Astérisque

DANIEL BARLET

Filtration asymptotique et pôles de $\int_X |f|^{2\lambda} \square$

Astérisque, tome 179-180 (1989), p. 13-37
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1989__179-180__13_0>

FILTRATION ASYMPTOTIQUE ET POLES DE $\int_X |f|^{2\lambda} \square$

par Daniel BARLET

Abstract

We consider an "Asymptotic filtration" $F^\cdot$, following A.N. Varchenko'idea, on the cohomology of the Milnor'fiber of a germ $f : (\mathbb{C}^{n+1},0) \to (\mathbb{C}, 0)$ without assumption on the singularity of $\{f = 0\}$.

Then we give a relation between the nilpotent logarithm N of the unipotent part of the monodromy, the filtrations F and $\overline{F}^\cdot$ and the pôles of the meromorphic continuation of the distribution $\int |f|^{2\lambda} \square$.

This contains estimates of the integral shift of the roots of the Bernstein-Sato polynomial of f in term of the action of N on the filtration $F^\cdot$.

Introduction

Dans la première partie de cet article nous considérons, en suivant les idées de A.N. Varchenko (voir [V.1], [P], [Sc, St] ,[S.1] et [S.2]) une "filtration asymptotique" sur la cohomologie de la fibre de Milnor d'une fonction holomorphe. Nous ne faisons pas ici d'hypothèse sur les singularités de l'hypersurface $\{f=0\}$ et la définition n'utilise pas de désingularisation. Nous vérifions que notre construction redonne bien celle de A.N. Varchenko pour une singularité isolée et nous établissons l'inclusion

$$N(F^q\, Gr_\ell(W)) \subset F^{q-1}\, Gr_{\ell-2}(W)$$

où N désigne le logarithme nilpotent de la partie unipotente de la monodromie, où W désigne une filtration arbitraire pour laquelle N est de poids -2 et où $F^\cdot$ est la filtration asymptotique considérée.

Pour l'instant, le lien entre cette filtration asymptotique et la structure de Hodge mixte sur la cohomologie évanescente (voir [NA], [S.3]) n'est pas clair dans le cas d'une singularité non isolée.

Dans la seconde partie, nous montrons comment un raffinement des techniques que nous avons développées dans des articles antérieurs permet de relier N ainsi que les filtrations $F^{\cdot}$ et $\overline{F}^{\cdot}$ aux pôles du prolongement méromorphe de la distribution $\int_X |f|^{2\lambda} \square$.

On obtient ainsi des renseignements assez précis sur les décalages entiers des racines du polynôme de Bernstein-Sato à partir de la filtration $F^{\cdot}$. Ces résultats nous permettent aussi de préciser (et de corriger) les propriétés de symétrie pour les racines du polynôme de Bernstein-Sato de [B.4].

Signalons enfin que le résultat principal de cet article (la proposition fondamentale) est obtenu grâce à une amélioration technique importante, qui permet de mener à bien la preuve d'existence d'un pôle en $\lambda = -\lambda_0$ pour le prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2\lambda} df \wedge \omega \wedge \square$ où $df \wedge \omega$ est une forme holomorphe, la forme méromorphe relativement fermée ω ayant un développement asymptotique à l'origine (comme section du fibré de Gauss-Manin) présentant différents exposants, sous réserve que les exposants congrus à λ_0 modulo $\mathbb{Z}$ soient au moins égaux à λ_0.

§ 1 - Soit X une variété complexe lisse et connexe et soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non identiquement nulle. Nous noterons par $Y = f^{-1}(0)$ l'hypersurface des zéros de f et nous considèrerons les faisceaux de cohomologie du complexe de De Rham relatif de f sur Y. De manière précise, nous noterons, pour $p \in \mathbb{N}$, par $\mathcal{H}^p$ la restriction à Y du $p^{\text{ième}}$ faisceau de cohomologie du complexe de De Rham relatif localisé :

$$\Omega^{\cdot}_{X/f}[f^{-1}], d/f$$

où $\Omega^p_{X/f}[f^{-1}]$ est le quotient $\Omega^p_X[f^{-1}]/_{df\,\Omega^{p-1}_X[f^{-1}]}$, où $\Omega^p_X[f^{-1}]$ désigne le faisceau des germes de p-formes méromorphes sur X à pôles dans l'hypersurface Y

(on convient de poser $\Omega_X^{-1}[f^{-1}] \equiv 0$) et où la différentielle relative $d/_f$ de degré +1 est induite par passage au quotient de la différentielle de De Rham ordinaire agissant sur les formes méromorphes.

Remarque : Pour $p \geq 1$ le lemme de Poincaré holomorphe montre que le p-ième faisceau de cohomologie est de toute façon concentré sur Y (près de Y).

Soit $K = \mathbb{C}\{s\}[s^{-1}]$; on a pour chaque $x \in Y$ et chaque $p \geq 0$ une structure de K-espace vectoriel de dimension finie sur $\mathcal{H}_x^p$ qui est donnée par

$$g.\omega = f^*(g).\omega$$

pour $\omega \in \Omega_X^p[f^{-1}]_x$. Ceci fait des $\mathcal{H}^p$ des faisceaux $\mathbb{C}$-analytiquement constructibles sur Y de K-espaces vectoriels de dimensions finies. On a de plus sur $\mathcal{H}_x^p$ une K-connexion dite de "Gauss-Manin", $\forall x \in Y$ et $\forall p \in \mathbf{N}$: si $\omega \in \Omega^p[f^{-1}]_x$ est relativement fermée (i.e. si $d\omega \wedge df = 0$) alors il existe $\alpha \in \Omega^p[f^{-1}]_x$ vérifiant (d'après l'inclusion $\{df = 0\} \subset \{f = 0\}$ et le Nullstellensatz)

$$d\omega = df \wedge \alpha$$

On a alors $\nabla[\omega] = [\alpha]$ dans $\mathcal{H}_x^p$.

Posons pour $u \in \mathbf{R}$ et $p \in \mathbf{N}$

$$\Gamma^p(u) = \mathrm{Ker}(s\nabla \cdot u)^{n+1} \subset \mathcal{H}^p$$

où $\dim_{\mathbb{C}} X = n+1$.

Rappelons maitenant quelques résultats dont le lecteur trouvera des preuves détaillées dans [B.5].

Notons par H^p le faisceau constructible sur $Y = f^{-1}(0)$ dont la fibre en $x \in Y$ est le p-ième groupe de cohomologie à valeurs dans $\mathbb{C}$ de la fibre de Milnor de f en x. Ce faisceau est muni d'un automorphisme (constructible) de monodromie que nous noterons par T. Soit

$$H^p = \bigoplus_{u \in]-1,0]} H^p(u)$$

la décomposition spectrale de T où $H^p(u)$ désigne le sous faisceau spectral de T pour la valeur propre $e^{-2i\pi u}$.

Nous noterons par $-2i\pi N$ le logarithme nilpotent de la partie unipotente de T. Explicitement on pose

$$N/H^p(u) = -\frac{1}{2i\pi} \mathrm{Log}(e^{2i\pi u} T/H^p(u)).$$

Pour $x \in Y$ fixé il sera commode d'identifier l'espace vectoriel $H^p(u)_x$ avec l'espace vectoriel des sections horizontales (multiformes) du fibré de Gauss Manin de f en x qui sont associées au sous espace spectral de T pour la valeur propre $e^{-2i\pi u}$. Une telle identification nécessite le choix d'un point base dans le revêtement universel du disque pointé. Nous utiliserons cette identification de la manière suivante : soit $f : X_x \to D_x$ un représentant de Milnor(*) de f en x et choisissons $s_0 \in D_x^* \cap \mathbb{R}^+$ un point base. Nous sous-entendrons le choix du point base dans le revêtement universel de D_x^* en prenant $\mathrm{Log}\, s_0 \in \mathbb{R}$. Nous identifierons alors l'espace vectoriel $H^p(u)_x$ avec $H^p(f^{-1}(s_0),\mathbb{C})_{e^{-2i\pi u}}$ considéré comme l'espace des sections horizontales (déterminées par leur valeur au point $(s_0,\mathrm{Log}\, s_0)$) multiformes du sous fibré spectral pour $e^{-2i\pi u}$ du fibré de Gauss Manin $s \to H^p(f^{-1}(s),\mathbb{C})$.

Lemme 1 : On a pour chaque $u \in]-1,0]$ un isomorphisme de faisceaux $\mathbb{C}$-constructibles

$$\kappa : H^p(u) \to \Gamma^p(u)$$

qui est donné par :

$$\kappa(e) = \exp((\mathrm{Id}.u+N)\mathrm{Log}\, f)(e) \tag{1}$$

Remarque : $\Gamma^p(u)_x$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{H}_x^p$ et donc un espace vectoriel de sections méromorphes (uniformes) du fibré de Gauss Manin $s \to H^p(f^{-1}(s),\mathbb{C})$. De plus le fait que $(s\nabla-u)^{n+1}$ annule $\Gamma^p(u)_x$ montre que ces sections méromorphes prennent leurs valeurs dans le sous fibré spectral de la monodromie correspondant à la valeur propre $e^{-2i\pi u}$.

Via nos conventions précédentes, $e \in H^p(u)_x$ est considérée dans (1) comme section multiforme du fibré de Gauss-Manin. La formule (1) prendra un sens quand on aura constaté que le membre de droite est bien une section uniforme (et méromorphe) du fibré de Gauss-Manin qui est annulée par $(s\nabla-u)^{n+1}$ pour $\dim_{\mathbb{C}} X = n+1$. Ceci est alors facile à déduire de la régularité de la connexion de Gauss-Manin et du fait que la monodromie agit sur $H^p(u)$ via $\exp(-2i\pi(\mathrm{Id}.u+N))$ par définition de N.

Pour une preuve détaillée de ce lemme 1 nous renvoyons le lecteur à [B.5].

(*) Cette notion est définie de façon précise dans [B.2] ; elle correspond, bien sûr, à la situation étudiée par Milnor dans [$\mathcal{M}$] .

On a alors le

Lemme 2 : Dans les conditions ci-dessus, $\Gamma^p(u)$ est un sous-faisceau $\mathbb{C}$-constructible sur Y de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Pour chaque $m \in \mathbb{Z}$ la multiplication par f^m induit un isomorphisme de $\Gamma^p(u)$ sur $\Gamma^p(u+m)$.

On a la décomposition suivante de $\mathcal{H}^p$, qui correspond à la décomposition spectrale de la monodromie de :

$$\mathcal{H}^p = \bigoplus_{u \in]-1,0]} K.\Gamma^p(u)$$

De plus, cette décomposition est compatible à ∇ car $\Gamma^p(u)$ est stable par $s\nabla$ ■

Pour une preuve détaillée on pourra consulter [B.5].

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ définissons maintenant

$$\mathcal{H}^p(> \alpha) = \bigoplus_{\substack{u \in]-1,0] \\ m \in \mathbb{Z} \\ \underline{\text{et}}\ u+m \in]\alpha, \alpha+1]}} \mathbb{C}\{s\}\Gamma^p(u+m)$$

On remarquera que cette somme directe est finie. Donc, d'après ce qui précède, $\mathcal{H}^p(> \alpha)$ est un $\mathbb{C}\{s\}$-module libre de type fini pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$.

On a aussi $s\nabla\mathcal{H}^p(> \alpha) \subset \mathcal{H}^p(> \alpha)$ et même le

Lemme 3 : Si on a $\beta \leq \alpha$ alors $(s\nabla-\beta)$ est bijectif sur $\mathcal{H}^p(> \alpha)$ ■

Pour une preuve de ce lemme voir [B.5].

Pour $x \in Y$ et $\omega \in \mathcal{H}^p_x$ nous nous proposons maintenant de définir le terme principal de ω (supposée $\neq 0$ dans $\mathcal{H}^p_x$).

Pour $\omega \neq 0$ dans $\mathcal{H}^p_x$ posons :

$$\alpha(\omega) = \mathrm{Inf}\{\alpha \in \mathbb{R},\ \omega \in \mathcal{H}^p(> \alpha)\}.$$

On a alors le

Lemme 4 : Si $\omega \in \mathcal{H}^p_x$ et $\omega \neq 0$ alors $\alpha(\omega) \in \mathbb{R}$ et il existe un unique $w \in \Gamma^p(\alpha(\omega))-\{0\}$ tel que $\omega-w \in \mathcal{H}^p(> \alpha(\omega))$.

On appellera w le terme principal de ω ■

La finitude de $\mathcal{H}^p_x$ sur K assure que $\alpha(\omega)$ est fini (si $\omega \neq 0$) .

Alors on a $\omega \notin \mathcal{H}^p(> \alpha(\omega))$ car l'ensemble des α possibles avec $\Gamma^p(\alpha) \neq 0$ est discret (fini modulo $\mathbb{Z}$) d'après le lemme 2. On en déduit que $\alpha(\omega) = u+m$ avec $u \in]-1,0]$ et $m \in \mathbb{Z}$. D'après la décomposition en somme directe de $\mathcal{H}^p(> \alpha)$ pour $\alpha < \alpha(\omega)$ et assez voisin de $\alpha(\omega)$, on aura

$$\omega = \sum_{j=1}^{J} g_j \omega_j + g_0 \omega_0$$

où $\omega_j \in \Gamma^p(\alpha_j)$ avec $\alpha_j > \alpha(\omega)$ pour $j \neq 0$, $\alpha_0 = \alpha(\omega)$ et $g_j \in \mathbb{C}\{s\}$. Posons alors

$$g_0(s) = a+s\tilde{g}_0(s) \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{C},\ \tilde{g}_0 \in \mathbb{C}\{s\}, \text{ et}$$

$$w = a\omega_0 \in \Gamma^p(\alpha(\omega)).$$

On a $g_j\omega_j \in \mathcal{H}^p(> \alpha(\omega))$ $\forall j \neq 0$ et $s\tilde{g}_0(s).\omega_0 \in \mathcal{H}^p(> \alpha(\omega))$ aussi. Posons donc

$$\xi = \sum_{j=1}^{J} g_j \omega_j + s\tilde{g}_0.\omega_0$$

On aura alors $\xi \in \mathcal{H}^p(> \alpha(\omega))$ et $\omega = w+\xi$.

Si on avait $w = 0$ alors ω serait dans $\mathcal{H}^p(> \alpha(\omega))$ ce qui contredit la définition de $\alpha(\omega)$ comme on l'a vu plus haut. On a donc $w \neq 0$. L'unicité de w et de ξ est assurée par l'égalité

$$\Gamma^p(\alpha) \cap \mathcal{H}^p(> \alpha) = (0)$$

qui a lieu pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Ceci achève la preuve du lemme 4 ■

Nous sommes maintenant en mesure de définir une filtration asymptotique "à la Varchenko".

Définition : Soit $u \in]-1,0]$ et $m \in \mathbb{Z}$. Pour $p \in \mathbb{N}$ fixé et $x \in Y$ nous noterons par $\mathbf{F}_x^{p-m}(u)$ le sous $\mathbb{C}\{s\}$-module de

$$\mathcal{H}^p(u)_x = K.\Gamma^p(u)_x$$

engendré par les termes principaux en x de classe $[\omega] \in \mathcal{H}_x^p$ admettant un représentant ω vérifiant $df \wedge \omega \in \Omega_{X,x}^{p+1}$ (<u>holomorphe</u> en x) qui sont dans

$$\Gamma^p(u+m')_x \quad \text{pour} \quad m' \leq m \quad m' \in \mathbb{N} \ ■$$

La filtration définie ci-dessus respecte donc la décomposition en somme directe

$$\mathcal{H}_x^p = \bigoplus_{u\in]-1,0]} K.\Gamma^p(u)$$

Comme il est plus commode de penser en termes de filtration d'un espace vectoriel qu'en terme de sous fibrés d'un fibré vectoriel, nous noterons encore par $F^{p-m}(u)_x$ le sous espace vectoriel de $H^p(u)_x$ engendré par les $\kappa^{-1}(f^{-m}w)$ où $w \in \Gamma^p(u+m)_x$ est la partie principale en x d'une forme méromorphe $\omega \in \Omega^p[f^{-1}]_x$ relativement fermée et vérifiant $df\wedge\omega \in \Omega^{p+1}_{X,x}$.

On prendra garde à la normalisation choisie pour u qui n'est pas la normalisation habituelle. Elle est justifiée par la vérification suivante.

Lemme 5 : Si f admet une singularité isolée en $x \in Y = f^{-1}(0)$, alors la filtration de Hodge définie ci-dessus coïncide avec celle de Varchenko (notée ${}_V\mathbf{F}$) : quitte à remplacer X par une boule de Milnor pour f en x, ${}_V\mathbf{F}^q$ est le sous fibré du fibré de Gauss-Manin $s \to H^n(f^{-1}(s),\mathbb{C})$ qui est engendré par les parties principales des sections associées à $\omega \in \Omega^{n+1}_{X,x}$ (où ici $\dim_{\mathbb{C}} X = n+1$) ayant un poids $\alpha(\omega) \leq n-q$ (voir [V.1] en prenant garde au décalage pour la dimension ambiante).

A $\omega \in \Omega^{n+1}_{X,x}$ on associe ici la section donnée par $s \to \frac{\omega}{df}\Big|_{f^{-1}(s)}$ dans $H^n(f^{-1}(s),\mathbb{C})$.

Alors on a en x

$${}_V\mathbf{F}^q_x = \mathbf{F}^q_x = \bigoplus_{u\in]-1,0]} \mathbf{F}^q_x(u)$$

Démonstration : Soit $\omega \in \Omega^{n+1}_x$ et écrivons si $\frac{\omega}{df} \neq 0$ dans $\mathcal{H}_x$

$$\frac{\omega}{df} = w + \xi \quad \text{avec } w \in \Gamma^n(m+u)-\{0\}$$

$$\xi \in \mathcal{H}^n(> m+u) \quad \text{où } u \in]-1,0] \text{ et } m \in \mathbb{Z}.$$

Alors l'ordre au sens de Varchenko est $\alpha(\frac{\omega}{df}) = m+u$ et donc $w \in {}_V\mathbf{F}^{n-m}_x$.

Soit $v \in \Omega^n_x[f^{-1}]$ telle que $\omega = df\wedge v$.

On a alors $v = \frac{\omega}{df}$ dans $\mathcal{H}^n_x$ et donc $v = w+\xi$; donc par définition on a $w \in \mathbf{F}_x^{n-m}(u)$.

<u>Réciproquement</u> si $v \in \Omega^n_x[f^{-1}]$ vérifie $v = w+\xi$ avec $w \in \Gamma^n(m+u)$ $\xi \in \mathcal{H}^n(> m+u)$ et $df\wedge v \subset \Omega^{n+1}_x$, alors de tels w engendrent $\mathbf{F}^{n-m}_x(u)$ modulo $\mathbb{F}^{n-m+1}_x(u)$ par définition de notre filtration ; et si on

pose $\omega = df \wedge v$ on constate que $w \in {}_V\mathbf{F}^{n-m}$ ce qui achève la démonstration. ∎

Remarques

1) D'après le théorème de positivité des exposants caractéristiques de B. Malgrange (*), si on a $p \geq 1$ et $\omega \in \Omega^p[f^{-1}]$ telle que $df \wedge \omega$ soit holomorphe et ω relativement fermée, on a $\omega \in \mathcal{H}^p(> -1)$.
En effet la forme holomorphe $df \wedge \omega$ étant fermée on peut trouver $\alpha \in \Omega^p_X$ vérifiant $d\alpha = df \wedge \omega$. Malgrange donne alors

$$\alpha \in \mathcal{H}^p(> 0)$$

et donc $\quad \nabla\alpha = \omega \in \mathcal{H}^p(> -1)$.

On en déduit que dans notre définition de la filtration asymptotique on a toujours $m+u > -1$ pour $w \neq 0$ et donc $m \geq 0$. On aura donc $F^{p+1} = (0)$ pour $p \geq 1$. L'assertion $m \geq 0$ est encore vraie pour $p = 0$ (exercice) ; on a donc aussi $F^1 = (0)$ pour $p = 0$.

2) D'après le corollaire 1 du théorème 1 de [B.2], si $w \in \Gamma^p(u)$ avec $u \in]-1,0]$ vérifie $N^k w = 0$ (i.e. $(s\nabla-u)^k(w) = 0$ dans $\Gamma^p(u)$) il existe un entier $m'' \in [0,p+1]$(**) et des formes holomorphes $\tilde{w}_1 \ldots \tilde{w}_k$ vérifiant

$$d\tilde{w}_j = (m''+u)\frac{df}{f} \wedge \tilde{w}_j + \frac{df}{f} \wedge \tilde{w}_{j-1}$$

pour $j \in [1,k]$ avec la convention $\tilde{w}_0 = 0$, et de sorte que pour chaque $h \in [1,k]$ les $f^{-m''}\tilde{w}_j$ pour $j \in [1,h]$ engendrent dans $\Gamma^p(u)$ le même sous espace ($s\nabla$ stable) que les $(s\nabla-u)^{k-j}(w)$ pour $j \in [1,h]$.

Des combinaisons linéaires adéquates permettent donc de supposer que l'on a $f^{-m''}\tilde{w}_k = w$ dans $\Gamma^p(u)$. Comme, par récurrence, on constate aisément que $df \wedge \frac{\tilde{w}_j}{f}$ est holomorphe pour $j \in [1,k]$, on voit que $f^{m''-1}w$ est la partie principale de $\omega = \frac{\tilde{w}_k}{f}$ qui vérifie $df \wedge \omega \in \Omega^{p+1}_X$ ce qui montre que $e = \kappa^{-1}(w)$ est dans $F_X^{p-(m''-1)}$ avec $m'' \leq p+1$. On a donc $F^0_X = H^p_X$.

(*) voir [M] ou l'appendice de [B.1].

(**) la normalisation choisie ici $u \in]-1,0]$ qui diffère de celle de [B.2] permet de ne pas séparer $u \equiv 0 \mod \mathbb{Z}$ des autres cas.

Considérons maintenant <u>une</u> filtration croissante W sur l'espace vectoriel H_x^p, $p \in [0,n]$ et $x \in Y = f^{-1}(0)$, vérifiant

$$NW_\ell \subset W_{\ell-2}.$$

On a alors la

Proposition 1 : Si $e \in W_\ell \cap F^q$ on a :

$$N(e) \in W_{\ell-2} \cap F^{q-1} + W_{\ell-4}$$

Ceci donne, bien sûr, si $F^\bullet Gr_\ell(W)$ désigne la filtration induite par $F^\bullet$ sur le gradué $Gr_\ell(W)$:

$$F^q Gr_\ell(W) = (F^q \cap W_\ell) + W_{\ell-1}/W_{\ell-1}$$

l'inclusion $N(F^q Gr_\ell(W)) \subset F^{q-1} Gr_{\ell-2}(W)$ pour toute filtration W sur laquelle N est de poids -2.

Démonstration : Comme pour $p = 0$ on a $N = 0$ d'après le théorème de monodromie, il suffit de traiter le cas $p \geq 1$. Fixons $u \in]-1,0]$ et considérons $e \in F_x^{p-m}(u)$. Il existe, par définition de la filtration asymptotique, une p-forme méromorphe relativement fermée ω qui vérifie :

1) $df \wedge \omega \in \Omega_x^{p+1}$ (donc holomorphe en x).

2) $\omega = w+\xi$ où $w \in \Gamma(u+m)_x$ et $\xi \in \mathcal{H}_x^p(> u+m)$, l'égalité ayant lieu dans $\mathcal{H}_x^p$.

3) $f^{-m} w = \kappa(e)$ où $\kappa : H^p(u) \to \Gamma^p(u)$ a été défini au lemme 1.

Comme on peut de plus supposer $e \neq 0$, le théorème de positivité des exposants caractéristiques de Malgrange (voir [M] ou l'appendice de [B.1]) donne $u+m > -1$ (voir remarque ci-dessus). Comme $df \wedge \omega$ est holomorphe d-fermée (car ω est relativement fermée) et de degré $p+1 \geq 1$ il existe $\alpha \in \Omega_x^p$ vérifiant

$$d\alpha = df \wedge \omega$$

Alors α est relativement fermée et donne une classe dans $\mathcal{H}_x^p$ qui vérifie

$$\nabla \alpha = \omega \tag{1}$$

Posons $\omega' = f\omega-(m+u+1)\alpha$. On a alors

(2) $$\nabla\omega' = \nabla(f\omega)-(m+u+1)\omega$$

Si on pose $w' = \nabla(fw)-(m+u+1)w$ on aura $w' \in \Gamma^p(u+m)$ puisque l'on a

$$\nabla f = f\nabla+1$$

ainsi que la stabilité de $\Gamma^p(u+m)$ par $s\nabla$. On obtient donc, puisque $\omega = w+\xi$

$$\nabla\omega' = w'+\nabla(f\xi)-(m+u+1)\xi$$

Comme on a $m+u+1 > 0$ l'opérateur $\nabla f = f\nabla+1$ est bijectif sur $\Gamma^p(u+m)$ et aussi sur $\mathcal{H}^p(> u+m)$ d'après le lemme 3. Soit donc $w'' \in \Gamma^p(u+m)$ et $\eta \in \mathcal{H}^p(u+m)_x$ vérifiant

$$\nabla fw'' = w' \quad \text{et} \quad \nabla f\eta = \nabla(f\xi)-(m+u+1)\xi$$

On aura alors

$$\nabla f(\frac{\omega'}{f}) = \nabla fw''+\nabla f\eta$$

Comme $df_\wedge\omega$ est holomorphe on a, toujours d'après Malgrange, $\omega \in \mathcal{H}^p(> -1)$ et donc $\omega' \in \mathcal{H}^p(> 0)$ puisque α est holomorphe. On en conclut que $\frac{\omega'}{f} \in \mathcal{H}^p(> -1)$. Comme on a aussi w'' et η dans $\mathcal{H}^p(> -1)$, on en déduit (injectivité de ∇f sur $\mathcal{H}^p(> -1)$) que l'on a

$$\frac{\omega'}{f} = w''+\eta$$

Comme $df_\wedge\omega' = f\, df_\wedge\omega-(m+u+1)df_\wedge\alpha$ est holomorphe et comme sa partie principale est $fw'' \in \Gamma(u+m+1)$ puisque $f\eta \in \mathcal{H}^p(> u+m+1)$, il nous reste donc à voir que l'on a

(3) $$\kappa^{-1}(f^{-m}w'') = \lambda N(e)+\varepsilon \qquad \lambda \in \mathbb{C}^*$$

où $\varepsilon \in H^p(u)_x$ est dans l'espace vectoriel engendré par $N^2(e), N^3(e)$ ...

Mais on a

$$(s\nabla+1)w'' = w'$$

et $$w' = (s\nabla-(m+u))w$$

ce qui donne dans $\Gamma^p(u)$

$$f^{-m}w' = (s\nabla-u)f^{-m}w$$

$$f^{-m}w' = (s\nabla+m+1)f^{-m}w''$$

en notant $e' = \kappa^{-1}(f^{-m}w')$ et $e'' = \kappa^{-1}(f^{-m}w')$ on en déduit dans $H^p(u)_x$ les relations

$$Ne = e'$$

et $$[(m+u+1)+N](e'') = e'$$

ce qui, puisque N est nilpotent et $m+u+1 > 0$, donne (3) avec $\lambda = \frac{1}{m+u+1}$. Ceci achève la preuve de la proposition 1. ∎

§ 2 - On utilise ici les notations introduites plus haut.

Nous allons considérer $f : X \to D$ un représentant de Milnor d'un germe de fonction holomorphe non constante $\tilde{f} : (\mathbb{C}^{n+1},0) \to (\mathbb{C},0)$. Fixons $p \geq 1$.

Notons par H_0^p le p-ième groupe de cohomologie de la fibre de Milnor de f en 0 et notons par $-2i\pi N$ le logarithme (nilpotent) de la partie unipotente de la monodromie agissant sur H_0^p. On note par F la filtration "de Hodge asymptotique" sur H_0^p introduite au § 1. Soit $u \in]-1,0]$. Soit $e \in F^{p-m}(u)$ et supposons que e soit représenté par la p-forme méromorphe $\omega \in \Omega_X^p[f^{-1}]$ relativement fermée, au sens suivant :

1) la forme différentielle $df \wedge \omega$ est holomorphe.
2) dans $\mathcal{H}_0^p$ on a $\omega = w+\xi$ avec $w \in \Gamma^p(u+m)_0$, $\xi \in \mathcal{H}^p(> u+m)_0$, $u \in]-1,0]$, et $f^m\kappa(e) = w$ où $\kappa : H_0^p(u) \to \Gamma^p(u)$ est définie au § 1.

Proposition fondamentale :

Supposons maintenant que le prolongement méromorphe de

$$\int_X |f|^{2\lambda} f^{-m}\bar{f}^{-m'} df\wedge\omega\wedge\square$$

n'ait pas de pôle en $\lambda = -u-1$ d'ordre strictement plus grand que $h \in \mathbb{N}$ donné, sur $X-\Sigma$, où $\Sigma \subset f^{-1}(0)$ est analytique fermé de codimension $\geq p+1$ dans $f^{-1}(0)$. Alors on a

$$\overline{N^h(e)} \in F^{m'+1}(v)$$

avec $v = -u-1$ pour $u \in]-1,0[$ et $\overline{N^h(e)} \in F^{m'+2}(0)$ pour $u = 0$. ∎

Démonstration : Commençons par montrer qu'il existe des p-formes méromorphes relativement fermées $(v_\alpha)_{\alpha\in[1,n+1]}$ vérifiant sur X les relations

$$dv_\alpha = (m+u)\frac{df}{f}\wedge v_\alpha + \frac{df}{f}\wedge v_{\alpha-1} \tag{1}$$

pour $\alpha \in [1,n+1]$ avec $v_0 = \xi$. On peut supposer de plus que $v_\alpha \in \mathcal{H}^p(> u+m)$ pour chaque α. La construction des v_α repose sur le lemme 3 du § 1 :

Si $\tilde{a}$ est une p-forme relativement fermée sur X à pôles dans $f^{-1}(0)$ et induisant la classe $a \in \mathcal{H}^p(> u+m)$ en 0, il existe, d'après le lemme 3, une p-forme méromorphe relativement fermée $\tilde{b}$ sur X induisant en 0 la classe de $\mathcal{H}^p(> u+m)$ qui vérifie

$$s\nabla b-(m+u)b = a$$

On aura donc sur X l'égalité

$$d\tilde{b} = \frac{df}{f}\wedge\tilde{c} \qquad \text{où} \quad \tilde{c} \in H^0(X,\Omega^p[f^{-1}])$$

est relativement fermée et induit $a+(m+u)b$ dans $\mathcal{H}^p_0$. On aura donc $\alpha,\beta \in H^0(X,\Omega^{p-1}[f^{-1}]$ qui vérifieront

$$\tilde{c} = \tilde{a} + (m+u)\tilde{b} + d\alpha + \frac{df}{f}\wedge\beta$$

Ceci donne

$$d(\tilde{b}+\frac{df}{f}\wedge\alpha) = (m+u)\frac{df}{f}\wedge(\tilde{b}+\frac{df}{f}\wedge\alpha)+\frac{df}{f}\wedge\tilde{a}$$

et donc $\tilde{b}_1 = \tilde{b}+\frac{df}{f}\wedge\alpha$ est encore relativement fermée, induit b dans $\mathcal{H}^p_0$ et vérifie

$$d\tilde{b}_1 = (m+u)\frac{df}{f}\wedge\tilde{b}_1 + \frac{df}{f}\wedge\tilde{a}$$

Comme on a $\xi \in \mathcal{H}^p(> u+m)_0$, ceci montre que la construction des $(v_\alpha)_{\alpha\in[1,n+1]}$ est bien possible.

Fixons maintenant $k \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $N^k(e) = 0$ et choisissons des représentants $w_j \in H^0(X,\Omega^p[f^{-1}]), d/f\ w_j \equiv 0$, des classes $(s\nabla-(m+u))^{k-j}(w)$ tels que l'on ait sur X

$$w_k = w \quad \text{et} \quad dw_j = (m+u)\frac{df}{f}\wedge w_j + \frac{df}{f}\wedge w_{j-1}$$

pour $j \in [1,k]$ avec la convention $w_0 = 0$.

Ceci est possible par un calcul analogue à celui qui vient d'être fait pour les $(v_\alpha)_{\alpha \in [1,n+1]}$ (pour les détails on pourra regarder la preuve du lemme A de [B.0]).

Posons alors $m'+1-m = m''$ et pour $\sigma \leq k-h$ définissons sur X les courants de type $(p,0)$ suivants

$$T_j^\sigma = \sum_{\alpha=h-k+1}^{+\infty} (-1)^{|\alpha|} P_{\alpha+k}(\lambda = -m-u, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-m''-j} w_{\alpha+\sigma} \wedge \square)$$
$$+(-1)^k \sum_{\alpha=-\sigma+1}^{+\infty} (-1)^{|\alpha|} P_{\alpha+k}(\lambda = -m-u, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-m''-j} v_{\alpha+\sigma} \wedge \square)$$

où l'on a noté par $P_\nu(\lambda = \lambda_0, F(\lambda))$ pour F méromorphe dans $\mathbb{C}$ le coefficient de $\frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^\nu}$ dans le développement de Laurent de F en λ_0 $(\nu \in \mathbb{Z})$. On remarquera que les sommes sont en fait finies car le prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2\lambda} \square$ n'a jamais de pôle d'ordre $> n+1$ pour X de dimension $n+1$.

On a utilisé la convention suivante :

$$w_\beta = 0 \quad \text{si} \quad \beta \notin [1,k] \quad \text{et} \quad v_\gamma = 0 \quad \text{si} \quad \gamma > n+1$$

Rappelons que l'on a $v_0 = \xi$.

Lemme 1 : On a sur X pour $\sigma \leq k-h$ et $j \in \mathbb{Z}$

$$d'T_j^\sigma = (-1)^{k-\sigma} P_{k-\sigma-1}(\lambda = -m-u, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-m''-j} \frac{df}{f} \wedge \omega \wedge \square) \blacksquare$$

Démonstration : Compte tenu des relations

$$dw_\beta = (m+u) \frac{df}{f} \wedge w_\beta + \frac{df}{f} \wedge w_{\beta-1}$$

et
$$dv_\gamma = (m+u) \frac{df}{f} \wedge v_\gamma + \frac{df}{f} \wedge v_{\gamma-1}$$

qui sont vraies pour $\beta \geq 1$ et $\beta \neq k+1$ et pour $\gamma \geq 1$ et $\gamma \neq n+2$ (à cause de nos conventions), la formule de Stokes donnera (voir [B.0] [B.1] ou [B.2] pour plus de détail sur ce genre de calcul).

$$d'T_j^\sigma = \sum_{\alpha=h-k+1}^{+\infty} (-1)^{|\alpha|} P_{\alpha+1}(\lambda = -m-u, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-m''-j} \frac{df}{f} \wedge w_{\alpha+\sigma} \wedge \square) +$$

$$+ \sum_{\alpha=h-k+1}^{+\infty} (-1)^{|\alpha|} P_\alpha(\lambda = -m-u, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-m''-j} \frac{df}{f} \wedge w_{\alpha+\sigma-1} \wedge \square)$$

$$+ (-1)^{k-\sigma+1} P_{k-\sigma+1}(\lambda = -m-u, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-m''-j} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \square)$$

$$+(-1)^k \sum_{\alpha=-\sigma+1}^{+\infty} (-1)^{|\alpha|} P_{\alpha+k+1}(\lambda = -m-u, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-m''-j} \frac{df}{f} \wedge v_{\alpha+\sigma} \wedge \square)$$

$$+(-1)^k \sum_{\alpha=-\sigma+1}^{+\infty} (-1)^{|\alpha|} P_{\alpha+k}(\lambda = -m-u, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-m''-j} \frac{df}{f} \wedge v_{\alpha+\sigma-1} \wedge \square)$$

$$+(-1)^{k+n+1-\sigma} P_{n+2+k-\sigma}(\lambda = -m-u, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-m''-j} \frac{df}{f} \wedge v_{n+1} \wedge \square)$$

Ce dernier terme est nul car $k-\sigma \geq 0$ et donc $n+2+k-\sigma \geq n+2$ (et il n'y a pas de pôle d'ordre $\geq n+2$ pour le prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2\lambda} \ldots$).

Les deux premières séries sont opposées à un terme près, ainsi que les deux sommes suivantes. Cela laisse seulement

$$d'T_j^\sigma = (-1)^{h-k+1} P_{h-k+1}(\lambda = -m-u, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-m''-j} \frac{df}{f} \wedge w_{h-k+\sigma} \wedge \square)$$

$$+(-1)^{k-\sigma+1} P_{k-\sigma+1}(\lambda = -m-u, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-m''-j} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \square)$$

$$+(-1)^{k-\sigma+1} P_{k-\sigma+1}(\lambda = -m-u, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-m''-j} \frac{df}{f} \wedge v_0 \wedge \square)$$

Le premier terme est nul car $h-k+\sigma \leq 0$ (et $w_\beta = 0$ pour $\beta \leq 0$). Comme on a $v_0 = \xi$ et $\omega = w+\xi$ avec $w_k = w$, le lemme est démontré ∎

Passons au calcul de $d''T_j^\sigma$:

Lemme 2 : On a sur X pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et $\sigma \leq k-h$ l'identité entre courants

$$d''T_j^\sigma + (m+m''+u+j) df \wedge T_{j+1}^\sigma + df \wedge T_{j+1}^{\sigma-1} = 0$$

Démonstration : La relation

$$d''(|f|^{2\lambda}\,\bar{f}^{-m''-j}) = (\lambda+m+u)|f|^{2\lambda}\,\bar{f}^{-m''-j}\,\frac{\overline{df}}{\bar{f}} +$$

$$-(m+m''+u+j)|f|^{2\lambda}\,\bar{f}^{-m''-j}\,\frac{\overline{df}}{\bar{f}}$$

vraie pour $Re(\lambda) >> 0$, la formule de Stokes et le prolongement analytique donnent

$$d''T_j^{\sigma} = \sum_{\alpha=h-k+1}^{k-\sigma}(-1)^{|\alpha|}P_{\alpha+1}(\lambda = -m-u, \int_X |f|^{2\lambda}\,\bar{f}^{-m''-j}\,\frac{\overline{df}}{\bar{f}} \wedge w_{\alpha+\sigma} \wedge \square)$$

$$+ \sum_{\alpha=h-k+1}^{k-\sigma}(-1)^{|\alpha|+1}(m+m''+u+j)P_{\alpha}(\lambda = -m-u, \int_X |f|^{2\lambda}\,\bar{f}^{-m''-j}\,\frac{\overline{df}}{\bar{f}} \wedge w_{\alpha+\sigma} \wedge \square)$$

$$+ \sum_{\alpha=-\sigma+1}^{n+1-\sigma}(-1)^{|\alpha|+k}P_{\alpha+k+1}(\lambda = -m-u, \int_X |f|^{2\lambda}\,\bar{f}^{-m''-j}\,\frac{\overline{df}}{\bar{f}} \wedge v_{\alpha+\sigma} \wedge \square)$$

$$+ \sum_{\alpha=-\sigma+1}^{n+1-\sigma}(-1)^{|\alpha|+k+1}(m+m''+u+j)P_{\alpha+k}(\lambda = -m-u, \int_X |f|^{2\lambda}\,\bar{f}^{-m''-j}$$

$$\frac{\overline{df}}{\bar{f}} \wedge v_{\alpha+\sigma} \wedge \square)$$

Notons par S_i, $i \in [1,4]$ les 4 sommes du membre de droite de cette formule.

Posons $\beta = \alpha+1$ dans S_1 :

$$S_1 = \sum_{\beta=h-k+2}^{k-\sigma+1}(-1)^{|\beta|+1}P_{\beta}(\lambda = -m-u, \int_X |f|^{2\lambda}\,\bar{f}^{-m''-j}\,\frac{\overline{df}}{\bar{f}} \wedge w_{\beta+\sigma-1} \wedge \square)$$

$$= \hat{S}_1 + (-1)^{h-k+1}P_{h-k+1}(\lambda = -m-u, \int_X |f|^{2\lambda}\,\bar{f}^{-m''-j}\,\frac{\overline{df}}{\bar{f}} \wedge w_{h-k+\sigma} \wedge \square)$$

$= \hat{S}_1$ car $h-k+\sigma \leq 0$ et donc $w_{h-k+\sigma} = 0$ d'après notre convention.

Nous avons noté par $\hat{S}_1$ la somme qui donne S_1 ci-dessus avec $\beta \in [h-k+1, k-\sigma+1]$.

Posons $\beta = \alpha+1$ dans S_3 :

$$S_3 = \sum_{\beta=-\sigma+2}^{n+2-\sigma}(-1)^{|\beta|+k+1}P_{\beta+k}(\lambda = -m-u, \int_X |f|^{2\lambda}\,\bar{f}^{-m''-j}\,\frac{\overline{df}}{\bar{f}} \wedge v_{\beta+\sigma-1} \wedge \square)$$

$$= \sum_{\beta=-(\sigma-1)+1}^{n+1-(\sigma-1)}(-1)^{|\beta|+k+1}P_{\beta+k}(\lambda = -m-u, \int_X |f|^{2\lambda}\,\bar{f}^{-m''-j}\,\frac{\overline{df}}{\bar{f}} \wedge v_{\beta+\sigma-1} \wedge \square)$$

Alors $\hat{S}_1+S_3 = -df \wedge T^{\sigma-1}_{j+1}$.

On a aussi

$$S_2+S_4 = -(m+m''+u+j)d\bar{f} \wedge T^{\sigma}_{j+1}$$

ce qui achève la preuve du lemme 2 ∎

Remarquons maintenant que pour $\sigma < -n$ on a $T^{\sigma}_j = 0$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. En effet on a $w_{\alpha+\sigma} = 0$ si $\alpha+\sigma \leq 0$ et si on a $\sigma < -n$, $\alpha+\sigma > 0$ impose $\alpha \geq n+2$ et donc P_α et a fortiori $P_{\alpha+k} = 0$.

Soit $b_1 \ldots b_{n+k-h+1}$ la base naturelle de $\mathbb{C}^{n+k-h+1}$. Posons alors pour $j \in \mathbb{Z}$

$$T_j = \sum_{-n}^{k-h} T^{\sigma}_j \otimes b_{\sigma+n+1}.$$

Dans les hypothèses de la proposition fondamentale on aura alors sur $X-\Sigma$

$$d'T_j = 0 \quad \text{pour} \quad j \leq 0.$$

En effet, pour $\sigma \leq k-h$ on a $k-\sigma+1 \geq h+1$

$$P_\nu(\lambda = -m-u, \textstyle\int_X |f|^{2\lambda}\, \bar{f}^{-m''-j} \frac{df}{f} \wedge w \wedge \square) =$$

$$P_\nu(\lambda = -u-1, \textstyle\int_X |f|^{2\lambda}\, f^{-m}\bar{f}^{-m''-j-(m-1)} df \wedge w \wedge \square)$$

et $-m''-m+1 = -m'$, le $\bar{f}^{-j}$ étant C^∞.

Le lemme 2 donne sur X l'égalité

$$d''T_j + ((m+m''+u+j)\mathrm{Id}+N)d\bar{f} \wedge T_{j+1} = 0$$

où $N \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{n+k-h+1})$ est défini par $Nb_\gamma = b_{\gamma+1}$ pour $\gamma \in [1,n+k-h]$ et $Nb_{n+k-h+1} = 0$.

Alors les lemmes C'_1 et C'_2 de [B.1] (variante vectorielle) s'appliquent sur $X-\Sigma$ car on a, vue notre hypothèse de codimension sur Σ,

$$H^a(X-\Sigma,\Omega^b) = 0 \qquad \forall a \in [1,p] \quad \forall b$$

et les relations $\bar{f}\, T_{j+1} = T_j$ qui sont évidentes $\forall j \in \mathbb{Z}$.

On obtient donc des p-formes holomorphes $(S_j)_{j \leq 1-p}$ (à valeurs dans $\mathbb{C}^{n+k-h+1}$) et des courants de degré $(p-1)$ $(U_j)_{j \leq 1-p}$ sur $X-\Sigma$ qui vérifieront les relations suivantes.

(a) $$T_j = (-1)^p \overline{S}_j + dU_j + ((m+m''+u+j)\mathrm{Id}+N)df \wedge U_{j+1}$$

(b) $$dS_j = -[(m+m''+u+j)\mathrm{Id}+N]df \wedge S_{j+1}$$

(c) $$fS_{j+1} = S_j$$

sur $X-\Sigma$ pour $j \leqq -p$.

Remarquons déjà que d'après Hartogs (puisque Σ est de codimension $\geqq p+2 \geqq 2$ dans X) que les S_j se prolongent en des formes holomorphes sur X tout entier et que les relations (b) et (c) sont valables sur X par prolongement analytique.

Posons

$$S_{-p} = \sum_{\tau=1}^{n+k-h+1} S^{\tau}_{-p} \otimes b_{\tau}$$

et $$w^*_{\sigma} = (-1)^p S^{\sigma+n+1}_{-p} \quad \text{pour } \sigma \in [-n,k-h].$$

Alors les formes holomorphes w^*_{σ} vérifient sur X les relations

(d) $$dw^*_{\sigma} = -(m+m''+u-p)\frac{df}{f} \wedge w^*_{\sigma} - \frac{df}{f} \wedge w^*_{\sigma-1}$$

pour $\sigma \in [-n,k-h]$ avec la convention $w^*_{-n-1} = 0$.

On a aussi sur $X-\Sigma$

$$T^{\sigma}_{-p} = \overline{w}^*_{\sigma} + dA^{\sigma} + df \wedge B^{\sigma}$$

où A^{σ} et B^{σ} sont des courants de degré $p-1$ sur $X-\Sigma$ dont la valeur n'importera pas.

Pour $\sigma = k-h$ et en se restreignant à $X-f^{-1}(0)$, on obtiendra, puisque les pôles du prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2\lambda}$ apparaissent seulement dans $f^{-1}(0)$

$$T^{k-h}_{-p} | X-f^{-1}(0) = \sum_{\alpha=h-k+1}^{\alpha=0} (-1)^{|\alpha|} P_{\alpha}(\lambda = -m-u, \int_X |f|^{2\lambda}\, \overline{f}^{-m''+p}\, w_{\alpha+k-h} \wedge \square)$$

$$= \sum_{0}^{k-h-1} (-1)^{\alpha} \frac{[\mathrm{Log}(f\overline{f})]^{\alpha}}{\alpha\,!} |f|^{-2(m+u)}\, \overline{f}^{p-m''} w_{k-h-\alpha}$$

$$= \overline{w}^*_{k-h} + dA^{k-h} + \overline{df} \wedge B^{k-h} \text{ sur } X-f^{-1}(0).$$

D'après le lemme D' de [B.2] on en déduit l'égalité sur $D^* = D-\{0\}$ des sections suivantes du fibré de Gauss-Manin $s \to H^p(f^{-1}(s),\mathbb{C})$

$$\bar{f}^{p-m''}\exp(-(\mathrm{Id}(m+u)+N)\mathrm{Log}\ f\bar{f})w_{k-h} = \bar{w}^{*}_{k-h}$$

où $N = -\frac{1}{2i\pi}\mathrm{Log}(e^{2i\pi u}T|H^p(u))$ comme dans le paragraphe 1. On a utilisé ici le fait que, via l'isomorphisme

$$\kappa^{-1}{}_\circ s^{-m} : \Gamma^p(u+m) \to H^p(u)$$

on a $s\nabla-(u+m)$ qui s'identifie à N et que, par construction, on a

$$(s\nabla-(m+u))^\alpha w_{k-h} = w_{k-h-\alpha}$$

pour $\alpha \in \mathbf{N}$.

En utilisant maintenant que

$$w_k = w = \exp((\mathrm{Id}(m+u)+N)\mathrm{Log}\ f)(e)$$

qui est l'expression explicite de la relation $w = s^m\kappa(e)$, on obtient

$$N^h(e) = \overline{\exp[(\mathrm{Id}(m+m''+u-p)+N)\mathrm{Log}\ f](w^{*}_{k-h})}$$

ou encore $\overline{N^h(e)} = \kappa^{-1}(s^{-q}\frac{w^*_{k-h}}{f})$ avec $\kappa : H^p(v) \to \Gamma(v)$ et

$q = p-m-m''$ si $u \neq 0$ (alors $v = -u-1$)

et $q = p-m-m''-1$ si $u = 0$ (alors $v = 0$).

Montrons maintenant que les formes $\frac{df}{f} \wedge w^*_\sigma$ sont holomorphes pour $\sigma \in [-n,k-h]$.

C'est clair pour $\sigma = -n$ car on a

$$dw^*_{-n} = -(m+m''+u-p)\frac{df}{f} \wedge w^*_{-n}$$

w^*_{-n} est holomorphe, donc dw^*_{-n} aussi et on a $m+m''+u-p \neq 0$ d'après le théorème de positivité de B. Malgrange (qui impliquerait, si $m+m''+u-p$ était nul, que w^*_{k-h} serait nul dans $\mathcal{H}^p_0$ et donc que $N^h(e)$ serait nul dans $H^p(u)$ d'après le calcul précédent ; il n'y a alors rien à démontrer !). Si on suppose prouvé, par récurrence sur $\sigma \in [-n,k-h-1]$, que $\frac{df}{f} \wedge w^*_\sigma$ est holomorphe, la relation

$$dw^*_{\sigma+1} = -(m+m''+u-p)\frac{df}{f} \wedge w^*_{\sigma+1} + \frac{df}{f} \wedge w^*_\sigma$$

montre que $\frac{df}{f} \wedge w^*_{\sigma+1}$ est holomorphe puisque $w^*_{\sigma+1}$ et donc $dw^*_{\sigma+1}$ est holomorphe et $m+m''+u-p \neq 0$.

On en conclut que $\frac{w^*_{k-h}}{f} = \omega^*$ vérifie $df \wedge \omega^* \in H^0(X,\Omega^{p+1})$. La relation

$$\overline{N^h(e)} = \kappa^{-i}(s^{-q}\omega^*)$$

que l'on a établi plus haut montre alors que l'on a

$$\overline{N^h(e)} \in F^{p-q}(v)$$

où $q = p-m-m''$ si $u \neq 0$ et $q = p-m-m''-1$ si $u = 0$.

Comme, par définition, on a posé

$$m'' = m'+1-m$$

cela donne $\overline{N^h(e)} \in F^{m'+1}(v)$ pour $u \neq 0$ et $\overline{N^h(e)} \in F^{m'+2}(0)$ pour $u = 0$ ce qui achève la démonstration de la proposition fondamentale ■

Remarque : Comme la forme $df \wedge \omega$ est holomorphe sur X par hypothèse (quitte à choisir X assez petit), une condition suffisante pour satisfaire l'hypothèse de la proposition fondamentale est que le prolongement méromorphe en $\lambda = -u-1$ de la distribution

$$\int_X |f|^{2\lambda} f^{-m} \bar{f}^{-m'} \square$$

n'ait pas de pôle d'ordre $> h$ en $\lambda = -u-1$ (sur $X-\Sigma$). Ceci donne une condition suffisante pour que l'hypothèse soit vérifiée <u>qui ne nécessite pas la connaissance de la forme méromorphe ω.</u>

§ 3 - Nous allons montrer maintenant comment la proposition fondamentale du paragraphe précédent donne des propriétés de symétrie pour les racines du polynôme de Bernstein-Sato de f. Ceci reprend l'article [B.4] qui est erroné pour $k \geq 2$: les énoncés sont incorrectement formulés bien que la ligne de démonstration soit essentiellement correcte ; il nous a semblé intéressant d'énoncer et d'établir clairement ces résultats.

Nous donnerons, dans cette ligne d'idée, un énoncé qui estime directement l'ordre de nilpotence de la monodromie sur la filtration $F^{\bullet}$ (définie au § 1) en terme des racines du polynôme de Bernstein-Sato. Ceci généralise les résultats de A.N. Varchenko dans le cas d'une singularité isolée (voir [V.1]).

Pour alléger le texte, nous ne reprendrons pas ici la notion de semi-pôle effectif en codimension p introduite dans [B.4] (alors que la notion de profondeur est avantageusement remplacée par la filtration asymptotique). Il est cependant clair que des énoncés plus précis utilisant cette notion bien plus fine que celle de racine du polynôme de Bernstein-Sato, se déduisent immédiatement de nos démonstrations.

L'énoncé correct du théorème de [B.4] est

Théorème 1 : Soit $f : X \to D$ un représentant de Milnor d'un germe non constant de fonction holomorphe $f : (\mathbb{C}^{n+1},0) \to (\mathbb{C},0)$. Supposons que pour $p \geq 1$ et $u \in]-1,0]$ $e^{-2i\pi u}$ soit valeur propre de la monodromie agissant sur le p-ième groupe de cohomologie de la fibre de Milnor de f en 0 avec une multiplicité k. Désignons par $b(\lambda)$ le polynôme de Bernstein-Sato de f en 0 et posons $v = -u-1$ pour $u \neq 0$ et $v = 0$ si $u = 0$.

Soit $h \in [0,k-1]$ et notons par σ_{h+1} (resp. par τ_{k-h}) le plus petit entier tel que b admette $(h+1)$ racines (en comptant les multiplicités) de la forme $-q+u$ avec $0 \leq q \leq \sigma_{h+1}$ (resp. $(k-h)$ racines de la forme $-q+v$, $0 \leq q \leq \tau_{k-h}$). On a alors

$$\text{pour } u \in]-1,0[\quad \sigma_{h+1} + \tau_{k-h} \leq p \quad \text{et}$$

$$\text{pour } u = 0 \quad \sigma_{h+1} + \tau_{k-h} \leq p+1 \quad \blacksquare$$

Le lien entre la filtration asymptotique $F^{\bullet}$ introduite au § 1 et les racines du polynôme de Bernstein-Sato de f sera donné par le théorème 2 et son corollaire.

Théorème 2 : Soit $f : X \to D$ un représentant de Milnor d'un germe non constant de fonction holomorphe $f : (\mathbb{C}^{n+1},0) \to (\mathbb{C},0)$. Fixons $u \in]-1,0]$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que N^{k-1} soit non nul sur $F^q(u)$(*).

Alors on a, au moins k racines (en comptant les multiplicités) congrues à $-u$ modulo $\mathbb{Z}$ dans l'intervalle $[-(p-q)-u-1 , -u-1]$ pour le polynôme de Bernstein-Sato b de f en 0 . $\blacksquare$

(*) Ici $N = -\frac{1}{2i\pi}\,\mathrm{Log}(e^{2i\pi u}T/H^p(u)_0)$ comme plus haut et $F^{\bullet}(u)$ désigne la filtration asymptotique introduite au § 1.

Corollaire : Avec les mêmes notations que dans le théorème 2 on a $N^{k-1} = 0$ sur $F^q(u)$ dès que $q > p-\tau_k$ (resp. $q > p+1-\tau_k$) pour $u \in]-1,0[$ (resp. pour $u = 0$) (τ_k est défini dans l'énoncé du théorème 1) ■

En particulier si pour $u \in]-1,0[$ le polynôme de Bernstein-Sato de f en 0 n'a pas de racine congrue à $-u$ modulo $\mathbb{Z}$ dans l'intervalle $[-q_0-u-1,-u-1]$, on aura $F^q(u) = 0$ pour $q \geqq p-q_0$.

Remarque : En restant au niveau de la b-fonction on peut affiner les énoncés ci-dessus de la manière suivante : dans la définition des entiers σ et τ on ne prend en compte que les racines du polynôme de Bernstein-Sato de f qui restent racines du polynôme de Bernstein de f en tous les points d'un germe analytique de codimension $\leqq p$ dans $f^{-1}(0)$.

Démonstration des théorèmes 1 et 2 : Commençons par démontrer que si, pour $u \in]-1,0[$ (resp. $u = 0$) il existe $e \in F^{p-m}(u)$ vérifiant $N^h(e) \neq 0$ alors on a $m \geqq \tau_{h+1}$ (resp. $m+1 \geqq \tau_{h+1}$).

Supposons $m < \tau_{h+1}$ (resp. $m+1 < \tau_{h+1}$ si $u = 0$) et considérons $e \in F^{p-m}(u)$. Soient $w \in H^0(X,\Omega^p[f^{-1}])$ induisant une classe dans $\Gamma^p(u+m)$ et soit $\omega \in H^0(X,\Omega^p[f^{-1}])$ vérifiant $df \wedge \omega \in H^0(X,\Omega^{p+1})$ tels que l'on ait

$$\omega = w+\xi \quad \text{dans} \quad \mathcal{H}^p$$

avec $\xi \in \mathcal{H}^p(> u+m)$ et $\kappa(e) = f^{-m}w$.

Comme on a $m < \tau_{h+1}$ (resp. $m+1 < \tau_{h+1}$ si $u = 0$) le prolongement méromorphe du courant

$$\int_X |f|^{2\lambda} f^{-m} \bar{f}^{-m'} df \wedge \omega \wedge \square$$

n'aura pas en $\lambda = -u-1$ de pôle d'ordre $> h$.

En effet cela est même vrai pour le prolongement méromorphe de la distribution

$$\int_X |f|^{2\lambda} f^{-m} \bar{f}^{-m'} \square$$

car une identité de Bernstein itérée donne l'existence de P_N opérateur différentiel holomorphe donc les coefficients dépendent polynomialement de λ et vérifiant

$$P_N f^{\lambda+N} = b(\lambda)b(\lambda+1)\dots b(\lambda+N-1)f^{\lambda}$$

où $b \in \mathbb{C}(\lambda)$ désigne le polynôme de Bernstein-Sato de f en 0. On obtiendra ainsi, si P_N^* désigne l'adjoint formel de P_N

$$\int_X |f|^{2\lambda} f^{-m} \bar{f}^{-m'} \square = \frac{1}{B_N(\lambda)} \int_X |f|^{2\lambda} f^{N-m} \bar{f}^{-m'} P_N^*(\square)$$

où le polynôme $B_N(\lambda) = b(\lambda)\ldots b(\lambda+N-1)$ a au plus h racines congrues à $-u-1$ modulo $\mathbb{Z}$ dans l'intervalle $[-m-u-1,+\infty[$ puisque l'on a $m < \tau_{h+1}$ (resp. $m+1 < \tau_{h+1}$), les racines de b étant strictement négatives d'après Kashiwara [K]. Comme l'intégrale du membre de droite converge pour $\mathrm{Re}(\lambda) > -2$ si N est assez grand, on en déduit bien l'absence de pôle d'ordre $> h$ en $\lambda = -u-1$ pour le prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2\lambda} f^{-m} \bar{f}^{-m'} df \wedge \omega \wedge \square$ et ceci pour tout $m' \in \mathbb{Z}$.

La proposition fondamentale donne alors $\overline{N^h(e)} \in F^{m'+1}(u)$ pour chaque m'. En particulier pour $m' = p$ on obtient $N^h(e) = 0$ puisque l'on a remarqué au § 1 que $F^{p+1}(u) = 0$ grâce au théorème de positivité de B. Malgrange (voir au § 1 la remarque 1 qui suit le lemme 5). Ceci montre bien que si $N^h(e)$ est non nul on a $m \geqq \tau_{h+1}$ pour $u \neq 0$ (resp. $m+1 \geqq \tau_{h+1}$ pour $u = 0$). Ceci achève la preuve du théorème 2.

Pour prouver le théorème 1 considérons $e \in H^p(u)_0$ tel que $N^{k-1}(e) \neq 0$ et définissons m de sorte que l'on ait $e \in F^{p-m}(u)$ (par exemple $m = p$ convient toujours puisque d'après la remarque 2) qui suit le lemme 5 du § 1 on a $F^0(u) = H^p(u)$). Posons alors pour $u \neq 0$ $m' = \tau_{h+1}-1$. Alors le même raisonnement que ci-dessus mais du côté anti-holomorphe, montre que le prolongement méromorphe de

$$\int_X |f|^{2\lambda} f^{-m} \bar{f}^{-m'} df \wedge \omega \wedge \square$$

ne peut avoir de pôle d'ordre $> h$ en $\lambda = \overline{-u-1}$. On peut donc appliquer la proposition fondamentale pour conclure que $\overline{N^h(e)} \in F^{m'+1}(v)$ où $v = -u-1$ $(u \neq 0)$.

Comme la monodromie est définie sur $\mathbb{R}$ (et même sur $\mathbb{Z}$) l'opérateur N_v sur $H^p(v)$ est lié à l'opérateur N_u sur $H^p(u)$ par l'égalité dans $L_{\mathbb{R}}(H^p(u), H^p(v))$, où $C : H^p(u) \to H^p(v)$ est la conjugaison complexe banale de H^p :

$$C \circ \exp(-2i\pi(\mathrm{Id}u+N_u)) = \exp(-2i\pi(\mathrm{Id}v+N_v)) \circ C$$

et donc on a (maintenant dans $L_{\mathbb{R}}(H^p(v), H^p(v))$)

$$\exp(2i\pi\, C \circ N_u \circ C) = \exp(-2i\pi\, N_v)$$

soit $\quad C \circ N_u \circ C = -N_v$

On a donc pour tout $\ell \in \mathbb{N}$

$$\overline{N_u^\ell} = C\circ(-C\circ N_v \circ C)^\ell$$
$$= (-1)^\ell N_v^\ell \circ C$$

Donc $\quad N_v^{k-h-1}\overline{N_u^h(e)} = (-1)^h N_v^{k-1}(\bar{e})$

$$= (-1)^{h+k-1}\overline{N_u^{k-1}}(e) \neq 0$$

puisque $\quad N^{k-1}(e) \neq 0$ par hypothèse.

En appliquant le théorème 2 à $\overline{N_u^h(e)} = \varepsilon$ qui est dans $F^{m'+1}(v)$ et vérifie $N_v^{k-h-1}(\varepsilon) \neq 0$ on obtient

$$p-(m'+1) \geq \sigma_{k-h}$$

mais comme on a choisi $m' = \tau_{h+1}-1$ cela donne l'inégalité

$$\sigma_{k-h}+\tau_{h+1} \leq p$$

Ceci achève donc la preuve du théorème 1 dans le cas $u \neq 0$. Le cas $u = 0$ se traite de manière tout à fait analogue en choisissant $m' = \tau_{h+1}-2$ et en utilisant que la proposition fondamentale donne

$$\overline{N^h(e)} \in F^{m'+2}(0)$$

Le théorème 2 donne alors

$$\sigma_{k-h}+\tau_{h+1} \leq p+1. \ \blacksquare$$

Références

[B.0] D. BARLET, Contribution effective de la monodromie aux développements asymptotiques. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4^e série t. 17 p. 239-315 (1984).

[B.1] D. BARLET, Contribution du cup-produit de la fibre de Milnor aux pôles de $|f|^{2\lambda}$. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) t. 34 fasc. 4 p. 75-107 (1984).

[B.2] D. BARLET, Monodromie et pôles de $\int_X |f|^{2\lambda} \square$. Bull. Soc. Math. Fr. t. 114 (1986) p. 247-269.

[B.3] D. BARLET, La forme hermitienne canonique sur la cohomologie de la fibre de Milnor d'une hypersurface à singularité isolée. Inv. Math. 81 p. 115-153 (1985).

[B.4] D. BARLET, Symétrie de Hodge pour le polynôme de Bernstein-Sato Lecture Notes n° 1295 (Séminaire d'Analyse Lelong-Dolbeault-Skoda 1985/1986) p. 1-10, Springer-Verlag.

[B.5] D. BARLET, Interaction de strates consécutives pour les cycles évanescents, Note aux C.R.A.S. Paris t. 306, série I, p. 473-478 (1988) et preprint Institut E. Cartan 1988 n° 13 (Mai 88).

[K] M. KASHIWARA, B-function and holonomic systems, Inv. Math. 38 (1976) p. 33-53.

[M] B. MALGRANGE, Integrales asymptotiques et monodromie, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. t. 7 (1974) p. 405-430.

[$\mathcal{M}$] J. MILNOR, Singular points of complex hypersurfaces, Annals of Math. Studies n° 61 (1968) Princeton University Press.

[NA] V. NAVARRO AZNAR, Sur la théorie de Hodge-Deligne, Inv. Math. 90 p. 11-76 (1987).

[P] F. PHAM, Structure de Hodge mixte associée à un germe de fonction à point critique isolé, Analyse et topologie sur les espaces singuliers Astérisque n° 101-102 (1983) p. 268-285.

[S.1] M. SAITO, Hodge filtration on Gauss Manin system I, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo Sec. I A, vol. 30 (1984) p. 489-498.

[S.2] M. SAITO, Gauss Manin system and mixed Hodge structure, Proc. Japan Acad. 58 (1982) Série A, p. 29-32.

[S.3] M. SAITO, Modules de Hodge polarisables, preprint RIMS 553 (Oct. 86) et Mixed Hodge modules, preprint RIMS 585 (July 87).

[Sc. St] J. SCHERK et J.H.M. STEENBRINK, On the mixed Hodge structure on the cohomology of the Milnor Fiber, report n° 16, University of Leiden (Août 84).

[V.1] A.N. VARCHENKO, Asymptotic Hodge structure in the vanishing cohomology, Math. USSR Izvestya, Vol. 18 n° 3 (1982) p. 459-512.

[V.2] A.N. VARCHENKO, The asymptotics of holomorphic forms determine a mixed Hodge structure, Soviet. Math. Dokl. Vol. 22 n° 3 (1980) p. 772-775.

Institut Elie Cartan
CNRS URA 750
Université de Nancy I
B.P. 239
54506 Vandœuvre les Nancy Cedex
FRANCE