x \in H$; on dit alors que β est un *point* de H sur A et on désigne par $\mathcal{P}_A(H)$ l'ensemble de ces classes. Si P_γ est un autre groupe pointé sur A , on écrit $P_\gamma \subset H_\beta$ lorsque $P \subset H$ et pour tout $i \in \beta$ il existe $j \in \gamma$ tel que $jAj \subset iAi$. On pose

2.3.1 $$A(P) = A^P / (\sum_Q A^P_Q + J(\mathcal{O}).A^P)$$

où Q parcourt l'ensemble des sous-groupes propres de P et A^P_Q désigne l'idéal des traces relatives de Q à P des éléments de A^Q (*cf.* [4], 2.8), on note

2.3.2 $$Br_P : A^P \to A(P)$$

l'homomorphisme canonique, et on dit que P_γ est *local* si $Br_P(\gamma) \neq \{0\}$; dans ce cas, γ est appelé *point local* de P sur A et on note $\mathcal{LP}_A(P)$ l'ensemble de ces points; de plus, si $P = \langle u \rangle$ on dit que u_γ est un *élément pointé local* et $u_\gamma \in H_\beta$ équivaut à $P_\gamma \subset H_\beta$. Rappelons que (*cf.* [2], théorème 1.2)

2.3.3. *un groupe pointé local P_γ sur A tel que $P_\gamma \subset H_\beta$ est maximal pour cette condition si et seulement si $\beta \subset A^H_P$ et H opère transitivement sur leur ensemble.*

2.4. Soit A' une autre G-algèbre intérieure. Un *homomorphisme* $f : A \to A'$ est un homomorphisme d'algèbres (non nécessairement unitaire) tel que $f(x.a.y) = x.f(a).y$ pour tout $a \in A$ et tout couple $x, y \in G$. Un *exomorphisme* $\widetilde{f} : A \to A'$ est l'ensemble des homomorphismes obtenus en composant un homomorphisme $f : A \to A'$ avec tous les automorphismes intérieurs de A et de A' ; si H est un sous-groupe de G , on note

2.4.1. $$Res^G_H(\widetilde{f}) : Res^G_H(A) \to Res^G_H(A')$$

l'exomorphisme de $Res^G_H(A)$ dans $Res^G_H(A')$ qui contient $\widetilde{f}$. Soient respectivement H_β et $P_{\gamma'}$ des groupes pointés sur A et A' ; si $P \subset H$ on désigne par $m(\widetilde{f})^\beta_{\gamma'}$ le nombre d'éléments de γ' qui interviennent dans une décomposition dans A'^P de $f(i)$ où $i \in \beta$. On dit que $\widetilde{f}$ est un *plongement* si $Ker(f) = \{0\}$ et $Im(f) = f(1)A'f(1)$; dans ce cas, il existe un unique point β' de H sur A' tel que $f(\beta) \subset \beta'$: nous désignons souvent β et β' par la même lettre. Une *algèbre plongée* associée à H_β est un couple formé d'une H-algèbre intérieure A_β et d'un plongement $\widetilde{f}_\beta : A_\beta \to Res_H^G(A)$ tels que $f_\beta(1) \in \beta$. Si P_γ est un groupe pointé local maximal tel que $P_\gamma \subset H_\beta$, on dit que A_γ est une *algèbre de source* de A_β .

2.5. Soient P_γ et Q_δ des groupes pointés sur A . Un *exomorphisme* $\widetilde{\varphi} : Q \to P$ est l'ensemble d'homomorphismes obtenus en composant un homomorphisme φ : $Q \to P$ avec tous les automorphismes intérieurs de P et de Q . On dit alors que $\widetilde{\varphi}$ est un *G-exomorphisme* de Q_δ dans P_γ s'il existe $x \in G$ tel que $(Q_\delta)^x \subset P_\gamma$ et $\varphi(u) = u^x$ pour tout $u \in Q$; de même, on dit que $\widetilde{\varphi}$ est une *A-fusion* de Q_δ dans P_γ si $Ker(\varphi) = \{1\}$ et il existe un plongement $\widetilde{f}_\varphi : A_\delta \to Res_\varphi(A_\gamma)$ tel que

2.5.1. $$Res_1^Q(\widetilde{f}_\delta) = Res_1^P(\widetilde{f}_\gamma) \circ Res_1^Q(\widetilde{f}_\varphi) \ ;$$

on désigne respectivement par $E_G(Q_\delta, P_\gamma)$ et $F_A(Q_\delta, P_\gamma)$ les ensembles des G-exomorphismes et des A-fusions de Q_δ dans P_γ , et on pose

2.5.2. $$E_G(P_\gamma) = E_G(P_\gamma, P_\gamma) \quad \text{et} \quad F_A(P_\gamma) = F_A(P_\gamma, P_\gamma) \ .$$

2.6. Rappelons que (*cf.* [3], 2.10)

2.6.1. $$E_G(Q_\delta, P_\gamma) = F_A(Q_\delta, P_\gamma) \cap E_G(Q, P)$$

où $E_G(Q,P)$ est l'ensemble des exomorphismes de Q dans P induits par les automorphismes intérieurs de G . De plus, si R est un sous-groupe de P ,

2.6.2. *pour tout* $\varphi \in Hom(Q,P)$ *tel que* $\varphi(Q) \subset R$ *et* $\widetilde{\varphi} \in F_A(Q_\delta, P_\gamma)$ *il existe* $\epsilon \in \mathcal{P}_A(R)$ *tel que* $R_\epsilon \subset P_\gamma$ *et* $\widetilde{\varphi} \in F_A(Q_\delta, R_\epsilon)$.
En effet, en posant $Q' = \varphi(Q)$, on sait qu'il existe $\delta' \in \mathcal{P}_A(Q')$ tel que $Q'_{\delta'} \subset P_\gamma$ et $\widetilde{\varphi} \in F_A(Q_\delta, Q'_{\delta'})$ (*cf.* [3], 2.11) et il suffit de choisir $\epsilon \in \mathcal{P}_A(R)$ tel que l'on ait $Q_{\delta'} \subset R_\epsilon \subset P_\gamma$. Enfin, lorsque $A = \mathcal{O}G$ et Q_δ est local, on sait que (*cf.* [3], théorème 3.1)

2.6.3. $$E_G(Q_\delta, P_\gamma) = F_A(Q_\delta, P_\gamma) \ .$$

2.7. D'autre part, si A' est une autre G-algèbre intérieure et $\widetilde{f} : A \to A'$ un exomorphisme

2.7.1. *pour tout* $\varphi \in F_A(Q_\delta, P_\gamma)$ *et tout* $\delta' \in \mathcal{P}_A(Q)$ *tel que* $m(\widetilde{f})^{\delta}_{\delta'} \neq 0$, *il existe* $\gamma' \in \mathcal{P}_{A'}(P)$ *tel que* $m(\widetilde{f})^{\gamma}_{\gamma'} \neq 0$, *et* $\widetilde{\varphi} \in F_{A'}(Q_{\delta'}, P_{\gamma'})$.

En effet, d'après la nature transitive de 2.7.1., nous pouvons supposer que soit $Q \subset P$ et φ est l'inclusion, soit $|Q| = |P|$ (*cf.* [3], 2.11) ; dans le premier cas, on a $Q_\delta \subset P_\gamma$ et, par suite, $m(\widetilde{f})^{\gamma}_{\delta'} \neq 0$ (*cf.* [5], 2.3.1) d'où l'on déduit aussitôt l'existence de $\gamma' \in \mathcal{P}_{A'}(P)$ tel que l'on ait à la fois $m(\widetilde{f})^{\gamma}_{\gamma'} \neq 0$ et $m(\widetilde{id})^{\gamma'}_{\delta'} \neq 0$ (*cf.* [5], 2.3.1). Dans le deuxième cas, si $i \in \gamma$ et $j \in \delta$, il existe $a \in A^*$ tel que $(u.j)^a = \varphi(u).i$ pour tout $u \in Q$ (*cf.* [3], proposition 2.12) et par suite, on a $(u.f(j))^{f^*(a)} = \varphi(u).f(i)$ où $f^*(a) = f(a-1)+1$ (*cf.* [4], 2.3.1) ; en particulier, si $j' \in \delta'$ est tel que $j'f(j) = j' = f(j)j'$ et on pose $i' = j'^{f^*(a)}$, on a $i'f(i) = i' = f(i)i'$ et $(u.j')^{f^*(a)} = \varphi(u).i'$ pour tout $u \in Q$, et i' est un idempotent primitif de A'^P; il suffit alors de prendre le point γ' de P sur A' qui contient i' . Rappelons que, lorsque $\widetilde{f}$ est un plongement, on a tout simplement (*cf.* [3], proposition 2.14)

2.7.2. $$F_A(Q_\delta, P_\gamma) = F_{A'}(Q_\delta, P_\gamma) .$$

2.8. Un k*-*groupe* est un groupe $\hat{G}$ muni d'un homomorphisme injectif $\theta : \mathrm{k}^* \to Z(\hat{G})$ et on dit que $\hat{G}/Im(\theta)$ est le k*-*quotient* de $\hat{G}$. Il est clair que la section $\mathrm{k}^* \to \mathcal{O}^*$ (*cf.* [4], 5.1.1) induit un homomorphisme d'algèbres $\mathcal{O}(\mathrm{k}^*) \to \mathcal{O}$ et on pose

2.8.1. $$\mathcal{O}_*\hat{G} = \mathcal{O} \underset{\mathcal{O}(\mathrm{k}^*)}{\otimes} \mathcal{O}\hat{G} .$$

Enfin, si P_γ est un groupe pointé local sur A et W est un groupe fini muni d'une action extérieure sur P , $\eta : W \to \widetilde{A}ut(P)$ telle que $Im(\eta) \subset F_A(P_\gamma)$, on désigne par $\hat{W}^\gamma$ le k*-groupe obtenu de la manière suivante : le normalisateur $\hat{X}$ de l'image de P dans A^*_γ a une structure manifeste de k*-groupe (*cf.* [4], remarque 5.3) et, puisque $P.(1 + J(A^P_\gamma))$ rencontre trivialement l'image de k* dans $\hat{X}$, le quotient $\hat{X}/P.(1 + J(A^P_\gamma))$ est encore un k*-groupe ; alors, l'action sur l'image de P dans A^*_γ définit un homomorphisme de W dans le k*-quotient de $\hat{X}/P.(1 + J(A^P_\gamma))$ (*cf.* [3], 2.13) et $\hat{W}^\gamma$ est le produit fibré correspondant.

3. BLOCS INDUITS A PARTIR DE BLOCS NILPOTENTS CUSPIDAUX

3.1. Soient G un groupe fini, H un sous-groupe de G , b' un bloc de H et P un groupe de défaut de b' ; posons $A = \mathcal{O}G$ et $A' = \mathcal{O}H$ considérées respectivement comme G- et H-algèbres intérieures, de sorte que $\beta' = \{b'\}$ est un point de H sur A' et il existe $\gamma' \in \mathcal{LP}_{A'}(P)$ tel que $P_{\gamma'} \subset H_{\beta'}$ (*cf.* 2.3.3). ***Nous supposons que***

3.1.1. $$C_H(P) = C_G(P)$$

auquel cas, il existe $\gamma \in \mathcal{LP}_A(P)$ unique tel que l'isomorphisme canonique $A'(P) \cong A(P)$ (*cf.* [4], 2.9.2) envoie $Br_P(\gamma')$ sur $Br_P(\gamma)$, il existe $\beta \in \mathcal{P}_A(H)$ unique tel que $P_\gamma \subset H_\beta$ (*cf.* [5], lemme 3.9) et il existe $\alpha \in \mathcal{P}_A(G)$ unique tel que $H_\beta \subset G_\alpha$; en particulier, $\alpha = \{b\}$ où b est le bloc de G induit par b' au sens de Brauer. Posons $N = N_G(H_\beta)$ et $W = N/H$; il est clair que β et b' se déterminent l'un l'autre et par suite N est le stabilisateur de b' dans $N_G(H)$; de plus, comme $b'\beta = \beta$ et $b' \in A_P^H$, P_γ est un groupe pointé local maximal tel que $P_\gamma \subset H_\beta$ et, par conséquent, on a (*cf.* [2], 1.2)

3.1.2. $$N = H.N_N(P_\gamma) \ .$$

3.2. Deuxièmement, ***nous supposons que b' est un bloc de H à structure locale nilpotente*** (*cf.* [5], 1.7). Dans ce cas, on a $N_H(P_{\gamma'}) = P.C_H(P)$ (*cf.* [5], lemme 3.10), et comme $N_N(P_\gamma)$ stabilise γ' , l'égalité 3.1.2 induit un isomorphisme $W \cong N_N(P_\gamma)/P.C_H(P)$ et, par suite, un homomorphisme injectif

3.2.1. $$\eta : W \to E_G(P_\gamma) \subset \widetilde{A}ut(P) \ .$$

De plus, d'après le théorème principal de [5], on sait qu'il existe une unique P-algèbre intérieure $\mathcal{O}$-simple telle que l'on ait

$$A'_{\gamma'} \cong S \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \mathcal{O}P$$

et l'image de tout $u \in P$ dans S^* soit de déterminant un. On remarquera que l'unicité force W à fixer la classe d'isomorphisme de S et par suite, on a

3.2.3. $$\eta(W) \subset F_S(P_\pi)$$

où π est l'unique point de P sur S (*cf.* [3], proposition 2.18).

3.3. Troisièmement, nous allons supposer que b' satisfait à la condition 1.3.1. D'une manière explicite, ***nous supposons qu'il existe un p'-sous-groupe I de G tel que $H \subset N_G(I)$, $H \cap I = \{1\}$ et, en posant $e_I = \frac{1}{|I|} \sum_{y \in I} y$ dans $\mathcal{O}I$, on ait***

3.3.1. $$b'e_I A b'e_I = e_I \mathcal{O} N b'e_I \ ;$$

ceci, qui est *a priori* plus faible que la condition 1.3.1, nous suffit. Notons que la multiplication par e_I définit un homomorphisme injectif de H-algèbre intérieures

3.3.2. $$A' \to Res_H^G(A) \ .$$

Nous sommes en mesure d'énoncer notre résultat principal.

THÉORÈME 3.4. *Avec les notations et les trois hypothèses ci-dessus :*

3.4.1. *On a* $\eta(W) = E_G(P_\gamma)$ *et en particulier* $N_G(P_\gamma) \subset N$.

3.4.2. *Pour tout* $i' \in \gamma'$, *l'idempotent* $i'e_I$ *appartient à* γ .

3.4.2. *Il existe une* P*-algèbre intérieure* C *telle que l'on ait*

$$A_\gamma \cong S \underset{\mathcal{O}}{\otimes} C \quad et \quad C = \bigoplus_{w \in W} \bigoplus_{u \in P} \mathcal{O}(u.c_w)$$

où $c_w \in C^*$ *normalise l'image de* P *dans* C^* *et induit sur* P *l'exomorphisme* $\eta(w)$ *pour tout* $w \in W$. *En particulier, on a*

$$J(\mathcal{O}P).C = C.J(\mathcal{O}P) \quad et \quad C^P \subset \mathcal{O}c_1 + J(\mathcal{O}P).C \ .$$

3.4.4. *Il existe un isomorphisme d'algèbres* $C/J(\mathcal{O}P).C \cong k_*\hat{W}^\gamma$ *qui, pour tout* $w \in W$, *envoie la classe de* c_w *sur un élément de* $\hat{W}^\gamma$ *qui relève* w .

3.5. On remarquera que les conclusions du théorème sont indépendantes du choix de I et que, pour tout $w \in W$, on peut remplacer c_w par n'importe quel élément de $P.(C^P)^* c_w$. Disons tout de suite que l'on obtient l'algèbre de source lorsque W est un p'-groupe : pour énoncer ceci proprement, rappelons que dans ce cas il existe une extension, unique à isomorphisme près, de P par W associée à η (*cf.*[4], 4.3 et 4.4) ; on la désigne par $P \circ W$ et on note $P \circ \hat{W}^\gamma$ le k*-groupe déterminé par $P \circ W$ et $\hat{W}^\gamma$ (*cf.* [4], 5.7).

COROLLAIRE 3.6. *Avec les notations et les trois hypothèses ci-dessus, supposons en plus que* W *soit un* p'*-groupe. Alors* P *est un groupe de défaut et* $S \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_*(P \circ \hat{W}^\gamma)$ *une algèbre de source du bloc* b *de* G *;*

Démonstration. Comme P est un groupe de défaut de b', il l'est du bloc de $P.C_G(P)$ déterminé par γ et γ' ; de plus, il est clair que $|E_G(P_\gamma)|$ est l'indice d'inertie de ce bloc ; par conséquent, d'après 3.4.1, P est aussi un groupe de défaut de b (voir par exemple [4], 14.5), donc A_γ une algèbre de source de ce bloc (*cf.* 2.4 ou [3], définition 3.2).

D'autre part, en désignant par $\hat{X}$ l'image réciproque de $\eta(W)$ dans le normalisateur de l'image de P dans C^* , considérée comme k*-groupe (*cf.* [4], remarque 5.3), et par X le k*-quotient de $\hat{X}$, il est clair que l'on a une suite exacte

$$1 \to P.(1 + J(C^P)) \to X \to W \to 1$$

(car $(C^P)^* \cong k^* \times (1 + J(C^P))$) et comme W est un p'-groupe, elle est scindée (*cf.* [4], proposition 4.6 et lemmes 4.9 et 4.10). Désignons par $\hat{W}$ l'image réciproque dans $\hat{X}$ d'un complément de $P.(1 + J(C^P))$ dans X ; alors, quitte à modifier notre choix des c_w , nous pouvons supposer dans 3.4.3 que $c_w \in \hat{W}$ pour tout $w \in W$. On en déduit aussitôt que $\hat{W} \cong \hat{W}^\gamma$ et que $C \cong \mathcal{O}_*(P \circ \hat{W}^\gamma)$.

3.7. Montrons tout de suite comment utiliser le théorème 3.4 pour déterminer un mineur de la matrice $\mathcal{D}$ – égal à $\mathcal{D}$ lorsque W est un p'-groupe – des nombres de décomposition généralisés de b à partir de la connaissance de C et d'une fonction "signe" $\omega : P \to \{1, -1\}$ associée à S (*cf.* [5], 1.11.1). Dorénavant, nous supposons que $\mathcal{O}$ est de caractéristique zéro et désignons par $\mathcal{K}$ son corps des fractions. Rappelons que $\mathcal{D}$ est indexée par les couples (χ, u_δ) , où χ parcourt l'ensemble $Irr_{\mathcal{K}}(G, b)$ et u_δ un système de représentants U des classes de conjugaison des éléments pointés locaux sur A tels que $u_\delta \in G_\alpha$, et que la valeur $\chi^\delta(u)$ associée au couple (χ, u_δ) est $\chi(u.j)$ où $j \in \delta$ (*cf.* [2], corollaire 4.4). Or, d'une part il est clair que l'induction de $\mathcal{K} \otimes_\mathcal{O} A_\gamma$ à $\mathcal{K} \otimes_\mathcal{O} A_\alpha$ définit une application injective

3.7.1. $$Irr_{\mathcal{K}}(A_\alpha) \to Irr_{\mathcal{K}}(G, b)$$

dont l'image est formée des $\chi \in Irr_{\mathcal{K}}(G, b)$ ayant une restriction χ^γ à A_γ (*i.e.* $\chi^\gamma = \chi \circ f_\gamma$) non nulle, auquel cas $\chi^\gamma \in Irr_{\mathcal{K}}(A_\gamma)$ et χ est l'image de χ^γ par l'application 3.7.1.

3.8. D'autre part, il est clair que tout élément pointé local u_δ sur A_γ s'identifie à un sur A tel que $u_\delta \in P_\gamma$, donc tel que $u_\delta \in G_\alpha$ (*cf.* 2.4) et alors on a évidemment

3.8.1. $$(\chi^\gamma)^\delta(u) = \chi^\delta(u)$$

pour tout $\chi \in Irr_{\mathcal{K}}(G, b)$ tel que $\chi^\delta \neq 0$. De plus, on sait que la catégorie des fusions locales sur A_γ est une sous-catégorie pleine de la catégorie locale de G_α (*cf.* 2.6.3 et 2.7.2 ou [3], corollaire 3.6) ; en particulier, si v_ϵ est un autre élément pointé local sur A_γ , on a

3.8.2. $$E_G(\langle v \rangle_\epsilon, \langle u \rangle_\delta) = F_{A_\gamma}(\langle v \rangle_\epsilon, \langle u \rangle_\delta)$$

et, par suite, u_δ et v_ϵ sont G-conjugués (sur A) si et seulement s'il existe $\widetilde{\varphi} \in F_{A_\gamma}(\langle v \rangle_\epsilon, \langle u \rangle_\delta)$ tel que $\varphi(v) = u$.

3.9. Enfin, l'isomorphisme $A_\gamma \cong S \otimes_\mathcal{O} C$ induit, d'une part, une bijection

3.9.1. $$Irr_{\mathcal{K}}(C) \longleftrightarrow Irr_{\mathcal{K}}(A_\gamma)$$

qui envoie $\lambda \in Irr_{\mathcal{K}}(C)$ sur (l'image de) $\tau \otimes \lambda$, où $\tau : \mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}} S \to \mathcal{K}$ est l'application définie par la trace (*i.e.* $Irr_{\mathcal{K}}(S) = \{\tau\}$), et, d'autre part, une bijection entre les ensembles des éléments pointés locaux sur C et sur A_γ qui envoie $u_\delta \in P_\gamma$ sur u_{δ^0}, où δ^0 désigne l'unique point local de $\langle u \rangle$ sur C tel que toute décomposition dans $A_\gamma^{\langle u \rangle}$ d'un élément de l'image $1 \otimes \delta^0$ rencontre δ (*cf.* [5], théorème 5.3). Alors, en raisonnant comme dans [5], 1.12, on voit aisément que, pour tout $\lambda \in Irr_{\mathcal{K}}(C)$, on a (*)

3.9.2. $$(\tau \otimes \lambda)^\delta(u) = \omega(u)\lambda^{\delta^0}(u)$$

où $\omega(u)$ est le "signe" de la trace de l'image de u dans S^* (*cf.* [5], 1.11.1). De plus, si v_ϵ est un autre élément pointé local sur A_γ , nous allons démontrer que

3.9.3. $$F_{A_\gamma}(\langle v \rangle_\epsilon, \langle u \rangle_\delta) = F_C(\langle v \rangle_{\epsilon^0}, \langle u \rangle_{\delta^0})$$

où $\langle v \rangle_{\epsilon^0}$ est l'image de v_ϵ par la bijection ci-dessus.

3.10. Plus généralement, si Q_δ et R_ϵ sont des groupes pointés locaux sur A_γ , on a

3.10.1 $$F_{A_\gamma}(R_\epsilon, Q_\delta) = F_C(R_{\epsilon^0}, Q_{\delta^0}) \subset F_S(R_\rho, Q_\sigma)$$

où σ et ρ sont respectivement les uniques points locaux de Q et R sur S (*cf.* [5], corollaire 5.8), Q_{δ^0} et R_{ϵ^0} étant respectivement les images de Q_δ et R_ϵ par la bijection induite par l'isomorphisme $A_\gamma \cong S \otimes_{\mathcal{O}} C$ (*cf.* [5], théorème 5.3). Notons que, comme S possède une $\mathcal{O}$-base P-stable contenant l'unité (*cf.* 3.2.2 et [5], théorème 1.6), il suffit de démontrer que $F_S(R_\rho, Q_\sigma)$ contient les deux membres de l'égalité (*cf.* [5], théorème 5.3). De plus, si $R \subset Q$, on a forcément $R_\rho \subset Q_\sigma$ car R a alors un point local sur S_σ (*cf.* [5], corollaire 5.8). Par conséquent, il suffit de le démontrer lorsque $|R| = |Q|$ (*cf.* [3], 1.11).

3.11. Montrons d'abord que $F_S(R_\rho, Q_\sigma)$ contient $F_{A_\gamma}(R_\epsilon, Q_\delta)$. D'après 3.4.3, la somme $\sum_{u \in P}(1-u).C$ est un idéal (bilatère) de C qui admet un complément dans C en tant que $\mathcal{O}$-module ; en particulier, il existe un $\mathcal{C}$-module N $\mathcal{O}$-libre de rang fini, sur lequel P opère trivialement ; par suite, chaque sous-groupe de P n'a qu'un unique point sur $E = End_{\mathcal{O}}(N)$ et tout exomorphisme injectif entre deux

(*) En fait, d'après le théorème 2.2 dans [1], on a $(\tau \otimes \lambda)^\delta(u) = \tau^\sigma(u)\lambda^{\delta^0}(u)$ où σ est l'unique point local de $\langle u \rangle$ sur S (*cf.* [5], corollaire 5.8).

sous-groupes de P est une E-fusion entre les groupes pointés correspondants ; par conséquent, on a (*cf.* [5], théorème 5.3)

3.11.1 $$F_{S\underset{\mathcal{O}}{\otimes}E}(R_{\rho^0}, Q_{\sigma^0}) \subset F_S(R_\rho, Q_\sigma)$$

où σ^0 et ρ^0 sont respectivement les uniques points locaux de Q et R sur $S \otimes_{\mathcal{O}} E$ (*cf.* [5], corollaire 5.8). D'autre part, en désignant par $g : C \to E$ l'homomorphisme structurel, il est clair que nous pouvons choisir N de sorte que $Ker(g) = \sum_{u\in P}(1-u).C$, donc que $Ker(g) \subset J(C)$, auquel cas on a $m(\widetilde{id}\otimes\widetilde{g})^{\epsilon}_{\rho^0} \neq 0$. Il résulte alors de 2.7.1 que, pour tout $\widetilde{\varphi} \in F_{A_\gamma}(R_\epsilon, Q_\delta)$, il existe $\nu^0 \in \mathcal{P}_{S\underset{\mathcal{O}}{\otimes}E}(Q)$ tel que

3.11.2. $$m(\widetilde{id}\otimes\widetilde{g})^{\epsilon}_{\rho^0} \neq 0 \quad et \quad \widetilde{\varphi} \in F_{S\underset{\mathcal{O}}{\otimes}E}(R_{\rho^0}, Q_{\sigma^0}) \ ;$$

or, comme $|Q| = |R|$, on a $(S\otimes_{\mathcal{O}} E)_{\rho^0} \cong Res_\varphi((S\otimes_{\mathcal{O}} E)_{\nu^0})$ (*cf.* 2.5.1) et par suite, ν^0 est un point local, donc égal à σ^0 (*cf.* [5], corollaire 5.8). D'après 3.11.1 et 3.11.2, on a donc $\widetilde{\varphi} \in F_S(R_\rho, Q_\sigma)$.

3.12. Montrons maintenant que $F_S(R_\rho, Q_\sigma)$ contient $F_C(R_{\epsilon^0}, Q_{\delta^0})$. Soit $\widetilde{\varphi} \in F_C(R_{\epsilon^0}, Q_{\delta^0})$; il suffit de démontrer qu'il existe $\psi \in Aut(P)$ tel que

3.12.1 $$\widetilde{\psi} \in F_S(P_\pi) \quad et \quad \varphi(v) = \psi(v) \quad pour\ tout\ v \in R\ .$$

En effet, en considérant alors la S-fusion de R_ρ dans P_π obtenue en composant $\widetilde{\psi}$ avec celle définie par l'inclusion $R_\rho \subset P_\pi$, il résulte de 2.6.2 qu'il existe $\nu \in \mathcal{P}_S(Q)$ tel que

3.12.2 $$Q_\nu \subset P_\pi \quad et \quad \widetilde{\varphi} \in F_S(R_\rho, Q_\nu)$$

et comme $|R| = |Q|$, on obtient à nouveau que ν est local, d'où $\sigma = \nu$ (*cf.* [5], corollaire 5.8). Soient $i \in \delta^0$, $j \in \epsilon^0$ et $c \in C^*$ tel que $(v.j)^c = \varphi(v).i$ pour tout $v \in R$ (*cf.* [3], proposition 2.12) ; d'après 3.4.3, C possède une $\mathcal{O}$-base $(P \times P)$-stable par multiplication à droite et à gauche et par suite, d'après le lemme 4.3 ci-dessous, $\sum_{v\in R}\mathcal{O}(v.j)$ admet un complément dans C en tant que $\mathcal{O}R$-bimodules, d'où il résulte aussitôt que $\sum_{v\in R}\mathcal{O}(v.jc)$ est un facteur direct indécomposable de C en tant que $\mathcal{O}(R\times Q)$-modules. De plus, considérons l'homomorphisme

3.12.3. $$\delta_\varphi : R \to R \times Q$$

qui envoie $v \in R$ sur $(v, \varphi(v))$; il est clair que l'image de δ_φ est un vortex du $\mathcal{O}(R\times Q)$-module $\sum_{v\in R}\mathcal{O}(v.jc)$. Or, d'après 3.4.3, nous connaissons tous les facteurs directs indécomposables de C en tant que $\mathcal{O}P$-bimodule, donc en tant que $\mathcal{O}(R \times Q)$-module et une simple inspection des vortex prouve l'existence de $\psi \in Aut(P)$ satisfaisant à la condition 3.12.1 (car $\eta(W) \subset F_S(P_\pi)$).

4. BIMODULES DE PERMUTATIONS ET FUSIONS

4.1. Soient P un p-groupe fini, B une P-algèbre intérieure et γ un point local de P sur B . Pour démontrer le théorème 3.4, nous allons décrire l'action des B-fusions de P_γ dans P_γ sur certains facteurs directs de B_γ considéré comme $\mathcal{O}P$-bimodule par multiplication à droite et à gauche. Pour tout $\varphi \in Aut(P)$, on désigne par

4.1.4. $$\delta_\varphi : P \to P \times P$$

l'homomorphisme qui envoie $u \in P$ sur $(u, \varphi(u))$ et on considère le $\mathcal{O}P$-bimodule indécomposable

4.1.2. $$M_\varphi = Ind_{\delta_\varphi(P)}^{P\times P}(\mathcal{O})$$

où $\mathcal{O}$ désigne ici le $\mathcal{O}(\delta_\varphi(P))$-module trivial ; on remarquera que $\delta_\varphi(P)$ est un vortex de M et que, pour tout $\psi \in Aut(P)$, on a $M_\psi \cong M_\varphi$ si et seulement si $\widetilde{\psi} = \widetilde{\varphi}$; de plus, M_{id} est isomorphe à $\mathcal{O}P$ considéré comme $\mathcal{O}P$-bimodule.

PROPOSITION 4.2.– *Avec les notations ci-dessus, soit $n \geq 0$ et considérons B_γ en tant que $\mathcal{O}P$-bimodule. Les assertions suivantes sont alors équivalentes :*
4.2.1. *Le $\mathcal{O}P$-bimodule $(\mathcal{O}P)^n$ est facteur direct de B_γ .*
4.2.2. *Il existe $\widetilde{\varphi} \in F_B(P_\gamma)$ tel que $(M_\varphi)^n$ soit facteur direct de B_γ .*
4.2.3. *La somme $(\oplus_{\widetilde{\varphi}\in F_B(P_\gamma)} M_\varphi)^n$ est facteur direct de B_γ .*

Démonstration.– Nous pouvons supposer que $B_\gamma = B$ (*cf.* [3], proposition 2.14). Soient $\widetilde{\varphi} \in F_B(P_\gamma)$ et $b \in B^*$ tel que $u.b = b.\varphi(u)$ pour tout $u \in P$ (*cf.* [3], proposition 2.12) ; si M et N sont des sous-bimodules de B tels que

4.2.4. $$B = M + N \quad et \quad \{0\} = M \cap N \ ,$$

il est clair que Mb et Nb sont encore des sous-bimodules de B qui satisfont à la même condition 4.2.4 ; or, il est clair que $M \cong (\mathcal{O}P)^n$ équivaut à $Mb \cong (M_\varphi)^n$; par conséquent, 4.2.2 entraîne 4.2.1, et 4.2.1 entraîne à son tour 4.2.3 car la famille $\{M_\varphi\}_{\widetilde{\varphi}\in F_B(P_\gamma)}$ est formée de $\mathcal{O}P$-bimodules mutuellement non isomorphes.

Les deux propositions suivantes sont des critères garantissant qu'en tant que $\mathcal{O}P$-bimodules, $\mathcal{O}P$ soit facteur direct de B_γ .

PROPOSITION 4.3.– *Avec les notations ci-dessus, supposons que B possède une $\mathcal{O}$-base $(P \times P)$-stable par multiplication à droite et à gauche. Alors B_γ possède une $\mathcal{O}$-base $(P \times P)$-stable qui contient l'unité et en particulier, en tant que $\mathcal{O}P$-bimodules, l'image canonique de $\mathcal{O}P$ dans B_γ admet un complément.*

Démonstration.– Dire que B possède une $\mathcal{O}$-base $(P\times P)$-stable équivaut à dire que les sources des facteurs directs indécomposables de B en tant que $\mathcal{O}P$-bimodule sont triviales ; comme B_γ est facteur direct de B en tant que $\mathcal{O}P$-bimodules, l'unicité de décomposition implique que B_γ possède aussi une $\mathcal{O}$-base $(P \times P)$-stable X ; comme γ est local, il existe $b \in X \cap B_\gamma^P$ tel que $Br_P(b) \not\subset J(B_\gamma(P))$ et comme $B_\gamma(P)/J(B_\gamma(P)) \cong \mathrm{k}$, b est inversible. Alors Xb^{-1} est une $\mathcal{O}$-base $(P \times P)$-stable de B_γ qui contient l'unité.

PROPOSITION 4.4.– *Avec les notations ci-dessus, soient $n \geq 0$ et S une P-algèbre intérieure $\mathcal{O}$-simple ayant une $\mathcal{O}$-base P-stable par conjugaison qui contient l'unité. Alors, en tant que $\mathcal{O}P$-bimodules, $(\mathcal{O}P)^n$ est facteur direct de B si et seulement si $(\mathcal{O}P)^{n\, dim_{\mathrm{k}}(S(P))}$ est facteur direct de $S \otimes_{\mathcal{O}} B$.*

Démonstration.– Posons $d = dim_{\mathrm{k}}(S(P))$ et $\delta = \delta_{id}$; puisque $\mathcal{O}P \cong Ind_{\delta(P)}^{P\times P}(\mathcal{O})$, si $B \cong (\mathcal{O}P)^n \oplus M$ où M est un $\mathcal{O}P$-bimodule, on a

4.4.1. $$S\underset{\mathcal{O}}{\otimes}B \cong Ind_{\delta(P)}^{P\times P}(Res_{\delta(P)}^{P\times P}(S))^n \oplus (S\underset{\mathcal{O}}{\otimes}B)$$

en tant que $\mathcal{O}P$-bimodules ; or, d'après nos hypothèses, $\mathcal{O}^d$ est facteur direct de $Res_{\delta(P)}^{P\times P}(S)$ (*cf.* [4], 2.8.4) ; par suite, $(\mathcal{O}P)^{nd}$ est facteur direct de $S \otimes_{\mathcal{O}} B$.

Réciproquement, supposons que $(\mathcal{O}P)^{nd}$ soit facteur direct de $S \otimes_{\mathcal{O}} B$; d'après ce que l'on vient de démontrer, $(\mathcal{O}P)^{nd^2}$ est alors facteur direct de $S^0 \otimes_{\mathcal{O}} S \otimes_{\mathcal{O}} B$ en tant que $\mathcal{O}P$-bimodules. Or, on a $S^0 \otimes_{\mathcal{O}} S \cong End_{\mathcal{O}}(Res_{\delta(P)}^{P\times P}(S))$ en tant que P-algèbres intérieures et en particulier, comme $\mathcal{O}$ est facteur direct de $Res_{\delta(P)}^{P\times P}(S)$, il existe un $\mathcal{O}P$-bimodule N tel que $S^0 \otimes_{\mathcal{O}} S \cong \mathcal{O}^{d^2} \oplus N$, d'où il résulte qu'en tant que $\mathcal{O}P$-bimodules

4.4.2. $$S^0\underset{\mathcal{O}}{\otimes}S\underset{\mathcal{O}}{\otimes}B \cong B^{d^2} \oplus (N\underset{\mathcal{O}}{\otimes}B) .$$

De plus, comme $(S^0 \otimes_{\mathcal{O}} S \otimes_{\mathcal{O}} B)(P) \cong S^0(P) \otimes_{\mathrm{k}} S(P) \otimes_{\mathrm{k}} B(P)$ en tant que k-algèbres (*cf.* [5], proposition 5.6), l'isomorphisme 4.4.2 force $(N \otimes_{\mathcal{O}} B)(\delta(P)) = \{0\}$ (*cf.* [4], 2.6) et en particulier, le $\mathcal{O}P$-bimodule $\mathcal{O}P$ n'est pas facteur direct de $N \otimes_{\mathcal{O}} B$ (car $(\mathcal{O}P)(\delta(P)) \cong \mathrm{k}Z(P)$). Par conséquent, en tant que $\mathcal{O}P$-bimodules, $(\mathcal{O}P)^n$ est facteur direct de B .

Notre dernière proposition exhibe une situation extrême où la structure de $\mathcal{O}P$-bimodule de B_γ nous renseigne sur celle d'algèbre : elle fournit l'argument clé de notre démonstration du théorème 3.4. Pour abréger, posons $F_B(P_\gamma) = F$.

PROPOSITION 4.5.– *Avec les notations ci-dessus, supposons que l'on ait $B_\gamma \cong \oplus_{\tilde{\varphi}\in F} M_\varphi$ en tant que $\mathcal{O}P$-bimodules. Alors on a*

4.5.1.
$$B_\gamma = \bigoplus_{\tilde{\varphi}\in F}\ \bigoplus_{u\in P} \mathcal{O}(u.b_\varphi)$$

où $b_\varphi \in B_\gamma^*$ normalise l'image de P dans B_γ^* et induit l'automorphisme φ sur P pour tout $\tilde{\varphi} \in F$. En particulier,

4.5.2.
$$J(\mathcal{O}P).B = B.J(\mathcal{O}P) \quad , \quad B^P \subset \mathcal{O}b_{id} + J(\mathcal{O}P).B \quad et \quad B/J(\mathcal{O}P).B \cong \mathrm{k}_*\hat{F}^\gamma \ .$$

Démonstration : Notre hypothèse entraîne en particulier l'existence d'une $\mathcal{O}$-base $(P \times P)$-stable de B_γ et d'après la proposition 4.3, l'image canonique de $\mathcal{O}P$ admet un complément dans B_γ en tant que $\mathcal{O}P$-bimodules ; alors pour chaque $\tilde{\varphi} \in F$, en choisissant $b_\varphi \in B_\gamma^*$ tel que $u.b_\varphi = b_\varphi.\varphi(u)$ pour tout $u \in P$, il est clair que $\sum_{u\in P} \mathcal{O}(u.b_\varphi)$ admet aussi un complément dans B_γ en tant que $\mathcal{O}P$-bimodules ; par conséquent, d'après le lemme 14.4 dans [4], la double somme $\sum_{\tilde{\varphi}\in F}\sum_{u\in P} \mathcal{O}(u.b_\varphi)$ est directe et admet un complément dans B_γ , ce qui prouve l'égalité 4.5.1. Le reste demande une simple vérification.

4.6. Dorénavant, nous démontrons le théorème 3.4. Reprenons les notations de la section 3 et choisissons $i' \in \gamma'$; alors P fixe $i'e_I$ et nous considérons $i'e_IAi'e_I$ comme P-algèbre intérieure ; de plus, nous pouvons supposer que $A'_{\gamma'} = i'a'i'$ (et que $f_{\gamma'}$ est l'inclusion). L'homomorphisme 3.3.2 induit un homomorphisme unitaire injectif de P-algèbres intérieures

4.6.1.
$$i'A'i' \to i'e_IAi'e_I \ ;$$

en particulier, d'après 3.2.2, on a donc un homomorphisme unitaire injectif de P-algèbres

4.6.2.
$$S \to i'e_IAi'e_I \ ;$$

par conséquent, en considérant la sous-algèbre C de $i'e_IAi'e_I$ formée des éléments qui commutent aux éléments de l'image de S , il est clair que C admet une unique structure de P-algèbre intérieure telle que l'on ait (*cf.* [4], 2.5.4)

4.6.3.
$$i'e_IAi'e_I \cong S \underset{\mathcal{O}}{\otimes} C$$

par un isomorphisme compatible avec l'inclusion $C \subset i'e_I A i' e_I$ et l'homomorphisme 4.6.2 ci-dessus.

4.7. D'autre part, d'après 3.3.1, on a

4.7.1. $$i'e_I A i'e_I = \sum_{w \in W} i'e_I n_w A' i' e_I$$

où $n_w \in N_N(P_\gamma)$ relève w (*cf.* 3.1.2) ; or, comme n_w stabilise aussi γ' , il existe $a'_w \in (A'^P)^*$ tel que $i'^{n_w a'_w} = i'$; par conséquent, 4.7.1 devient

4.7.2. $$i'e_I A i'e_I = \sum_{w \in W} e_I n_w a'_w e_I i' A' i'$$

et en particulier, d'après 3.2.2 et 4.6.3, on obtient

4.7.3. $$rang_{\mathcal{O}}(C) \leq |W|\ |P|\ .$$

4.8. Comme $Br_P(e_I) = 1$ (*cf.* 3.1.1 et 3.3), on a $Br_P(i'e_I) = Br_P(i') \neq 0$ (car $A'(P) \cong A(P)$) et par suite, γ provient d'un point local de P sur $i'e_I A i'e_I$, donc sur $S \otimes_{\mathcal{O}} C$ (*cf.* 4.6.3) que l'on note toujours γ . Maintenant, il résulte du théorème 5.3 dans [5] que P possède un unique point local γ^0 sur C tel que toute décomposition dans $(S \otimes_{\mathcal{O}} C)^P$ d'un élément de l'image de $1 \otimes \gamma^0$ rencontre γ , et que l'on a

4.8.1. $$F_{S \underset{\mathcal{O}}{\otimes} C}(P_\gamma) \cap F_S(P_\pi) = F_C(P_{\gamma^0}) \cap F_S(P_\pi)$$

(rappelons que π est l'unique point de P sur S) ; en particulier γ provient donc d'un point local de P sur $S \otimes_{\mathcal{O}} C_{\gamma^0}$ autrement dit, A_γ se plonge dans $S \otimes_{\mathcal{O}} C_{\gamma^0}$ (*cf.* [3], 1.6).

4.9. Puisque A possède manifestement une $\mathcal{O}$-base $(P \times P)$-stable, il résulte de la proposition 4.3 qu'en tant que $\mathcal{O}P$-bimodule $\mathcal{O}P$ est facteur direct de A_γ , donc de $S \otimes_{\mathcal{O}} C_{\gamma^0}$ d'après ce qui précède et de C_{γ^0} d'après la proposition 4.4. D'autre part, on sait que $E_G(P_\gamma) = F_{S \otimes_{\mathcal{O}} C}(P_\gamma)$ (*cf.* 2.6.3 et 2.7.2) et par suite, d'après 3.2.3 et 4.8.1, $F_C(P_{\gamma^0})$ contient $\eta(W)$. Il résulte alors de la proposition 4.2 que forcément

4.9.1. $$rang_{\mathcal{O}}(C_{\gamma^0}) \geq |F_C(P_{\gamma^0})|\ |P| \geq |W|\ |P|\ ;$$

d'après 4.7.3, on a donc l'égalité. On en déduit que

4.9.2 $$C \cong C_{\gamma^0} \quad et \quad \eta(W) = F_C(P_{\gamma^0})$$

et d'après 4.2.3, l'hypothèse de la proposition 4.5 est satisfaite par C ; d'après cette proposition, on a donc

4.9.3. $$C = \bigoplus_{w\in W}\bigoplus_{u\in P} \mathcal{O}(u.c_w)$$

où $c_w \in C^*$ normalise l'image de P dans C^* et induit sur P l'exomorphisme $\eta(w)$ pour tout $w \in W$, et en particulier

4.9.4. $J(\mathcal{O}P).C = C.J(\mathcal{O}P)$, $C^P \subset \mathcal{O}c_1 + J(\mathcal{O}P).C$ *et* $C/J(\mathcal{O}P).C \cong k_*\hat{W}^{\gamma^0}$

De plus, d'après 3.5.3 dans [5], on a $\hat{W}^{\gamma^0} \cong \hat{W}^{\gamma}$.

4.10. D'après ce qui précède, pour démontrer 3.4.2, 3.4.3 et 3.4.4, il suffit de prouver maintenant que l'unité est primitive dans $(S \otimes_{\mathcal{O}} C)^P$ ou, d'une manière équivalente, dans l'image de $(S \otimes_{\mathcal{O}} C)^P$ dans $S \otimes_{\mathcal{O}} k_*\hat{W}^{\gamma}$ (*cf.* 4.9.4) ; or, comme $(S \otimes_{\mathcal{O}} C)(P) \cong C(P)$ (*cf.* [5], 5.6.1), on a $(S \otimes_{\mathcal{O}} C)^P = S^P \otimes_{\mathcal{O}} C^P + Ker(Br_P)$ et il est clair que l'image de $(S \otimes_{\mathcal{O}} C)^P_Q$ est contenue dans $(S \otimes_{\mathcal{O}} k_*\hat{W}^{\gamma})^P_Q$ pour tout sous-groupe Q de P ; par conséquent, l'image de $(S \otimes_{\mathcal{O}} C)^P$ dans $S \otimes_{\mathcal{O}} k_*\hat{W}^{\gamma}$ est contenue dans $S^P \otimes 1 + \Sigma_Q\, S^P_Q \otimes k_*\hat{W}^{\gamma}$ où Q parcourt l'ensemble des sous-groupes propres de P , et il suffit de tenir compte du fait que l'unité de S appartient à π .

4.11. Enfin, comme $\mathcal{O}P$ est facteur direct de A_γ en tant que $\mathcal{O}P$-bimodules, d'après la proposition 4.2 le $\mathcal{O}P$-bimodule A_γ possède au moins un facteur direct indécomposable de vortex $\delta_\varphi(P)$ pour chaque $\widetilde{\varphi} \in E_G(P_\gamma)$ (*cf.* 2.6.3 et 2.7.2) ; or, d'après 4.6.3 et 4.9.3, pour chaque facteur direct indécomposable M du $\mathcal{O}P$-bimodule A_γ , il existe $w \in W$ tel qu'en désignant par ψ l'automorphisme de P induit par c_w, $\delta_\psi(P)$ contienne un vortex de M ; par conséquent, on a $E_G(P_\gamma) \subset \eta(W)$, d'où l'égalité (*cf.* 3.2.1).

Remarque 4.12.– Une fois qu'on sait que $\eta(W) = F_C(P_{\gamma^0})$ (*cf.* 4.9.2), l'égalité $\eta(W) = E_G(P_\gamma)$ résulte aussi de 3.10.1, dont la démonstration n'utilise pas cette égalité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BROUÉ, L. PUIG - ***Characters and local structure in G-algebras***, J. of Algebra 63 (1980), 306-317.

[2] L. PUIG - ***Pointed groups and construction of characters***, Math. Z. 176 (1981), 265-292.

[3] L. PUIG - ***Local fusion in block source algebras***, J. of Algebra 104 (1986), 358-369.

[4] L. PUIG - ***Pointed groups and construction of modules***, J. of Algebra 116 (1986), 7-129.

[5] L. PUIG - ***Nilpotent blocks and their source algebras***, Invent. Math. 93 (1988), 77-116.

Lluis PUIG

D.M.I. - ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
45 Rue d'Ulm
F-75005 PARIS