AST

Orbites unipotentes et représentations III. Orbites et faisceaux pervers - Pages préliminaires

Astérisque, tome 173-174 (1989), p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1989__173-174__1_0>

173-174 ASTÉRISQUE

1989

ORBITES UNIPOTENTES ET REPRÉSENTATIONS

III. Orbites et Faisceaux pervers

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

A.M.S. Subjects Classification (par article) :
22 E 47, 22 E 46 - 35 A 30, 20 G 15, 20 G 20, 14 L 35, 14 L 35, 20 G 05, 32 B 30.

AVANT-PROPOS

L'apparition dans des domaines différents : la théorie des représentations des groupes de Lie réductifs réels ou p-adiques (classification et construction des représentations, formules de caractères, unitarisabilité), la théorie des formes automorphes, la théorie des représentations des groupes finis simples du type de Lie (classification et calcul des caractères), la classification des idéaux primitifs des algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie semisimples, d'un certain nombre d'idées communes est à l'origine de la rencontre dont les présents recueils constituent les actes. Ce sont notamment la géométrie de la variété des drapeaux, la géométrie des orbites unipotentes de la représentation adjointe, les représentations des groupes de Weyl, la structure des algèbres de Hecke, la correspondance de Springer.

Une certaine unité des méthodes et la diversité de leurs champs d'application rendaient intéressante l'idée de rassembler (presque) tous les spécialistes de ces questions pour une période dépassant la semaine habituelle. Le Centre national de la recherche scientique et la direction de la recherche du Ministère de l'éducation nationale ayant manifesté leur intention d'appuyer la recherche en mathématiques en rendant possible en France des rencontres d'une certaine envergure sous la forme d'années à thème, nous avons décidé en janvier 1986 d'organiser en juin et juillet de l'année suivante la période spéciale "orbites unipotentes, représentations des groupes réductifs réesl, p-adiques et finis, et représentations des algèbres de Hecke". J'ai accepté d'en présider le comité d'organisation, constitué par ailleurs de François Digne, Michel Duflo, Guy Henniart, Paul Gérardin et Jean-Pierre Labesse.

Décrivons brièvement le déroulement de la période spéciale. Sept séries de cours, en général le matin, présentaient les aspects principaux des développements de ces dernières années. Les après-midis étaient consacrées à des conférences plus spécialisées. La plupart du temps, les rencontres avaient lieu soit à Paris, soit à Orsay, et les activités étaient concentrées sur trois jours par semaine afin de laisser aux participants le temps de comprendre, ou, plus simplement, de souffler. Cependant, la semaine centrale s'est déroulée sous forme d'un colloque au Centre international de recherches mathématiques à Luminy. Après quatre semaines de travail intensif dans l'agitation parisienne (Jussieu ou Orsay), le cadre et les excellentes installations et conditions de travail du CIRM ont été particulièrement appréciés.

On trouvera à la suite de cette présentation la liste des participants (plus de cent mathématiciennes et mathématiciens de dix-huit pays) ainsi que la liste des cours et des conférences. Ceux des intervenants qui le désiraient ont proposé leurs contributions, rédaction de cours ou article de recherche, pour publication dans les actes. Conformément à la tradition d'*Astérisque*, les manuscrits proposés ont été examinés individuellement par un referee, et acceptés ou non suivant la procédure habituelle, par le comité de rédaction de la revue. En fin de compte, la liste des articles rassemblés dans ces trois volumes est représentative de la période spéciale elle-même.

Les actes sont, pour des raisons plus techniques que scientifiques, divisés en trois volumes: *Groupes finis et algèbres de Hecke*, *Groupes p-adiques et réels*, *Orbites et faisceaux pervers*. Les frontières entre les trois volumes sont quelque peu arbitraires, et il est préférable de penser aux trois volumes comme formant un tout - un témoignage, en quelque sorte, de l'unité profonde de la théorie des groupes et de la géométrie.

Au cours de la période spéciale un autre colloque a eu lieu, en l'honneur de Roger Godement à l'occasion de son soixante-cinquième anniversaire. La parution de ces actes nous fournit l'occasion de lui rendre hommage, tant pour son oeuvre mathématique, que pour son souci constant de penser les rapports entre science et société.

Je tiens à remercier ici M. Daniel Barsky, président du comité national du C.N.R.S. pour les mathématiques et Monsieur Claude Godbillon, chargé de mission pour les mathématiques à la direction de la recherche du Ministère de l'éducation nationale pour leur soutien sans faille pendant les dix-huit mois de préparation de cette entreprise. Nous avons aussi bénéficié de la compréhension du directeur scientifique au C.N.R.S. pour les mathématiques et la physique de base, Monsieur Jean-Claude Lehmann, et de l'efficace intervention du président de la section compétente du Conseil supérieur des universités, Monsieur Jean-Louis Nicolas.

Si le C.N.R.S. et le Ministère de l'éducation nationale ont fourni une part essentielle du budget, la période spéciale n'aurait pas eu l'ampleur voulue sans des contributions parfois importantes de plusieurs établissements universitaires et d'équipes de recherche : les universités Paris 7, Paris-Sud (Orsay), Pierre et Marie Curie, l'Ecole Normale Supérieure, l'Université de Dijon, l'Université de Nancy I, les unités associées au C.N.R.S. 748 "Théorie des groupes, représentations, applications", 744 "Théorie des groupes finis'", 752 "Géométrie algébrique et théorie des nombres", 762 "Laboratoire de mathématiques de l'E.N.S.".

Dans la préparation matérielle, j'ai eu la chance de pouvoir compter sur la collaboration de Mme Claude Orieux (qui assurait le secrétariat de l'U.A. 748), dont la compétence et le dévouement exceptionnels m'ont considérablement facilité la tâche. Je tiens également à remercier le personnel administratif de l'UER de mathématiques de l'Université Paris 7, et tout particulièrement Mlle Marie-Thérèse Gschwendtner, ainsi que le personnel de l'administration centrale de l'Université Paris 7, de l'administration déléguée du C.N.R.S. de la rue Pierre et Marie Curie, du CIRM, du département de mathématiques et de l'administration centrale de l'Université Pierre et Marie Curie. Je voudrais enfin remercier mes collègues de l'U.A. 748 de leur aide et de leur gentillesse.

Martin ANDLER

Liste des participants

ADAMS J.
AHUMADA G.
ANDLER M.
ARTHUR J.
ASAI T.
AUBERT A.M.
BALDONI-SILVA W.
BARBASCH D.
BARLET D.
BARRAT P.
BEDARD R.
BENLOLO E.
BENOIST Y.
BERLINE N.
BIEN F
BLANC P.
BLOCK J.L
BOUAZIZ A.
BRYLINSKI J.L.
CARAYOL H.
CARMONA J.
CARTIER P.
CHARBONNEL J.Y.
CHOUCROUN F.
CLOZEL L.
COUILLENS M.
CURTIS C.W.
DELORME P.
DEXEUS J.
DIGNE F.
DOURMASHKIN P.
DU CLOUX F.
DUFLO M.
ENGUEHARD M.
FLICKER Y.
FRIEDBERG S.
FUJIWARA H.
GALLEGOS-JARPA G.
GARFINKLE D.
GERARDIN P.
GUEMES J.
GUICHARDET A.
GUPTA H.
HAASTERT B.
HALES T.
HARINCK P.
HECKMAN G.
HENNIART G.
HERSANT A.
HOWE R.
ILAMED Y.L.
JACQUET H.
JANTZEN J.C.
JOHNSON J.
JOSEPH A.
KAC V.
KAMOUN N.
KASHIWARA M.
KAWANAKA N.
KHALGUI M.S.
KNAPP A.W.
KOTTWITZ R.
KRAFT H.
LABESSE J.P.
LAUMON G.
LEHRER G.I.
LEVASSEUR T.
LI W.
LICHTIN B.
LUSZTIG G.
MACDONALD I.G.
MALLIAVIN M.P.
MATHIEU O.
MATSUMOTO H.
MELNIKOV A.
MICHEL J.
MIRKOVIC I.
MOEGLIN C.
MOONS T.
MOY A.
MURNAGHAN F.
NGHIEM-XUAN-HAI
PERETS G.
PERRIN P.
PICHET C.
POLO P.
PROCESI M.
RENTSCHLER R.
RODIER F.
ROSSMANN W.
ROSSO M.
RUBENTHALER H.
SAITO M.
SALLY P.
SANCHEZ-PALACIO J.L.
SANSUC J.-J.
SAVIN G.
SCHAPIRA P.
SCHMID W.
SHELSTAD D.
SHI J.
SHOJI T.
SOTO-ANDRADE J.
SPALTENSTEIN N.
SPEH B.
SPRINGER T.
SRINIVASAN B.
SUND T.
TADIC M.
TANISAKI T.
TITS J.
TORASSO P.
UZAWA T.
VAN LEEUWEN M.
VANNONI C.
VERGNE M.
VIGNERAS M.-F.
VILONEN K.
VOGAN D.
WALDSPURGER J.-L.
WIGNER D.
WOLF J.
ZUCKER S.

Titres des conférences

ADAMS J.	L-Functoriality for Dual Pairs.
ARTHUR J.	Global motivation for the Unitary Dual (I,II,III,IV).
	L^2-cohomology and Hecke operators
ASAI T.	On the irreducible representations of the finite classical groups with non-connected centers.
AUBERT A.M.	Représentation métaplectique et sous-groupes d'Iwahori.
BARBASCH D.	Unipotent representations for semi-simple Lie group (I,II).
BARLET D.	Fundamental class and intersection cohomology
BENOIST Y.	On the $\mathfrak{n}$-cohomology of $\mathfrak{n}$-locally nilpotent $\mathfrak{g}$-modules.
BIEN F.	Unipotent representations of Diff S^1.
BOUAZIZ A.	Relèvement des caractères d'un groupe endoscopique pour le changement de base **C/R**.
BRYLINSKI J.L.	Hochschild homology and orbital integrals.
	Twisted differential operators and $\mathfrak{g}$-finite endomorphisms
CARTIER P.	Representations of Hecke algebras of type A_n.
CLOZEL L.	Howe's conjecture.
CURTIS C.W.	Representations of Hecke Algebras (I, II, III).
	The Gelfand-Graev representation of a finite Chevalley group
DIGNE F.	Shintani descent and Hecke algebras
FLICKER Y.	A simple trace formula.
GARFINKLE D.	Cells in Weyl groups.
GUEMES J.	On the homology classes for the components of some fibres of Springer's resolution.
GUPTA H.	Translation actions and limits of functions on adjoint orbits
HALES T.	Germs and transfer for subregular unipotent classes.
HECKMAN G.	Monodromy for the hypergeometric function ${}_nF_{n-1}$
HOWE R.	Minimal K-types, Hecke algebras and the classification of representations of GL(n).
JACQUET H.	Spherical functions and trace formula.
JANTZEN J.C.	Support varieties for restricted Lie algebras.
JOHNSON J.	Base change **C/R**.
JOSEPH A.	Primitive ideals (I,II,III).
	Scale factors in Goldie rank polynomials.
KAC V.	Moduli of curves and representation theory.
KASHIWARA M.	$\mathcal{D}$-modules and representation theory (I,II,III,IV,V).
	Character formula and Matsuki correspondence.
KAWANAKA N.	Orbits and stabilizers of nilpotent elements of a graded semi-simple Lie algebra.

KNAPP A.W.	A construction of unitary representations in parabolic rank two.
KOTTWITZ R.	On Tamagawa numbers.
KRAFT H.	Normality and non-normality of closures of conjugacy classes
LAUMON G.	Un analogue global du cône nilpotent.
LEHRER G.I	Actions of Coxeter groups on certain cohomology groups. The Kazhdan-Lusztig polynomials and reflection subgroups in Coxeter groups.
LUSZTIG G.	Affine Hecke algebras (I, II, III, IV). Fixed point varieties on affine flag manifolds.
MACDONALD I.G.	Symmetric functions and spherical functions.
MATHIEU O.	Weyl formula for general Kac-Moody Lie algebras.
MIRKOVIC I.	Characteristic varieties of character sheaves.
MOY A.	Isomorphisms of Hecke algebras.
POLO P.	A good filtration for tensor products of modules associated with Schubert varieties.
PROCESI M.	Cohomology of compactifications of symmetric varieties.
ROSSMANN W.	Equivariant multiplicities.
ROSSO M.	Algèbres de Hecke et groupes quantiques.
SAVIN G.	Limit multiplicities of cusp forms.
SCHMID W.	Local cohomology and the duality theorem.
SHELSTAD D.	Regular unipotent germs and transfer.
SHI J.	Some recent developments on cells of affine Weyl groups.
SHOJI T.	Geometry of orbits and Springer correspondence (I,II,III). A remark on the Shintani descent for finite algebraic groups.
SOTO-ANDRADE J.	Generalized Weil representations.
SPALTENSTEIN N.	Nilpotent orbits and conjugacy classes in the Weyl group.
SPEH B.	Automorphic representations for complex semisimple Lie groups, and Lefschetz numbers.
SPRINGER T.	Character Sheaves (I, II, III, IV). Some properties of Kazhdan-Lusztig polynomials.
TADIC M.	Geometry of dual spaces of p-adic reductive groups.
TANISAKI T.	Hodge modules and Hecke algebras.
UZAWA T.	Equivariant compactifications of symmetric spaces.
VERGNE M.	On Zuckerman's functor.
VILONEN K.	A good category of ($\mathfrak{g}$,K)-modules.
VOGAN D.	Unitary dual for real reductive groups (I, II, III, IV). On the definition of Arthur's characters.
WALDSPURGER J.L.	Les intégrales orbitales pour le groupe linéaire sur un corps p-adique.
WOLF J.	Harmonic analysis on general semi-simple Lie groups.
ZUCKER S.	L^2-cohomology of arithmetic varieties and intersection homology of their Baily-Borel-Satake compactification.

TABLE DES MATIÈRES

Volume III - Orbites et Faisceaux pervers

Cours

Articles

ORBITES ET FAISCEAUX PERVERS

ABSTRACTS

JOSEPH, A. *The primitive spectrum of an enveloping algebra.*

The following is the content of a series of three lectures given at the representation theory colloquium held in Paris during June-July 1987. In order to develop in an essentially self-contained fashion the results described here we have concentrated on just a few of the many exciting developments in the theory of primitive ideals for enveloping algebras treating only the semisimple case.

The first chapter gives a proof of Duflo's theorem which is then broadened into an equivalence of categories theorem. The second chapter describes the Goldie rank approach to the classification of primitive ideals. Finally the third chapter describes the functors of coherent continuation which are shown to admit multiplication and the Enright functor which is shown to satisfy the braid relations. From this we describe, in paticular, how left cells are introduced and used in the classification of primitive ideals.

KASHIWARA, M. *Representation theory and D-modules on flag varieties.*

The review of Beilinson-Bernstein's work on the D-modules on flag varieties is given. Especially, the case of non regular infinitesimal character is discussed.

MARS, J.G.M. and SPRINGER, T.A. *Character sheaves.*

This contribution contains an exposition of part of G. Lusztig's theory of character sheaves (contained in five papers in Advances in Mathematics, Vol. 56, 57, 59, 61, 1985-86). The parts of these papers involving case by case considerations are not discussed.

GINSBURG, V. *Admissible modules on a symmetric space.*

Let K be a fixed point subgroup of an involution of a complex reductive Lie group G. We introduce a class of "admissible" D-modules on G/K. It consists, by definition, of modules M, such that both the Lie algebra of K and the center of the enveloping algebra of Lie G act on Γ(G/K, M) in a locally-finite manner. A characterization of such modules in terms of their characteristic varieties is given.

In a special case (G = K x K, K = diagonal), it turns out that simple admissible modules correspond to character sheaves [Lu2] via the Riemann-Hilbert correspondence.

GÜEMES, J.J. *On the homology classes for the components of some fibres of Springer's resolution.*

We compute the homology classes of the components of the fibres of Springer's resolution in terms of Schubert classes when the unipotent element is of "one hook" type.

KRAFT, H. and PROCESI, C. *A special decomposition of the nilpotent cone of a classical Lie algebra.*

It has been conjectured by Lusztig that the nilpotent cone N of a simple Lie algebra g = Lie G has a finite decomposition into locally closed G-stable subvarieties $\hat{C}$, indexed by the so-called *special classes* C, which are *rational homology manifolds*. In case of a classical Lie algebra one has a purely combinatorial description of the special classes C, and $\hat{C}$ is given by :

$$\hat{C} := \overline{C} \setminus \bigcup_{\substack{C' \text{special} \\ \overline{C'} \subset \overline{C}}} \overline{C'}$$

We prove Lusztig's conjecture for classical Lie algebras showing that there is a smooth variety Y with an action of the group $\mathbf{Z}_2 \times \ldots \times \mathbf{Z}_2$ and an isomorphism

$$Y / \mathbf{Z}_2 \times \ldots \times \mathbf{Z}_2 \xrightarrow{\sim} \hat{C}$$

POLO, P. *Variétés de Schubert et excellentes filtrations.*

Le corps de base k est algébriquement clos, de caractéristique arbitraire. Soit G un groupe algébrique sur k, semi-simple et simplement connexe, et soit W son groupe de Weyl. Soit B un sous-groupe de Borel de G. Nous nous intéressons aux B-modules obtenus comme suit. Soit $\mathfrak{L}$ un fibré en droites effectif sur X = G/B, et soit X_w une variété de Schubert dans X ; alors $H^0(X_w, \mathfrak{L})$ est un B-module, que l'on note $H^0_w(\mathfrak{L})$ pour simplifier. Dans [J_0], A. Joseph a posé la question suivante, que nous rappellerons (C1) : si : $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont deux fibrés en droites effectifs sur X, et si $w \in W$, le B-module $H^0_{w_0}(\mathcal{L}') \otimes H^0_w(\mathcal{L})$ possède-t-il une filtration dont les quotients sont isomorphes à des modules $H^0_{w''}(\mathcal{L}'')$? C'est cette question qui fait l'objet de notre travail. La partie 1 sert d'introduction. Nous y avons regroupé, sous une forme convenant à nos besoins, des résultats contenus dans la littérature sur le sujet. Dans la partie 2, nous établissons une propriété fondamentale des modules $H^0_w(\mathcal{L})$ (2.1-2.5), et nous relions la question (C1) à une question portant sur des G-modules (2.19). Dans la partie 3, nous apportons, sous certaines restrictions sur la caractéristique de k, une réponse positive à la question (C1). Enfin, dans la partie 4 nous démontrons un résultat plus fort (4.9) lorsque G est de type A_n.

ROSSMANN, W. *Equivariant multiplicities on complex varieties*

We define the *equivariant multiplicity* of an isolated fixed-point of the action of an algebraic torus on a complex variety and prove an integral formula for it which generalizes the Lelong-number formula for the classical multiplicity of a singular point on a complex variety. As an application we prove a *Localization Formula* in equivariant cohomology for the fundamental cycles of (possibly singular) compact subvarietes stable under the torus action. In the special case of *Schubert varieties* this formula leads to a geometric interpretation of certain polynomials arising from the operators A_w to describe the homology ring of the flag manifold.