PATRICK POLO

Variétés de Schubert et excellentes filtrations

Astérisque, tome 173-174 (1989), p. 281-311

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1989__173-174__281_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 173-174 (1989), P.281-311.

VARIÉTÉS DE SCHUBERT ET EXCELLENTES FILTRATIONS

Patrick Polo

Introduction

Nous étudions une certaine classe, $\mathcal{E}$, de représentations d'un sous-groupe de Borel B d'un groupe semi-simple G, que nous introduisons de la façon suivante. A chaque B-module M est associé (*cf.* 1.1) un fibré vectoriel $\mathcal{L}(M)$ sur G/B; et on désigne par P^- l'ensemble des B-modules λ de dimension 1 tels que $H^0(G/B, \mathcal{L}(\lambda)) \neq 0$. Les sous-variétés fermées irréductibles B-stables de G/B (variétés de Schubert) sont paramétrées par le groupe de Weyl W. Pour chaque $w \in W$, on désigne par H^0_w le foncteur $M \mapsto H^0(X_w, \mathcal{L}(M))$, où X_w désigne la variété de Schubert associée à w. Les modules $H^0_w(\lambda)$, pour $\lambda \in P^-$, ont des propriétés assez remarquables (*cf.* 1.4.2 et 2.4), de sorte qu'il est intéressant d'introduire la classe $\mathcal{E}$ des B-modules qui possèdent une ***excellente filtration*** (c.à.d. une filtration dont les quotients sont isomorphes à des modules $H^0_w(\lambda)$), et de chercher à construire des objets non-triviaux de cette classe. Dans [Jo, 5.8], A.Joseph a suggéré que $H^0_{w_0}(\lambda) \otimes H^0_w(\mu)$ appartient à $\mathcal{E}$, pour tous $\lambda, \mu \in P^-$ et $w \in W$ (w_0 désigne le plus grand élément de W). Ceci est équivalent (*cf.* 1.4.2) à la conjecture:

(C1) $H^0_{w_0}(\lambda) \otimes \mu$ appartient à $\mathcal{E}$, pour tous $\lambda, \mu \in P^-$.

Plus généralement, on peut se demander si la condition suivante est vérifiée:

(C2) $H^0_w(\lambda) \otimes \mu$ appartient à $\mathcal{E}$, pour tous $w \in W$ et $\lambda, \mu \in P^-$.

Ces deux questions sont discutées dans le présent travail, qui se compose de quatre parties. Dans la première, nous avons regroupé, sous une forme convenant à nos besoins, des résultats contenus dans la littérature sur le sujet. Dans la seconde, nous établissons quelques propriétés fondamentales des modules $H^0_w(\lambda)$ (2.1–2.5), et relions la question (C1) à une question portant sur des G-modules (Théorème 2.19). Dans la troisième, nous prouvons la conjecture (C1), sous certaines restrictions sur la caractéristique de k. Enfin, dans la dernière partie, nous démontrons un résultat (Théorème 4.9) qui entraîne que l'assertion (C2) est vérifiée lorsque G est de type A_n.

REMERCIEMENTS. Ce texte est une version augmentée d'un exposé donné en juin 1987 à Paris, au cours de la Période Spéciale de Théorie des Représentations. Je remercie les organisateurs de m'avoir donné l'occasion de faire cet exposé. Je suis heureux d'exprimer ma reconnaissance à mon directeur de thèse A.Joseph, qui m'a proposé ce sujet de recherche, et m'a invité, en avril et mai 1987, à l'institut Weizmann, où une partie de ce travail a été faite. J'en avais obtenu les premiers résultats pendant que je rendais visite à H.H.Andersen à l'université d'Århus, en novembre et décembre 1986. Je suis heureux de le remercier pour avoir rendu possible ce séjour, et pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail. Enfin, j'ai plaisir à remercier O.Mathieu et W.van der Kallen pour d'utiles communications qui m'ont conduit au Théorème 2.19.

Notations

Le corps de base k est supposé algébriquement clos et de caractéristique arbitraire. Soit G un groupe algébrique sur k, semi-simple et simplement connexe. Soit T un tore maximal de G, soit B un sous-groupe de Borel de G contenant T, et soit U le radical unipotent de B. Soient R le système de racines et W le groupe de Weyl associés à la paire (G,T). On choisit une base Δ de R telle que l'ensemble R^+ des racines positives corresponde à B. Soit $\leq$ l'ordre de Bruhat sur W relativement au choix des réflections simples correspondant à Δ, et soit w_0 l'unique élément maximal de $(W, \leq)$. On note Q le réseau des racines, P le réseau des poids, et P^+ (resp. P^-) l'ensemble des poids dominants (resp. antidominants). On munit P de l'ordre usuel, en déclarant que $\lambda \geq \mu$ si $\lambda - \mu \in Q^+$. Puisque G est simplement connexe, P est égal au groupe $X(T)$ des caractères de T. Donc, à chaque $\lambda \in P$ est associée une représentation de dimension 1 de B, notée k_λ. Si aucune confusion n'est à craindre, nous la désignerons simplement par λ.

Rappelons que si H est un groupe algébrique, un H-module est par définition un H-module rationnel, c.à.d. un $k[H]$-comodule. On notera $\mathcal{C}(H)$ la catégorie des H-modules (rationnels). C'est une catégorie abélienne qui possède suffisamment d'injectifs. Ainsi, on peut considérer les foncteurs dérivés $M \mapsto H^i(B, M)$ du foncteur $M \mapsto M^H$ (M un H-module). On prendra garde à ne pas confondre ces foncteurs avec les foncteurs d'induction $M \mapsto H^i(M)$ définis plus loin.

1 Généralités et rappels.

1.1 Faisceaux associés à des B-modules et variétés de Schubert.

Soit K un groupe algébrique et H un sous-groupe de K tel que la fibration $K \xrightarrow{\pi} K/H$ soit localement triviale. A tout H-module M on associe un faisceau $\mathcal{L}(M)$ sur $X := K/H$ de la façon suivante: pour chaque ouvert U de X, $\Gamma(U, \mathcal{L}(M))$ est l'ensemble des fonctions régulières $\phi : \overset{-1}{\pi}(U) \rightarrow M$ qui vérifient $\phi(gh) = h^{-1}\phi(g)$ pour tous $g \in \overset{-1}{\pi}(U)$, $h \in H$.

1.1.1. PROPOSITION. *([C-P-S 1, Proposition 1.3.1]) Soient M un H-module et E un K-module. Le faisceau $\mathcal{L}(M \otimes E)$ est isomorphe au faisceau $\mathcal{L}(M) \otimes E$, dont les sections au-dessus d'un ouvert U sont $\Gamma(U, \mathcal{L}(M)) \otimes E$.*

PREUVE: Considérons l'application α qui, à une section ϕ de $\mathcal{L}(M \otimes E)$ au-dessus d'un ouvert U, associe la fonction $g \mapsto (1 \otimes g)\phi(g)$, qui est une section de $\mathcal{L}(M) \otimes E$ au-dessus de U. Alors α est une bijection, dont la bijection réciproque est l'application β, qui à une section ψ de $\mathcal{L}(M) \otimes E$ associe la fonction: $g \mapsto (1 \otimes g^{-1})\phi(g)$. ■

On note H^0 le foncteur qui à $M \in \mathcal{C}(H)$ associe $H^0(X, \mathcal{L}(M)) \in \mathcal{C}(K)$. Pour tout H-module injectif I, on a $H^i(X, \mathcal{L}(I)) = 0$ pour $i > 0$ ([C-P-S 1, Lemma 1.2.4]). Donc les foncteurs dérivés R^iH^0 s'identifient aux foncteurs $M \mapsto H^i(X, \mathcal{L}(M))$. On les notera simplement $H^i(M)$.

1.1.2. COROLLAIRE. *Pour tout H-module M et pour tout K-module E, on a* $H^i(M \otimes E) \simeq H^i(M) \otimes E$ *pour tout* $i \geq 0$.

PREUVE: Pour commencer, supposons E de dimension finie. Considérons une résolution injective $0 \to M \to I^\bullet$ du H-module M. Puisque E est de dimension finie, chaque $I \otimes E$ est encore injectif. Le résulat en découle. Puisque la cohomologie commute à la limite inductive filtrante, le résultat reste valable pour E arbitraire. ■

Soit M un H-module. L'évaluation au point e fournit un morphisme ϵ de $H^0(M)$ vers M, qui induit un isomorphisme de foncteurs, de $Hom_K(?, H^0(M))$ vers $Hom_H(?, M)$. En particulier, le foncteur $M \mapsto M^H$ est isomorphe au composé des foncteurs $M \mapsto H^0(M)$ et $E \mapsto E^K$. Puisque H^0 transforme un H-module injectif en un K-module injectif, on a une suite spectrale $E_2^{p,q} = H^p(K, H^q(M))$ qui converge vers $H^{p+q}(H, M)$. On obtient donc la:

1.1.3. PROPOSITION. *(Réciprocité de Frobenius.)*
Si M est acyclique pour l'induction, c.à.d. si $H^q(M) = 0$ *pour tout* $q > 0$, *on a un isomorphisme:* $H^n(H, M) \simeq H^n(K, H^0(M))$, *pour tout* $n \geq 0$.

Supposons maintenant que H soit un sous-groupe parabolique de K. Alors la fibration $K \to K/H$ est localement triviale, donc on peut appliquer tout ce qui a été dit plus haut. De plus, puisqu'alors X est une variété complète, on a:

$$H^i(X, \mathcal{L}(k)) = H^i(X, \mathcal{O}_X) = \begin{cases} 0 \text{ si } i > 0 \\ k \text{ si } i = 0 \end{cases}$$

Il en résulte que, pour tout K-module E, on a $H^i(E) = 0$ pour $i > 0$ et $H^0(E) \simeq E$. Le foncteur H^0 est donc idempotent.

Revenons à notre groupe semi-simple G et à son sous-groupe de Borel B. On note $X = G/B$. A tout B-module M, on peut associer le faisceau $\mathcal{L}(M)$ sur X. Par exemple, soit $\lambda \in P$, considéré comme un B-module de dimension 1. Il est bien connu que $H^0(\lambda) \neq 0$ si et seulement si $\lambda \in P^-$ (*cf.* [Ja 2, Part 2, Proposition 2.6], voir aussi le corollaire 2.3). Attention! Dans [*loc. cit*], B correspond, comme il est d'usage, aux racines négatives, tandis que nous avons choisi B correspondant aux racines positives. On prendra donc garde aux changements de signe qui interviennent. Un module de la forme $H^0(\lambda)$ sera appelé un *module induit.*

Pour tout $w \in W$ la variété de Schubert X_w est la fermeture dans X (en topologie de Zariski) de la B-orbite BwB/B. (X_{w_0} est simplement X). Il est connu que $X_y \subseteq X_w$ si et seulement si $y \leq w$. Les variétés de Schubert sont normales.([Jo] pour k de caractéristique nulle; et [A 2], [Se] et [M-R 1] pour k arbitraire.)

Soit $w \in W$. On note H_w^0 le foncteur (exact à gauche) qui à un B-module M associe $H^0(X_w, \mathcal{L}(M)) \in \mathcal{C}(B)$. Pour chaque $i \geq 0$, on peut considérer d'une part le i^{eme} foncteur dérivé $R^i H_w^0$ de H_w^0, et d'autre part le foncteur $H^i(X_w, ?)$. Ils sont isomorphes, d'après la proposition suivante.

1.1.4. PROPOSITION. *Soit $w \in W$.*
(i) Soit M un B-module. Pour tout $i \geq 0$, les B-modules $R^i H^0_w(M)$ et $H^i(X_w, \mathcal{L}(M))$ sont isomorphes. Nous les identifierons, et nous désignerons ce module par $H^i_w(M)$.
(ii) (Identité tensorielle) Soit M un B-module et soit E un G-module. Alors, pour tout $i \geq 0$, les B-modules $H^i_w(M \otimes E)$ et $H^i_w(M) \otimes E$ sont isomorphes.

PREUVE: (*cf.* [C-P-S 1, Lemma 1.2.4]). Soit $0 \to M \to I^\bullet$ une résolution injective de M. Les $R^i H^0_w(M)$ sont définis comme étant la cohomologie du complexe $0 \to H^0_w(I^\bullet)$. D'autre part, pour tout B-module injectif I, on a $H^n(X_w, \mathcal{L}(I)) = 0$ pour tout $n > 0$. En effet tout B-module injectif est facteur direct dans une somme directe de copies de $k[B]$, donc il suffit de montrer cette assertion dans le cas où $I = k[B]$. Dans ce cas, $\mathcal{L}(I)$ s'identifie au faisceau $\pi_* \mathcal{O}_{Y_w}$, où π est la projection $G \xrightarrow{\pi} G/B$, et où $Y_w := \overline{BwB}$ est l'image réciproque de X_w. Or Y_w est une sous-variété affine de G, donc on a $H^n(X_w, \pi_* \mathcal{O}_{Y_w}) = 0$ pour tout $n > 0$ ([G 1, Corollaire 1.6.3] et [G 2, Corollaire 1.3.2]). On en déduit que l'on peut utiliser le complexe $0 \to \mathcal{L}(I^\bullet)$ pour calculer les $H^i(X_w, \mathcal{L}(M))$. Ceci prouve l'assertion *(i)*.

Pour l'assertion *(ii)*, nous observons que si I est un B-module injectif et E un G-module, alors $I \otimes E$ est un B-module qui est H^0_w-acyclique. En effet E est réunion de sous-modules de dimension finie, et, lorsque E est de dimension finie, $I \otimes E$ est un B-module injectif. Il en résulte que, si $0 \to M \to I^\bullet$ est une résolution injective de M, alors on peut calculer les $H^i_w(M \otimes E)$ en utilisant le complexe $0 \to H^0_w(I^\bullet \otimes E)$. L'assertion *(ii)* découle alors de 1.1.1. ■

Remarque. Soit α une racine simple et soit P_α le sous-groupe parabolique de G engendré par B et par s_α. Alors X_{s_α} est isomorphe au quotient de P_α par son sous-groupe de Borel B. Donc, comme signalé plus haut, le foncteur H^O_α est idempotent.

1.2 Deux versions de $G/B \times G/B$.

A tout $B \times B$-module M, on peut associer le faisceau $\mathcal{L}(M)$ sur $X \times X$. Si N et N' sont deux B-modules et si $M = N \otimes N'$, alors $\mathcal{L}_{X \times X}(M)$ est isomorphe au produit tensoriel extérieur $\mathcal{L}_X(N) \hat{\otimes} \mathcal{L}_X(N')$.

L'application $\tau : (g, x) \mapsto (gB, gx)$ établit un isomorphisme de G-variétés entre le produit fibré $\tilde{X} := G \times^B X$ et $X \times X$. (G opère diagonalement sur $X \times X$ et par multiplication à gauche sur $\tilde{X}$.) A chaque $B \times B$-module M est associé le faisceau $(\tau^{-1})_* \mathcal{L}(M)$ sur $\tilde{X}$, que par abus on note encore $\mathcal{L}(M)$.

Suivant les notations de [Ku], si S est une union de variétés de Schubert dans X, on note $\tilde{S}$ la G-variété $G \times^B S$. La suite spectrale de Leray associée à la fibration $\tilde{S} \to G/B$ fournit, pour toute paire (N,N') de B-modules, une suite spectrale $E_2^{p,q} = H^p(G/B,\, H^q(S, N) \otimes N')$ qui converge vers $H^{p+q}(\tilde{S}, N' \hat{\otimes} N)$. En particulier, on a $H^0(\tilde{S}, N' \hat{\otimes} N) \simeq H^0(H^0(S, N) \otimes N')$. Si on note $K_S(N)$ le noyau de l'application de restriction $H^0(N) \to H^0(S, N)$, et $K_S(N', N)$ celui de l'application $H^0(\tilde{X}, N' \hat{\otimes} N) \to H^0(\tilde{S}, N' \hat{\otimes} N)$, alors on a aussi: $K_S(N', N) \simeq H^0(K_S(N) \otimes N')$.

1.3 Hyperalgèbres et modules de Weyl.

Nous renvoyons à [Ja 2, Chap. 7 and Chap. 8, 1.20] pour la définition de l'algèbre des distributions (ou hyperalgèbre) $\mathcal{U}(H)$ d'un groupe algébrique H, ainsi que pour la définition des modules de Weyl. Nous nous contenterons de rappeler les quelques faits suivants.

L'hyperalgèbre $\mathcal{U}(U)$ de U est engendrée par les puissances divisées $X_\alpha^{(n)}$, pour $\alpha \in R^+$ et $n \geq 0$. Si l'on fixe une numérotation $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ de R^+, alors les "monômes ordonnés" forment une base de $\mathcal{U}(U)$ comme espace vectoriel. Nous nous servirons de celà pour dire qu'un certain quotient M de $\mathcal{U}(U)$ est de dimension finie (*cf.* 2.1).

Une condition pour qu'un $\mathcal{U}(B)$-module soit un B-module est donnée dans [C-P-S 2, Theorem 9.4]. Nous utiliserons celà pour dire que le module M mentionné plus haut est un B-module.

Le module de Weyl $E(\lambda)$ ($\lambda \in P^+$) est obtenu par réduction modulo p du $G(\mathbb{C})$-module simple de plus haut poids λ. Son caractère est encore donné par la formule de Weyl, mais il n'est plus, en général, simple. Il possède un unique sous-module maximal, noté $Rad\, E(\lambda)$, et le quotient simple correspondant est noté $L(\lambda)$. C'est l'unique G-module simple de plus haut poids λ. On sait que $E(\lambda)$ est le dual de $H^0(-\lambda)$ ([Ja 1, Satz 1]). Ainsi $L(\lambda)^* = L(-w_0\lambda)$ est le socle de $H^0(-\lambda)$. Attention! Cette convention est différente de celle qui prévaut habituellement. Tous les autres sous-quotients simples de $E(\lambda)$ et de $H^0(-\lambda)$ sont des $L(\mu)$, pour $\mu \in P^+$ vérifiant $(\mu, \mu) < (\lambda, \lambda)$.

Un poids de $E(\lambda)$ sera dit *extrémal* s'il est conjugué à λ. Si $w\lambda$ est l'un d'eux ($w \in W$), on notera $F_w(\lambda)$ le sous-B-module de $E(\lambda)$ engendré par le sous-espace de poids $w\lambda$. Nous appellerons un tel module un module de Demazure (*cf.* [Dem]).

Nous verrons plus loin (2.5 et 2.6) qu'il y a une certaine ressemblance entre les B-modules $F_w(\lambda)$ et les G-modules $E(\lambda)$. Pour permettre la comparaison, nous rappelons la:

1.3.1. PROPOSITION. *([C-K-P-S, Corollaries 3.2 and 3.3])*
(i) Soit M un G-module et soit $\lambda \in P^+$. S'il existe $i > 0$ tel que $Ext^i_G(E(\lambda), M) \neq 0$, alors il existe un poids μ de M tel que $\mu > \lambda$.
(ii) Pour tous $\lambda, \mu \in P^+$ et pour tout $i > 0$, on a: $Ext^i_G(E(\lambda), E(\mu)^*) = 0$.

1.4 Foncteurs d'induction et foncteurs de Joseph.

A.Joseph a défini ([Jo]), pour chaque $w \in W$, un foncteur exact à droite D_w dans la catégorie des B-modules de dimension finie. Bien que cette catégorie ne possède pas suffisamment d'objets projectifs, il a réussi à définir les foncteurs dérivés D^i_w ([*loc. cit,* Section 5]). Sa construction reste valable en caractéristique arbitraire: si M est un B-module de dimension finie, $D_\alpha(M)$ est défini comme étant le plus grand quotient de dimension finie de $\mathcal{U}(P_\alpha) \otimes_{\mathcal{U}(B)} M$. Remarquons que $D_\alpha(M)^*$ et $H^0_\alpha(M^*)$ sont isomorphes, car ils vérifient tous deux la propriété universelle des modules induits. Si $w = s_{\alpha_1} \ldots s_{\alpha_n}$ est une décomposition réduite de w, D_w

est par définition égal à: $D_{\alpha_1} \circ \ldots \circ D_{\alpha_n}$. A isomorphisme près, ceci ne dépend pas de la décomposition réduite choisie ([*loc.cit*, 2.15]). On notera $D = D_{w_0}$.

L'existence de résolutions comme dans [*loc. cit.*] est assurée par le lemme suivant.

1.4.1. Lemme. *Soit M un B-module de dimension finie. Alors il existe un poids $\lambda \in P^+$ et un G-module E tels que M soit un quotient de $E \otimes \lambda$.*

Preuve: D'après le théorème de Serre, l'application de restriction $H^0(X, M \otimes -\lambda) \to M \otimes -\lambda$ est surjective lorsque λ est suffisamment dominant. ∎

Le contenu de la proposition ci-dessous soit provient de [A 2], soit résulte facilement de ([A 2]+[Jo]).

1.4.2. Proposition. *(Foncteurs d'induction et foncteurs de Joseph.)*
Soit $\lambda \in P^-$ et soient $w, y \in W$.
(i) On a $H^i(X_w, \lambda) = 0$ pour $i > 0$.
(ii) L'application de restriction, de $H^0(\lambda)$ vers $H^0(X_w, \lambda)$ est surjective. Son image s'identifie au dual du sous-B-module $F_w(-\lambda)$ de $E(-\lambda)$ (cf. 1.3).
(iii) On a $H_y^i(H_w^0(\lambda)) = \begin{cases} 0 \text{ si } i > 0 \\ H_{y*w}^0(\lambda) \text{ si } i = 0, \text{ où } y * w \text{ est défini plus bas} \end{cases}$
(iv) Soit M un B-module de dimension finie. Alors, pour tout $i \geq 0$, on a un isomorphisme: $H_w^i(M) \simeq D_w^i(M^*)^*$.

Esquisse de la démonstration: Les assertions *(i)* et *(ii)* sont cruciales. Elles sont prouvées dans [A 2], et ont aussi été obtenues par Mehta, Ramanan et Ramanathan ([M-R 1] et [R-R]). L'assertion *(iii)* est implicitement contenue dans [A 2], et en tout cas résulte facilement de [A 2]+[Jo]. La loi $*$ est l'unique loi de composition sur W qui soit associative et telle que, pour tout $z \in W$ et toute réflection simple s, on ait: $s * z = Max\{sz, z\}$ (pour l'ordre de Bruhat). L'existence d'une telle loi résulte de [Jo, 2.15], ou bien peut être vue comme conséquence d'un résultat sur les algèbres de Hecke ([C, Théorème 3.1]).

Il résulte de l'assertion *(iii)*, et de la définition des foncteurs de Joseph, que l'on a $H_w^0(M)^* \simeq D_w(M^*)$ pour tout B-module M de dimension finie. En tenant compte de *(ii)*, on obtient en particulier que, pour $\mu \in P^+$, $D_w(\mu)$ est isomorphe à $F_w(\mu)$. Pour cette raison, quand nous voudrons insister sur l'aspect fonctoriel (par exemple quand nous parlerons de filtrations, ou quand nous voudrons utiliser l'identité tensorielle) nous appellerons ce module un module de Joseph, tandis que nous continuerons à l'appeler un module de Demazure quand nous le considérerons comme un sous-module de $E(\mu)$.

Prouvons l'assertion *(iv)*. Soit $0 \to M \to A_\bullet$ une résolution du B-module M, dans laquelle chaque A_i est isomorphe au produit tensoriel d'un G-module E_i et d'un poids antidominant λ_i (*cf.* 1.4.1). D'après l'assertion *(i)*, on a $H_w^n(A_i) = 0$ pour tout $i \geq 0$ et tout $n > 0$. Il en résulte que $H_w^n(M)$ s'identifie au n^{ieme} groupe de cohomologie du complexe: $0 \to H_w^0(A_\bullet)$.

De plus, $A_\bullet^* \to M^* \to 0$ est une résolution de M^* comme dans [Jo, Section 5], donc, par définition, les $D_w^n(M^*)$ sont les groupes d'homologie du complexe $D_w(A_\bullet^*) \to 0$. L'assertion *(iv)* en résulte. ∎

Remarque. Il est utile d'avoir à sa disposition à la fois les foncteurs d'induction H^0_w et les foncteurs de Joseph. En effet, la première formulation nous servira dans la partie 2, tandis que la seconde est la plus pratique pour les parties 3 et 4.

1.5 Filtrations.

Pour nous, une filtration d'un module M sera une suite croissante de sous-modules: $(M_i)_{i\geq 0}$, telle que $M_0 = 0$ et que $\cup_{i\geq 0} M_i = M$.

Soit M un G-module. Rappelons que l'on dit que M possède une *filtration de Weyl* (*cf.* [W]) s'il possède une filtration dont les quotients sont isomorphes à des modules de Weyl; et que M possède une *bonne filtration* (*cf.* [Do 1]) si les quotients sont isomorphes à des modules induits. Un critère cohomologique d'existence d'une bonne filtration est donné dans [Do 1, Corollary 1.3]. Si M est de dimension finie, il est clair que M possède une bonne filtration si et seulement si M^* possède une filtration de Weyl.

Nous dirons qu'un B-module M possède une excellente filtration (resp. une filtration de Joseph) s'il possède une filtration dont les quotients sont isomorphes à des modules de la forme $H^0_w(\lambda)$ (resp. à des modules de Joseph). Remarquons que si M possède une excellente filtration, alors, d'après 1.4.2 *(iii)*, $H^0(M)$ possède une bonne filtration.

Dans [Jo, 5.8], il est suggéré que, pour tous $\lambda, \mu \in P^+$ et tout $w \in W$, $E(\lambda) \otimes D_w(\mu)$ possède une filtration de Joseph. D'après 1.1.4 et 1.4.2*(iii)*, ceci est équivalent à la conjecture suivante:

(C1) Pour tous $\lambda, \mu \in P^+$, $E(\lambda) \otimes \mu$ possède une filtration de Joseph.

Il est alors naturel de se demander si la condition (C2) ci-dessous est satisfaite.

(C2) Pour tous $\lambda, \mu \in P^+$, et pour tout $w \in W$, $D_w(\lambda) \otimes \mu$ possède une filtration de Joseph.

En dualisant, on peut reformuler les conditions (C1-2) en termes de filtrations excellentes. Bien que ces deux formulations soient tout à fait équivalentes, il est parfois plus commode de choisir l'une plutôt que l'autre. Dans la partie 2, nous adoptons le point de vue des filtrations excellentes, et nous établissons une équivalence (Théorème 2.19) entre l'assertion (C1) et l'existence de certaines bonnes filtrations. Il en résulte en particulier que l'assertion (C1) est vraie en caractéristique nulle. Dans les deux parties suivantes, nous adoptons le point de vue des filtrations de Joseph. Dans la partie 3 nous montrons, sous certaines restrictions sur p=car k, que l'assertion (C1) est vérifiée. Dans la partie 4, nous prouvons un résultat (Théorème 4.9) qui entraîne que l'assertion (C2) est vérifiée lorsque G est de type A_n.

Partie 2

Soit $\lambda \in P^+$. Rappelons que $H^0_w(-\lambda)$ a un B-socle simple de poids $-w\lambda$, et que son dual $F_w(\lambda)$ est engendré par un vecteur $e_{w\lambda}$ de poids $w\lambda$.

2.1. PROPOSITION FONDAMENTALE. *Soit $\lambda \in P^+$ et soit $w \in W$. Soit J l'idéal à gauche de $\mathcal{U}(U)$ engendré par les éléments $X_\alpha^{(n_\alpha)}$, pour $\alpha \in R^+$ et $n_\alpha \geq 1 + k_\alpha$, où $k_\alpha := Max\{(-w\lambda, \check{\alpha}), 0\}$, et soit K l'idéal à gauche de $\mathcal{U}(B)$ engendré par J et par le noyau du caractère $w\lambda$. Alors K est égal à l'annulateur dans $\mathcal{U}(B)$ de $e_{w\lambda}$.*

PREUVE: Soit I l'annulateur de $e_{w\lambda}$ dans $\mathcal{U}(U)$. Puisque $F_w(\lambda)$ est un sous-module de $E(\lambda)$, tous ses poids μ vérifient $(\mu, \mu) \leq (\lambda, \lambda)$. Ceci entraîne que $J \subseteq I$. On en déduit qu'il existe un morphisme surjectif de $\mathcal{U}(B)$-modules, π, de $M := \mathcal{U}(B)/K$ vers $F_w(\lambda)$. De plus M est un $\mathcal{U}(B)$-module de dimension finie, qui est $\mathcal{U}(T)$ semi-simple à poids entiers. (M s'identifie à $\mathcal{U}(U)/J$, où T agit par l'action adjointe.) D'après [C-P-S 2, Theorem 9.4], M est muni d'une structure de B-module.

Pour montrer que π est un isomorphisme, il suffit de montrer que $dim\, M \leq dim\, F_w(\lambda)$. Pour celà, il suffit de construire un B-morphisme injectif, de M^* dans $F_w(\lambda)^* = H_w^0(-\lambda)$. Soit e l'image dans M de $1 \in \mathcal{U}(B)$. Soit Γ l'ensemble des fonctions rationnelles sur $Y_w = \overline{BwB}$ qui sont définies sur l'ouvert $C_w := BwB$. On définit une application κ de M^* vers Γ de la façon suivante.

Soit $U_w = U \cap ww_0(U)$. Rappelons que l'application σ, qui au couple (n, b) associe nwb, établit un isomorphisme de variétés algébriques, de $U_w \times B$ vers l'ouvert C_w de Y_w. Soit $\phi \in M^*$. L'application $\kappa(\phi)$, qui à $(n, b) \in U_w \times B$ associe $\lambda(b)\phi(ne)$, est une fonction régulière sur $U_w \times B$. Donc $\kappa(\phi) \circ \sigma^{-1}$, par abus encore notée $\kappa(\phi)$, est une fonction régulière sur C_w.

2.2. LEMME. *Soit $x \in C_w$. Pour n'importe quelle décomposition $x = nwb$, où $n \in U$ et $b \in B$, on a: $\kappa(\phi)(x) = \lambda(b)\phi(ne)$.*

PREUVE: Soit $x = n_0 w b_0$ l'unique décomposition pour laquelle on a $n_0 \in U_w$ et $b_0 \in B$. On veut montrer que $\lambda(b)\phi(ne) = \lambda(b_0)\phi(n_0 e)$. L'égalité $nwb = n_0 w b_0$ entraîne: $n^{-1}n_0 = wbb_0^{-1}w^{-1} \in U \cap w(U)$. Il en résulte d'une part que bb_0^{-1} appartient à U et d'autre part que $n^{-1}n_0$ agit trivialement sur e. En effet, si $\alpha \in R^+ \cap w(R^+)$, alors $(-w\lambda, \check{\alpha}) \leq 0$, donc $k_\alpha = 0$, *i.e.* $X_\alpha^{(i)}$ est contenu dans J pour tout $i \geq 1$. On a donc $\lambda(b) = \lambda(b_0)$, et $ne = n_0 e$, d'où l'égalité voulue. ■

Il résulte du lemme que κ est un morphisme de B-modules, de M^* vers Γ. Puisque e engendre M comme B-module, on en déduit que κ est injective. Nous prétendons que κ fournit l'injection de M^* dans $H_w^0(-\lambda)$ recherchée. Ceci équivaut à dire que, pour toute $\phi \in M^*$, $\kappa(\phi)$ est une fonction régulière sur X_w toute entière.

En effet, supposons au contraire qu'il existe $\phi \in M^*$ telle que $\hat{\phi} := \kappa(\phi)$ ne soit pas partout définie. Puisque Y_w est normale et que l'union, pour $y < w$ et $l(y) \leq l(w) - 2$, des variétés Y_y est un fermé F de codimension 2, alors $\hat{\phi}$ n'est pas partout définie sur l'ouvert $V = Y_w \setminus F$ (*cf.* [Ii, Theorem 2.15]). Puisque V est normale (V est même lisse), on sait d'après [*loc. cit*, Theorems 2.17 and 2.15] qu'il existe un point $x_0 \in V$, où $\hat{\phi}$, considérée comme fonction à valeurs dans $\boldsymbol{P}^1$, prend la valeur ∞ .

Pour obtenir une contradiction, il suffit maintenant de construire une application régulière ψ de k dans V qui vérifie les trois conditions suivantes:

Pour obtenir une contradiction, il suffit maintenant de construire une application régulière ψ de k dans V qui vérifie les trois conditions suivantes:
(i) Pour tout $z \neq 0$, $\psi(z) \in C_w$.
(ii) $\psi(0) = x_0$.
(iii) $\hat{\phi} \circ \psi(0) \neq \infty$.

On peut écrire $x_0 = nyb$, avec $n \in U, b \in B$, $y < w$ et $l(y) = l(w) - 1$. Alors, il existe $\gamma \in R^+$ telle que: $w^{-1}(\gamma) \in R^-$ et $y = s_\gamma w$. On a aussi $y = ws_\alpha$, où $\alpha = -w^{-1}(\gamma)$. Rappelons qu'à chaque racine β est associé un sous-groupe à un paramètre de G: $z \mapsto \theta_\beta(z)$. D'après [St, Lemma 19], on a la formule:

$$s_\alpha = \theta_\alpha(z)\theta_{-\alpha}(-z^{-1})\theta_\alpha(z)h_\alpha(z) \text{ pour tout } z \neq 0,$$

où $h_\alpha(z)$ est un élément de T qui agit par $z^{(\mu,\check{\alpha})}$ sur le sous-espace de poids μ de toute représentation de T. Nous posons: $\psi(z) = nw\theta_\alpha(-z)s_\alpha b$. On a $\psi(0) = x_0$ et, en utilisant [St, Lemma 20], un calcul facile montre que:

$$\psi(z) = n\theta_\gamma(\epsilon z^{-1})w\theta_\alpha(z)h_\alpha(z)b \text{ pour tout } z \neq 0,$$

où ϵ est une constante, égale à ± 1. En particulier, $\psi(z)$ appartient à C_w pour $z \neq 0$. D'après le lemme 2.2 on peut utiliser l'écriture ci-dessus pour calculer $\hat{\phi}(\psi(z))$, et on obtient que:

$$\text{pour tout } z \neq 0, \ \hat{\phi}(\psi(z)) = \lambda(b) \sum_{m \geq 0} \epsilon^m z^{(\lambda,\check{\alpha})-m}(n^{-1}. \phi)(X_\gamma^{(m)}e)$$

Or $X_\gamma^{(m)}e = 0$ pour $m \geq 1 + (-w\lambda, \check{\gamma}) = 1 + (\lambda, \check{\alpha})$. Il en résulte que $\hat{\phi}(\psi(z))$ est un polynôme en z. Donc ψ vérifie les trois conditions *(i)*,*(ii)*,*(iii)* énoncées plus haut. Ceci termine la démonstration de la proposition 2.1. ■

Remarques (1) Nous utilisons dans la démonstration le fait que $F_w(\lambda)^* \simeq H^0_w(-\lambda)$ (*cf.* 1.4.2).
(2) La proposition 2.1 avait été démontrée par A.Joseph ([Jo, Theorem 3.4]) pour k de caractéristique nulle.
(3) La démonstration ci-dessus a été étendue au cas d'une algèbre de Kač-Moody générale par O.Mathieu ([Ma 3, Lemme 4]).

2.3. Corollaire. *(de la démonstration). Soit $\lambda \in P$ et soit $w \in W$. Alors $H^0(X_w, \mathcal{L}(\lambda))$ est non nul si et seulement si $(\lambda, \check{\alpha}) \leq 0$ pour toute $\alpha \in R^+$ qui vérifie $ws_\alpha < w$ et $l(ws_\alpha) = l(w) - 1$.*

Preuve: Le B-module $H^0_w(\lambda)$ est de dimension finie, donc est non nul si et seulement si il contient un U-invariant non nul. Or, à un scalaire près, il existe une unique section τ de $\mathcal{L}(\lambda)$ au dessus de C_w qui soit U-invariante: à un élément nwb elle associe $\lambda(b^{-1})$.

La question est donc de savoir dans quels cas τ est une fonction régulière sur Y_w. Il résulte de la démonstration de 2.1 que τ est régulière sur Y_w si et seulement si, pour chaque $\alpha \in R^+$ vérifiant $ws_\alpha < w$ et $l(ws_\alpha) = l(w) - 1$, la fonction $\tau \circ \psi_\alpha$ est régulière au point 0, où ψ_α est la courbe correspondant à $y = ws_\alpha$ introduite dans la démonstration. Or on a $\tau(\psi_\alpha(z)) = z^{-(\lambda,\check{\alpha})}$, d'où le résultat. ■

Le corollaire suivant résulte immédiatement de 2.1.

2.4. COROLLAIRE. (PROPRIÉTÉS UNIVERSELLES DE $F_w(\lambda)$ ET DE $H^0_w(-\lambda)$).
Soit $\lambda \in P^+$ et soit $w \in W$. Soit M un B-module dont tous les poids μ vérifient $(\mu,\mu) \leq (\lambda,\lambda)$.
(i) Si M est engendré par un vecteur de poids $w\lambda$, alors M est un quotient de $F_w(\lambda)$.
(ii) Si M a un B-socle simple de poids $-w\lambda$, alors M s'injecte dans $H^0_w(-\lambda)$.

Ceci nous donne les deux corollaires suivants. (Comparer avec 1.3.1)

2.5. COROLLAIRE. *Soit $\lambda \in P^+$ et soit M un module dont tous les poids μ vérifient $(\mu,\mu) \leq (\lambda,\lambda)$. Alors:*
(i) $Ext^1_B(F_w(\lambda), M) = 0$.
(ii) $Ext^1_B(M, H^O_w(-\lambda)\,) = 0$.

PREUVE DE *(i)*: Considérons une suite exacte de B-modules:

$$0 \to M \to E \xrightarrow{\pi} F_w(\lambda) \to 0.$$

Soit $e \in E$ un vecteur de poids $w\lambda$ dont l'image par π engendre $F_w(\lambda)$, et soit N le sous-module de E engendré par e. Tous les poids μ de N vérifient $(\mu,\mu) \leq (\lambda,\lambda)$, donc N est un quotient de $F_w(\lambda)$. On en déduit que π induit un isomorphisme de N vers $F_w(\lambda)$. Il en résulte que E est la somme directe de N et de $Ker\,\pi = M$. Ceci prouve que $Ext^1_B(F_w(\lambda), M) = 0$. ■

PREUVE DE *(ii)*: M est réunion (filtrante croissante) de ses sous-modules de dimension finie $\{M_i\}_{i\in I}$. Considérons une suite exacte de B-modules:

$$0 \to H^0_w(-\lambda) \to E \xrightarrow{\pi} M \to 0.$$

Soit $j \in I$. On suppose avoir construit, pour tout $i < j$, un B-morphisme $s_i : M_i \to E$ tel que $\pi s_i = id_{M_i}$. Puisque M_j est de dimension finie, alors $Ext^1_B(M_j, H^0_w(-\lambda)\,)$ est isomorphe à $Ext^1_B(F_w(\lambda), M_j^*)$, qui est nul d'après l'assertion *(i)*. Donc il existe un B-morphisme $s'_j : M_j \to E$ tel que $\pi s'_j = id_{M_j}$. Soit δ la restriction à M_i de $s_i - s'_j$. Alors $\pi\delta = 0$, *i.e.* $\delta \in Hom_B(M_i, H^0_w(-\lambda)\,)$. Mais $Ext^1_B(M_j/M_i, H^0_w(-\lambda)\,) = 0$, puisque M_j/M_i est de dimension finie. Donc δ est la restriction à M_i d'un élément $\phi \in Hom_B(M_j, H^0_w(-\lambda)\,)$. Alors, la restriction à M_i de $s_j := s'_j + \phi$ coincide avec s_i. Puique $M = \cup_{k\in I} M_k$, on construit ainsi un B-morphisme $s : M \to E$ tel que $\pi s = id_M$. Ceci prouve que $Ext^1_B(M, H^0_w(-\lambda)\,) = 0$ ■

2.6. COROLLAIRE. *Soient $\lambda, \mu \in P^+$, et soient $w, y \in W$.*
(i) Si $Ext^1_B(F_w(\lambda), F_y(\mu)\,)$ est non nul, alors $(\mu,\mu) > (\lambda,\lambda)$.
(ii) On a $Ext^1_B(F_w(\lambda), H^0_y(-\mu)\,) = 0$.

PREUVE: La première assertion résulte de 2.5. Rappelons que si M et N sont deux B-modules de dimension finie, alors $Ext^1_B(M,N)$ et $Ext^1_B(N^*, M^*)$ sont isomorphes. Donc on peut échanger les rôles de λ et μ dans la seconde assertion. Le résultat découle alors de 2.5. ■

Remarque. En fait on a $Ext^i_B(F_w(\lambda), H^0_y(-\mu)\,) = 0$ pour tout $i > 0$ ([Ka, Theorem 2.20 *(i)*]).

Le lemme technique ci-dessous et les trois propositions qui suivent nous seront utiles pour la démonstration du théorème 2.19. Rappelons que la loi $*$ est définie en 1.4.2.

2.7. LEMME.
(i) Soient $w, y, y' \in W$. On suppose $y \geq y'$. Alors $y * w \geq y' * w$ et $w * y \geq w * y'$.
(ii) Soient $w, y, z_1, z_2 \in W$. On suppose $z_i \not\leq z_j$, $w \leq z_i y$, et $l(z_i y) = l(z_i) + l(y)$ pour $i, j = 1, 2$. Alors il existe $x, t \in W$ tels que $t \leq y, x < z_1, x < z_2, w = xt$, $l(w) = l(x) + l(t)$, et $w \leq x * y$.

PREUVE: Les deux assertions se déduisent facilement du résultat suivant ([Deo, Theorem 1.1]): Soit s une réflection simple et soient $w, y \in W$ tels que $sw > w$ et $sy > y$. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes: a) $w \leq y$, b) $w \leq sy$, c) $sw \leq sy$. ■

Remarque. Si S est une union de variétés de Schubert et si $y \in W$, on définit S_{*y} comme étant l'union, pour $X_w \subseteq S$, des variétés X_{w*y}.

2.8. DÉFINITIONS. Si $\lambda \in P^-$ et si S est une union de variétés de Schubert, le B-module $H^0(S, \lambda)$ sera appelé un *module de Schubert*. Si M est un B-module, on dira que M possède une filtration de Schubert si:
($*$) il existe une suite $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots$ de sous-B-modules telle que M soit la réunion des M_i et que chaque M_i/M_{i-1} soit isomorphe à un module $H^0(S_i, \lambda_i)$.
Si $\phi : M \to M'$ est un morphisme de B-modules, on dira que (M, M', ϕ) forme un S-triplet si:
(1) M vérifie ($*$) ci-dessus.
(2) M' vérifie une condition analogue ($*'$).
(3) $\phi(M_i) \subseteq M'_i$ pour tout i.
(4) Pour chaque $i \geq 1$, ϕ induit une surjection de M_i/M_{i-1} vers M'_i/M'_{i-1}, et de plus on a $\lambda'_i = \lambda_i$. (Ceci entraîne $S_i \supseteq S'_i$.)
(Il résulte de la définition que ϕ est surjective).

2.9. A la suite des questions (C1) et (C2), on peut aussi se demander si, pour tous w, $y \in W$ et λ, $\mu \in P^-$, le B-module $H^0_w(\lambda) \otimes H^0_y(\mu)$ possède une excellente filtration. Un contre-exemple de W.van der Kallen montre que ce n'est pas le cas. Cependant on peut espérer que $H^0_w(\lambda) \otimes H^0_y(\mu)$ possède une filtration de Schubert. [1]

2.10. PROPOSITION. *Soit $S \supseteq S'$ deux unions de variétés de Schubert, et soient $y \in W, \lambda \in P^-$. On a:*
(i) $H^0(S, H^0_y(\lambda)) = H^0(S_{*y}, \lambda)$. ($S_{*y}$ est définie dans la remarque suivant 2.7)
(ii) $H^i(S, H^0_y(\lambda)) = 0$ pour $i > 0$.
(iii) L'application de restriction, de $H^0(S, H^0_y(\lambda))$ vers $H^0(S', H^0_y(\lambda))$ est surjective.

PREUVE: L'assertion *(iii)* résulte de l'assertion *(i)* et de [R, Theorem 2]. Démontrons les deux premières assertions. Remarquons que S possède une unique écriture non redondante $S = \cup_{k=0}^n X_{z_k}$, où $z_i \not\leq z_j$ pour $i \neq j$, et posons $N(S) = n+1$ et $l(S) = Max\{l(z_k), 0 \leq k \leq n\}$. D'après la proposition 1.4.2, nous savons que les assertions *(i)* et *(ii)* sont vérifiées lorsque $N(S) = 1$. Nous procédons maintenant par récurrence, c.à.d. nous supposons les assertions

[1] Un critère cohomologique d'existence d'une filtration de Schubert, analogue à [Ka, Theorem 3.1], est donné dans [P]

(i) et *(ii)* vérifiées pour toute S_1 telle que: ou bien $l(S_1) < l(S)$, ou bien $l(S_1) = l(S)$ et $N(S_1) < N(S)$.

Soit $S' = \cup_{k=1}^{n} X_{z_k}$, soit Ω l'ensemble des $y \in W$ qui vérifient: $y \leq z_0$ et $y \leq z_k$ pour au moins un indice $k \neq 0$, et soit $S'' = \bigcup_{y \in \Omega} X_y$. Nous posons: $z_0 = z$. D'après [R, Theorems 2,3], l'intersection $S' \cap X_z$, prise au sens des schémas, est réduite; elle est donc égale à S''. On a donc une suite exacte (de Mayer-Vietoris) pour les faisceaux structuraux:

$$(E) \qquad 0 \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_{S'} \oplus \mathcal{O}_{X_z} \to \mathcal{O}_{S''} \to 0$$

Considérons la longue suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte courte: $(E) \otimes_{\mathcal{O}_{G/B}} \mathcal{L}(H_y^0(\lambda))$. D'une part, $N(S') < N(S)$, et, d'autre part, puisque les z_i sont deux à deux incomparables, on a $l(S'') < l(S)$. Alors, d'après 1.4.2 et l'hypothèse de récurrence, on obtient les égalités: $H^i(S, H_y^0(\lambda)\,) = 0$ pour $i \geq 2$, ainsi que la suite exacte ci-dessous.

$$0 \to H^O(S, H_y^0(\lambda)\,) \to H_{z*y}^0(\lambda) \bigoplus H^0(S'_{*y}, \lambda) \xrightarrow{\phi} H^0(S''_{*y}, \lambda) \to H^1(S, H_y^0(\lambda)\,) \to 0.$$

Or, d'après 2.7 *(i)*, on sait que $v * y \leq z * y$ pour tout $v \in \Omega$. Donc ϕ est surjective, d'après [R, Theorem 2]. Il en résulte que $H^1(S, H_y^0(\lambda)\,) = 0$. Pour finir, il est clair que S''_{*y} est contenue dans $X_{z*y} \cap S'_{*y}$; et on a l'égalité car l'inclusion inverse résulte de 2.7 *(ii)*. De cette égalité on déduit, en utilisant à nouveau Mayer-Vietoris, que $H^0(S, H_y^0(\lambda)\,)$ s'identifie à $H^0(S_{*y}, \lambda)$. La proposition 2.10 est donc démontrée. ■

2.11. Proposition. *Soient S, S' deux unions de variétés de Schubert et soient $\lambda, \mu \in P^-$.*
(i) Si $S' \subseteq S$, alors l'application naturelle de $H^0(B, H^0(S, \lambda) \otimes \mu)$ vers $H^0(B, H^0(S', \lambda) \otimes \mu)$ est surjective.
(ii) On a $H^i(B, H^0(S, \lambda) \otimes \mu) = 0$ pour tout $i > 0$.

Preuve de *(i)*: Supposons $H^0(B, H^0(S', \lambda) \otimes \mu) \neq 0$. Alors, il existe X_w contenue dans S' telle que: $w\lambda = -\mu$. Puisque λ et μ sont antidominants, ceci entraîne que $w \equiv w_0$ modulo le stabilisateur W_λ de λ. On en déduit que $H^0(S', \lambda) = H^0(\lambda)$, d'où $H^0(S', \lambda) = H^0(S, \lambda)$. ■

Preuve de *(ii)*: D'après [Ka, Theorem 2.20 *(i)*], nous savons le résultat vrai lorsque N(S)=1. Comme pour la proposition 2.10, nous allons procéder par récurrence à la fois sur l(S) et sur N(S). Soit X_z un élément maximal de l'ensemble des variétés de Schubert contenues dans S. On a $S = X_z \cup S'$, où S' est une union de variétés de Schubert telle que $N(S') = N(S) - 1$. Soit $S'' = X_z \cap S'$. On a: $l(S'') < l(z) \leq l(S)$. D'après la proposition 2.10, on a une suite exacte:

$$(*) \quad 0 \to H^0(S, \lambda) \to H_z^0(\lambda) \bigoplus H^0(S', \lambda) \to H^0(S'', \lambda) \to 0.$$

En utilisant [*loc. cit.*] et l'hypothèse de récurrence, la longue suite exacte de cohomologie associée à $(*)$ nous donne $H^i(B, H^0(S, \lambda) \otimes \mu) = 0$ pour $i \geq 2$, et nous fournit la suite exacte ci-dessous:

$$H^0(B, H_z^0(\lambda) \otimes \mu) \bigoplus H^0(B, H^0(S', \lambda) \otimes \mu) \xrightarrow{\phi} H^0(B, H^0(S'', \lambda) \otimes \mu) \to H^1(B, H^0(S, \lambda) \otimes \mu) \to 0.$$

Or ϕ est surjective d'après *(i)*, donc $H^1(B, H^0(S, \lambda) \otimes \mu) = 0$. Ceci prouve l'assertion *(ii)*. ■

2.12. PROPOSITION. *Soient S, S' deux unions de variétés de Schubert, et soit M un B-module possédant une excellente filtration. Alors:*
(i) $H^0(S,M)$ possède une filtration de Schubert; et $H^i(S,M)=0$ pour $i>0$.
(ii) Si $S'\subseteq S$, l'application de restriction ϕ fait de $(H^0(S,M)$, $H^0(S',M)$, $\phi)$ un $\mathcal{S}$-triplet.

2.13. PROPOSITION. *Soit $\mu\in P^-$.*
(i) Soit M un B-module possédant une filtration de Schubert. Alors $H^i(B,M\otimes\mu)=0$ pour tout $i>0$.
(ii) Soit (M, M', ϕ) un $\mathcal{S}$-triplet. Alors l'application induite par ϕ, de $H^0(B,M\otimes\mu)$ vers $H^0(B,M'\otimes\mu)$, est surjective.

DÉMONSTRATIONS: Lorsque M est de dimension finie, la proposition 2.12 (resp. 2.13) se déduit facilement de 2.10 et 2.7*(i)* (resp. 2.11), en procédant par récurrence sur le nombre de facteurs. Puisque les foncteurs $H^i(B,?)$ et $H^i(S,?)$ commutent aux limites inductives, les deux propositions restent valables pour M arbitraire. ■

La proposition qui suit a d'abord été démontrée par S.Kumar, pour $k=\mathbb{C}$ et S irréductible ([Ku, Theorem 1.5]). Sous la forme donnée ici, la proposition a été démontrée indépendemment par O.Mathieu, dans le cas plus général d'un groupe de Kač-Moody ([Ma 4, Lemmes 21 et 22]); et par V.B.Mehta et A.Ramanathan ([M-R 2] et [R, Section 2]).

2.14. PROPOSITION. *Soit S une union de variétés de Schubert et soient λ, $\mu\in P^-$. Alors:*
(i) L'application de restriction, de $H^0(\tilde{X},\mu\hat{\otimes}\lambda)$ vers $H^0(\tilde{S},\mu\hat{\otimes}\lambda)$ est surjective.
(ii) On a $H^i(\tilde{S},\mu\hat{\otimes}\lambda)=0$ pour $i>0$.

Ceci nous donne le corollaire suivant, que nous utiliserons pour la démonstration du théorème 2.19. (Rappelons que $K_S(\lambda)$ est défini en 1.2, ainsi que $K_S(\mu,\lambda)$.)

2.15. COROLLAIRE. *Soit S une union de variétés de Schubert et soient λ, $\mu\in P^-$. Alors l'application naturelle $H^0(H^0(\lambda)\otimes\mu)\to H^0(H^0(S,\lambda)\otimes\mu)$ est surjective, et on a $H^i(H^0(S,\lambda)\otimes\mu)=H^i(K_S(\lambda)\otimes\mu)=0$ pour tout $i>0$.*

PREUVE: Puisque $H^i(H^0(\lambda)\otimes\mu)=0$ pour $i>0$, la longue suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte courte suivante:

$$0\to K_S(\lambda)\otimes\mu\to H^0(\lambda)\otimes\mu\to H^0(S,\lambda)\otimes\mu\to 0$$

nous donne les isomorphismes: $H^i(H^0(S,\lambda)\otimes\mu)\simeq H^{i+1}(K_S(\lambda)\otimes\mu)$ pour $i\geq 1$, et nous fournit la ligne supérieure du diagramme commutatif à lignes exactes ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccccccc} H^0(K_S(\lambda)\otimes\mu) & \to & H^0(H^0(\lambda)\otimes\mu) & \xrightarrow{\phi} & H^0(H^0(S,\lambda)\otimes\mu) & \to & H^1(K_S(\lambda)\otimes\mu) & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ K_S(\mu,\lambda) & \to & H^0(\tilde{X},\mu\hat{\otimes}\lambda) & \xrightarrow{\psi} & H^0(\tilde{S},\mu\hat{\otimes}\lambda) & & & & \end{array}$$

(Les flèches verticales sont des isomorphismes.) Or ψ est surjective d'après 2.14 *(i)*, donc ϕ l'est aussi, donc $H^1(K_S(\lambda)\otimes\mu)=0$. D'autre part, d'après [R, Theorem 2], on a $H^q(S,\lambda)=0$

pour $q > 0$. Il en résulte que la suite spectrale $E_2^{p,q} = H^p(G/B, H^q(S,\lambda) \otimes \mu)$ dégénère pour donner les isomorphismes: $H^i(\tilde{S}, \mu \hat{\otimes} \lambda) \simeq H^i(H_S^0(\lambda) \otimes \mu)$. Alors 2.14 *(ii)* achève la preuve du corollaire. ■

2.16. Corollaire. *Soient w, $y \in W$ et soient λ, $\mu \in P^-$. Alors:*
(i) On a $H^i(H_w^0(\lambda) \otimes H_y^0(\mu)) = 0$ pour $i > 0$.
(ii) $H^0(H_w^0(\lambda) \otimes H_y^0(\mu))$ est isomorphe à $H^0(H_{y^{-1}*w}(\lambda) \otimes \mu)$.
(iii) Si $w \geq w'$ et $y \geq y'$, l'application de $H^0(H_w^0(\lambda) \otimes H_y^0(\mu))$ vers $H^0(H_{w'}^0(\lambda) \otimes H_{y'}^0(\mu))$, induite par l'application de restriction, est surjective.

Preuve: Rappelons que la loi $*$ est définie en 1.4.2. Nous démontrons l'assertion *(i)* par récurrence sur $n := Min\,\{l(w), l(y)\}$. Le cas $n = 0$ est traité par 2.15. Supposons: $n = l(y) > 0$. Soit s une réflection simple telle que $sy < y$. Distinguons les deux cas suivants.

1) On a $sw < w$. Dans ce cas, d'après 1.1.4 et 1.4.2, on a les isomorphismes:

$$H_s^i(H_w^0(\lambda) \otimes H_{sy}^0(\mu)) \simeq \begin{cases} H_w^0(\lambda) \otimes H_s^i(H_{sy}^0(\mu)) = 0 \text{ si } i > 0 \\ H_w^0(\lambda) \otimes H_y^0(\mu) \text{ si } i = 0 \end{cases}$$

Puique $H^0 \simeq H^0 \circ H_s^0$, on en déduit, pour tout $i \geq 0$, les isomorphismes:

$$H^i(H_w^0(\lambda) \otimes H_y^0(\mu)) \simeq H^i \circ H_s^0(H_w^0(\lambda) \otimes H_{sy}^0(\mu)) \simeq H^i(H_w^0(\lambda) \otimes H_{sy}^0(\mu))$$

Or, par hypothèse de récurrence, le dernier terme ci-dessus est nul pour $i > 0$.

2) On a $sw > w$. Dans ce cas, on a:

$$\begin{aligned} H_s^0(H_w^0(\lambda) \otimes H_y^0(\mu)) &\simeq H_{sw}^0(\lambda) \otimes H_y^0(\mu) &&\simeq H_s^0(H_{sw}^0(\lambda) \otimes H_{sy}^0(\mu)) \\ H_s^i(H_w^0(\lambda) \otimes H_y^0(\mu)) &= 0 &&= H_s^i(H_{sw}^0(\lambda) \otimes H_{sy}^0(\mu)) \text{ si } i > 0 \end{aligned}$$

et, comme plus haut, on en déduit les isomorphismes:

$$\begin{aligned} H^i(H_w^0(\lambda) \otimes H_y^0(\mu)) &\simeq H^i \circ H_s^0(H_w^0(\lambda) \otimes H_y^0(\mu)) \\ &\simeq H^i \circ H_s^0(H_{sw}^0(\lambda) \otimes H_{sy}^0(\mu)) \simeq H^i(H_{sw}^0(\lambda) \otimes H_{sy}^0(\mu)) \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, le dernier terme ci-dessus est nul. Ceci prouve l'assertion *(i)*.

L'assertion *(ii)* résulte facilement de la démonstration qui précède. L'assertion *(iii)* résulte de l'assertion *(ii)*, du Corollaire 2.15, et du Lemme 2.7 (i), qui assure que $y^{-1} * w \geq y'^{-1} * w'$. ■

En utilisant, comme en 2.10 et 2.11, un argument "à la Mayer-Vietoris", on déduit de 2.16 le corollaire suivant:

2.17. COROLLAIRE. *Soit $w \in W$, soient S, S' deux unions de variétés de Schubert, et soient $\lambda, \mu \in P^-$. Alors:*
(i) $H^i(H^0_S(\lambda) \otimes H^0_w(\mu)) = 0$ *pour* $i > 0$.
(ii) $H^0(H^0_S(\lambda) \otimes H^0_w(\mu)) = H^0(H^0(S_{*^{-1}w}, \lambda) \otimes \mu)$.
(iii) Si $S' \subseteq S$, *alors l'application* $H^0(H^0_S(\lambda) \otimes H^0_w(\mu)) \to H^0(H^0_{S'}(\lambda) \otimes H^0_w(\mu))$, *induite par l'application de restriction, est surjective.*

2.18. REMARQUE. Soient S, S', S_1 des unions de variétés de Schubert, et soient $\lambda, \mu \in P^-$. On suppose $S' \subseteq S$. En général, l'application $H^0(H^0_S(\lambda) \otimes H^0_{S_1}(\mu)) \to H^0(H^0_{S'}(\lambda) \otimes H^0_{S_1}(\mu))$ *n'est pas* surjective.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette partie.

2.19. THÉORÈME. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*
(i) (C1) Pour tous $\lambda, \mu \in P^-$, $H^0(\lambda) \otimes \mu$ *possède une excellente filtration.*
(ii) Pour tous $\lambda, \mu \in P^-$ *et pour toute union S de variétés de Schubert,* $K_S(\mu, \lambda)$ *possède une bonne filtration.*

PREUVE DE *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*: D'après [Do 1, Corollary 1.3], il suffit de montrer que $H^1(G, K_S(\mu, \lambda) \otimes H^0(\nu)) = 0$ pour tout $\nu \in P^-$. Soit $\nu \in P^-$. L'assertion *(i)* entraîne, d'après 1.4.2, que $H^0(\lambda) \otimes H^0(\mu)$ possède une bonne filtration. On a donc $H^1(G, H^0(\lambda) \otimes H^0(\mu) \otimes H^0(\nu)) = 0$. On en déduit qu'il suffit de prouver la surjectivité de ϕ dans la suite exacte ci-dessous, qui provient de la suite exacte courte donnée par 2.14 *(i)*.

$$H^0(G, H^0(\mu) \otimes H^0(\lambda) \otimes H^0(\nu)) \xrightarrow{\phi} H^0(G, H^0(\tilde{S}, \mu \hat{\otimes} \lambda) \otimes H^0(\nu)) \to H^1(G, K_S(\mu, \lambda) \otimes H^0(\nu)) \to 0.$$

Puisque $H^0(\tilde{S}, \mu \hat{\otimes} \lambda)$ est isomorphe à $H^0(\mu \otimes H^0(S, \lambda))$ et puisque, d'après 1.1.1, $H^0(S, \lambda) \otimes H^0(\nu)$ est isomorphe à $H^0(S, \lambda \otimes H^0(\nu))$, on obtient par réciprocité de Frobenius (*cf.* 1.1.4) que la surjectivité de ϕ équivaut à la surjectivité de l'application:

$$H^0(B, H^0(X, \lambda \otimes H^0(\nu)) \otimes \mu) \to H^0(B, H^0(S, \lambda \otimes H^0(\nu)) \otimes \mu).$$

Or, d'après l'assertion *(i)* appliquée à la paire $\{\lambda, \nu\}$, ceci est une conséquence des propositions 2.12 et 2.13. ■

La preuve de *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)*, qui commence par le lemme 2.20, reproduit exactement, à la seule différence du point $(*)$, la démonstration d'un résultat de W. van der Kallen, à savoir que tout B-module injectif possède une excellente filtration ([Ka, Theorem 2.12]).

2.20. LEMME. *Soit* $\lambda \in P^-$, *soit* $w \in W$, *et soit V la réunion, pour* $z < w$, *des variétés* X_z. *Soit K le noyau de l'application de restriction, de* $H^0_w(\lambda)$ *vers* $H^0(V, \lambda)$. *Soit S' la réunion, pour* $y \not\geq w$, *des variétés* X_y *et soit* $S = S' \cup X_w$. *Alors K est isomorphe au quotient de* $K_{S'}(\lambda) + K_w(\lambda)$ *par* $K_w(\lambda)$, *qui est isomorphe à* $K_{S'}(\lambda)/K_S(\lambda)$.

PREUVE: Soit s un élément de K, c.à.d. une section de $\mathcal{L}(\lambda)$ au-dessus de X_w qui s'annule sur V. On a ensemblistement: $S' \cap X_w = V$; et, d'après [R, Theorem 3], $S' \cap X_w$ est réduite, donc s

se prolonge en une section τ de $\mathcal{L}(\lambda)$ au-dessus de $X_w \cup S'$, qui s'annule sur S'. D'après [*loc. cit*, Theorem 2], τ provient d'une section globale, qui s'annule sur S'. Ceci prouve exactement le premier isomorphisme; quant au second, il est clair. ■

Si π est un sous-ensemble de P, et si M est un B-module, on définit, suivant [Do 3], $O_\pi(M)$ comme étant le plus grand sous-module de M dont tous les poids appartiennent à π. On dit, suivant [Ka, 1.2] que π est *convenablement rempli* s'il vérifie la condition suivante: si μ est un élément de π, alors π contient tous les poids $\nu \in W\mu$ qui vérifient $\nu \leq \mu$, ainsi que tous les poids ν qui vérifient $(\nu,\nu) < (\mu,\mu)$. En particulier, π contient tous les poids du module de Schubert dont μ est le plus haut poids.

Soient $\mu,\nu \in P^-$. Nous allons montrer que $N := H^0(\nu) \otimes \mu$ possède une excellente filtration. Nous commençons par remarquer que $H^0(N)$ possède une bonne filtration. En effet, l'application de restriction $H^0(N) \rightarrow H^0(\tilde{X}_e, \nu \otimes \mu)$ est surjective ([M-R 1, Theorem 1*(ii)*]); son noyau possède par hypothèse une bonne filtration, et $H^0(\tilde{X}_e, \nu \hat{\otimes} \mu)$ s'identifie à $H^0(\nu+\mu)$. Soit π une partie convenablement remplie telle que, pour toute partie convenablement remplie π' strictement contenue dans π, $O_{\pi'}(N)$ ait une excellente filtration, ou bien soit nul. Soient $\lambda \in P^-$ et $w \in W$ tels que: a) $w\lambda \in \pi$, b) $(\chi,\chi) \leq (\lambda,\lambda)$ pour tout $\chi \in \pi$, c) si $y > w$, alors $y\lambda \notin \pi$. (Ceci implique que w soit maximal dans sa classe à gauche modulo le stabilisateur W_λ de λ.)

Alors $\pi' = \pi \setminus \{w\lambda\}$ est une partie convenablement remplie. Par hypothèse de récurrence, $O_{\pi'}(N)$ est nul, ou bien possède une excellente filtration. Posons $M := N/O_{\pi'}(N)$. Le socle du B-module $O_\pi(M)$ est isotypique de poids $w\lambda$. Soit $v \in N$ un vecteur de poids $w\lambda$ dont l'image dans M soit un élément non nul de ce socle. En raison de la condition b), le corollaire 2.4 nous fournit une surjection ϕ de $F_{ww_0}(w_0\lambda)$ vers le sous-B-module de $O_\pi(N)$ engendré par v. Soit $z \in W$ tel que $z < ww_0$. Alors on a $zw_0 > w$, donc $zw_0\lambda$ n'appartient pas à π. Posant $w_0\lambda = -\xi$, on en déduit que ϕ, considérée comme un élément de $H^0(B, N \otimes H^0_{ww_0}(\xi))$ appartient au sous-module $H^0(B, N \otimes K)$, où K est le noyau de l'application de restriction, de $H^0_{ww_0}(\xi)$ vers $H^0(\cup_{z<ww_0} X_z, \xi)$. D'après le lemme 2.20 appliqué au couple (ξ, ww_0), on a une suite exacte:

$$0 \rightarrow N \otimes K_S(\xi) \rightarrow N \otimes K_{S'}(\xi) \rightarrow N \otimes K \rightarrow 0.$$

On en déduit la suite exacte:

$$H^0(B, N \otimes K_{S'}(\xi)) \rightarrow H^0(B, N \otimes K) \rightarrow H^1(B, N \otimes K_S(\xi)).$$

(*) Dans la démonstration de W.van der Kallen, N est un B-module injectif. Dans ce cas, $N \otimes K_S(\xi)$ est injectif, donc $H^1(B, N \otimes K_S(\xi)) = 0$. Pour nous, N est égal à $H^0(\nu) \otimes \mu$. D'après 1.1.2 et 2.15, on a $H^i(N \otimes K_S(\xi)) = 0$ pour $i > 0$. Donc, par réciprocité de Frobenius (1.1.4), $H^1(B, H^0(\nu) \otimes \mu \otimes K_S(\xi))$ est isomorphe à $H^1(G, H^0(\nu) \otimes K_S(\mu, \xi))$. Or ce dernier groupe est nul, puisqu'on suppose que $K_S(\mu, \xi)$ possède une bonne filtration (*cf.* 1.3.1).

Nous reprenons maintenant le cours de la démonstration de [Ka, Theorem 2.12]. Puisque $H^1(B, N \otimes K_S(\xi)) = 0$, l'application ϕ provient d'une application $\psi \in H^0(B, N \otimes K_{S'}(\xi))$, où S' est la réunion des variétés X_y pour $y \not\geq ww_0$, c.à.d. des X_{zw_0} pour $z \not\leq w$.

Il en résulte que ψ, considérée comme une application de $E(w_0\lambda)$ dans N, annule les vecteurs extrémaux $e_{z\lambda}$ pour $z \not\leq w$, et envoie $e_{w\lambda}$ sur v. En particulier, $Im\,\psi$ est contenue dans $O_\pi(N)$. Soit $\bar{\psi}$ la composée de ψ et de la projection de N sur M. Puisque tous les poids χ de Rad $E(w_0\lambda)$ vérifient $(\chi,\chi) < (\lambda,\lambda)$, alors $\psi(Rad\,E(w_0\lambda))\subseteq O_{\pi'}(N)$. Il en résulte que $\bar{\psi}(Rad\,E(w_0\lambda)) = 0$. Donc $\bar{\psi}$ se factorise en une application, encore notée $\bar{\psi}$, de $L(w_0\lambda)$ vers $O_\pi(M)$. Pour prouver que $\bar{\psi}$ se prolonge en une application de $H^0(\lambda)$ vers M, nous allons montrer que $Ext^1_B(H^0(\lambda)/L(w_0\lambda), M) = 0$. Or N est acyclique pour l'induction, de même que $O_{\pi'}(N)$ qui, par hypothèse de récurrence, possède une excellente filtration. Donc M aussi est acyclique, et de plus $H^0(M)$ possède une bonne filtration, car $H^0(O_{\pi'}(N))$ et $H^0(N)$ ont tous deux une bonne filtration. Donc, par réciprocité de Frobenius, il suffit de montrer que $Ext^1_G(H^0(\lambda)/L(w_0\lambda), H^0(M)) = 0$. Pour celà, il suffit de montrer que, pour tout $\chi \in P^+$ tel que $(\chi,\chi) < (\lambda,\lambda)$, on a $Ext^i_G(E(\chi), H^0(M)) = 0$. C'est certainement le cas si $i > 0$, car $H^0(M)$ possède une bonne filtration. Pour $i = 0$, on a $Hom_G(E(\chi), H^0(M)) = Hom_B(E(\chi), M) = 0$, car $(\chi,\chi) < (\lambda,\lambda)$ entraîne que l'image de $E(\chi)$ est contenue dans $O_{\pi'}(M) = 0$.

Donc $\bar{\psi}$ se prolonge en une application Ψ de $H^0(\lambda)$ vers M, et $Im\,\Psi$ est contenue dans $O_\pi(M)$. Puisque les poids χ de $K_w(\lambda)$ soit sont de la forme $z\lambda$ avec $z \not\leq w$, soit vérifient $(\chi,\chi) < (\lambda,\lambda)$; et puisque les premiers sont annulés par Ψ, on obtient que $\Psi(K_w(\lambda))$ est contenu dans $O_{\pi'}(M) = 0$. Donc Ψ se factorise en une application de $H^0_w(\lambda)$ vers $O_\pi(M)$, qui envoie le socle de $H^0_w(\lambda)$ sur la droite engendrée par le vecteur v. Puisque le B-socle de $O_\pi(M)$ est isotypique de poids $w\lambda$, on voit que tout homomorphisme de $H^0_w(\lambda)$ vers $O_\pi(M)$ est soit injectif, soit nul. On en déduit que l'application naturelle Θ de $H^0_w(\lambda) \otimes Hom_B(H^0_w(\lambda), O_\pi(M))$ vers $O_\pi(M)$ est injective. De plus, son image est facteur direct dans $O_\pi(M)$, d'après le corollaire 2.5 *(ii)*. Or, puisque le vecteur v avait été arbitrairement choisi dans $Soc\,O_\pi(M)$, la construction précédente montre que $Im\,\Theta$ contient $Soc\,O_\pi(M)$. Il en résulte que Θ est un isomorphisme.

Puisque π' est contenu dans π, il est facile de voir que l'on a une suite exacte:

$$0 \to O_{\pi'}(N) \to O_\pi(N) \to O_\pi(M) \to 0.$$

Par hypothèse de récurrence, $O_{\pi'}(N)$ possède une excellente filtration, et nous venons de montrer que $O_\pi(M)$ est isomorphe à une somme directe de copies de $H^0_w(\lambda)$. Donc $O_\pi(N)$ possède une excellente filtration. Ceci achève la preuve de *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)*. ∎

Remarques (1) Pour chaque $w \in W$, soit $S(w)$ la réunion, pour $y \not\geq w$, des variétés X_y. Nous avons en fait démontré le résultat suivant: si $K_{S(w)}(\mu,\lambda)$ possède une bonne filtration pour tous $\lambda,\mu \in P^-$ et $w \in W$, alors l'assertion *(i)* est vérifiée.

(2) Lorsque k est de caractéristique nulle, l'assertion *(ii)* est automatiquement vérifiée. On obtient donc le:

2.21. COROLLAIRE. *L'assertion (C1) est vraie lorsque k est de caractéristique nulle.*

REMERCIEMENTS. J'ai plaisir à remercier O.Mathieu et W.van der Kallen pour d'utiles communications qui m'ont conduit au Théorème 2.19. O.Mathieu m'a indiqué, en septembre

1987, qu'il avait démontré la proposition 2.14 ([Ma 4, Lemmes 21 et 22]). Quant à W.van der Kallen, il m'a communiqué, dans une lettre du 28/8/87, les Théorèmes 2.12 et 2.20*(i)* de [Ka].

Partie 3

3.1.PROPOSITION. *Soit M un B-module de dimension finie possédant une filtration de Joseph. Soit μ un poids de M qui est de norme maximale et qui vérifie: si ν est un poids de M contenu dans $W\mu$, alors $\nu \not< \mu$. Si $x \in M$ est un vecteur de poids μ, alors le sous-module N engendré par x est isomorphe à un module de Joseph, et M/N possède une filtration de Joseph.*

PREUVE: Soit $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n = M$ une filtration de Joseph de M; et soit r l'unique entier tel que $x \in M_r$ et $x \notin M_{r-1}$. L'image de x dans $M_r/M_{r-1} := F_w(\lambda)$ est un vecteur non nul de poids μ. Les deux conditions portant sur μ entraînent que $\mu = w\lambda$. Il en résulte que x engendre dans M_r un sous-B-module N qui s'envoie *sur* $F_w(\lambda)$. Or, puisque tous les poids ν de M_r vérifient $(\nu,\nu) \leq (\mu,\mu)$, on obtient, comme dans la démonstration du corollaire 2.5, que N est isomorphe à $F_w(\lambda)$ et que M_r est la somme directe de N et de M_{r-1}. La proposition en résulte. ∎

La proposition 3.1 est adaptée de [W, Lemma 3.1]. Elle permet de démontrer, exactement comme dans [*loc. cit*, 3.2 et 3.3], le corollaire 3.2 ci-dessous, ainsi que sa forme duale 3.3.

3.2.COROLLAIRE. *Soit M un B-module de dimension finie ayant une filtration de Joseph.*
(i) Si M est somme directe de deux sous-modules M' et M'', alors M' et M'' ont chacun une filtration de Joseph.
(ii) Si N est un sous-module de M et si M/N a une filtration de Joseph, alors N en a une.

3.3.COROLLAIRE. *Soit M un B-module de dimension finie ayant une excellente filtration.*
(i) Si M est somme directe de deux sous-modules M' et M'', alors M' et M'' ont chacun une excellente filtration.
(ii) Si un sous-module N de M a une excellente filtration, alors M/N en a une.

Remarque. Nous ne savons pas démontrer 3.3 sans l'hypothèse que M est de dimension finie, mais celà est obtenu dans [Ka, Theorem 3.1] comme conséquence d'un critère cohomologique d'existence d'une excellente filtration.

Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des G-modules E tels que, pour tout $\mu \in P^+$, $E \otimes \mu$ possède une filtration de Joseph.

3.4.LEMME. *Soient E et M deux G-modules.*
(i) Si E et M appartiennent à $\mathcal{F}$, alors $E \otimes M$ appartient à $\mathcal{F}$.
(ii) Si E est un sous-module de M et si M et M/E appartiennent à $\mathcal{F}$, alors E appartient à $\mathcal{F}$.

PREUVE: La première assertion résulte de l'identité tensorielle 1.1.4 et de la proposition 1.4.2, et la seconde résulte de 3.2*(ii)*. ∎

Le théorème suivant est adapté de [W, Theorem 3.5].

3.5. THÉORÈME. *L'assertion (C1) est vérifiée si (et seulement si), pour tout poids fondamental ω, le module de Weyl $E(\omega)$ appartient à $\mathcal{F}$.*

PREUVE: Comme dans [*loc. cit*], nous définissons un ordre partiel sur P^+ en déclarant que $\lambda \geq \mu$ si $\lambda - \mu$ est somme, à coefficients rationnels positifs, de racines positives. Cet ordre prolonge l'ordre usuel, donc il n'y a pas d'inconvénient à le noter de la même façon. Pour cet ordre les poids fondamentaux sont > 0. Pour chaque $\lambda \in P^+$ il n'y a qu'un nombre fini de poids dominants μ qui sont $\leq \lambda$, donc nous pouvons procéder par récurrence pour montrer que, pour tout $\lambda \in P^+$, le module de Weyl $E(\lambda)$ appartient à $\mathcal{F}$. Pour $\lambda = 0$, c'est clair. Soit donc λ un poids dominant non nul, et soit ω un poids fondamental tel que $\lambda - \omega$ soit dominant. Par hypothèse, $E(\omega) \otimes (\lambda - \omega)$ possède une filtration de Joseph, donc, d'après 1.4.2, $M = E(\omega) \otimes E(\lambda - \omega)$, qui est isomorphe à $D(E(\omega) \otimes (\lambda - \omega))$, possèd.e une filtration de Weyl. De plus, d'après [*loc. cit*], $E(\lambda)$ est un sous-module de M, et $Q = M/E(\lambda)$ possède une filtration de Weyl, dans laquelle le plus haut poids de chaque facteur est $< \lambda$. On a également $\lambda - \omega < \lambda$, donc, par hypothèse de récurrence, Q et $E(\lambda - \omega)$ appartiennent à $\mathcal{F}$. Or, par hypothèse, $E(\omega)$ appartient à $\mathcal{F}$, donc, en utilisant 3.4*(i)* et *(ii)*, on obtient successivement que M et $E(\lambda)$ appartiennent à $\mathcal{F}$. Le théorème 3.5 est donc démontré. ■

Puisque l'ensemble des poids fondamentaux de G est égal à la réunion des poids fondamentaux des composantes quasi-simples de G, le théorème 3.5 montre que l'on peut supposer que G est quasi-simple, ce que nous ferons désormais.

Le second pas dans la démonstration de l'assertion (C1) est la proposition 3.6 qui va suivre. Rappelons que $\lambda \in P^+$ est dit minuscule si l'ensemble $\Pi(\lambda)$ des poids de $E(\lambda)$ est égal à $W\lambda$. Ceci est équivalent ([B 2, Chap.8, *n°* 7.3, Proposition 6]) à la condition suivante: pour toute racine $\alpha \in R$, $(\lambda, \check{\alpha}) \in \{-1, 0, 1\}$. Nous dirons que $\lambda \in P^+$ est ***presque minuscule*** si $\Pi(\lambda)$ est égal à $W\lambda \cup \{0\}$. Il est facile de voir que seule la plus grande racine courte vérifie cette condition; nous noterons E^c le module de Weyl dont elle est le plus haut poids. (Lorsque toutes les racines sont de même longueur, E^c est la représentation adjointe.)

3.6. PROPOSITION. *Si λ est minuscule ou bien presque minuscule, alors $E(\lambda)$ appartient à $\mathcal{F}$.*

PREUVE: Si S est une partie de Δ, on note D_S le foncteur de Joseph associé au plus grand élément de W_S, où W_S est le sous-groupe de W engendré par les réflections simples s_α, pour $\alpha \in S$. Si ξ est un poids dominant relativement à S, alors $D_S(\xi)$ est un G_S-module, isomorphe au G_S-module de Weyl de plus haut poids ξ (*cf.* 2.4.*(i)*).

Soit $\mu \in P^+$ et soit Σ l'ensemble des racines simples α qui vérifient $(\mu, \alpha) = 0$. Soit P_Σ le sous-groupe parabolique standard associé à Σ, et soit G_Σ sa partie réductive. Comme dans [Do 2, Section 3.3], nous utiliserons le morphisme de groupes f, de P vers $\mathbb{Q}$, qui est défini par la condition suivante: $f(\alpha) = 0$ si $\alpha \in \Sigma$ et $f(\alpha) = 1$ si $\alpha \in \Delta \setminus \Sigma$.

Cas A) λ est minuscule.

Dans ce cas, les poids de $E(\lambda)$ forment une seule orbite sous W, donc les sous-quotients simples du P_Σ-module $E(\lambda)$, qui sont des G_Σ-modules simples, sont en fait des G_Σ-modules de Weyl $D_\Sigma(\xi)$. Puisque $(\mu,\alpha)=0$ pour toute $\alpha\in\Sigma$, on a $D_\Sigma(\mu)=\mu$ et $D_\Sigma(\xi)\otimes\mu\simeq D_\Sigma(\xi+\mu)$ pour tout ξ. Puisque λ est minuscule, $(\xi,\check{\alpha})\geq -1$ pour toute $\alpha\in\Delta$. Or ξ est dominant relativement à Σ, et on a $(\mu,\check{\alpha})\geq 1$ si $\alpha\notin\Sigma$. Il en résulte que $\xi+\mu$ est dominant. Donc n'importe quelle suite de Jordan-Hölder du P_Σ-module $E(\lambda)$ fournit une filtration de Joseph de $E(\lambda)\otimes\mu$.

Cas B) λ est la plus grande racine courte.

L'étude de ce cas nécessite au préalable une description détaillée de la structure de E^c (3.7 et 3.8 ci-dessous). Si ν est un poids de E^c et si $\nu\neq 0$, alors ν est de multiplicité 1 et nous choisissons dans E^c_ν un vecteur non nul e_ν. Soit Δ^c l'ensemble des racines simples qui sont courtes et soit Ω l'ensemble des éléments de Δ^c qui n'appartiennent pas à Σ. Si β est une racine, β sécrit de façon unique: $\beta=\sum_{\alpha\in\Delta}n^\alpha_\beta\,\alpha$; et l'on note $Supp(\beta)=\{\alpha\in\Delta/n^\alpha_\beta\neq 0\}$, et $ht(\beta)=\sum_{\alpha\in\Delta}n^\alpha_\beta$.

3.7. Proposition. *(i) L'espace E^c_0 de poids 0 dans E^c est engendré, comme espace vectoriel, par les vecteurs $h_\alpha:=X_\alpha e_{-\alpha}$, pour $\alpha\in\Delta^c$.*
(ii) L'ensemble $\{h_\alpha,\alpha\in\Delta^c\}$ forme une base de E^c_0.

Preuve: L'assertion *(ii)* résulte de l'assertion *(i)*, car il est connu que E^c_0 est de dimension $Card(\Delta^c)$. Prouvons l'assertion *(i)*. Puisque E^c est engendré, comme B-module, par son vecteur de plus bas poids, on a: $E^c_0=\sum_{n\geq 1}\sum_{\gamma\in R^+}X^{(n)}_\gamma E^c_{-n\gamma}$. Or $-n\gamma$ n'est pas un poids de E^c si $n>1$. Il suffit donc de prouver que: $X_\gamma E^c_{-\gamma}\subseteq\mathrm{Vect}\{h_\alpha,\alpha\in\Delta^c\}$, pour tout $\gamma\in R^+$. Procédons par récurrence sur $ht(\gamma)$. L'assertion est vraie pour $ht(\gamma)=1$, car $-\gamma$ n'est pas un poids i $\gamma\notin\Delta^c$. Supposons $ht(\gamma)>1$. Alors, il existe une racine simple α telle que $n:=(\gamma,\check{\alpha})>0$ et $\beta:=s_\alpha(\gamma)\in R^+$ (*cf.* par ex. [H, Lemma 10.2.A]), et on a: $ht(\beta)=ht(\gamma)-n$. Par construction de la base de Chevalley, on a (*cf.* [H, Theorem 25.2.(d)]): $n!\,X_\gamma=(ad\,X_\alpha)^n(X_\beta)$, ce qui équivaut à l'égalité suivante dans $\mathcal{U}(U)$:

$$X_\gamma=\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}X^{(j)}_\alpha X_\beta X^{(n-j)}_\alpha$$

Puisque $-j\alpha$ n'est pas un poids de E^c si $j\geq 2$, on en déduit que $X_\gamma E^c_\gamma\subseteq X_\beta E^c_\beta+X_\alpha E^c_\alpha$, d'où le résultat par hypothèse de récurrence. Ceci achève la preuve de la proposition 3.7. ■

Remarque. Choisissons $e_{-\alpha}$ et e_α de sorte que $e_\alpha=X^{(2)}_\alpha e_{-\alpha}$. Alors on a: $X_{-\alpha}e_\alpha=X_\alpha e_{-\alpha}$.

Pour $i\in\{-1,0,1\}$, soit K_i la somme, pour ν vérifiant $f(\nu)\geq i$, des espaces de poids ν de E^c. Chaque K_i est un sous-P_Σ-module de E^c. On pose $K_{-1}=K, K_0=J, K_1=I$. Les observations (1), (2), (3) ci-après sont faciles:

(1) Tous les poids de I et de E^c/J appartiennent à $W\lambda$, donc, d'après le cas A) ci-dessus, chacun d'eux possède une suite de composition dont les quotients successifs sont des modules de Weyl $D_\Sigma(\xi)$.

(2) Soit $\xi \in \Pi(\lambda)$ un poids dominant relativement à Σ et soit α une racine simple telle que $(\xi+\mu, \check{\alpha}) < 0$. Alors $\alpha \notin \Sigma$, d'où $(\mu, \check{\alpha}) \geq 1$, et donc $(\xi, \check{\alpha}) \leq -2$. Or, puisque $\Pi(\lambda) = W\lambda \cup \{0\}$, cette inégalité implique que ξ est égal à $-\alpha$, d'où $(\xi, \check{\alpha}) = -2$ et $(\mu, \check{\alpha}) = 1$.

(3) En tant que B-module, K/J a pour socle la somme directe, pour $\alpha \in \Omega$, des espaces de poids $-\alpha$. D'autre part, d'après 1.3.1.*(i)*, on a $Ext^1_{G_\Sigma}(D_\Sigma(-\alpha), D_\Sigma(-\beta)) = 0$ pour tous $\alpha, \beta \in \Omega$.

3.8.PROPOSITION. *(i) Soit V l'espace vectoriel engendré par les vecteurs h_α, pour $\alpha \in \Sigma$, et par la somme, pour ν vérifiant $\nu \neq 0$ et $f(\nu) = 0$, des espaces de poids ν. Alors l'image L de V dans J/I est un G_Σ-module isomorphe à la somme directe, indexée par les composantes connexes S de Σ, des modules $D_\Sigma(\lambda^S)$, où λ^S est la plus grande racine courte du sous-système de racines engendré par S.*
(ii) De plus $M := J/(I+V)$ est un G_Σ-module trivial, dont $\{h_\alpha, \alpha \in \Omega\}$ forme une base.

PREUVE DE *(i)*: Si S est une partie de Δ, on note R_S (resp. R^c_S) l'ensemble des racines (resp. racines courtes) dont le support est contenu dans S. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des composantes connexes de Σ. Comme T-module, L est somme directe de $L_1 := \bigoplus_{\gamma \in R^c_\Sigma} k_\gamma$ et d'un T-module trivial L_0 dont $\{h_\alpha, \alpha \in \Sigma \cap \Delta^c\}$ forme une base. D'après [B 1, Chap.6, *n°* 1.6, Corollaire 3], le support d'une racine est une partie connexe de Δ, donc R^c_Σ est contenu dans la réunion, pour $S \in \mathcal{C}$, des ensembles R^c_S. Réciproquement, si $\gamma \in R^c_S$ alors γ est une racine courte dont le support est contenu dans $S \subseteq \Sigma$, d'où $\gamma \in R^c_\Sigma$. On a donc: $R^c_\Sigma = \sqcup_{S \in \mathcal{C}} R^c_S$ (réunion disjointe). On en déduit: L est la somme directe, pour $S \in \mathcal{C}$, des sous-T-modules L^S, où l'on a posé:

$$L^S = \bigoplus_{\gamma \in R^c_S} k_\gamma \oplus \mathrm{Vect}\{h_\alpha, \alpha \in S \cap \Delta^c\}.$$

Soit $S \in \mathcal{C}$. Nous allons montrer que L^S est un G_Σ-module. Pour celà, il suffit de vérifier que, pour tous $\beta \in R_\Sigma$, $n \geq 0$, on a $X^{(n)}_\beta L^S \subseteq L^S$. Soit $\gamma \in R^c_S$, soit $\nu = \gamma + n\beta$, et soit $x = X^{(n)}_\beta e_\gamma$. Si ν n'est pas un poids de E^c, alors $x = 0$. Si ν est un poids de E^c et si $\nu \neq 0$, alors, d'après [*loc.cit.*], on a $\beta \in R_S$ et $\nu \in R^c_S$. On en déduit: $x \in L^S$, car ν est de multiplicité 1. Enfin, si $\nu = 0$ alors nécessairement $n = 1$ et $x = X_{-\gamma} e_\gamma$. Dans ce cas, puisque $\gamma \in R_S$, on peut appliquer 3.7.*(i)* à G_S, et on obtient que $X_{-\gamma} e_\gamma \in \mathrm{Vect}\{h_\alpha, \alpha \in S \cap \Delta^c\}$. Donc, dans tous les cas, $X^{(n)}_\beta e_\gamma \in L^S$. Maintenant, soit $\alpha \in S \cap \Delta^c$ et soit $y = X^{(n)}_\beta h_\alpha$. Si $n > 1$ ou si $\beta \notin R^c_\Sigma$, alors $n\beta \notin \Pi(E^c)$, d'où $y = 0$. Si $\beta \in R^c_S$, alors $X_\beta h_\alpha$ est un multiple de $e_\beta \in L^S$. Enfin, si $\beta \in R_\Sigma \setminus R_S$, alors X_β commute à X_α, donc $X_\beta h_\alpha = X_\alpha X_\beta e_{-\alpha}$. Or $X_\beta e_{-\alpha} = 0$ car $\beta - \alpha$ n'est pas une racine ([*loc.cit.*]). Nous avons ainsi démontré que L^S est un G_Σ-module. Remarquons maintenant que L^S est engendré, comme G_Σ-module, par n'importe quel vecteur de poids $\nu \neq 0$. En effet, le sous-G_Σ-module engendré par un tel vecteur contient tous les espaces de poids $\neq 0$ (car tous ces poids sont dans une seule W-orbite); et il contient aussi L^S_0, puisque $h_\alpha = X_\alpha e_{-\alpha}$. En particulier, L^S est engendré, comme B-module, par son vecteur de plus bas poids. De plus, L^S a même caractère que le module de Weyl $D_\Sigma(\lambda^S)$, donc lui est isomorphe d'après 2.4.*(i)*. Ceci achève la preuve de l'assertion 3.8.*(i)*. ∎

PREUVE DE L'ASSERTION *(ii)*: M est isomorphe à $(J/I)/L$: c'est donc un G_Σ-module. De plus, B agit trivialement sur M, donc M est un G_Σ-module trivial. Enfin, $\{h_\alpha,\ \alpha \in \Omega\}$ forme une base de M car, par construction, $E_0^c \cap V = \mathrm{Vect}\{h_\alpha,\ \alpha \in \Delta^c \cap \Sigma\}$. Ceci termine la démonstration de la proposition 3.8. ■

Revenons maintenant à la démonstration de la proposition 3.6. Il résulte de *(1)*,*(2)*,*(3)*, et de 3.8.*(i)* que $I \otimes \mu$, $L \otimes \mu$, et $(E^c/K) \otimes \mu$ ont chacun une filtration de Joseph, et que K/J est isomorphe à la somme directe, pour $\alpha \in \Omega$, des modules $D_\Sigma(-\alpha)$.

Si $\alpha \in \Omega$, on a $X_\alpha e_{-\alpha} = h_\alpha$ et $X_\beta e_{-\alpha} = 0$ pour $\beta \in R^+ \setminus \{\alpha\}$. On en déduit que $K/(I+V)$ est égal à la somme directe, pour $\alpha \in \Omega$, des sous-modules F_α, où F_α désigne le sous-B-module de $K/(I+V)$ engendré par le vecteur de plus bas poids poids de $D_\Sigma(-\alpha)$. Nous allons montrer que $M := (K/(I+V)) \otimes \mu$ possède une filtration de Joseph.

Soit $\alpha \in \Omega$. Puique $D_\Sigma(-\alpha) \otimes \mu$ est isomorphe à $D_\Sigma(\mu - \alpha)$, on voit qu'on obtient un module de Joseph, si $\mu - \alpha$ est dominant. Supposons au contraire que $\mu - \alpha$ ne soit pas dominant. Alors on sait d'après *(2)* que $(\mu, \check{\alpha}) = 1$. Dans ce cas $D_\alpha(\mu)$ est une extension de $\mu - \alpha$ par μ. On a $D^1_\Sigma(\mu - \alpha) = 0$, car $\mu - \alpha$ est dominant relativement à Σ. Il en résulte que $D_\Sigma D_\alpha(\mu)$ est une extension de $D_\Sigma(\mu - \alpha)$ par $D_\Sigma(\mu) = \mu$. On en déduit que $F_\alpha \otimes \mu$ a même caractère que $D_\Sigma D_\alpha(\mu)$. Puisque de plus $F_\alpha \otimes \mu$ est engendré par son vecteur de plus bas poids, on obtient d'après 2.4.*(i)* que F_α est isomorphe à $D_\Sigma D_\alpha(\mu)$. Ceci nous donne le résultat suivant. Soit F la somme directe des F_α, pour les $\alpha \in \Omega$ telles que $(\mu, \check{\alpha}) = 1$, et des droites vectorielles kh_α, pour les $\alpha \in \Omega$ telles que $(\mu, \check{\alpha}) \geq 2$. Alors F est un sous-B-module de $K/(I+V)$, et $F \otimes \mu$ possède une filtration de Joseph. De plus le quotient de M par $F \otimes \mu$ est isomorphe à la somme directe, pour $\alpha \in \Omega$ et $(\mu, \check{\alpha}) \geq 2$, des modules $D_\Sigma(\mu - \alpha)$. Il possède donc lui aussi une filtration de Joseph. La proposition 3.6 est donc démontrée. ■

Nous pouvons maintenant démontrer l'assertion (C1), sous certaines restrictions sur p, en utilisant 3.5 et l'analyse cas par cas qui suit. (On note p=car k.)

3.9. Type A_n. Dans ce cas tous les poids fondamentaux sont minuscules, d'où le résultat d'après 3.6.

3.10 Types B_n, C_n, D_n. Nous adoptons les notations de [B 1, Planches 2,3,4]. Soit $V = E(\omega_1)$. Puisque ω_1 est soit minuscule, soit égal à la plus grande racine courte, alors $E(\omega_1)$ appartient à $\mathcal{F}$, d'après 3.6. Il résulte de 3.4*(i)* que, pour tout i, $\overset{i}{\bigotimes} V$ appartient à $\mathcal{F}$. Supposons $p > n$. Alors, pour chaque $i \leq n$, $\overset{i}{\bigwedge} V$ est facteur direct dans $\overset{i}{\bigotimes} V$. D'après 3.2*(i)*, on en déduit que $\overset{i}{\bigwedge} V$ appartient à $\mathcal{F}$, donc en particulier possède une filtration de Weyl.

Puisqu'on connait le caractère de chaque $\overset{i}{\bigwedge} V$, celà nous donne le résultat qui suit. Dans D_n (resp. B_n), $\overset{i}{\bigwedge} V$ est isomorphe à $E(\omega_i)$, pour tout $i \leq n-2$ (resp. $i \leq n-1$). De plus, dans D_n (resp. B_n), ω_n et ω_{n-1} (resp. ω_n) sont minuscules. On en déduit que l'assertion (C1) est vraie dans B_n et D_n lorsque $p > n$.

Dans le cas de C_n, la forme bilinéaire alternée sur V induit un endomorphisme Γ de $\bigwedge V$ de degré -2. Lorsque $p > n$, la démonstration donnée dans [B 2, p202-203] reste valable en caractéristique p, et montre que, pour chaque $i \leq n$, $E(\omega_i)$ s'identifie à un sous-module de $\overset{i}{\bigwedge} V$ et que le quotient de $\overset{i}{\bigwedge} V$ par $E(\omega_i)$ est isomorphe à $\overset{i-2}{\bigwedge} V$. Puisque $\overset{i}{\bigwedge} V$ et $\overset{i-2}{\bigwedge} V$ appartiennent à $\mathcal{F}$, alors, d'après 3.4*(ii)*, $E(\omega_i)$ appartient à $\mathcal{F}$. Donc l'assertion (C1) est vraie dans C_n lorsque $p > n$.

Remarques: (1) On peut montrer que l'assertion (C1) est vraie dans B_n ou D_n lorsque $2p > n+1$.

(2) Nous avons vérifié que l'assertion (C1) était vraie pour tout p dans chaque groupe classique de rang ≤ 4.

3.11. Type G_2. Dans ce cas ω_1 est la plus grande racine courte donc $V := E(\omega_1)$ appartient à $\mathcal{F}$ d'après 3.6. Si $p \neq 2$, alors $\overset{2}{\bigwedge} V$ est facteur direct dans $V \otimes V$, donc appartient à $\mathcal{F}$, et donc possède une filtration de Weyl. En comparant les caractères, on obtient que $\overset{2}{\bigwedge} V$ est isomorphe à $E(\omega_2)$, et donc que $E(\omega_2)$ appartient à $\mathcal{F}$.

On peut traiter le cas p=2 de la façon suivante. Puisque tous les poids ν de $M := E(\omega_2)$ vérifient $(\nu, \check{\alpha}_1) \geq -2$ et $(\nu, \check{\alpha}_2) \geq -3$, il suffit de vérifier que $M \otimes \mu$ possède une filtration de Joseph lorsque μ est l'un des cinq poids suivants: $\omega_1, \omega_1 + \omega_2, \omega_1 + 2\omega_2, \omega_2, 2\omega_2$. Or M est la représentation adjointe et n'est que de dimension 14, et la vérification se fait sans difficultés. Donc l'assertion (C1) est vraie dans G_2.

Pour les autres groupes exceptionnels, nous suivrons la démonstration qui est utilisée dans [Do 2, Chap. 7-10] pour prouver que le produit tensoriel de deux G-modules induits possède une bonne filtration. Pour que le lecteur puisse s'en faire une idée, nous donnons ci-dessous une partie de la démonstration, et renvoyons à [*loc. cit.*] pour le reste. Soit W_p le groupe de Weyl affine, engendré par W et par les translations de vecteur $p\alpha$, pour $\alpha \in R$. Nous utiliserons la conséquence suivante du ***Strong Linkage Principle*** ([A 1]): si λ et μ sont deux poids dominants tels que $\lambda + \rho$ et $\mu + \rho$ ne sont pas conjugués par W_p, alors $Ext^1_G(E(\lambda), E(\mu)) = 0$. ($\rho$ désigne la demi-somme des racines positives.) L'ensemble C des $\lambda \in P^+$ qui vérifient: $0 \leq (\lambda + \rho, \check{\alpha}) \leq p$ pour toute $\alpha \in R^+$ est un domaine fondamental pour l'action de W_p. Donc, pour vérifier que deux poids ne sont pas dans la même orbite, il suffit de voir qu'ils ne sont pas conjugués au même élément de C.

On note $\chi(M)$ le caractère d'un G-module M, et, si $\nu \in P^+$, on désigne $\chi(E(\nu))$ simplement par $\chi(\nu)$. Nous numérotons les poids fondamentaux comme dans [Do 2], c.à.d. que les racines simples α_i vérifient $(\alpha_i, \check{\alpha}_{i+1}) = -1$, pour $i \leq 3$ dans F_4, et pour $i \leq n-1$ dans E_n. Attention, ces conventions sont différentes de celles des planches de [B 1].

3.12. Type F_4. Dans ce cas, ω_1 est la plus grande racine courte, donc $V := E(\omega_1)$ appartient à $\mathcal{F}$, d'après 3.6. On suppose $p \neq 2$. Alors $M := \overset{2}{\bigwedge} V$ est facteur direct dans $V \otimes V$, donc appartient à $\mathcal{F}$. En particulier, M possède une filtration de Weyl. On sait que $\chi(M) = \chi(\omega_2) + \chi(\omega_4)$.

De plus, on vérifie que $\omega_2+\rho$ et $\omega_4+\rho$ ne sont pas conjugués par W_p. En effet ils appartiennent tous deux à C lorsque $p>7$, et pour p=7, 5, 3, ils sont conjugués aux éléments de C suivants: $\rho-\omega_2, \omega_2, \omega_1$ pour le premier, et $\rho-\omega_3, \omega_1+\omega_2, \omega_2$ pour le second. Donc, d'après le Strong linkage principle, M est isomorphe à la somme directe de $E(\omega_2)$ et de $E(\omega_4)$. Ces deux modules appartiennent donc à $\mathcal{F}$. Posons $V'=E(\omega_4)$. Puisque $p\neq 2$, alors $M'=\overset{2}{\bigwedge} V'$ est facteur direct dans $V'\otimes V'$, donc appartient à $\mathcal{F}$, et donc possède une filtration de Weyl. On sait que $\chi(M')=\chi(\omega_3)+\chi(\omega_4)$. Puisque $\omega_3>\omega_4$, on obtient (*cf.* [W, Lemma 3.1]) que M' possède un sous-module N isomorphe à $E(\omega_3)$ et que M'/N est isomorphe à $E(\omega_4)$. Ainsi, M' et M'/N appartiennent à $\mathcal{F}$, donc N appartient à $\mathcal{F}$ d'après 3.4*(ii)*. Ceci prouve que (C1) est vraie dans F_4 lorsque $p\neq 2$.

3.13. Type E_6. Dans ce cas ω_1 et ω_5 sont minuscules, et ω_6 est la plus grande racine courte, donc $V=E(\omega_1), V'=E(\omega_5)$ et $V''=E(\omega_6)$ appartiennent à $\mathcal{F}$. Supposons $p\neq 2$. On obtient alors que $E(\omega_2)$ et $E(\omega_4)$ sont isomorphes à $\overset{2}{\bigwedge} V$ et à $\overset{2}{\bigwedge} V'$, donc appartiennent à $\mathcal{F}$. De même, $M:=\overset{2}{\bigwedge} V''$ appartient à $\mathcal{F}$, donc possède une filtration de Weyl. Or on sait que $\chi(M)=\chi(\omega_3)+\chi(\omega_6)$, et que $\omega_3>\omega_6$. Il en résulte que M contient un sous-module N isomorphe à $E(\omega_6)$, et que M/N est isomorphe à V''. D'après 3.4*(ii)* on obtient alors que N appartient à $\mathcal{F}$. Ceci montre que (C1) est vraie dans E_6 lorsque $p\neq 2$, et nous renvoyons à [Do 2, p137-139] pour la démonstration dans le cas $p=2$.

3.14. Types E_7 et E_8. Dans E_7, ω_1 est minuscule et ω_7 est la plus grande racine courte. Dans E_8, ω_1 est la plus grande racine courte. Lorsque $p\neq 2,7$, on peut montrer, en utilisant les méthodes esquissées plus haut, que (C1) est vraie dans E_7 et E_8. Nous renvoyons à [Do 2, p144-147 et p173-178] pour la démonstration.

Ainsi, nous avons obtenu le:

3.15. THÉORÈME. *L'assertion (C1) est démontrée dans les cas suivants:*
(1) G est de type A_n, E_6, ou G_2 et p est arbitraire.
(2) G est de type F_4 et $p\neq 2$.
(3) G est de type E_7 ou E_8 et $p\neq 2,7$.
(4) G est de type B_n, C_n ou D_n et $p=0$ ou bien $p>n$.

Partie 4

Nous allons démontrer le résultat suivant: pour tout poids minuscule $\mu\in P^+$, pour tout $\lambda\in P^+$ et pour tout $w\in W$, $F_w(\lambda)\otimes\mu$ possède une filtration de Joseph.

Nous fixons, une fois pour toutes, un poids minuscule μ et un poids dominant λ, et nous introduisons les notations suivantes.
Soient W_μ et W_λ les stabilisateurs de μ et de λ, soit S (resp. S') l'ensemble des racines simples α telles que s_α stabilise μ (resp. λ), soit ${}^\mu W=\{w\in W/w^{-1}S\subset R^+\}$ l'ensemble des éléments de

W qui sont minimaux dans leur classe à droite modulo W_μ et soit $W^\lambda = \{w \in W/wS' \subset R^+\}$ l'ensemble des éléments de W qui sont minimaux dans leur classe à gauche modulo W_λ

A chaque $w \in W$ on associe les deux couples $(w^\lambda, w_\lambda) \in W^\lambda \times W_\lambda$ et $(w_\mu, {}^\mu w) \in W_\mu \times {}^\mu W$, qui sont uniquement déterminées par les conditions: $w = w^\lambda w_\lambda$ et $w = w_\mu\, {}^\mu w$. Rappelons que si $y \in W$ et si $y \leq w$, alors $y^\lambda \leq w^\lambda$ et ${}^\mu y \leq {}^\mu w$.

Nous fixons maintenant un module $F_w(\lambda)$. On peut, sans perte de généralité, supposer que $w \in W^\lambda$. En effet l'ensemble des poids extrémaux de $F_w(\lambda)$ est égal à $\{z \in W^\lambda/z \leq w^\lambda\}$.

L'ensemble $\Theta(w)$ que nous allons définir ci-dessous sera très utile dans la suite. Pour être précis, il faudrait le noter $\Theta(\lambda, w, \mu)$.

Soit $\Theta(w)$ l'ensemble des $y \in {}^\mu W$ qui vérifient la condition suivante: il existe $z \in W^\lambda$ tel que $z \leq w$ et que yz^{-1} appartienne à W_μ.

4.1.Remarque. *Pour tout $y \in \Theta(w)$, $\lambda + y^{-1}\mu$ est un poids dominant.*

En effet, soit α une racine simple. On a $(\lambda + y^{-1}\mu, \check{\alpha}) = (\lambda, \check{\alpha}) + (\mu, z\check{\alpha})$, puisque $yz^{-1} \in W_\mu$. Si $\alpha \in S'$ alors, puisque $z \in W^\lambda$, on a $z\alpha \in R^+$, d'où $(\lambda + y^{-1}\mu, \check{\alpha}) \geq 0$. D'autre part, si $\alpha \notin S'$ alors $(\lambda, \check{\alpha}) \geq 1$, d'où $(\lambda + y^{-1}\mu, \check{\alpha}) \geq 0$ puisque μ est minuscule. ■

4.2.Remarque. *(i) L'ensemble $\Theta(w)$ possède un unique élément maximal: ${}^\mu w$.*
(ii) Pour tout $y \in \Theta(w)$, on a: $\lambda + y^{-1}\mu \geq \lambda + w^{-1}\mu$, et l'égalité n'a lieu que pour $y = {}^\mu w$.

En effet, soit $y \in \Theta(w)$. Il existe $z \in W^\lambda$ tel que $z \leq w$ et ${}^\mu z = {}^\mu y$. Puisque $y = {}^\mu y$ et $z \leq w$, on a: $y \leq {}^\mu w$. Ceci prouve la première assertion. La seconde assertion résulte de la première et du fait que tous les éléments de $\Theta(w)$ appartiennent à W^λ. ■

Le lemme suivant est dû à V.V.Deodhar, et se trouve dans [L-S, Lemma 4.4].

4.3 Lemme. *Soit $x \in W$ et soit τ un élément de ${}^\mu W$ tel que $\tau \leq {}^\mu x$. Alors l'ensemble des $x' \in W$ qui vérifient ${}^\mu x' = \tau$ et $x' \leq x$ possède un unique élément maximal, qu'on note $\varsigma(\tau, x)$.*

Remarquons que si $y \in \Theta(w)$, l'élément $\varsigma(y, w)$ est bien défini. On le notera simplement $\varsigma(y)$. En fait, seul $\varsigma(y)^\lambda$ nous intéresse. On a bien sûr ${}^\mu[\varsigma(y)^\lambda] \leq y$. Puisque $y \in \Theta(w)$, l'ensemble Γ des $z \in W^\lambda$ qui vérifient ${}^\mu z = y$ et $z \leq w$ est non vide. Soit $z \in \Gamma$. On a $z \leq \varsigma(y)$ donc $z = z^\lambda \leq \varsigma(y)^\lambda$. Il en résulte $y = {}^\mu z \leq {}^\mu[\varsigma(y)^\lambda]$. On en déduit que $\varsigma(y)^\lambda$ appartient à Γ et en est le plus grand élément. Nous noterons $\varsigma(y)^\lambda = \eta(y)$. Donc les éléments $\eta(y)$ considérés dans la suite seront des éléments de W^λ.

Le lemme suivant interviendra dans la démonstration de la proposition 4.6. On note R_S le sous-système de racines engendré par S.

4.4.Lemme. *Soient $y, y' \in \Theta(w)$. On suppose $y' < y$. Alors il existe une racine $\gamma \in R^+ \setminus R_S$ telle qu'on ait: $\eta(y', \eta(y)) \leq s_\gamma \eta(y) < \eta(y)$.*

Preuve: Par définition, $\eta(y', \eta(y)) = \varsigma(y', \eta(y))^\lambda$. Soit $y = s_1 \ldots s_n$ une décomposition réduite de y. On peut, de façon unique ,écrire $\eta(y) = uy$, avec $u \in W_\mu$, et ceci forme une décompositon réduite de $\eta(y)$.

On a $\eta(y',\eta(y)) \leq \eta(y)$, donc $\eta(y',\eta(y))$ est obtenu à partir de la décomposition réduite ci-dessus en supprimant certaines réflections simples. Puisqu'on suppose $y' < y$, on supprime au moins une des réflections simples qui composent y, disons s_k. Il en résulte: $\eta(y',\eta(y)) \leq s_\gamma\eta(y)$, où l'on a posé $\gamma = us_1 \dots s_{k-1}(\alpha_k)$. Quitte à changer γ en $-\gamma$, on peut supposer que $\gamma \in R^+$.

Posons $\beta = s_1 \dots s_{k-1}(\alpha_k)$. C'est une racine positive changée en négative par y^{-1}. Puisque $y^{-1} \in {}^\mu W$, on en déduit que β n'appartient pas à R_S. De plus, puisque u appartient à W_μ, il laisse R_S stable, donc γ non plus n'appartient pas à R_S. Ceci prouve le lemme. ■

4.5. Remarque. *Soit $y \in \Theta(w)$ et soit $\gamma \in R^+$. Alors on a: $s_\gamma\eta(y) < \eta(y)$ si et seulement si $(\eta(y)\lambda, -\check{\gamma}) > 0$.*

Preuve: Supposons $s_\gamma\eta(y) < \eta(y)$. Alors on a: $(\eta(y)\lambda, -\check{\gamma}) \geq 0$. De plus l'égalité $s_\gamma\eta(y)\lambda = \eta(y)\lambda$ ne peut avoir lieu, car $\eta(y)$ appartient à W^λ donc est minimal dans sa classe à gauche modulo W_λ. On a donc $(\eta(y)\lambda, -\check{\gamma}) > 0$. Réciproquement cette condition entraîne que $\eta(y)^{-1}\gamma$ appartient à R^-, donc que $s_\gamma\eta(y) < \eta(y)$. ■

Soit $d = l({}^\mu w)$. Pour chaque $k \leq d$, soit $\Theta_k(w) = \{y \in \Theta(w) / l(y) \leq k\}$, et soit N_k la somme, pour $y \in \Theta_k(w)$, des sous-modules $F_{\eta(y)}(\lambda)$ de $F_w(\lambda)$. Ceci nous donne une suite croissante de sous-B-modules de $F_w(\lambda)$, et on a $N_d = F_w(\lambda)$ car $\eta({}^\mu w) = w$. Pour prouver que $\mu \otimes F_w(\lambda)$ possède une filtration de Joseph,il suffit donc de démontrer la proposition suivante.

4.6. Proposition. *Pour chaque $k \leq d$, le B-module $M_k := \mu \otimes (N_k/N_{k-1})$ est isomorphe à la somme directe, pour $y \in \Theta_k(w) \setminus \Theta_{k-1}(w)$, des modules $F_{\eta(y)}(\lambda + y^{-1}\mu)$.*

La démonstration de la proposition passe par le lemme suivant, qui a son interêt propre, car il exprime une propriété remarquable du treillis des sous-modules de Demazure de $E(\lambda)$.

4.7. Lemme. *Soit $z \in W$, soit Ω une partie de W, et soit Ω' la réunion, pour $y \in \Omega$, des $x \in W$ qui vérifient: $x \leq z$ et $x \leq y$. Alors on a:*

$$F_z(\lambda) \cap \sum_{y\in\Omega} F_y(\lambda) = \sum_{x\in\Omega'} F_x(\lambda).$$

Preuve du lemme: Il est clair que le membre de droite est contenu dans celui de gauche. Si on note $V^\perp$ l'orthogonal dans $E(\lambda)^* = H^0(-\lambda)$ d'un sous-espace V de $E(\lambda)$, on voit que l'inclusion inverse est équivalente à la suivante:

$$F_z(\lambda)^\perp + \bigcap_{y\in\Omega} F_y(\lambda)^\perp \supseteq \bigcap_{x\in\Omega'} F_x(\lambda)^\perp.$$

Soit S l'union, pour $y \in \Omega$, des variétés X_y, et soit $S' = X_w \cap S$. Pour tout $t \in W$, on sait que $F_t(\lambda)^*$ est isomorphe à $H_t^0(-\lambda)$ (*cf.* 1.4.2), et on en déduit que $F_t(\lambda)^\perp$ s'identifie au noyau $K_t(-\lambda)$ de l'application de restriction, de $H^0(\lambda)$ vers $H_t^0(-\lambda)$. Or S' est la réunion ensembliste des variétés X_x, pour $x \in \Omega'$. Donc l'intersection des $F_x(\lambda)^\perp$, pour $x \in \Omega'$, s'identifie au noyau $K_{S'}(-\lambda)$ de l'application de $H^0(-\lambda)$ vers $H^0(S',-\lambda)$. L'inclusion à démontrer est donc équivalente à la suivante:

$$K_z(-\lambda) + K_S(-\lambda) \supseteq K_{S'}(-\lambda).$$

Or cette dernière inclusion résulte du fait que l'intersection schématique $X_w \cap S$ est réduite ([R,Theorem 3]). ■

La seconde étape dans la démonstration de la proposition 4.6 est le lemme 4.8 qui suit. Nous fixons $k \leq d$ et posons $\bar{N}_k = (N_k/N_{k-1})$. Soient $y_1, \ldots, y_r$ les éléments maximaux de $\Theta_k(w)$. Pour chaque $i \leq r$, soit $F_i := F_{\eta(y_i)}(\lambda)$, soit $\bar{F}_i$ l'image de F_i dans $\bar{N}_k$, et soit: $L_i = F_i \cap (N_{k-1} + \sum_{j \neq i} F_j)$.

4.8. LEMME. *Avec les notations introduites ci-dessus, on a:*
(i) Pour chaque $i \leq r$, L_i est contenu dans N_{k-1}.
(ii) N_k/N_{k-1} est isomorphe à la somme directe, pour $i \leq r$, des $\bar{F}_i$.

PREUVE: Puisque les y_i sont les éléments maximaux de $\Theta_k(w)$, il est clair que la somme, pour $i \leq r$, des F_i (resp. des $\bar{F}_i$) est égale à N_k (resp.$\bar{N}_k$). Donc, pour prouver l'assertion *(i)*, il nous faut montrer que l'intersection de chaque $\bar{F}_i$ avec la somme, pour $j \neq i$, des $\bar{F}_j$ est nulle. Or ceci est une conséquence de l'assertion *(ii)*, que nous allons maintenant démontrer. Nous obtiendrons au cours de la démonstration un résultat un peu plus précis, que nous utiliserons plus loin. Fixons un indice i. D'après le lemme 4.7, L_i est égal à la somme de sous-modules $F_x(\lambda)$, pour certains $x \leq \eta(y_i)$ qui vérifient au moins l'une des deux conditions suivantes: $l({}^\mu x) \leq k-1$, ou bien il existe $j \neq i$ tel que $x \leq \eta(y_j)$. Dans le premier cas, on a bien sûr ${}^\mu x < y_i$ (car $l(y_i) = k$). Dans le second cas on a: ${}^\mu x \leq y_i$ et ${}^\mu x \leq y_j$. Or, puisque y_i et y_j sont incomparables, ces deux inégalités sont strictes. Il en résulte que, dans les deux cas, $F_x(\lambda)$ est contenu dans N_{k-1}. Le lemme est donc démontré. ■

Il nous reste à montrer que chaque $\mu \otimes \bar{F}_i$ est isomorphe à un module de Demazure. Or $\bar{F}_i$ est isomorphe à $F_i/(F_i \cap N_{k-1})$, et il résulte de la démonstration ci-dessus que $F_i \cap N_{k-1}$ est égal à la somme de sous-modules $F_x(\lambda)$, pour certains $x \leq \eta(y_i)$ vérifiant ${}^\mu x < y_i$. Nous fixons un tel x et omettrons dans la suite l'indice i. Puisque $x \leq \eta(y)$, on a: $x \leq \eta({}^\mu x, \eta(y))$. Il résulte de 4.4 et 4.5 qu'il existe $\gamma \in R^+ \setminus R_S$ tel que $x \leq s_\gamma \eta(y)$ et $(\eta(y)\lambda, -\check{\gamma}) > 0$. Puisque $\gamma \in R^+ \setminus R_S$ on a $(\mu, \check{\gamma}) > 0$, d'où $(\mu, \check{\gamma}) = 1$ puisque μ est minuscule. De ceci on déduit le résultat suivant:

(∗) *$F \cap N_{k-1}$ est contenu dans la somme, pour $\gamma \in \Gamma$, des sous-modules $F_{s_\gamma \eta(y)}(\lambda)$, où Γ est l'ensemble des racines positives γ qui vérifient $(\mu, \check{\gamma}) = 1$ et $(\eta(y)\lambda, -\check{\gamma}) \geq 1$.*

On pose, pour chaque $\alpha \in R^+$, $k_\alpha = Max\{0, (\eta(y)\lambda, -\check{\alpha})\}$. Soit $e \in F$ le vecteur extrémal de poids $\eta(y)\lambda$, soit I son annulateur dans $\mathcal{U}(U)$, soit $\bar{e}$ l'image de e dans $\mu \otimes \bar{F}$, et soit I' l'annulateur dans $\mathcal{U}(U)$ de $\bar{e}$. Il résulte de (∗) que I' est contenu dans l'idéal à gauche J engendré par I et par l'ensemble, pour $\gamma \in \Gamma$ des éléments $X_\gamma^{(k_\gamma)}$.

Réciproquement, soit $\gamma \in \Gamma$ et soit $y' = {}^\mu[s_\gamma \eta(y)]$. On a $y' \leq y$, et l'égalité ne peut avoir lieu car sinon $s_\gamma \eta(y) y^{-1}$ appartiendrait à W_μ, et donc s_γ appartiendrait à W_μ, ce qui est impossible puisque $\gamma \notin R_S$. Il en résulte: $y' \in \Theta_{k-1}(w)$, et on en déduit que $F_{s_\gamma \eta(y)}(\lambda)$ est contenu dans $F \cap N_{k-1}$, donc que l'image dans $\bar{F}$ du vecteur extrémal de poids $s_\gamma \eta(y)\lambda$ est nulle. Ceci montre que J est contenu dans I'. On a donc: I'=J.

D'autre part, soit M le module de Demazure dont le plus bas poids est $\nu := \eta(y)\lambda + \mu$, soit $v \in M$ un vecteur non nul de poids ν et soit J' l'annulateur dans $\mathcal{U}(U)$ de v. D'après la proposition 2.1, on sait que J' est l'idéal à gauche engendré par les éléments $X_\alpha^{(n_\alpha)}$,pour $\alpha \in R^+$ et pour $n_\alpha \geq 1 + k'_\alpha$, où l'on a posé: $k'_\alpha = Max\,\{0, (\nu, \check{\alpha})\}$. Puisque $(\nu, -\check{\alpha}) = (\eta(y)\lambda, -\check{\alpha}) - (\mu, \check{\alpha})$ et puisque μ est minuscule, on voit que k'_α est égal à k_α, sauf lorsque simultanément $(\mu, \check{\alpha}) = 1$ et $(\eta(y)\lambda, -\check{\alpha}) \geq 1$, auquel cas on a $k'_\alpha = k_\alpha - 1$. De ceci on déduit, en tenant compte de la proposition 2.1 appliquée à l'idéal I, que J' est égal à I'.

Les B-modules $\mu \otimes \bar{F}$ et M sont respectivement engendrés par les vecteurs $\bar{e}$ et v. Or ces vecteurs ont même annulateur dans $\mathcal{U}(U)$ et sont tous deux de poids ν, donc ont même annulateur dans $\mathcal{U}(B)$. Il en résulte que $\mu \otimes \bar{F}$ et M sont isomorphes. Ceci termine la démonstration de la proposition 4.6. ■

Nous avons donc démontré le théorème suivant:

4.9.Théorème. *Soit $\lambda \in P^+$, soit $w \in W^\lambda$, et soit μ un poids minuscule. Alors: $F_w(\lambda) \otimes \mu$ possède une filtration de Joseph, qui est explicitement décrite par la proposition 4.6.*

4.10. Soient λ et μ comme ci-dessus. Si $w, w' \in W^\lambda$ et si $w \leq w'$, il est clair que $\Theta(w) \subseteq \Theta(w')$, et que, si $y \in \Theta(w)$ alors $\eta(y, w) \leq \eta(y, w')$. On en déduit que l'injection naturelle de $N = F_w(\lambda) \otimes \mu$ dans $N' = F_{w'}(\lambda) \otimes \mu$ est compatible avec les filtrations de Joseph qu'on vient de construire sur N et N'. En fait on peut vérifier que la filtration de Joseph construite sur N coïncide avec la restriction à N de celle construite sur N'.

Nous allons tirer du théorème 4.9 quelques conséquences dans le cas de A_n. Dans A_n tous les poids fondamentaux sont minuscules, donc tout poids dominant est somme de poids minuscules. Donc, par application répétée de 4.9, on obtient immédiatement le corollaire suivant: (le fait que w ne soit pas nécessairement dans W^λ est sans importance.)

4.11.Corollaire. *Supposons G de type A_n. Alors, pour tous $\lambda, \mu \in P^+$ et tout $w \in W$, $F_w(\lambda) \otimes \mu$ possède une filtration de Joseph.*

Ceci nous donne une démonstration du résultat suivant, qui est un cas particulier de la proposition 2.14.

4.12.Corollaire. *Supposons G de type A_n. Alors, pour tous $\lambda, \mu \in P^-$ et tout $w \in W$, on a:*
(i) $H^i(\tilde{X}_w, \mu \hat{\otimes} \lambda) = 0$ pour tout $i > 0$.
(ii) L'application de restriction, de $H^0(\tilde{X}, \mu \hat{\otimes} \lambda)$ vers $H^0(\tilde{X}_w, \mu \hat{\otimes} \lambda)$, est surjective.

Preuve: Posons $M_w = H^0_w(\lambda) \otimes \mu$ et rappelons (*cf.* 2.14) que, pour tout $i \geq 0$, $H^i(\tilde{X}_w, \mu \hat{\otimes} \lambda)$ est isomorphe à $H^i(M_w)$. Le corollaire 4.11 nous dit que M_w possède une excellente filtration; donc $H^i(M_w) = 0$ pour $i > 0$. Ceci prouve l'assertion *(i)*. Par application répétée de la version duale de 4.10, on obtient que l'application de restriction, de $M := H^0(\lambda) \otimes \mu$ vers M_w, induit une surjection au niveau de chaque étage des excellentes filtrations construites sur M et M_w. Alors, d'après 1.4.2, l'application de restriction, de $H^0(M)$ vers $H^0(M_w)$, est surjective. Ceci prouve l'assertion *(ii)*. ■

4.13. Les résultats de cette partie ont été exposés au cours d'une conférence à Oberwolfach, le 7 août 1987. Lors de cette conférence, B.Kostant m'avait signalé la question suivante: pour $k = \mathbb{C}$, le G-module simple $H^0([w\lambda + \mu])$ apparaît-il avec la multiplicité 1 dans le G-module $H^0(\tilde{X}_w, \mu \otimes \lambda)$? (Ici, $[w\lambda+\mu]$ désigne le poids antidominant conjugué à $w\lambda+\mu$). Cette question était motivée par un théorème de S.Kumar ([Ku, Theorem 1.5]), qui prouvait que cette question était équivalente à une conjecture de K.R.Parthasarathy, R.Ranga Rao, et V.S.Varadarajan, à savoir: pour $k = \mathbb{C}$, le G-module simple $E(-[w\lambda + \mu])$ apparaît-il avec la multiplicité 1 dans le sous-G-module de $E(-\lambda) \otimes E(-\mu)$ engendré par le vecteur extrémal $e_{-w\lambda} \otimes e_{-\mu}$? Lors de mon exposé à Oberwolfach, j'avais fait remarquer que cette conjecture était conséquence, dans le cas de A_n, des résultats 4.11 et 4.12 ci-dessus. Peu de temps après (août 87), la conjecture a été démontrée dans le cas général, indépendemment par S.Kumar ([Ku, Theorem 2.10]), et par O.Mathieu ([Ma 3, Corollaire 3]).

Note (ajoutée le 6 septembre 88): Nous savons maintenant démontrer la conjecture (C2), lorsque G ne contient pas de composantes de type E_7, E_8 ou F_4 ([P 2]).

Bibliographie.

[A 1] H.H.ANDERSEN. The Strong Linkage Principle, *J. reine angew. Math.* 315 (1980), 53-59.

[A 2] H.H.ANDERSEN. Schubert Varieties and Demazure's character formula, *Invent.Math.* 79 (1985), 611-618.

[B 1] BOURBAKI. *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. 4-5-6, Hermann, Paris, 1968, Masson, Paris, 1981.

[B 2] BOURBAKI. *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. 7-8, Hermann, Paris, 1975.

[C] M.COUILLENS. Algèbres de Hecke, *dans Séminaire sur les groupes finis, Tome 2*, Public.Math.Paris 7.

[C-K-P-S] E.CLINE, W.van der KALLEN, L.SCOTT, B.PARSHALL. Rational and Generic Cohomology, *Invent. Math.* 39 (1977), 143-163.

[C-P-S 1] E.CLINE, L.SCOTT, B.PARSHALL. Induced modules and extensions of representations 2, *J.London Math.Soc.* 20 (1979), 403-414.

[C-P-S 2] E.CLINE, L.SCOTT, B.PARSHALL. Cohomology, hyperalgebras and representations, *J. of Algebra* 63 (1980), 98-123.

[Dem] M.DEMAZURE. Désingularisation des variétés de Schubert généralisées, *Ann.Scient. Ec.Norm.Sup* 7 (1974), 53-88.

[Deo] V.V.DEODHAR. Some Characterizations of Bruhat Ordering on a Coxeter Group ..., *Invent. Math.* 39 (1977), 187-198.

[Do 1] S.DONKIN. A Filtration for Rational Modules, *Math.Z.* 177 (1981), 1-8.

[Do 2] S.DONKIN. *Rational Representations of Algebraic Groups*, Lect. Notes in Math. 1140, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1985.

[Do 3] S.DONKIN. On Schur Algebras and Related Algebras 1, *J. of Algebra* 104 (1986), 310-328.

[G 1,2] A.GROTHENDIECK. *Eléments de Géométrie Algébrique, Chapitre 2, et Chapitre 3 (Partie 1)*, Public.Math.IHES n^{os} 8 et 11, Paris, 1961.

[H] J.HUMPHREYS. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Grad.Texts in Math, Springer-Verlag, New York, 1972.

[Ii] S.IITAKA. *Algebraic Geometry*, Grad.Texts in Math, Springer-Verlag, New York, 1982.

[Ja 1] J.C.JANTZEN. Darstellungen halbeinfacher Gruppen und kontravariante Formen, *J. reine angew. Math.* 290 (1977), 117-141.

[Ja 2] J.C.JANTZEN. *Representations of Algebraic Groups*, Academic Press, Orlando, 1987.

[Jo] A.JOSEPH. On the Demazure character formula, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 18 (1985), 389-419.

[Ka] W. van der KALLEN. Longest weight vectors and excellent filtrations, *preprint, Janvier 1988.*

[Ku] S.KUMAR. Proof of the Parthasarathy-Ranga Rao-Varadarajan conjecture, *preprint, Août 1987.*

[L-S] V.LAKSHMIBAI, C.S.SESHADRI. Geometry of G/P-5, *J. of Algebra* 100 (1986), 462-557.

[Ma 1, 2] O.MATHIEU. Formules de Weyl et de Demazure, et théorème de Borel-Weil-Bott pour les algèbres de Kač-Moody générales, *à paraître dans Astérique.*

[Ma 3] O.MATHIEU. Construction d'un groupe de Kač-Moody et applications, *C.R.Acad. Sci. Paris, t.306, Série 1,* 227-230, 1988.

[Ma 4] O.MATHIEU. Construction d'un groupe de Kač-Moody et applications, *prépublication, Août 1987.*

[M-R 1] V.B.MEHTA, A.RAMANATHAN. Frobenius splitting and cohomology vanishing for Schubert varieties, *Annals of Maths.* 122 (1985), 27-40.

[M-R 2] V.B.MEHTA, A.RAMANATHAN. Schubert Varieties in $G/B \times G/B$, preprint.

[P 1] P.POLO. Un critère d'existence d'une filtration de Schubert, *prépublication, juin 1988, à paraître aux C. R. Acad. Sci. Paris.*

[P 2] P.POLO. Monômes Standards et Excellentes Filtrations, *prépublication, septembre 1988.*

[R] A.RAMANATHAN. Schubert varieties are arithmetically Cohen-Macaulay, *Invent. Math.* 80 (1985), 283-294.

[R-R] S.RAMANAN, A.RAMANATHAN. Projective normality of flag varieties and Schubert varieties, *Invent. Math.* 79 (1985), 217-224.

[Se] C.S.SESHADRI. Line bundles on Schubert varieties, in *Vectors Bundles on Algebraic Varieties, Papers presented at the Bombay colloquium 1984*, TIFR Studies in Math, *n°* 11, 1987.

[St] R.STEINBERG. *Lectures on Chevalley Groups*, Yale University Notes, 1967.

[W] WANG JIAN-PAN. Sheaf Cohomology on G/B and Tensor Products of Weyl Modules, *J. of Algebra* 77 (1982), 162-185.

Patrick Polo
45, Rue d'Ulm
75005 PARIS.