Astérisque

ABDERRAZAK BOUAZIZ

Relèvement des caractères d'un groupe endoscopique pour le changement de base $\mathbb{C}/\mathbb{R}$

Astérisque, tome 171-172 (1989), p. 163-194
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1989__171-172__163_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 171-172 (1989), p. 163-194.

RELÈVEMENT DES CARACTÈRES D'UN GROUPE ENDOSCOPIQUE POUR LE CHANGEMENT DE BASE $\mathbb{C}/\mathbb{R}$

Abderrazak Bouaziz

1-INTRODUCTION.

Soit G un groupe algébrique réductif connexe défini et quasi-déployé sur $\mathbb{R}$. On note $\tilde{G}$ le groupe obtenu à partir de G par restriction des scalaires de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$. L'élément non trivial du groupe de Galois Gal($\mathbb{C}/\mathbb{R}$) opère dans $\tilde{G}$ par un automorphisme rationnel qu'on note α. Soit H un groupe endoscopique pour $(\tilde{G},\alpha)$ (voir [S-1]). On fixe un plongement permis (voir 2-3) $\tilde{\xi}$ de ${}^LH$ dans ${}^L\tilde{G}$. Si φ est une section admissible de ${}^LH$, on note $\tilde{\varphi}=\tilde{\xi}\circ\varphi$. C'est une section admissible de ${}^L\tilde{G}$. Le L-paquet de Langlands associé à $\tilde{\varphi}$ est réduit à un seul élément. C'est une représentation irréductible de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ stable par α. Son caractère tordu, qu'on note $\Theta^{\alpha}_{\tilde{\varphi}}$, est une distribution sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$ stable par α-conjugaison (i.e. stable par les automorphismes $x \longmapsto \alpha(g)xg^{-1}, g \in \tilde{G}(\mathbb{R})$).

Le but de cet article est de décrire le lien, quand $\tilde{\varphi}$ est bornée, entre $\Theta^{\alpha}_{\tilde{\varphi}}$ et le caractère Θ_{φ} du L-paquet de représentations de H($\mathbb{R}$) associé à φ. Le résultat précis utilise la notion de relèvement de distributions de H($\mathbb{R}$) à $\tilde{G}(\mathbb{R})$ que nous rappelons brièvement. A chaque fonction f dans $C^{\infty}_{c}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, Shelstad associe une fonction f_H (pas unique) dans l'espace de Harish-Chandra-Schwartz de H($\mathbb{R}$) qui est définie par ses intégrales orbitales stables à partir de f (voir [S-1]) . Si Θ est une distribution tempéré stablement invariante sur H($\mathbb{R}$) , $\Theta(f_H)$ ne dépend que des intégrales orbitales stables de f_H . Ceci permet de définir une distribution sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$, notée $\mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\Theta$, par $\mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\Theta(f)= \Theta(f_H)$. Elle est stable par α-conjugaison . On l'appelle relèvement de Θ à $\tilde{G}(\mathbb{R})$. Nous montrons, dans cet article, que $\Theta^{\alpha}_{\tilde{\varphi}} = \varepsilon\ \mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\Theta_{\varphi}$ où ε est un signe que nous précisons dans le texte. Ce problème a été posé par Shelstad dans [S-1]. Comme application nous montrons que si la fonction f ci-dessus était en plus K-finie, où K est un sous-groupe compact maximal de $\tilde{G}(\mathbb{R})$, on peut choisir f_H dans $C_c^{\infty}(H(\mathbb{R}))$,K_H-finie où K_H est un sous-groupe compact maximal de $H(\mathbb{R})$.

Je remercie D. Shelstad pour l'intérêt qu'elle a porté à ce travail ,et L. Clozel pour avoir attiré mon attention sur l'application au transfert de fonctions K-finies .

2-GROUPES ENDOSCOPIQUES.

Dans ce chapitre nous rappelons les définitions et résultats de [S-1],concernant les groupes endoscopiques,dont nous avons besoin.

2-1-Notations.

Si H est un groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$,on note H(F) l'ensemble de ses points rationnels sur F (F= $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour alléger les notations,on identifie souvent H avec $H(\mathbb{C})$;on le fera souvent sans commentaire. L'action de l'élément non trivial σ de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ sur $H(\mathbb{C})$ sera notée σ_H. On notera $\tilde{H}$ le groupe obtenu à partir de H par restriction des scalaires de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$. On identifie les groupes $\tilde{H}(\mathbb{C})$ et $H(\mathbb{C})\times H(\mathbb{C})$ avec l'action de σ donnée par $\sigma_{\tilde{H}}(x,y) = (\sigma_H(y),\sigma_H(x))$. Le groupe $H(\mathbb{C})$ s'identifie,alors,avec $\tilde{H}(\mathbb{R})$ par:$x \longmapsto (x,\sigma_H(x))$.On notera α_H (ou simplement α) le complexifié de σ_H,c'est un automorphisme rationnnel de $\tilde{H}$. Avec l'identification ci-dessus,on a $\alpha_H(x,y) = (y,x)$.

On notera H° la composante connexe de l'élément neutre d'un groupe algébrique H et S_o la composante connexe (pour la topologie ordinaire) de l'élément neutre d'un groupe de Lie réel S .

Si T est un tore complexe,on note X(T) le groupe de ses caractères rationnels et $X^{\vee}(T)$ le groupe de ses sous-groupes à un paramètre .

Si H est un groupe algébrique réductif complexe et T est un tore maximal de H,on note R(H,T) (resp. $R^{\vee}(H,T)$) le système de racines (resp. coracines) de T dans H .Si $\beta \in R(H,T)$ on note $\beta^{\vee}$ sa coracine .Si B est un sous-groupe complexe de H contenant T,on note R(B,T) le sous-ensemble de R(H,T) formé par les racines de T dans B .On note $\Omega(H,T)$ le groupe de Weyl de (H,T) .

On notera W le groupe de Weil de $\mathbb{R}$ .Comme ensemble on a $W = \mathbb{C} \times \Gamma$ avec la loi de groupe donnée par:

$(z_1,\tau_1)(z_2,\tau_2) = (a_{\tau_1\tau_2} z_1\tau_1(z_2),\tau_1\tau_2)$

où $a_{11} = a_{\sigma 1} = a_{1\sigma} = 1$, $a_{\sigma\sigma} = -1$ et $\sigma(z) = \bar{z}$.

2-2-L-groupes.

Dans toute la suite G désignera un groupe algébrique réductif connexe défini et quasi-déployé sur $\mathbb{R}$.

On fixe un sous-groupe de Borel B^* de G défini sur $\mathbb{R}$ et T^* un tore maximal dans B^* défini sur $\mathbb{R}$. On note Δ (resp. $\Delta^{\vee}$) la base de $R(G,T^*)$ (resp. $R^{\vee}(G,T^*)$) défini par B^*. On associe à (G,B^*,T^*) la donnée radicielle polarisée $\Psi = (X(T^*),\Delta,X^{\vee}(T^*),\Delta^{\vee})$. La donnée radicielle polarisée ${}^L\Psi = (X^{\vee}(T^*),\Delta^{\vee},X(T^*),\Delta)$ détermine de façon unique,à un isomorphisme près,un triplet $({}^LG°,{}^LB°,{}^LT°)$;on a $X({}^LT°) = X^{\vee}(T^*)$ et $X^{\vee}({}^LT°) = X(T^*)$ (voir par exemple [Spr]). Pour tout $\beta^{\vee}$ appartenant à $\Delta^{\vee}$,on fixe un vecteur radiciel non nul $X_{\beta^{\vee}}$ dans l'algèbre de Lie de ${}^LG°$. Il existe alors un unique automorphisme rationnel ${}^L\sigma_G$ de ${}^LG°$ tel que ${}^L\sigma_G.X_{\beta^{\vee}} = X_{\sigma_G.\beta^{\vee}}$ et induisant le même automorphisme que σ_G sur ${}^L\Psi$ (quand il n'y a pas de confusion à craindre on notera σ_G au lieu de ${}^L\sigma_G$). On réalise le L-groupe de G sur $\mathbb{R}$, qu'on notera ${}^LG$, comme le produit semi-direct ${}^LG° \times W$ où $\mathbb{C}^{\times} \times 1$ opère trivialement et $1 \times \sigma$ opère par ${}^L\sigma_G$.

On utilise $\tilde{B}^*$ et $\tilde{T}^*$ comme données de référence pour réaliser le L-groupe ${}^L\tilde{G}$ de $\tilde{G}$. On pose ${}^L\tilde{G}° = {}^LG° \times {}^LG°$, ${}^L\tilde{B}° = {}^LB° \times {}^LB°$ et ${}^L\tilde{T}° = {}^LT° \times {}^LT°$. Alors ${}^L\tilde{G} = {}^L\tilde{G}° \times W$ où $\mathbb{C}^{\times}$ opère trivialement et $1 \times \sigma$ opère par l'automophisme ${}^L\sigma_{\tilde{G}}:(x,y) \longmapsto ({}^L\sigma_G(y),{}^L\sigma_G(x))$. On notera ${}^L\alpha_G$ (ou simplement α) l'automorphisme de ${}^L\tilde{G}$: $(x,y) \times w \longmapsto (y,x) \times w$.

Si T est un tore maximal de G défini sur $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{A}(T)$ l'ensemble des éléments g de G tels que la restriction de $ad(g)$ à T soit défini sur $\mathbb{R}$. Une pseudo-diagonalisation (ou p-d pour abréger) η de T est une application de T dans T^* de la forme : $T \xrightarrow{ad(x)} T_o \xrightarrow{ad(m)} T^*$ où $x \in \mathcal{A}(T)$, $T_o = x\,T\,x^{-1}$ est standard (i.e. la composante, déployée sur $\mathbb{R}$, S_{T_o} de T_o est incluse dans T^*) et m appartient au sous-groupe de Lévi attaché à T_o (i.e. le centralisateur dans G de S_{T_o}). On note $\sigma_{T,\eta} = \eta \circ \sigma_T \circ \eta^{-1}$. On notera de la même façon les automorphismes qui en résultent sur $X(T^*)$, $X^V(T^*)$ et ${}^LT°$.

2-3-<u>Groupes endoscopiques pour $(\tilde{G},\alpha)$</u>.

Pour fixer les notations, nous allons rappeler brièvement la définition d'un groupe endoscopique pour $(\tilde{G},\alpha)$ de [S-1].

Soit $x \in {}^L\tilde{G}°$. On note $N(x) = x\alpha(x)$. On pose $\mathrm{Cent}_\alpha(x, {}^L\tilde{G}°) = \{\, g \in {}^L\tilde{G}° ;$ $g^{-1}x\alpha(g) = x \,\}$. On dit que x est α-semi-simple si $\mathrm{Cent}_\alpha(x, {}^L\tilde{G}°)$ est un sous-groupe réductif. Alors x est α-semi-simple si et seulement si $N(x)$ est semi-simple. On note $\tilde{Z}^W = {}^L\tilde{G}° \cap \mathrm{Centre}({}^L\tilde{G})$. Il est clair que le groupe $\mathrm{Cent}_\alpha(x, {}^L\tilde{G})$ ne dépend que de la classe de x modulo $\tilde{Z}^W$. Ceci permet de définir $\mathrm{Cent}_\alpha(s, {}^L\tilde{G})$ pour $s \in {}^L\tilde{G}/\tilde{Z}^W$.

On appelle donnée endoscopique pour $(\tilde{G},\alpha)$ toute collection :

$(s\ , {}^LH_s°\ , {}^LB_s°\ , {}^LT_s°\ , \{Y\}\ , \rho_s)$

où

(i) $s \in {}^L\tilde{G}° / \tilde{Z}^W$ est une classe formée d'éléments α-semi-simples.

(ii) ${}^LH_s° = \mathrm{Cent}_\alpha(s, {}^L\tilde{G}°)°$

(iii) ${}^LB_s°$ est un sous-groupe de Borel de ${}^LH_s°$.

(iv) ${}^LT_s°$ est un tore maximal dans ${}^LB_s°$.

(v) $\{Y\}$ est un ensemble de vecteurs radiciels non nuls dans l'algèbre de Lie de ${}^LH_s°$ correspondant aux racines simples de ${}^LT_s°$ dans ${}^LB_s°$.

(vi) $\rho_s : W \longrightarrow \mathrm{Aut}({}^LH_s°\ , {}^LB_s°\ , {}^LT_s°\ , \{Y\}\ )$ est un homomorphisme qui se factorise à travers Γ et tel que pour tout $w \in W$ on a $\rho_s(w) = ad\ n(w)\ |{}^LH_s°$ où $n(w)$ est un élément de ${}^L\tilde{G}^\circ \times w \cap \mathrm{Cent}_\alpha(s, {}^L\tilde{G})$.

A chaque donnée endoscopique on associe le L-groupe abstrait ${}^LH_s = {}^LH^\circ_s \times W$ où l'action de W dans ${}^LH^\circ_s$ est définie par ρ_s. On notera $\sigma_s = \rho_s(1 \times \sigma)$.

On dit que deux données endoscopiques $(s,\ldots)$ et $(s',\ldots)$ sont équivalents s'il existe un élément g de ${}^L\tilde{G}^\circ$ qui envoie $({}^LH^\circ_s, {}^LB^\circ_s, {}^LT^\circ_s, \{Y\})$ sur $({}^LH^\circ_{s'}, {}^LB^\circ_{s'}, {}^LT^\circ_{s'}, \{Y'\})$ et tel que, pour tout $w \in W$, si $n(w) \in \mathrm{Cent}_\alpha(s, {}^L\tilde{G})$ réalise $\rho_s(w)$ alors $g\, n(w)\, g^{-1} \in \mathrm{Cent}_\alpha(s', {}^L\tilde{G})$ et réalise $\rho_{s'}(w)$. Il est clair alors que ${}^LH_s$ et ${}^LH_{s'}$ sont isomorphes .

Un groupe algébrique réductif connexe défini et quasi-déployé sur $\mathbb{R}$ est dit groupe endoscopique pour $(\tilde{G}, \alpha)$ si son L-groupe est réalisé par un des groupes ${}^LH_s$.

<u>REMARQUE</u>: Pour chaque classe d'équivalence de données endoscopiques pour $(\tilde{G},\alpha)$, Shelstad [S-1] associe une classe de données endoscopiques pour G (voir [S-2]) qui définit le même L-groupe abstrait , de sorte qu'un groupe endoscopique pour $(\tilde{G},\alpha)$ est aussi un groupe endoscopique pour G [S-2] . Ceci est essentiel pour la définition des facteurs de transferts , mais nous n'avons pas besoin de l'expliciter .

Suivant la suggestion du rapporteur , on appelle *plongement permis* de ${}^LH_s$ dans ${}^L\tilde{G}$ ("allowed embedding" dans la terminologie de [S-1]) , un homomorphisme $\tilde{\xi} : {}^LH_s \longrightarrow {}^L\tilde{G}$ tel que:

(i) $\tilde{\xi}({}^LH^\circ_s \times w) \subset {}^L\tilde{G}^\circ \times w \quad , w \in W$

(ii) $\tilde{\xi}(h \times 1) = (h,h) \times 1 \quad , h \in {}^LH^\circ_s$

(iii) $\tilde{\xi}({}^LH_s) \subset \mathrm{Cent}_\alpha(s, {}^L\tilde{G})$.

Soit H un groupe endoscopique pour $(\tilde{G}, \alpha)$. On va fixer une réalisation ${}^LH_s$ du L-groupe de H qui sera commode pour la suite. Bien entendu quand on parle de ${}^LH_s$ on sous-entend la donnée endoscopique qui le définit. On utilisera fréquemment,sans commentaire,l'identification de ${}^LG$ avec son image dans ${}^L\tilde{G}$ par l'application : $g \times w \longmapsto (g,g) \times w$. Commençons par prendre un ${}^L H_s$ réalisant le L-groupe de H. Alors ,d'après le lemme 4-1 de [S-1] ,en conjuguant par un élément de ${}^L\tilde{G}^\circ$,on peut prendre s de la forme : $(x,1)\tilde{Z}^W$ où x est un élément semi-simple de ${}^L G^\circ$. Dans ce cas $\mathrm{Cent}_\alpha(s\ ,\ {}^L\tilde{G}^\circ) = \mathrm{Cent}(x\ ,{}^L G^\circ)$, ce dernier étant plongé de façon diagonale dans ${}^L\tilde{G}^\circ$;ceci nous permettra de voir ${}^L H_s^\circ$ comme un sous groupe de ${}^L G^\circ$. Donc ${}^L H_s^\circ$ a le même rang que ${}^L G^\circ$. On peut supposer ,alors,et on le fera, que x appartient à ${}^L T^\circ$ et que ${}^L T_s^\circ = {}^L T^\circ$. On supposera en plus que ${}^L H_s$ est en position standard [S-3] (i.e. il existe un tore maximal $\bar{T}$ de G défini sur $\mathbb{R}$ et une p-d η de $\bar{T}$ tels que $\sigma_{\bar{T},\eta}$ coincide avec σ_s sur ${}^L T^\circ$). Cette hypothèse est réalisé en conjugant par un élément convenable de la forme (g,g) où g appartient au normalisateur de ${}^L T^\circ$ dans ${}^L G^\circ$. Nous verrons plus bas son intérêt. En définitive , nous fixons pour toute la suite une réalisation ${}^L H_s$ du L-groupe de H telle que s soit de la forme $(x,1)\tilde{Z}^W$,x appartenant à ${}^L T^\circ$, ${}^L T^\circ_s = {}^L T^\circ$ et ${}^L H_s$ en position standard. Alors un plongement permis $\tilde{\xi} : {}^L H_s \longmapsto {}^L\tilde{G}$ est de la forme :

$\tilde{\xi}(h \times 1 \times 1) = (h\ ,\ h) \times 1 \times 1 \qquad , h \in {}^L H_s^\circ$.

$\tilde{\xi}(1 \times z \times 1) = (\tilde{\xi}_o(z)\ ,\ \tilde{\xi}_o(z)) \times z \times 1$.

$\tilde{\xi}(1 \times 1 \times \sigma) = (xm\ ,\ m) \times 1 \times \sigma$,

où $\tilde{\xi}_o : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathrm{Centre}({}^L H_s^\circ)$ est un homomorphisme vérifiant $\tilde{\xi}_o(\bar{z}) = \sigma_s(\tilde{\xi}_o(z))$ pour $z \in \mathbb{C}^\times$,m appartient au normalisateur de ${}^L T^\circ$ dans ${}^L G^\circ$, $xm\sigma_G(m) = \tilde{\xi}_o(-1)$ et la restriction de $\mathrm{ad}((xm,m) \times 1 \times \sigma)$ à ${}^L H_s^\circ$ coincide avec σ_s .

On note $\mathcal{T}_H(G)$ l'ensemble des couples (T,η) où T est un tore maximal de G défini sur $\mathbb{R}$ et η est une p-d de T tels que $\sigma_{T,\eta} \in \Omega({}^L H_s^\circ, {}^L T_s^\circ)\sigma_s$.

On fixe un sous-groupe de Borel B_H de H défini sur $\mathbb{R}$ et T_H un tore maximal de B_H défini sur $\mathbb{R}$ tels que la donnée radicielle polarisée associée à(H,B_H,T_H) soit duale de celle associée à $({}^L H_s^\circ, {}^L B_s^\circ, {}^L T_s^\circ)$, en particulier on a $X(T_H) = X^\vee({}^L T^\circ)$ et $X^\vee(T_H) = X({}^L T^\circ)$. Soit $(T,\eta) \in \mathcal{T}_H(G)$. Alors il existe un tore maximal T' de H défini sur $\mathbb{R}$ et $h \in H(\mathbb{C})$ tels que $hT'h^{-1} = T_H$ et la suite:

$$X(T') \xrightarrow{\mathrm{ad}(h)} X(T_H) = X^\vee({}^LT^\circ) = X(T^*) \xrightarrow{\eta^{-1}} X(T)$$

donne un isomorphisme $i(h,\eta) : T' \longrightarrow T$ défini sur $\mathbb{R}$. Inversement , si T' est un tore maximal de H défini sur $\mathbb{R}$, il existe $h \in H(\mathbb{C})$ et $(T,\eta) \in \mathcal{T}_H(G)$ tels que l'on ait un isomorphisme $i(h,\eta) : T' \longrightarrow T$ défini sur $\mathbb{R}$ (voir [S-3]). C'est ici qu'on utilise le fait que ${}^LH_s$ est en position standard. On dira qu'un élément semi-simple γ' de $H(\mathbb{R})$ provient de $\gamma \in G(\mathbb{R})$ ("originates from γ " dans la terminologie de [S-1]) si γ est l'image de γ' par une application $i(h,\eta)$. Si γ' est un élément régulier de $T'(\mathbb{R})$, on dira que γ' n'est pas une norme s'il n'est pas dans l'image de l'application norme de $\tilde{T}'(\mathbb{R})$ dans $T'(\mathbb{R})$ (i.e. l'application $\delta' \longmapsto \delta'\alpha(\delta')$) .

Soient $\tilde{\xi}$ un plongement permis de ${}^LH_s$ dans ${}^L\tilde{G}$ et ξ un plongement admissible de ${}^LH_s$ dans ${}^LG$ (içi on considère H comme un groupe endoscopique pour G, voir remarque ci-dessus). Alors il existe un 1-cocycle a de W dans Centre$({}^L\tilde{H}^\circ)$ tel que $\tilde{\xi}(h \times w) = a(w)\ \xi(h \times w)$. A ce cocycle on associe, pour tout $(T,\eta) \in \mathcal{T}_H(G)$ un quasi-caractère $a_{T,\eta}$ de $\tilde{T}(\mathbb{R})$ (voir [S-1]). Si $\Lambda_{T,\eta}$ est le quasi-caractère correctif associé à ξ [S-2] , le caractère : $\delta \longmapsto a_{T,\eta}(\delta)\ \Lambda_{T,\eta}(\delta\alpha(\delta))$ de $\tilde{T}(\mathbb{R})$ ne dépend que de $\tilde{\xi}$ ([S-1] , lemme 6-2). Nous le noterons $b_{T,\eta}$. Comme on va s'en servir dans la suite , on le décrit de façon explicite . On écrit $\tilde{\xi}(1 \times z \times 1) = (\tilde{\xi}_o(z),\tilde{\xi}_o(z)) \times z \times 1$. Alors il existe $\mu_* \in X^\vee({}^LT^\circ) \otimes \mathbb{C}$ tel que

$$\lambda^\vee(\tilde{\xi}_o(z)) = z^{\langle\mu_*,\lambda^\vee\rangle}\ \bar{z}^{\langle\sigma_s\mu_*,\lambda^\vee\rangle}$$ pour tout $z \in \mathbb{C}^\times$ et tout $\lambda^\vee \in X({}^LT^\circ)$. On rappelle que $X(T_H) = X^\vee({}^LT^\circ) = X(T^*)$. Ceci identifie $R(H,T_H)$ avec un sous-ensemble (mais pas un sous-système) de $R(G,T^*)$. On pose:

$$\iota_* = 1/2 \sum_{\substack{\beta \in R(B^*,T^*)\setminus R(H,T_H) \\ \sigma_{T,\eta}.\beta = -\beta}} \beta$$

Si $\lambda^\vee \otimes z \in X^\vee(T)\otimes \mathbb{C}$, on pose $\overline{\lambda^\vee \otimes z} = \lambda^\vee \otimes \bar{z}$. On identifie $X^\vee(T)\otimes \mathbb{C}$ avec l'algèbre de Lie de $T(\mathbb{C})$ et $T(\mathbb{C})$ avec $\tilde{T}(\mathbb{R})$. Alors

$$b_{T,\eta}(\exp X) = e^{(\mu_*-\iota_*)(\eta(X+\sigma_T\bar{X}))}$$ pour tout $X \in X^\vee(T)\otimes \mathbb{C}$.

On note $H^1(T) = H^1(\Gamma, T(\mathbb{C}))$. Chaque élément de $H^1(T)$ peut être représenté par un cocycle :

$$\sigma \longmapsto \exp(i\pi\lambda^\vee) \quad , \lambda^\vee \in X^\vee(T) \text{ et } \sigma_T.\lambda^\vee = -\lambda^\vee .$$
$$1 \longmapsto 1 .$$

On notera $\exp(i\pi\lambda^\vee)$ l'élément de $H^1(T)$ défini par ce cocycle .

Suivant Shelstad [S-1], on associe à s (fixé ci-dessus) et à tout (T,η) appartenant à $\mathcal{T}_H(G)$ un quasi-caractère de $H^1(T)$ de la façon suivante : un élément a de s est de la forme $a = (xz, {}^L\sigma_G(z))$ où z est un élément du centre de ${}^LG°$. Comme $xz\,{}^L\sigma_G(z)$ appartient à ${}^LT° = \mathrm{Hom}(X({}^LT°), \mathbb{C}^\times)$, il définit un quasi-caractère de $X({}^LT°)$. Du fait que $\sigma_s(x) = x$ on déduit que ce quasi-caractère est invariant par $\sigma_{T,\eta}$ pour tout $(T,\eta) \in \mathcal{T}_H(G)$. Par transfert via η on obtient un quasi-caractère de $X^\vee(T)$ invariant par σ_T. Quand z varie dans le centre de ${}^LG°$ ces quasi-caractères coincident sur $\{\lambda^\vee \in X^\vee(T); \sigma_T.\lambda^\vee = -\lambda^\vee\}$ et sur $X^\vee(T_{sc})$ le sous-$\mathbb{Z}$-module de $X^\vee(T)$ engendré par les coracines de T dans G. On obtient ainsi un quasi-caractère unique sur :

$$\{\lambda^\vee \in X^\vee(T) \; ; \sigma_T.\lambda^\vee = -\lambda^\vee\} \; / \; \{\mu^\vee - \sigma_T.\mu^\vee \; ; \; \mu^\vee \in X^\vee(T) \}$$

que nous noterons $\kappa_{T,\eta}$ (ou simplement κ si aucune confusion n'est à craindre), et donc, par la dualité de Tate-Nakayama, un quasi-caractère sur $H^1(T)$ que nous noterons de la même façon. On notera aussi $\kappa_{T,\eta}$ le quasi-caractère sur $X^\vee(T_{sc})$.

On aura besoin du lemme suivant ([S-1] , lemme 6-3) .

(2-3-1) <u>LEMME</u>: $\kappa_{T,\eta}(\exp i\pi\lambda^\vee) = b_{T,\eta}(\exp i\pi\lambda^\vee)$ <u>pour tout</u> $\lambda^\vee \in X^\vee(T)$ <u>tel que</u> $\sigma_T.\lambda^\vee = -\lambda^\vee$.

2-4-<u>Transfert d'intégrales orbitales</u>.

On utilise les notations de 2-3, en particulier H est un groupe endoscopique pour $(\tilde{G}, \alpha)$ et ${}^LH_s$ la réalisation fixée de son L-groupe.

Soit $(T,\eta) \in \mathcal{T}_H(G)$. On fixe un ensemble $\{u = \exp i\pi\lambda^\vee \; ; \; \lambda^\vee \in X^\vee(T)$ et $\sigma_T.\lambda^\vee = -\lambda^\vee \}$ tels que les cocycles $\sigma \longmapsto u$ forment un ensemble de représentants des éléments de $H^1(T)$. On fixe des mesures de Haar dt sur $T(\mathbb{R})$ et $d\tilde{g}$ sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$.

Soit $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. Pour $\delta \in \tilde{T}(\mathbb{R})$ tel que $\delta\alpha(\delta)$ est régulier , on pose :

$$\Phi_f^{(T,\alpha,\kappa)}(\delta,dt,d\tilde{g}) = \sum_u \kappa(u) \int_{\tilde{G}(\mathbb{R})/\ T(\mathbb{R})} f(\alpha(\tilde{g})u\delta\tilde{g}^{-1})\ d\tilde{g}/dt\ .$$

Içi $T(\mathbb{R})$ est considéré comme un sous-groupe de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ par l'identification de $\tilde{T}(\mathbb{R})$ avec $T(\mathbb{C})$.

On fixe un plongement permis $\tilde{\xi}$ de ${}^LH_s$ dans ${}^L\tilde{G}$. D'après Shelstad [S-1],il existe un quasi-caractère χ de $H(\mathbb{R})$ tel que $|\chi(\gamma')\ b_{T,\eta}(\delta)| = 1$ si γ' provient de $\delta\alpha(\delta)$ via (T,η). On note $\mathcal{S}_{\tilde{\xi}}(H(\mathbb{R}))$ l'espace des fonctions f sur $H(\mathbb{R})$ tels que $f\chi$ appartient à l'espace de Harish-Chandra-Schwartz de $H(\mathbb{R})$. Si T' est un tore maximal de H défini sur $\mathbb{R}$,on note dt' la mesure de Haar sur $T'(\mathbb{R})$ image inverse par $i(h,\eta)$ de la mesure dt. Elle ne dépend pas du choix de h. Soit $f \in \mathcal{S}_{\tilde{\xi}}(H(\mathbb{R}))$. Si γ' est un élément régulier de $T'(\mathbb{R})$,on note $\Phi_f^{(T',1)}(\gamma',dt',dh)$ l'intégrale orbitale stable de f (voir ,par exemple,[S-2]).

Soit $(T,\eta) \in \mathcal{T}_H(G)$. Soit $\beta \in R(G,T)$,on note $\beta > 0$ si $\eta.\beta$ appartient à $R(B^*,T^*)$. Soit $\gamma \in T$. On pose :

$$'\Delta_{T,\eta}(\gamma) = \prod_{\substack{\beta > 0 \\ \sigma_T.\beta = -\beta \\ \kappa(\beta^\vee) \neq 1}} (1 - \beta(\gamma^{-1})) \prod_{\substack{\beta > 0 \\ \sigma_T.\beta \neq -\beta \\ \kappa(\beta^\vee) \neq 1}} |1 - \beta(\gamma)|^{1/2}\ |1 - \beta(\gamma^{-1})|^{1/2}.$$

Dans [S-2] ,Shelstad définit un entier $q(G,H)$ et pour tout $(T,\eta) \in \mathcal{T}_H(G)$ un signe $\varepsilon(T,\eta)$ de sorte qu'on ait :

(2-4-1) <u>PROPOSITION</u> ([S-1], théorème 7-1). <u>Soient H un groupe endoscopique pour</u> $(\tilde{G},\alpha)$, ${}^LH_s$ <u>le L-groupe fixé dans 2-3</u> ,$\tilde{\xi}$ <u>un plongement permis de</u> ${}^LH_s$ <u>dans</u> ${}^L\tilde{G}$ <u>et</u> ξ <u>un plongement admissible de</u> ${}^LH_s$ <u>dans</u> ${}^LG$. <u>Alors</u> ,<u>pour tout</u> $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, <u>il existe</u> $f_H \in \mathcal{S}_{\tilde{\xi}}(H(\mathbb{R}))$ <u>tel que</u> :

$$\Phi_{f_H}^{(T',1)}(\gamma',dt',dh) = \begin{cases} (-1)^{q(G,H)}\varepsilon(T,\eta)\ b_{T,\eta}(\delta)\ {}'\Delta_{T,\eta}(\delta\alpha(\delta))\ \Phi_f^{(T,\alpha,\kappa)}(\delta,dt,d\tilde{g}) \\ \qquad \text{si } \gamma' \text{ provient de } \delta\alpha(\delta) \text{ via } (T,\eta) \in \mathcal{T}_H(G) \\ 0 \ \text{ si } \gamma' \text{ n'est pas une norme ,} \end{cases}$$

<u>où</u> γ' <u>est un élément de</u> $T'(\mathbb{R})$ <u>qui provient d'un élément régulier de</u> $G(\mathbb{R})$.

2-5-Transfert d'intégrales orbites et composantes de Lévi.

Soit H un groupe endoscopique pour $(\tilde{G},\alpha)$. On fixe ${}^{L}H_{s}$ comme en 2-3. Soit $(T,\eta) \in \mathcal{T}_{H}(G)$. On note $M = M_{T}$. Suivant [S-3] ,on va réaliser le L-groupe de M comme un sous-groupe de ${}^{L}G$. On écrit $\eta : T \xrightarrow{ad(x_1)^{-1}} T_1 \xrightarrow{ad(m_1)^{-1}} T^*$ avec T_1 standard et on supposera que $x_1 \in G(\mathbb{R})$. Alors les L-groupes de M et de $M_1 = M_{T_1}$ sont canoniquement isomorphes. On travaillera ,donc , avec M_1 à la place de M. Comme T^* est inclus dans M_1 ,on prend pour données de référence ,pour réaliser le L-groupe de M_1 ,T^* et $B^* \cap M_1$. On note ${}^{L}M^{\circ}$ le sous-groupe de ${}^{L}G^{\circ}$ engendré par ${}^{L}T^{\circ}$ et par les coracines des racines de T^* dans M_1. Il est stable par ${}^{L}\sigma_{G}$. On pose ${}^{L}M = {}^{L}M^{\circ} \times W$ où $\mathbb{C}^{\times} \times 1$ opère trivialement et $1 \times \sigma$ opère par ${}^{L}\sigma_{G}$. Pour voir que ${}^{L}M$ est une réalisation du L-groupe de M_1 ,il suffit de pouvoir choisir , pour toute racine simple $\beta^{\vee}$ du système $R({}^{L}B^{\circ} \cap {}^{L}M^{\circ}, {}^{L}T^{\circ})$,un vecteur radiciel $Y_{\beta^{\vee}}$ de sorte que ${}^{L}\sigma_{G}.Y_{\beta^{\vee}} = Y_{\sigma_{G}.\beta^{\vee}}$. Ceci découle du fait que ${}^{L}M^{\circ}$ est une composante de Lévi d'un sous-groupe parabolique (pas unique) ${}^{L}P^{\circ}$ de ${}^{L}G^{\circ}$ stable par ${}^{L}\sigma_{G}$,et du lemme 2-6 de [L]. On supposera dans la suite que (T,η) vérifie :

(*) $\quad \sigma_{s} = \omega\, \sigma_{T,\eta}$ pour $\omega \in \Omega({}^{L}M^{\circ} \cap {}^{L}H^{\circ}_{s}\, , {}^{L}T^{\circ})$.

On va construire un sous-groupe M' de H qui soit un groupe endoscopique pour $(\tilde{M},\alpha)$. On pose $({}^{L}M')^{\circ} = {}^{L}M^{\circ} \cap {}^{L}H^{\circ}_{s}$ (qui est connexe). D'après (*) ,$({}^{L}M')^{\circ}$ est stable par σ_{s}. On pose ${}^{L}M' = ({}^{L}M')^{\circ} \times W$ où $\mathbb{C}^{\times} \times 1$ opère trivialement et $1 \times \sigma$ opère par σ_{s}. Le groupe ${}^{L}P^{\circ} \cap {}^{L}H^{\circ}_{s}$ est un sous-groupe parabolique de ${}^{L}H^{\circ}$ dont $({}^{L}M')^{\circ}$ est une composante de Lévi ;il découle de (*) qu'il est stable par σ_{s}. Invoquant de nouveau le lemme 2-6 de [L] ,on voit facilement que ${}^{L}M'$ est un L-groupe et que c'est une réalisation du L-groupe du sous-groupe M' ,défini sur $\mathbb{R}$,de H engendré par T_H et par le sous-système de racines de $R(H,T_H)$ formé par les racines dont les coracines sont dans $R(({}^{L}M')^{\circ}, {}^{L}T^{\circ})$. Il est clair , d'après (*) ,qu'il existe $m' \in M'$ tel que ,posant $T' = (m')^{-1}.T_{H}.m'$, l'application $i(m',\eta) : T' \longrightarrow T$ est défini sur $\mathbb{R}$ et $M' = M_{T'}$.

On construit ,comme en 2-2 ,le groupe ${}^{L}\tilde{M}$ qu'on regardera comme un sous-groupe de ${}^{L}\tilde{G}$. On note $\tilde{Z}^{W}_{M} = {}^{L}\tilde{M}^{\circ} \cap \mathrm{Centre}({}^{L}\tilde{M})$. Il est clair qu'il contient $\tilde{Z}^{W}$.

On note $s^M = s\tilde{Z}^W_M$. Alors $\mathrm{Cent}_\alpha(s^M, {}^L\tilde{M})^\circ = ({}^LM')^\circ$ où ce dernier est considéré comme un sous-groupe de ${}^L\tilde{M}^\circ$ plongé de façon diagonale. Il n'est pas difficile de voir qu'on peut trouver une donnée endoscopique $(s^M,\ldots)$ pour $(\tilde{M},\alpha)$ dont ${}^LM'$ soit le L-groupe associé. Donc M' est un groupe endoscopique pour $(\tilde{M},\alpha)$. Un argument standard montre ,d'après $(*)$,que $\bar{T}$ est inclus dans M_1 ,donc ${}^LM'$ est en position standard. Si $\tilde{\xi}$ est un plongement permis de ${}^LH_s$ dans ${}^L\tilde{G}$,sa restriction à ${}^LM'$ est un plongement permis de ${}^LM'$ dans ${}^L\tilde{M}$ qu'on notera $\tilde{\xi}^M$.

Soient $(U,\eta_U) \in \mathcal{T}_H(G)$ et κ le quasi-caractère qui lui est associé. Suivant shelstad [S-2] ,on dit que (U,η_U) est subordonné à M si U est inclus dans M et η_U est de la forme $\mathrm{ad}(x_1 m)$,$m \in M_1$. Alors $(U,\eta_U) \in \mathcal{T}_{M'}(M)$. Le quasi-caractère κ^M de $\{\lambda^\vee \in X^\vee(U)\ ;\ \sigma_U.\lambda^\vee = -\lambda^\vee\}/\{\mu^\vee - \sigma_U.\mu^\vee ; \mu^\vee \in X^\vee(U)\}$ associé à s^M et (U,η_U) coincide avec κ. Réciproquement si $(U,\eta_U) \in \mathcal{T}_{M'}(M)$,alors comme élément de $\mathcal{T}_H(G)$, (U,η_U) est subordonné à M.

On fixe un sous-groupe parabolique P de G défini sur $\mathbb{R}$ et contenant M comme composante de Lévi. On note N son radical unipotent. Les groupes $\tilde{M}$, $\tilde{P}$ et $\tilde{N}$ s'identifient de façon canonique à des sous-groupes de $\tilde{G}$. On fixe un sous-groupes compact maximal K de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ tel que $\tilde{G}(\mathbb{R}) = K\tilde{P}(\mathbb{R})$. On note $\tilde{\underline{n}}$ l'algèbre de Lie de $\tilde{N}$. On fixe des mesures de Haar dk et $d\tilde{n}$ respectivement sur K et $\tilde{N}(\mathbb{R})$. On note $d\tilde{m}$ l'unique mesure de Haar sur $\tilde{M}(\mathbb{R})$ telle que ,pour toute fonction continue à support compact f sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$, on ait :

$$\int_{\tilde{G}(\mathbb{R})} f(\tilde{g})\, d\tilde{g} = \int_{\tilde{M}(\mathbb{R})} \int_{\tilde{N}(\mathbb{R})} \int_K f(k\tilde{n}\tilde{m})\, dk\, d\tilde{n}\, d\tilde{m} .$$

Si $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$,on définit $f^{\tilde{M}} \in C_c^\infty(\tilde{M}(\mathbb{R}))$ par :

$$f^{\tilde{M}}(\tilde{m}) = |\det(\alpha \circ \mathrm{ad}(\tilde{m}))_{\tilde{\underline{n}}}|^{1/2} \int_{\tilde{N}(\mathbb{R})} \int_K f(\alpha(k)\tilde{m}\tilde{n}k^{-1})\, dk\, d\tilde{n} .$$

Soit (U,η_U) subordonné à M. Pour $\delta \in \tilde{U}(\mathbb{R})$ tel que $\delta\alpha(\delta)$est régulier (dans $\tilde{G}(\mathbb{R})$) , on vérifie facilement que :

$$\Phi_f^{(U,\alpha,\kappa)}(\delta,du\, d\tilde{g}) = \prod_{\beta \in R(N,U)} |1-\beta(\delta\alpha(\delta))|^{-1/2} |1-\beta((\delta\alpha(\delta))^{-1})|^{-1/2} \times \Phi_{f^{\tilde{M}}}^{(U,\alpha,\kappa)}(\delta,du,d\tilde{m}) ,$$

où $\Phi_{f^{\tilde{M}}}^{(U,\alpha,\kappa)}(\delta,du,d\tilde{m})$ est défini de façon évidente.

Prenons un système de racines positives $R^+(G,U)$ dans $R(G,U)$. Alors on voit facilement que :

$$\prod_{\beta \in R(N,U)} |1-\beta(\delta\alpha(\delta))|^{1/2}|1-\beta((\delta\alpha(\delta))^{-1})|^{1/2} = \prod_{\substack{\beta \in R^+(G,U) \\ \beta \notin R(M,U)}} |1-\beta(\delta\alpha(\delta))|^{1/2}|1-\beta((\delta\alpha(\delta))^{-1})|^{1/2} .$$

Soit $\varphi \in \mathcal{S}_\xi(H)$. On définit de façon analogue à ci-dessus une fonction $\varphi^{M'} \in \mathcal{S}_{\tilde{\xi}^M}(M')$ (voir [S-2]) de telle sorte que , pour tout tore maximal U' de M' défini sur $\mathbb{R}$ et tout élément régulier $\gamma' \in U'(\mathbb{R})$,on ait :

$$\Phi_\varphi^{(U',1)}(\gamma',du',dh) = \prod_{\substack{\beta' \in R^+(H,U') \\ \beta' \notin R(M',U')}} |1-\beta'(\gamma')|^{-1/2}|1-\beta'(\gamma'^{-1})|^{-1/2} \times \Phi_{\varphi^{M'}}^{(U',1)}(\gamma',du',dm') .$$

où $R^+(H,U')$ est un système de racines positives quelconque dans $R(H,U')$.

Soit (U,η_U) subordonné à M. On pose :

$$\epsilon^M(U,\eta_U) = (-1)^{q(G,H) - q(M,M')}\, \epsilon(U,\eta_U) .$$

$$b^M_{U,\eta_U}(\delta) = b_{U,\eta_U}(\delta) \ , \ \delta \in \tilde{U}(\mathbb{R}) .$$

On note $R^+(M,U) = \eta_U^{-1}(\ R(B^*\cap M_1\ ,T^*))$ et, pour $\gamma \in U$, on pose :

$$'\Delta^M_{U,\eta_U}(\gamma) = \prod_{\substack{\beta \in R^+(M,U) \\ \sigma_U.\beta = -\beta \\ \kappa(\beta^\vee) \neq 1}} (1 - \beta(\gamma^{-1}) \prod_{\substack{\beta \in R^+(M,U) \\ \sigma_U.\beta \neq -\beta \\ \kappa(\beta^\vee) \neq 1}} |1 - \beta(\gamma)|^{1/2}|1 - \beta(\gamma^{-1})|^{1/2}.$$

Signalons que si $(T,\eta) \in \mathcal{T}_H(G)$ et $i(h,\eta) : T' \longrightarrow T$ est défini sur $\mathbb{R}$ où T' est un tore maximal de H défini sur $\mathbb{R}$, alors $i(h,\eta)$ envoie $R(H,T')$ sur le sous-ensemble des racines $\beta \in R(G,T)$ tels que $\kappa(\beta^\vee) = 1$.

Avec les définitions ci-dessus , la proposition suivante est immédiate .

(2-5-1) <u>PROPOSITION</u>: <u>Soit</u> $\varphi \in C_c^\infty(\tilde{M}(\mathbb{R}))$. <u>Alors il existe</u> $\varphi_{M'} \in \mathcal{S}_{\tilde{\xi}^M}(M'(\mathbb{R}))$ <u>telle que</u> :

$$\Phi_{\varphi_{M'}}^{(U',1)}(\gamma',du',dm') = \begin{cases} (-1)^{q(M,M')}\, \varepsilon^{M}(U,\eta_U)\, b^{M}_{U,\eta_U}(\delta)\; '\Delta^{M}_{U,\,U}(\delta\alpha(\delta)) \times \\ \Phi_{\varphi}^{(U,\alpha,\kappa)}(\delta,d\tilde{u},dm) \ \ \text{si } \gamma' \text{ provient de } \delta\alpha(\delta) \text{ via } (U,\eta_U) \text{ s bordonné à } M, \\ 0 \ \text{si } \gamma' \text{ n'est pas une norme} . \end{cases}$$

où γ' *est un élément de* $U'(\mathbb{R})$ *qui provient d'un élément régulier de* $H(\mathbb{R})$. *En particulier si* $\varphi = f^{\tilde{M}}$ *pour* $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, *on peut prendre* $\varphi_{M'} = (f_H)^{M'}$ *où* f_H *est la fonction donnée par la proposition* (2-4-1) .

3-RELÈVEMENT DES DISTRIBUTIONS.

3-1-Définition du relèvement.

On utilise les notations de 2-3 . Soit H un groupe endoscopique pour $(\tilde{G},\alpha)$. On fixe un plongement permis $\tilde{\xi}$ de ${}^LH_s$ dans ${}^L\tilde{G}$. Rappelons qu'il existe un quasi-caractère χ de $H(\mathbb{R})$ tel que $f \in \mathscr{S}_{\tilde{\xi}}(H(\mathbb{R}))$ si et seulement si χf appartient à l'espace de Harish-Chandra-Schwartz de $H(\mathbb{R})$. Une forme linéaire Θ sur $\mathscr{S}_{\tilde{\xi}}(H(\mathbb{R}))$ sera dite une distribution essentiellement tempérée si et seulement si $\chi^{-1}\Theta$ est une distribution tempérée sur $H(\mathbb{R})$. Soit Θ une distribution essentiellement tempérée sur $H(\mathbb{R})$ stablement invariante (voir [S-4]). Si φ appartient à $\mathscr{S}_{\tilde{\xi}}(H(\mathbb{R}))$, $\Theta(\varphi)$ ne dépend que des intégrales orbitales stables de φ , donc si $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, $\Theta(f_H)$ ne dépend pas du choix de la fonction f_H vérifiant la proposition (2-4-1). On définit le relèvement de Θ à $\tilde{G}(\mathbb{R})$,qu'on note $\mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\,\Theta$, par :

$$\mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\,\Theta\ (f) = \Theta\ (f_H)\ .$$

C'est une forme linéaire sur $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ stable par α-conjugaison. Elle est continue ;ceci découle aisément du théorème de Banach-Steinhaus .

Soit $(T,\eta) \in \mathscr{T}_H(G)$. On utilise les notations de 2-4. L'application $f \longmapsto f^{\tilde{M}}$ de $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ dans $C_c^\infty(\tilde{M}(\mathbb{R}))$ définit par dualité une application de l'espace des distributions invariantes par α-conjugaison sur $\tilde{M}(\mathbb{R})$ dans l'espace des distributions invariantes par α-conjugaison sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$ que nous noterons $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$.

De même on définit une application de l'espace des distributions essentiellement temperées stablement invariantes sur $M'(\mathbb{R})$ dans celles sur $H(\mathbb{R})$ que nous noterons $\tau^{H}_{M'}$. Alors le lemme suivant est une conséquence directe de la proposition (2-5-1) .

(3-1-1) <u>LEMME</u>: <u>Soit Θ une distribution essentiellement tempérée stablement invariante sur</u> $M'(\mathbb{R})$. <u>Alors on a</u>:

$\mathrm{Lift}^{\tilde{G}}_{H}\, \tau^{H}_{M'}\, \Theta = \tau^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}\, \mathrm{Lift}^{\tilde{M}}_{M'}\, \Theta$.

3-2-<u>Relèvement et action du centre de l'algèbre enveloppante</u>.

Si S est un groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$, on note $\underline{s}$ l'algèbre de Lie de $S(\mathbb{C})$, $\underline{s}_{\mathbb{R}}$ l'algèbre de Lie de $S(\mathbb{R})$ et $\tilde{\underline{s}}$ l'algèbre de Lie de $\tilde{S}$. La différentielle de σ_S définit une involution de l'algèbre de Lie (réelle) $\underline{s}$, que nous noterons σ, de sorte que $\underline{s}_{\mathbb{R}}$ soit l'espace des points fixes de σ. Avec les identifications faites en 2-1 ,nous avons $\tilde{\underline{s}} = \underline{s} \times \underline{s}$ et la différentielle de $\sigma_{\tilde{S}}$, que nous noterons $\tilde{\sigma}$, est donnée par $\tilde{\sigma}.(X,Y) = (\sigma.Y,\sigma.X)$. L'algèbre de Lie $\underline{s}$ s'identifie, comme algèbre de Lie réelle , à l'espace des points fixes de $\tilde{\sigma}$. La complexifiée de $\underline{s}$ s'identifie canoniquement avec $\tilde{\underline{s}}$, celle de $\underline{s}_{\mathbb{R}}$ avec la diagonale de $\underline{s} \times \underline{s}$ et la complexifiée de σ , qu'on notera α , s'identifie avec: $(X,Y)\longmapsto(Y,X)$. On notera $U(\underline{s})$ l'algèbre enveloppante de $\underline{s}$ et $Z(\underline{s})$ le centre de $U(\underline{s})$. Alors $U(\tilde{\underline{s}})$ s'identifie avec $U(\underline{s})\otimes_{\mathbb{C}}U(\underline{s})$ et $Z(\tilde{\underline{s}})$ avec $Z(\underline{s})\otimes_{\mathbb{C}}Z(\underline{s})$. Si $\underline{t}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\underline{s}$ et T est le sous-groupe de Cartan correspondant on note $\gamma_{\underline{s}/\underline{t}}$ (ou simplement γ quand il n'y a pas de confusion à craindre) l'isomorphisme de Harish-Chandra de $Z(\underline{s})$ dans $U(\underline{t})^{\Omega(G,T)}$. On note $N_{\underline{s}}$ l'homomorphisme d'algèbres de $Z(\tilde{\underline{s}})$ dans $Z(\underline{s})$ défini par $N_{\underline{s}}(z_1 \otimes z_2) = z_1 z_2$.

On va définir un homomorphisme de $Z(\underline{g})$ dans $Z(\underline{h})$. On note $\underline{t}^*$ l'algèbre de Lie de T^* qui s'identifie avec $X^{\vee}(T^*) \otimes \mathbb{C}$. Rappelons que , si $\tilde{\xi}$ est un plongement permis de ${}^{L}H_{s}$ dans ${}^{L}\tilde{G}$, on a associé à $\tilde{\xi}$ en 2-3 un élément μ_* de

$X^\vee({}^L T^\circ) \otimes \mathbb{C}$. Il s'identifie canoniquement à une forme linéaire sur $\underline{t}^*$. L'algèbre de Lie $\underline{t}_H$ de T_H s'identifie à $\underline{t}^*$ par l'égalité $X^\vee(T^*) = X^\vee(T_H)$. On note I_{μ_*} l'isomorphisme d'algèbres de $U(\underline{t}_H)$ défini par $I_{\mu_*}(Y) = Y + \mu_*(Y)$; $Y \in \underline{t}_H$. Comme $\langle \mu_*, \beta^\vee \rangle = 0$ pour tout $\beta \in R(H,T_H)$, I_{μ_*} induit un isomorphisme de $U(\underline{t}_H)^{\Omega(H,T_H)}$. On pose $\mu_{\underline{g}/\underline{h}} = \gamma^{-1}_{\underline{h}/\underline{t}_H} \circ I_{\mu_*} \circ \gamma_{\underline{g}/\underline{t}^*}$. C'est un homomorphisme d'algèbres de $Z(\underline{g})$ dans $Z(\underline{h})$. On notera $\tilde{\mu}_{\underline{g}/\underline{h}} = \mu_{\underline{g}/\underline{h}} \circ N_{\underline{g}}$.

(3-2-1) <u>LEMME</u>: <u>Soit Θ une distribution essentiellement tempérée stablement invariante sur</u> $H(\mathbb{R})$. <u>Alors si</u> $z \in Z(\tilde{\underline{g}})$, <u>on a</u> :

$z.\mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\, \Theta = \mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\, \tilde{\mu}_{\underline{g}/\underline{h}}(z).\Theta$.

La démonstration de ce lemme est analogue à celle du lemme 4-2-1 de [S-2] .

3-3-<u>Relèvement des distributions Z(h)-finies</u>.

Soit Θ une distribution essentiellement tempérée sur $H(\mathbb{R})$ stablement invariante et $Z(\underline{h})$-finie. D'après un résultat classique de Harish-Chandra, Θ est une fonction localement sommable analytique sur $H(\mathbb{R})_{reg}$ (l'ensemble des éléments réguliers de $H(\mathbb{R})$). Il est clair que $Z(h)$ est une algèbre de type fini sur $\tilde{\mu}_{\underline{g}/\underline{h}}(Z(\tilde{\underline{g}}))$. On déduit alors , du lemme (3-2-1) et du théorème (2-1-1) de [B], que $\mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\, \Theta$ est une fonction localement sommable analytique sur l'ensemble des éléments α-réguliers de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ (un élément g de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ est dit α-régulier si $\mathrm{Cent}_\alpha(g,\tilde{G})^\circ$ est un tore). On notera $\tilde{G}(\mathbb{R})_{\alpha\text{-reg}}$ l'ensemble des éléments α-réguliers de $\tilde{G}(\mathbb{R})$. Tout élément de $\tilde{G}(\mathbb{R})_{\alpha\text{-reg}}$ est α-conjugué à un élément d'un $\tilde{T}(\mathbb{R})$ où T est un tore maximal de G défini sur $\mathbb{R}$ (voir [C] , chapitre 2). Le but de ce paragraphe est de calculer $\mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\, \Theta$ sur $\tilde{G}(\mathbb{R})_{\alpha\text{-reg}}$ en fonction de Θ.

Soit T un tore maximal de G défini sur $\mathbb{R}$. Soient ${}^1T',\ldots,{}^rT'$ des représentants des classes de conjugaison sous $H(\mathbb{R})$ de tores maximaux de H définis sur $\mathbb{R}$ "provenant" de T , i.e. les tores T' tels qu'il existe $i(h,\eta)$: $T' \longrightarrow T$ définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $1 \leq \nu \leq r$, on fixe $(T,\eta_\nu) \in \mathcal{T}_H(G)$ et $h_\nu \in H$ tels que $i_\nu = i(h_\nu,\eta_\nu) : {}^\nu T' \longrightarrow T$ soit définie sur $\mathbb{R}$. On note κ_ν le quasi-caractère associé à s et (T,η_ν) en 2-3. L'ensemble des racines $\beta \in R(G,T)$ tels que $\kappa_\nu(\beta^V) = 1$ s'identifie ,par i_ν , avec $R(H,{}^\nu T')$ et le sous-groupe , du groupe de Weyl $\Omega(G,T)$, engendré par ces racines ,qu'on notera $\Omega^{\kappa_\nu}(G,T)$, s'identifie avec $\Omega(H,{}^\nu T')$. Rappelons que $\Omega(G,T)$ opère dans T de telle sorte que $\omega.\lambda(\omega.\gamma) = \lambda(\gamma)$, $\lambda \in X(T)$. On note $\Omega_o(G,T)$ le sous-groupe de $\Omega(G,T)$ qui laisse stable $T(\mathbb{R})$ et $\Omega_o^{\kappa_\nu}(G,T) = \Omega^{\kappa_\nu}(G,T) \cap \Omega_o(G,T)$. A chaque élèment ω de $\Omega_o(G,T)$ on associe un élément de $H^1(T)$, qu'on note de la même façon , comme suit : on choisit g appartenant au normalisateur de T dans G qui représente ω , alors la classe du cocycle $\{1 \longmapsto 1 , \sigma \longmapsto \sigma(g^{-1})g \}$ ne dépend que de ω ; c'est la classe associé à ω .

On pose $n(T) = 1/2 \mid \{ \beta \in R(G,T) \ ; \ \sigma_T.\beta = -\beta$ et $\kappa_\nu(\beta^V) \neq 1 \} \mid$.

(3-3-1) <u>LEMME</u>: <u>Soit</u> $\delta \in \tilde{T}(\mathbb{R}) \cap \tilde{G}(\mathbb{R})_{\alpha-reg}$. <u>Alors</u>

$$\mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\,\Theta\,(\delta) = (-1)^{q(G,H)+n(T)} \sum_{\nu=1}^{r} \varepsilon(T,\eta_\nu) \sum_{\omega \in \Omega_o(G,T)/\Omega_o^{\kappa_\nu}(G,T)} \kappa_\nu(\omega) \times$$

$$b_{T,\eta_\nu}(\omega^{-1}.\delta)({}'\Delta^{-1}_{T,\eta_\nu}(\Theta_\circ i_\nu^{-1}))(\omega^{-1}.(\delta\alpha(\delta))) \ .$$

La démonstration est analogue à celle du lemme 4-2-4 de [S-2], comme le suggère la discussion de la page 415 de [S-1].

4-<u>RELÈVEMENT DES CARACTÈRES</u>.

4-1-<u>Caractères tordus de $\tilde{G}(\mathbb{R})$</u>.

Soit Π une représentation unitaire irréductible de $\tilde{G}(\mathbb{R})$. On dit que Π est α-stable si la représentation ${}^\alpha\Pi$, définie par ${}^\alpha\Pi(g) = \Pi(\alpha(g))$ pour tout $g \in \tilde{G}(\mathbb{R})$, est équivalente à Π. Si tel est le cas , il existe un opérateur involutif A_α ,unique au signe près , dans l'espace de Π tel que

$^{\alpha}\Pi(g) = A_{\alpha}\, \Pi(g)\, A_{\alpha}$, $g \in \tilde{G}(\mathbb{R})$.

Le caractère tordu associé à un choix de A_{α} est la distribution :

$f \longmapsto \mathrm{tr}(\, \Pi(f)_{\circ}\, A_{\alpha}\,)$, $f \in C_c^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$.

Le but de ce paragraphe est de fixer un choix de A_{α} pour les représentations tempérées de $\tilde{G}(\mathbb{R})$. Ces représentations sont bien connues ; elles sont toutes obtenues de la façon suivante. Soient S un tore maximal de $\tilde{G}$ défini sur $\mathbb{R}$, χ un caractère (unitaire) de $S(\mathbb{R})$, B un sous-groupe de Borel de $\tilde{G}$ défini sur $\mathbb{R}$ et contenant S. On note N le radical unipotent de B. On pose

$\Pi^{\tilde{G}}(\chi) = \mathrm{Ind}_{S(\mathbb{R})N(\mathbb{R})}^{\tilde{G}(\mathbb{R})}\ \chi \otimes 1_{N(\mathbb{R})}$.

C'est une représentation irréductible tempérée de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ et on obtient ainsi toutes les représentations irréductibles tempérées , à équivalence près , de $\tilde{G}(\mathbb{R})$. On a omis B et S dans la notation car la représentation $\Pi^{\tilde{G}}(\chi)$ ne dépend pas du choix de B quant à S il est sous-entendu par χ. Quand il n'y a pas de confusion à craindre on note $\Pi(\chi)$ à la place de $\Pi^{\tilde{G}}(\chi)$. Deux représentations $\Pi(\chi)$ et $\Pi(\chi')$ sont équivalentes si et seulement si χ et χ' sont conjugués par $\tilde{G}(\mathbb{R})$ (i.e. il existe $g \in \tilde{G}(\mathbb{R})$ tel que $g.S.g^{-1} = S'$ et $\chi'(s') = \chi(g^{-1}.s.g)$). On note $^{\alpha}\chi$ le caractère du tore $\alpha(S(\mathbb{R}))$ défini par $^{\alpha}\chi(\alpha(s)) = \chi(s)$, $s \in S(\mathbb{R})$. Supposons que Π est α-stable. Alors χ et $^{\alpha}\chi$ sont conjugués par $\tilde{G}(\mathbb{R})$. Puisque G est quasi-déployé , on peut choisir un conjugué χ' de χ tel que $^{\alpha}\chi' = \chi'$; ceci se démontre de la même façon que le théorème 4-1 de [K] , nous omettons les détails car la paramétrisation de Langlands nous fournit un tel χ' (voir 4-2). Donc toute représentation irréductible tempérée α-stable de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ est de la forme $\Pi(\chi)$ où $^{\alpha}\chi = \chi$ et $\alpha(S) = S$. On fixe une telle représentation. On note S_a la composante anisotrope de S. Alors $S_a(\mathbb{R})$ est un tore compact maximal de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ stable par α. On note χ_a la restriction de χ à $S_a(\mathbb{R})$. Soit K un sous-groupe compact maximal de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ contenant $S_a(\mathbb{R})$ et stable par α. Alors χ_a est un poids extrémal du K-type minimal de $\Pi(\chi)$. On fixe A_{α} de telle sorte qu'il induise l'identité sur cet espace poids. On note $A_{\alpha}^{\tilde{G}}(\chi)$ cet opérateur. Le lemme suivant montre qu'il ne dépend pas du choix de K.

(4-1-1) LEMME: Soient K et K' deux sous-groupes compacts maximaux contenant $S_a(\mathbb{R})$ et stables par α. Alors il existe g appartenant à $S(\mathbb{R})^{\alpha}$ tel que $gKg^{-1} = K'$ (où $S(\mathbb{R})^{\alpha}$ désigne l'ensemble des points fixes par α de $S(\mathbb{R})$).

DÉMONSTRATION: Soit $x \in \tilde{G}(\mathbb{R})$ tel que $xKx^{-1} = K'$. Alors il existe $k' \in K'$ tel que $ad(k'x)$ envoie K sur K' et laisse $S_a(\mathbb{R})$ stable. Quitte à remplacer k' par un autre élément de K' , on peut supposer que $ad(k'x)$ centralise $S_a(\mathbb{R})$. Dans ce cas $y = k'x$ appartient à $S(\mathbb{R})$. Le fait que K et K' soient α-stables implique que $y^{-1}\alpha(y)$ appartient à K , donc c'est un élément de $S_a(\mathbb{R})$. Notons S_d la composante déployée de S. Alors $S_a(\mathbb{R}) \cap S_d(\mathbb{R})_\circ = \{ 1 \}$ et $S(\mathbb{R}) = S_a(\mathbb{R}).S_d(\mathbb{R})_\circ$. On écrit $y = uv$ suivant cette décomposition. Il est alors clair que $\alpha(v) = v$ et $vKv^{-1} = K'$, d'où le lemme.

Soit P un sous-groupe parabolique de $\tilde{G}$ défini sur $\mathbb{R}$, contenant S et stable par α. On note N le radical unipotent de P et $\tilde{M}$ la composante de Lévi de P contenant S; ils sont définis sur $\mathbb{R}$ et stables par α. Alors les représentations $\Pi^{\tilde{M}}(\chi)$ et $\Pi^{\tilde{G}}(\chi)$ sont définies et on a :

$$\Pi^{\tilde{G}}(\chi) = \mathrm{Ind}_{\tilde{M}(\mathbb{R})\,N(\mathbb{R})}^{\tilde{G}(\mathbb{R})} \Pi^{\tilde{M}}(\chi) \otimes 1_{N(\mathbb{R})} .$$

Cette représentation est réalisée dans un espace de fonctions sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$ à valeurs dans l'espace de $\Pi^{\tilde{M}}(\chi)$. On vérifie facilement,comme dans ([B-2] , p.551), que :

(4-1-2) $(A_\alpha^{\tilde{G}}(\chi).\varphi)(g) = A_\alpha^{\tilde{M}}(\chi).\varphi(\alpha(g))$.

4-2-Relèvement des caractères (résultat principal).

Soit H un groupe endoscopique pour $(\tilde{G},\alpha)$. On adopte les notations de 2-3. Soit $\tilde{\xi}$ un plongement permis de ${}^{L}H_s$ dans ${}^{L}\tilde{G}$. On a vu en 2-3 que $\tilde{\xi}$ est de la forme :

$\tilde{\xi}(h \times 1 \times 1) = (h\ ,\ h) \times 1 \times 1 \quad , h \in \tilde{H}^\circ_s$.

$\tilde{\xi}(1 \times z \times 1) = (\tilde{\xi}_o(z)\ ,\ \tilde{\xi}_o(z)) \times z \times 1 \quad , z \in \mathbb{C}^\times$.

$\tilde{\xi}(1 \times 1 \times \sigma) = (xm_o\ ,\ m_o) \times 1 \times \sigma$,

où $\tilde{\xi}_o$ est un homomorphisme de $\mathbb{C}^\times$ dans Centre$({}^LH_s)$ vérifiant $\tilde{\xi}_o(\bar{z}) = \sigma_s(\tilde{\xi}_o(z))$, $z \in \mathbb{C}^\times$, m_o est un élément du normalisateur de ${}^LT^\circ$ dans ${}^LG^\circ$ tel que $xm_o\sigma_G(m_o)= \tilde{\xi}_o(-1)$, $x^{-1}m_o\sigma_G(x) = m_o$ et la restriction de $ad(m_o) \circ {}^L\sigma_G$ à ${}^LH^\circ_s$ coincide avec σ_s .

Soit φ un homomorphisme admissible de W dans ${}^LH_s$ (voir [L]). On pose $\tilde{\varphi} = \tilde{\xi} \circ \varphi$. C'est un homomorphisme admissible de W dans ${}^L\tilde{G}$. Comme on s'interesse à φ et $\tilde{\varphi}$ seulement à travers les L-paquets de représentations qui leurs sont associés,on peut les remplacer par des conjugués respectivement par ${}^LH^\circ_s$ et ${}^L\tilde{G}^\circ$. Rappelons que φ se factorise à travers un sous-groupe de Lévi de ${}^LH_s$ (voir [Bor])et qu'un sous-groupe de Lévi minimal parmi ceux qui contiennent $\varphi(W)$ est conjugué à un des sous-groupes ${}^LM_{T'}$ (voir 2-4) où T' est un tore maximal de H défini sur $\mathbb{R}$ tel que $S_{T'} \subseteq T_H$. Quitte à remplacer φ , par un conjugué par ${}^LH^\circ_s$, on supposera dans la suite que $\varphi(W)$ est inclus dans un ${}^LM_{T'}$ (comme ci-dessus) , qu'il n'est contenu dans aucun sous-groupe de Lévi propre de ${}^LM_{T'}$ et qu'il normalise ${}^LT^\circ$. Alors φ est de la forme :

$\varphi(z \times 1) = \varphi_o(z) \times z \times 1 \qquad , z \in \mathbb{C}^\times$.

$\varphi(1 \times \sigma) = n_H \times 1 \times \sigma$,

où φ_o est un homomorphisme de $\mathbb{C}^\times$ dans ${}^LT^\circ$ tel que $\varphi_o(\bar{z}) = ad(\varphi(1 \times \sigma)).\varphi(z)_o$, $z \in \mathbb{C}^\times$ et $n_H\sigma_s(n_H) = \varphi_o(-1)$. Notons $\bar{\sigma}$ la restriction de $ad(\varphi(1 \times \sigma))$ à ${}^LT^\circ$ ainsi que l'involution qui s'en déduit sur $X^V({}^LT^\circ)$. Utilisant les notations usuelles on pose $\varphi_o(z) = z^\mu\, \bar{z}^{\bar{\sigma}.\mu}$, $\mu \in X^V({}^LT^\circ) \otimes \mathbb{C}$. Donc

$\tilde{\varphi}(z \times 1) = (\tilde{\varphi}_o(z)\ ,\ \tilde{\varphi}_o(z)) \times z \times 1 \qquad , z \in \mathbb{C}^\times$,

$\tilde{\varphi}(1 \times \sigma) = (xn_Hm_o\ ,\ n_Hm_o) \times 1 \times \sigma$,

où $\tilde{\varphi}_o(z) = \varphi_o(z)\tilde{\xi}_o(z)\ ,\ z \in \mathbb{C}^\times$.

Supposons que $\tilde{\varphi}(W)$ est borné. Alors la représentation de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ associée à $\tilde{\varphi}$ est tempérée. Nous allons la décrire en fonction des paramètres de 4-1. Soit

$(T,\eta) \in \mathcal{T}_H(G)$ tel que $\sigma_{T,\eta} = \bar{\sigma}$. On identifie $\tilde{T}$ avec un sous-groupe de $\tilde{G}$. Soit $\delta \in \tilde{T}(\mathbb{R})$. Alors il s'ecrit $\delta = (\exp.Y\ ,\ \exp.\sigma_T\bar{Y})$ où Y est un élément de $\underline{t}$. On pose $\chi_{\tilde{\varphi}}(\delta) = e^{(\mu + \mu_*)(\eta(Y + \sigma_T.\bar{Y}))}$. C'est un caractère unitaire α-stable de $\tilde{T}(\mathbb{R})$. La représentation $\Pi_{\tilde{\varphi}}$ de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ associée à $\tilde{\varphi}$ est $\Pi(\chi_{\tilde{\varphi}})$. Le caractère $\chi_{\tilde{\varphi}}$ ne dépend pas seulement de $\tilde{\varphi}$, il dépend aussi de η. On note $\Sigma_o = \eta^{-1}(R(B^*,T^*))$. Soit $\omega_o \in \Omega(M,T)$ tel que $\langle \omega_o.\eta^{-1}(\mu + \mu_*)\ ,\ \beta^{\vee} \rangle \geq 0$ pour tout $\beta \in \Sigma_o \cap R(M,T)$. On pose $n(\omega_o) = |\{ \beta \in \Sigma_o \cap R(M,T)\ ;\ \omega_o.\beta \in -\Sigma_o$ et $\kappa_{T,\eta}(\beta^{\vee}) \neq 1 \}|$. Il est clair que $n(\omega_o)$ ne dépend pas de η ; le théorème ci-dessous montre qu'il ne dépend pas du choix de ω_o. On pose $A^{\tilde{G}}_{\tilde{\varphi}} = (-1)^{n(\omega_o)}\ \varepsilon^M(T,\eta)\ A^{\tilde{G}}_{\alpha}(\chi_{\tilde{\varphi}})$ où M désigne M_T. Le théorème ci-dessous montre que $A^{\tilde{G}}_{\tilde{\varphi}}$ ne dépend pas de η. On note ${}^{\alpha}\Theta_{\tilde{\varphi}}$ le caractère tordu de $\Pi_{\tilde{\varphi}}$ associé au choix de $A_{\alpha} = A^{\tilde{G}}_{\tilde{\varphi}}$. On note Θ_{φ} le caractère du L-paquet de représentations de $H(\mathbb{R})$ associé à φ. Le résultat principal de cet article est

(4-2-1) <u>THÉORÈME</u>: <u>Utilisant les notations ci-dessus on a</u>:

$$\mathrm{Lift}^{\tilde{G}}_H\ \Theta_{\varphi} = {}^{\alpha}\Theta_{\tilde{\varphi}}$$

<u>DÉMONSTRATION</u>: Nous ferons la démonstration en trois étapes.

<u>Première étape</u>: Nous supposons que T est anisotrope modulo le centre de G et $\langle \mu + \mu_*\ ,\ \beta^{\vee} \rangle \neq 0$ pour tout $\beta \in R(G,T^*)$. Alors M = G et $\sigma_{T,\eta}.\beta = -\beta$ pour tout $\beta \in R(G,T^*)$. Soit $m' \in M_T$, tel que $ad(m').T' = T_H$. Alors $\sigma_{T',m'} = \bar{\sigma} = \sigma_{T,\eta}$. On en déduit que T' est anisotrope modulo le centre de H , et, donc M' = H . Le L-paquet de représentations de $H(\mathbb{R})$ associé à φ est alors formé par les représentations de carré intégrable modulo le centre de $H(\mathbb{R})$ dont le caractère infinitésimal est : $z \longmapsto \gamma_{\underline{h}/\underline{t}_H}(z)(\mu)$, $z \in Z(\underline{h})$ et ayant même caractère central. Notons Z_H le centre de H. Soit K_H un sous-groupe compact maximal de $H(\mathbb{R})$. On pose $q_H = 1/2 \dim(H(\mathbb{R}) / K_H Z_H(\mathbb{R}))$. On note $\mu' = ad(m'^{-1}).\mu$ et Σ' le sous-système de racines positives de $R(H,T')$ formé par les racines β telles que $\langle \mu',\beta^{\vee} \rangle < 0$. Alors la formule du caractère de la série discrète de

Harish-Chandra donne , pour $Y \in \underline{t}'_{\mathbb{R}}$ tel que $\exp(Y) \in H(\mathbb{R})_{reg}$,

$$(4\text{-}2\text{-}2) \qquad \Theta_{\varphi}(\exp Y) = (-1)^{q_H} \sum_{\omega \in \Omega(H,T')} \frac{e^{\omega.(\mu' + \iota_H)(Y)}}{\prod_{\beta \in \Sigma'} (1 - e^{\omega.\beta(Y)})}.$$

où $\iota_H(Y) = 1/2 \sum_{\beta \in \Sigma'} \beta$.

D'après le théorème 2-1-1 de [B-1] , ${}^{\alpha}\Theta_{\tilde{\varphi}}$ est une fonction localement sommable analytique sur $\tilde{G}(\mathbb{R})_{\alpha\text{-reg}}$. On va la calculer sur l'ensemble des éléments α-réguliers de $\tilde{T}(\mathbb{R})$. Pour celà on utilise les résultats de [B-1]. On introduit le groupe $\tilde{G}(\mathbb{R}) \times \{1,\alpha\}$ que nous noterons ${}^{\alpha}\tilde{G}(\mathbb{R})$. On prolonge $\Pi_{\tilde{\varphi}}$ en une représentation de ${}^{\alpha}\tilde{G}(\mathbb{R})$,en faisant agir $1 \times \alpha$ par $A^{\tilde{G}}_{\tilde{\varphi}}$, qu'on notera aussi $\Pi_{\tilde{\varphi}}$. Cherchons les paramètres de Duflo [D] de cette représentation. On pose $\underline{q} = \{Y \in \underline{\tilde{g}} \ ; \ \alpha(Y) = -Y\}$ et $if_o = 2\eta^{-1}.(\mu + \mu_*)$ où f_o est une forme linéaire sur $\underline{t}_{\mathbb{R}}$ qu'on regarde comme une forme linéaire sur $\underline{\tilde{g}}_{\mathbb{R}}$ nulle sur $\underline{\tilde{t}}_{\mathbb{R}} \cap \underline{q} \oplus [\underline{\tilde{t}}_{\mathbb{R}} , \underline{\tilde{g}}_{\mathbb{R}}]$. On note ${}^{\alpha}\tilde{G}(\mathbb{R})(f_o)$ le centralisateur de f_o dans ${}^{\alpha}\tilde{G}(\mathbb{R})$ qui est égal à $\tilde{T}(\mathbb{R}) \times \{1 ,\alpha\}$ puisque f_o est régulier , ${}^{\alpha}\tilde{G}(\mathbb{R})(f_o)\hat{}$ son revêtement d'ordre deux défini par Duflo [D] et ε l'elément non trivial du noyau de la projection de ${}^{\alpha}\tilde{G}(\mathbb{R})(f_o)\hat{}$ sur ${}^{\alpha}\tilde{G}(\mathbb{R})(f_o)$. On pose $\Sigma = \omega_o^{-1}.\Sigma_o$ et $\iota_{\Sigma} = 1/2 \sum_{\beta \in \Sigma} \beta$. On note $\underline{u}$ le sous-espace de $\underline{g}$ somme des sous-espaces radiciels correspondants aux racines β telles que $-\beta \in \Sigma$. Alors $\underline{\tilde{t}} \oplus \underline{\tilde{u}}$ est une polarisation en f_o totalement complexe et α-stable dans la terminologie de [D]. Soit $\rho_{\underline{\tilde{u}}}$ le caractère de ${}^{\alpha}\tilde{G}(\mathbb{R})(f_o)\hat{}$ associé à $\underline{\tilde{u}}$ [D]. On choisit un élément $\alpha\hat{}$ dans ${}^{\alpha}\tilde{G}(\mathbb{R})(f_o)\hat{}$ qui se projette sur $1 \times \alpha$. On pose

$$\tau_o(\alpha\hat{}\,) = \varepsilon(T,\eta)\ (-1)^{q_G + \dim \underline{u} + n(\omega_o)}\ \rho_{\underline{\tilde{u}}}(\alpha\hat{}\,)^{-1},$$

où q_G est défini de la même façon que q_H.

Il existe un caractère τ_o de ${}^{\alpha}\tilde{G}(\mathbb{R})(f_o)\hat{}$ de différentielle if_o tel que $\tau_o(\varepsilon) = -1$ et $\tau_o(\alpha\hat{}\,)$ défini par la formule ci-dessus (voir [B-1] , p.75). On note $\Pi(f_o,\tau_o)$

la représentation de ${}^{\alpha}\widetilde{G}(\mathbb{R})$ associée à (f_o,τ_o) par Duflo [D]. Alors un calcul facile utilisant la proposition de [B-2] (ou plutôt sa démonstration) montre que $\Pi_{\widetilde{\varphi}}$ est équivalente à $\Pi(f_o,\tau_o)$. Comme T est anisotrope modulo le centre de G, on a $\Omega_o(G,T) = \Omega(G,T)$. Pour tout $\omega \in \Omega(G,T)$, on choisit un représentant g_ω de ω dans le normalisateur de $\widetilde{T}(\mathbb{R})$ dans $\widetilde{G}(\mathbb{R})$ de telle sorte que $\alpha(g_\omega^{-1})g_\omega$ appartienne à $T(\mathbb{R})_o$. On choisit pour tout $\omega \in \Omega(G,T)$, un élément Y_ω de $\underline{t}_{\mathbb{R}}$ tel que $\exp.Y_\omega = \alpha(g_\omega^{-1})g_\omega$. Pour tout $Y \in \underline{t}_{\mathbb{R}}$ tel que $\exp.Y \in \widetilde{G}(\mathbb{R})_{\alpha-reg}$, la proposition 6-1-2 de [B-1] et un calcul simple donnent :

(4-2-3) $\quad {}^{\alpha}\Theta_{\widetilde{\varphi}}(\exp.Y) =$

$$\varepsilon(T,\eta)\ (-1)^{q_G + n(\omega_o)} \sum_{\omega \in \Omega(G,T)} \frac{e^{(if_o - 2\iota_\Sigma)(Y_\omega + \omega^{-1}.Y)}}{\prod_{\beta \in \Sigma} (1 - e^{-\beta(2\omega^{-1}.Y)})} .$$

On va calculer le terme $c(\omega) = e^{(if_o - 2\iota_\Sigma)(Y_\omega)}$. Rappelons que $if_o = 2\,\eta^{-1}(\mu + \mu_*)$. Alors $(if_o - 2\iota_\Sigma)(Y_\omega) = (\eta^{-1}(\mu + \mu_*) - \iota_\Sigma)(Y_\omega + \sigma_T\bar{Y}_\omega)$. On écrit $\iota_\Sigma = \iota'_H + \iota_*$ où $\iota'_H = 1/2 \sum_{\substack{\beta \in \Sigma \\ \kappa_{T,\eta}(\beta^\vee) = 1}} \beta$ et $\iota_* = 1/2 \sum_{\substack{\beta \in \Sigma \\ \kappa_{T,\eta}(\beta^\vee) \neq 1}} \beta$. Alors on déduit du lemme(2-3-1) que $c(\omega) = \kappa_{T,\eta}(\omega)\ e^{(\eta^{-1}.\mu - \iota'_H)(Y_\omega + \sigma_T\bar{Y}_\omega)}$; le choix du système de racines positives diffère de celui utilisé dans le lemme(2-3-1), mais ceci n'a pas d'importance puisque $\exp(Y_\omega + \sigma_T\bar{Y}_\omega) = 1$. Le terme $e^{(\eta^{-1}.\mu - \iota'_H)(Y_\omega + \sigma_T\bar{Y}_\omega)}$ est égal à un, ceci se déduit aisément du fait que $\exp(Y_\omega + \sigma_T\bar{Y}_\omega) = 1$ et du fait que : $\exp(Y') \longmapsto e^{(\mu' - \iota_H)(Y')}$, $Y' \in \underline{t}'_{\mathbb{R}}$, est un caractère de $T'(\mathbb{R})_o$. Donc $c(\omega) = \kappa_{T,\eta}(\omega)$.

Des définitions de $n(\omega_o)$ et de $b_{T,\eta}$ on déduit :

$$\frac{e^{(\eta^{-1}.\mu_* - \iota_*)(2\omega^{-1}.Y)}}{\prod_{\substack{\beta \in \Sigma \\ \kappa_{T,\eta}(\beta^\vee) \neq 1}} (1 - e^{-\beta(2\omega^{-1}.Y)})} = (-1)^{n(\omega_o)}\ b_{T,\eta}(\exp.\omega^{-1}Y)\ {}'\Delta_{T,\eta}^{-1}(\exp.2\omega^{-1}Y).$$

Rappelons (voir [S-2],proposition 3-7-1) que $n(T) = q(G,H) + q_G - q_H$. On déduit alors de (4-2-2) , (4-2-3) et du lemme (3-3-1) que :

(4-2-4) $\mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\, \Theta_\varphi\, (\exp.Y) = {}^\alpha\Theta_{\tilde{\varphi}}(\exp.Y)$, $Y \in \underline{t}_{\mathbb{R}}$ et $\exp.Y \in \tilde{G}(\mathbb{R})_{\alpha\text{-reg}}$.

On notera $\Theta = \mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\, \Theta_\varphi - {}^\alpha\Theta_{\tilde{\varphi}}$. Nous allons montrer que Θ est nulle. On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des $Y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ tels que la partie imaginaire de toute valeur propre de $ad(Y)$ soit de module strictement inférieur à $\pi/2$ et $\mathcal{V} = \exp \mathcal{U}$. Alors un argument dû à Clozel ([C], p.108) montre qu'il suffit de prouver que la restriction de Θ à $\mathcal{V}$, qu'on notera $\mathrm{Res}.\Theta$, est nulle (pour la définition de la restriction de Θ voir ,par exemple , [C] ou [B-1]). Pour ceci on va se servir du théorème d'unicité de Harish-Chandra (voir , par exemple , [V] , II, p.68).

On définit la fonction D_G sur G par :

$\det(T + 1 - ad(g)) = D_G(g)\, T^{r(G)} \bmod(T^{r(G)\,+\,1})$,

où r(G) est le rang de G.

On définit de la même façon D_H sur H et on défiinit la fonction ${}^\alpha D_{\tilde{G}}$ sur $\tilde{G}$ par

$\det(T + 1 - \alpha_\circ ad(g)) = {}^\alpha D_{\tilde{G}}\,(g)\, T^{r(G)} \bmod(T^{r(G)\,+\,1})$

Pour $g \in G(\mathbb{R})$, on pose $\nu_\alpha(g) = \det(1 + ad(g))_{\underline{q}}$. Alors on voit facilement que ${}^\alpha D_{\tilde{G}}(g) = \nu_\alpha(g)\, D_G(g)$ pour tout $g \in G(\mathbb{R})$. D'après le théorème 3-1-1 de [B-1] , il existe une constante C telle que :

(4-2-5) $\qquad |{}^\alpha D_{\tilde{G}}(g)|^{1/2}\, |{}^\alpha\Theta_{\tilde{\varphi}}(g)|^{1/2} \leq C$,pour tout $g \in \tilde{G}(\mathbb{R})_{\alpha\text{-reg}}$.

Rappelons le quasi-caractère χ de $H(\mathbb{R})$ introduit en 2-3. Alors il est facile de voir que $\chi^{-1}\Theta_\varphi$ est tempérée ; comme le caractère infinitésimal de Θ_φ est régulier il existe une constante C' telle que :

(4-2-6) $\qquad |D_H(h)|^{1/2}\, |\chi^{-1}\Theta_\varphi(h)| \leq C'$,pour tout $h \in H(\mathbb{R})_{reg}$.

On déduit aisément de (4-2-6) et du lemme (3-3-1) qu'il existe une constante C" telle que :

(4-2-7) $\qquad |{}^\alpha D_{\tilde{G}}(g)|^{1/2}\, |\mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\, \Theta_\varphi\, (g)| \leq C''$,pour tout $g \in \tilde{G}(\mathbb{R})_{\alpha\text{-reg}}$.

On pose $\theta = \nu_\alpha \mathrm{Res}.\Theta$. Alors on déduit de (4-2-5) et (4-2-7) ,qu'il existe une constante C"' telle que :

(4-2-8) $|D_G(g)|^{1/2}\ |\theta(g)| \leq C'''$,pour tout $g \in G(\mathbb{R})_{reg} \cap \mathcal{V}$.

(Remarquons que si $g \in G(\mathbb{R})_{reg} \cap \mathcal{V}$, alors g est α-régulier (voir [C])).

Soit τ le caractère de $Z(\underline{g})$ défini par : $z \longmapsto \gamma_{\underline{g}/\underline{t}^*}(2(\mu + \mu_*))$. Alors on déduit du lemme (3-2-1) et du corollaire 2-4-12 de [B-1] que :

$z.\theta = \tau(z).\theta$ pour tout $z \in Z(\underline{g})$.

Comme $\eta^{-1}.(\mu + \mu_*)$ est régulier et elliptique [V] , ceci avec (4-2-8) et (4-2-4) permettent d'utiliser le théorème d'unicité de Harish-Chandra. Donc θ est nulle. Comme ν_α ne s'annule pas sur $G(\mathbb{R})_{reg} \cap \mathcal{V}$,Res.Θ est nulle sur $\mathcal{V}$. Donc Θ est nulle ; ceci termine la démonstration de la première étape.

<u>Deuxième</u> <u>étape</u>: Nous supposerons que T est anisotrope modulo le centre de G , mais nous supprimons l'hypothèse de régularité de $\mu + \mu_*$. Alors M = G , M' = H. $\sigma_{T,\eta} = \bar{\sigma}$ et $\bar{\sigma}.\beta = -\beta$ pour tout $\beta \in R(G,T^*)$. Rappelons le système de racines positives Σ dans R(G,T). On note V l'espace de la représentation de dimension finie de G de plus bas poids (relativement à Σ) $-2\iota_\Sigma$.On note Θ_V son caractère.

On pose $\varphi_o^\Sigma = z^{(\mu + 2\iota_\Sigma)}\ \bar{z}^{(\bar{\sigma}.\mu - 2\iota_\Sigma)}$,$z \in \mathbb{C}^\times$. Alors il est facile de voir que φ^Σ définie par :

$\varphi^\Sigma(z \times 1) = \varphi_o^\Sigma(z) \times z \times 1$, $z \in \mathbb{C}^\times$.

$\varphi^\Sigma(1 \times \sigma) = n_H \times 1 \times \sigma$.

est un homomorphisme admissible de W dans ${}^L H_s$ qui ne se factorise à travers aucun sous-groupe de Lévi propre. On note $\tilde{\varphi}^\Sigma = \tilde{\xi} \circ \varphi^\Sigma$. Comme $\eta^{-1}(\mu + \mu_*) + 2\iota_\Sigma$ est régulier , le théorème est démontré dans la première étape pour φ^Σ et $\tilde{\varphi}^\Sigma$. On note $\mathcal{H}$ l'espace de $\Pi_{\tilde{\varphi}^\Sigma}$ et A_α l'opérateur involutif dans $\mathcal{H} \otimes V \otimes V$ défini par

$A_\alpha(h \otimes v \otimes w) = A^{\tilde{G}}_{\tilde{\varphi}^\Sigma}.h \otimes w \otimes v$,$h \in \mathcal{H}$,$v,w \in V$.

Notons ${}^\alpha\Theta$ le caractère tordu par A_α de la représentation de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{H} \otimes V \otimes V$. Alors on a

(4-2-9) ${}^{\alpha}\Theta(g) = {}^{\alpha}\Theta_{\tilde{\wp}^{\Sigma}}(g)\ \Theta_V(g\alpha(g))$, $g \in \tilde{G}(\mathbb{R})_{\alpha\text{-reg}}$.

On fixe un sous-groupe compact maximal K de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ contenant $\tilde{T}_a(\mathbb{R})$ et stable par α. On note $\mathcal{H}^f$ le sous-espace des vecteurs K-finis de $\mathcal{H}$. Soit $Z(\tilde{\underline{g}})^{\alpha}$ la sous-algèbre des éléments fixés par α de $Z(\tilde{\underline{g}})$. Alors pour tout caractère τ de $Z(\tilde{\underline{g}})^{\alpha}$, on note $(\mathcal{H}^f \otimes V \otimes V)_{\tau}$ le sous-espace de $\mathcal{H}^f \otimes V \otimes V$ dans lequel le noyau de τ (dans $Z(\tilde{\underline{g}})^{\alpha}$) opère de façon localement nilpotente. Alors $\mathcal{H}^f \otimes V \otimes V$ est somme finie de sous-espaces de cette forme , tous stables par K, $\tilde{\underline{g}}$ et A_{α}. Si on note ${}^{\alpha}\Theta_{\tau}$ le caractère tordu par la restriction de A_{α} de $(\mathcal{H}^f \otimes V \otimes V)_{\tau}$, on a ${}^{\alpha}\Theta = \sum_{\tau} {}^{\alpha}\Theta_{\tau}$. On note $\tau_{\tilde{\wp}}$ le caractère de $Z(\tilde{\underline{g}})$ (ou sa restriction à $Z(\tilde{\underline{g}})^{\alpha}$) associé à $(\mu + \mu_*\ , \mu + \mu_*)$ via l'isomorphisme $\gamma_{\tilde{\underline{g}}/\tilde{\underline{t}}^*}$. Alors il est bien connu que $(\mathcal{H}^f \otimes V \otimes V)_{\tau_{\tilde{\wp}}}$ est isomorphe , en tant que $(\tilde{\underline{g}}\ , K)$, à l'espace des vecteurs K-finis de la représentation $\Pi_{\tilde{\wp}}$. La démonstration de la proposition de [B-2] montre , qu'avec cet isomorphisme , la restriction de A_{α} à $(\mathcal{H}^f \otimes V \otimes V)_{\tau_{\tilde{\wp}}}$ s'identifie avec $A^{\tilde{G}}_{\tilde{\wp}}$. Donc

(4-2-10) $({}^{\alpha}\Theta)_{\tau_{\tilde{\wp}}} = {}^{\alpha}\Theta_{\tilde{\wp}}$.

La représentation V définit un caractère (virtuel) V' de H (ce résultat est implicite dans ([S-1],4-4-1),voir aussi ([A-J],proposition 6-4)) de la façon suivante. Les poids de T' dans V' sont les poids de T dans V qu'on transporte à T' via $i(m',\eta)$. Alors il est facile de voir que V' existe et que si on se donne deux tores $\bar{T}$ et $\bar{T}'$ définis sur $\mathbb{R}$ respectivement dans G et H et $\bar{i} = \bar{i}(\bar{h},\bar{\eta}) : \bar{T}' \longrightarrow \bar{T}$, alors $\Theta_V(\gamma) = \Theta_{V'}(\bar{i}^{-1}(\gamma))$, pour tout $\gamma \in \bar{T}$, où $\Theta_{V'}$ désigne le caractère de V'. On déduit alors du lemme (3-3-1) que

$$\mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\,(\Theta_{\wp^{\Sigma}}\,\Theta_{V'})(g) = \mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\,\Theta_{\wp^{\Sigma}}(g)\ \Theta_V(g\alpha(g))\ ,\ g \in \tilde{G}(\mathbb{R})_{\alpha\text{-reg}}.$$

Utilisant la première étape de la démonstration du théorème et (4-2-9) , on obtient :

(4-2-11) $\quad \mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}} (\theta_{\varphi^\Sigma}\, \theta_{V'}) = {}^{\alpha}\theta.$

On décompose $\theta_{\varphi^\Sigma}\, \theta_{V'}$ en somme de distributions vecteurs propres de $Z(\underline{h})$. Soit τ_φ le caractère de $Z(\underline{h})$ associé à μ via l'isomorphisme $\gamma_{\underline{h}/\underline{t}_H}$. Il est bien connu que $(\theta_{\varphi^\Sigma}\, \theta_{V'})_{\tau_\varphi} = \theta_\varphi$. Compte tenu du lemme (3-2-1) et des formules (4-2-10) et (4-2-11) plus un argument standard , on déduit :

$\mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\, \theta_\varphi = {}^{\alpha}\theta_{\tilde{\varphi}}$,

ce qui termine la démonstration du théorème pour cette étape .

<u>Troixième</u> <u>étape</u>: On ne fait plus aucune hypothèse particulière. On note $\theta_\varphi^{M'}$ le caractère du L-paquet de représentations de M' associé à φ et ${}^{\alpha}\theta_{\tilde{\varphi}}^{\tilde{M}}$ le caractère tordu par $(-1)^{n(\omega_o)} \varepsilon^M(T,\eta)\, A_\alpha^{\tilde{M}}(x_{\tilde{\varphi}})$ de la représentation de $\tilde{M}$ associée à $\tilde{\varphi}$. Alors, compte tenu de (4-1-2) et utilisant les notations de 3-1 , on a ${}^{\alpha}\theta_{\tilde{\varphi}} = \tau_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}\, ({}^{\alpha}\theta_{\tilde{\varphi}}^{\tilde{M}})$ (voir [B-1] ,§-7). De même on a $\theta_\varphi = \tau_{M'}^{H}\, (\theta_\varphi^{M'})$. Le théorème découle alors des deux premières étapes et du lemme (3-1-1). Ceci termine la démonstration du théorème.

<u>REMARQUE</u>: Quand H = G , le théorème (4-2-1) est une reformulation du résultat principal de [C].

5-<u>TRANSFERT D'INTÉGRALES ORBITALES DE FONCTIONS K-FINIES</u>.

On reprend les notations de 2-3. On fixe K (resp. K_H) un sous-groupe compact maximal de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ (resp. $H(\mathbb{R})$). On note $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$ qui sont K-finies par translations à droite et à gauche. La notation $C_c^\infty(H(\mathbb{R}) ,K_H)$ a la signification évidente. Le but de ce paragraphe est de montrer :

(5-1) <u>THÉORÈME</u>: <u>Avec les notations de la proposition</u> (2-3-1) , <u>si f est dans</u> $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)$ <u>on peut choisir</u> f_H <u>dans</u> $C_c^\infty(H(\mathbb{R}),K_H)$.

DÉMONSTRATION: Ce théorème découle de la proposition (2-4-1) , du théorème (4-2-1) et du théorème de Paley-Wiener de [C-D]. Ce type d'argument a été utilisé par L. Clozel pour la démonstration d'un résultat analogue dans le cas de la L-indiscernabilité (voir [C-D] ,Appendice). Pour détailler l'argument dans la situation présente , nous commençons par introduire quelques notations. On fixe T'_j $(j=1\ldots r)$ un ensemble de représentants,à conjugaison près sous $H(\mathbb{R})$,des tores maximaux définis sur $\mathbb{R}$ de H. On note $M'_j = M_{T'_j}$ et on fixe un sous-groupe parabolique P'_j de H défini sur $\mathbb{R}$ dont M'_j est une composante de Lévi; on note N'_j le radical unipotent de P'_j de sorte que $P'_j = M'_j N'_j$. Tout sous-groupe parabolique cuspidal de $H(\mathbb{R})$ est conjugué sous $H(\mathbb{R})$ à l'un des $P'_j(\mathbb{R})$. Rappelons qu'on a identifié ${}^LM'_j$ à un sous-groupe de ${}^LH_s$ (voir 2-5). Un homomorphisme admissible φ de W dans ${}^LM'_j$ est dit discret si $\varphi(W)$ n'est inclus dans aucun sous-groupe parabolique propre de ${}^LM'_j$; on dira que φ est une section discrète de ${}^LM'_j$. A conjugaison près par ${}^LH^\circ_s$, toute section de ${}^LH_s$ se factorise à travers une section discrète d'un unique ${}^LM'_j$ [L]. A chaque section φ de ${}^LH_s$ on associe un pseudo-L-paquet (on écrira PL-paquet) de représentations de $H(\mathbb{R})$ de la façon suivante. On prend une section discrète φ_j de ${}^LM'_j$ dans la même classe de conjugaison que φ , on note $\pi^{M'_j}_{\varphi_j}$ le L-paquet de représentations de carré intégrable modulo le centre de $M'_j(\mathbb{R})$ et on note $\pi_{\varphi_j} = \mathrm{Ind}^{H(\mathbb{R})}_{M'_j(\mathbb{R})N'_j(\mathbb{R})}\, \pi^{M'_j}_{\varphi_j}\otimes 1$; le PL-paquet associé à φ est l'ensemble des représentations de $H(\mathbb{R})$ qui interviennent dans π_{φ_j} . La classe de conjugaison sous $({}^LM'_j)^\circ$ de φ_j n'est pas uniquement déterminée par φ ; un autre choix de φ_j affectera les représentations π_{φ_j} mais pas le PL-paquet. On notera Θ_φ la somme des caractères des membres du PL-paquet associé à φ. Pour l'utilisation du théorème de Paley-Wiener on aura besoin d'une autre paramétrisation des PL-paquets . Si S est le groupe des points réels d'un groupe algébrique connexe $\underset{\sim}{S}$ défini sur $\mathbb{R}$, on note $S = {}^\circ S A_S$ sa décomposition de Langlands ; A_S est la composante neutre du groupe des points réels du plus grand tore déployé dans le centre de $\underset{\sim}{S}$. Pour simplifier on notera

$A'_j = A_{M'_j(\mathbb{R})}$. Si φ est une section discrète de ${}^L M'_j$, on notera $\delta_\varphi \otimes \lambda_\varphi$ le L-paquet de représentations de $M'_j(\mathbb{R})$ associé à φ, où δ_φ est une somme finie de représentations de la série discrète de ${}^\circ M'_j(\mathbb{R})$ et λ_φ est un quasi-caractère de A'_j. Si $\delta \otimes \lambda$ est la décomposition d'un L-paquet discret de $M'_j(\mathbb{R})$, on notera $\varphi(\delta,\lambda)$ la section discrète de ${}^L M'_j$ associée à ce L-paquet et $\pi_{\delta,\lambda}$ le PL-paquet associé à $\varphi(\delta,\lambda)$. On regardera souvent λ comme une forme linéaire sur la complexifiée de l'algèbre de Lie de A'_j.

Pour $1 \le j \le r$, on choisit $m'_j \in M'_j$ tel que $\mathrm{ad}(m'_j).T'_j = T_H$ et on note $\sigma_j = \sigma_{T'_j,m'_j}$. On fixe $(T_j,\eta_j) \in \mathcal{T}_H(G)$ avec T_j standard tel que $\sigma_{T_j,\eta_j} = \sigma_j$. Alors l'application $i(m'_j,\eta_j)\colon T'_j \longmapsto T_j$ est définie sur $\mathbb{R}$. On note $M_j = M_{T_j}$ et on fixe un sous-groupe parabolique P_j de G défini sur $\mathbb{R}$ dont M_j est une composante de Lévi; on note N_j le radical unipotent de P_j de sorte que $P_j = M_jN_j$. On identifie , comme en 2-5 , ${}^L M_j$ avec un sous-groupe de ${}^L G$ et donc ${}^L\widetilde{M}_j$ s'identifie de façon naturelle à un sous-groupe de ${}^L\widetilde{G}$. L'image de ${}^L M'_j$ par $\tilde{\xi}$ est dans ${}^L\widetilde{M}_j$ (voir 2-5). Si $\delta\otimes\lambda$ est un L-paquet de $M'_j(\mathbb{R})$, $\tilde{\varphi}(\delta,\lambda) = \tilde{\xi}\circ\varphi(\delta,\lambda)$ est une section de ${}^L\widetilde{M}_j$. Le L-paquet de $\widetilde{M}_j(\mathbb{R})$ associé à $\tilde{\varphi}(\delta,\lambda)$ est une série principale tempérée modulo torsion par un quasi-caractère du centre de $\widetilde{M}(\mathbb{R})$; nous allons décrire ses paramètres de Zelobenko en fonction de δ et λ. Pour alléger les notations nous omettons l'indice j . Soit $\underline{t}'$ l'algèbre de Lie de $T'(\mathbb{C})$. On décompose $\underline{t}'$ en somme de deux sous-espaces propres $\underline{t}'_+$ et $\underline{t}'_-$ correspondants aux valeurs propres ± 1 de $\sigma_{T'}$; ainsi $\underline{t}'_+$ (resp. $\underline{t}'_-$) s'identifie à la complexifiée de l'algèbre de Lie de A' (resp. $T'(\mathbb{R}) \cap {}^\circ M'(\mathbb{R})$). Alors λ s'identifie avec une forme linéaire sur $\underline{t}'_+$ qu'on regarde comme une forme linéaire sur $\underline{t}'$ en la prolongeant par 0 sur $\underline{t}'_-$. De même si μ_δ est le paramètre de harish-Chandra (relativement à $T'(\mathbb{R}) \cap {}^\circ M'(\mathbb{R})$) d'une composante de δ on regarde μ_δ comme forme linéaire sur $\underline{t}'$ nulle sur $\underline{t}'_+$. On décompose l'algèbre de Lie $\underline{t}$ de $T(\mathbb{C})$ de la même façon. Alors l'isomorphisme $i(m',\eta)$ induit un isomorphisme entre $\underline{t}'_\mp$ et $\underline{t}_\mp$. On transporte μ_δ et λ par cet isomorphisme sans changer les notations et on définit le caractère

$\tilde{\chi}_{\delta,\lambda}$ de $\tilde{T}(\mathbb{R}) = T(\mathbb{C})$ par :

$\exp(X) \longmapsto e^{(\mu_\delta + \lambda + \eta^{-1}.\mu_*)}$. Pour simplifier on note $\eta^{-1}.\mu_*$ simplement μ_*. Si $\tilde{T}_a$ (resp. $\tilde{T}_d$) désigne la composante anisotrope (resp. déployée) de $\tilde{T}$, on a $\tilde{T}(\mathbb{R}) = \tilde{T}_a(\mathbb{R})\tilde{T}_d(\mathbb{R})_\circ$; tout élément de $\tilde{T}_a(\mathbb{R})$ est de la forme $\exp(X), X \in \underline{t}$ et $\bar{X} = -X$, et tout élément de $\tilde{T}_d(\mathbb{R})$ est de la forme $\exp(Y)$, $Y \in \underline{t}$ et $\bar{Y} = Y$. Donc la restriction de $\tilde{\chi}_{\delta,\lambda}$ respectivement à $\tilde{T}_a(\mathbb{R})$ et $\tilde{T}_d(\mathbb{R})$ est:

$\exp(X) \longmapsto e^{(2\mu_\delta + \mu_* - \sigma_T.\mu_*)(X)}$

$\exp(Y) \longmapsto e^{(2\lambda + \mu_* + \sigma_T.\mu_*)(Y)}$

Le L-paquet de $\tilde{M}(\mathbb{R})$ associé à $\tilde{\varphi}(\delta,\lambda)$ est la série principale de paramètres de Zelobenko $(2\mu_\delta + \mu_* - \sigma_T.\mu_*\ ,\ 2\lambda + \mu_* + \sigma_T.\mu_*)$, on la note $\Pi^{\tilde{M}}_{\delta,\lambda}$. On écrit $\Pi^{\tilde{M}}_{\delta,\lambda} = {}^\circ\Pi^{\tilde{M}}_{\delta,\lambda} \otimes \tilde{\lambda}$ où ${}^\circ\Pi^{\tilde{M}}_{\delta,\lambda}$ est la restriction à ${}^\circ\tilde{M}(\mathbb{R})$ et $\tilde{\lambda}$ est un quasi-caractère de $A_{\tilde{M}(\mathbb{R})}$. Alors on voit facilement que ${}^\circ\Pi^{\tilde{M}}_{\delta,\lambda}$ est la série principale unitaire de paramètres $(2\mu_\delta + \mu_* - \sigma_T.\mu_*, 0)$ et $\tilde{\lambda}$ est le quasi-caractère:

$\exp(Y) \longmapsto e^{(2\lambda + \mu_* + \sigma_T.\mu_*)}$. Donc ces représentations sont réalisées dans un espace fixe ne dépendant pas de λ. On note $\Pi_{\delta,\lambda} = \mathrm{Ind}_{\tilde{M}(\mathbb{R})N(\mathbb{R})}^{\tilde{G}(\mathbb{R})} \Pi^{\tilde{M}}_{\delta,\lambda} \otimes 1$. Ces représentations sont alors réalisées dans un espace fixe ne dépendant pas de λ. Il est clair que l'opérateur , défini en 4-2 , qui entrelace $\Pi_{\delta,\lambda}$ et ${}^\alpha\Pi_{\delta,\lambda}$ pour les λ tels que $\tilde{\lambda}$ est unitaire ne dépend pas de λ ; on le note A_δ.

On va montrer que la fonction $F: (\delta,\lambda) \longmapsto tr(\Pi_{\delta,\lambda}(f)_\circ A_\delta)$ vérifie les hypothèses (i),(ii) et (iii) du théorème A-1 de l'appendice de [C-D].

L'hypothèse (ii) dit que,pour δ fixé , la fonction: $\lambda \longmapsto F(\delta,\lambda)$ appartient à l'espace de Paley-Wiener de $\underline{t}^*_+$; ceci découle aisément de la description ci-dessus de F et du fait que si π est une représentation unitaire de ${}^\circ\tilde{M}(\mathbb{R})$ et si $\Pi(\nu) = \mathrm{Ind}_{\tilde{M}(\mathbb{R})\tilde{N}(\mathbb{R})}^{\tilde{G}(\mathbb{R})} \pi\otimes\nu\otimes 1$,où ν est un quasi-caractère de $A_{\tilde{M}(\mathbb{R})}$,alors les coefficients de $\Pi(f)$ sont ,comme fonctions de ν , dans l'espace de Paley-Wiener de la complxifiée de l'algèbre de Lie de $A_{\tilde{M}(\mathbb{R})}$ (voir,par exemple,[C-D] ,2-1).

Pour l'hypothèse (iii) on doit vérifier que si $\omega \in \Omega(H(\mathbb{R}),A')$ alors $F(\delta,\lambda) = F(\omega.\delta,\omega.\lambda)$. Fixons δ. Les PL-paquets $\pi_{\delta,\lambda}$ et $\pi_{\omega.\delta,\omega.\lambda}$ coincident pour tout λ. Pour les λ tels que $\tilde{\lambda}$ est unitaire , on a d'après le théorème 4-2 :

$tr(\Pi_{\delta,\lambda}(f)\circ A_{\delta}) = \Theta_{\delta,\lambda}(f_H)$

$tr(\Pi_{\omega.\delta,\omega.\lambda}(f)\circ A_{\omega.\delta}) = \Theta_{\delta,\lambda}(f_H)$

où f_H est la fonction associée à f par la proposition (2-4-1) ; donc pour ces λ on a $F(\delta,\lambda) = F(\omega.\delta,\omega.\lambda)$ et par analycité de $F(\delta\ ,.)$ on déduit l'égalité pour tout λ. Il nous reste à vérifier l'hypothèse (i), c'est à dire qu'il n'existe qu'un nombre fini de δ tels que $F(\delta,\lambda)$ est non nulle. Comme f est K-finie , il existe un nombre fini de représentations de K telles que si $\Pi_{\delta,\lambda}$ ne contient pas l'une d'elles on a $\Pi_{\delta,\lambda}(f) = 0$. Il est clair qu'on peut supposer que $\tilde{T}_a(\mathbb{R})$ est inclus dans K. D'après la réciprocité de Frobenius, pour que $\Pi_{\delta,\lambda}$ contienne une représentation de K il faut et il suffit que $2\mu_{\delta} + \mu_* - \sigma_T.\mu_*$ soit un poids de cette représentation. Donc il n'y a qu'un nombre fini de μ_{δ} tels que $\Pi_{\delta,\lambda}(f) \neq 0$. Comme ${}^{\circ}M'(\mathbb{R})$ a un nombre fini de composantes connexes, il n'y a qu'un nombre fini de δ ayant le même paramètre de Harish-Chandra. Donc F vérifie les hypothèses du théorème A-1 de [C-D]. Il existe,alors, d'après ce théorème, $f'_H \in C_c^{\infty}(H(\mathbb{R}),K_H)$ telle que $F(\delta,\lambda) = \Theta_{\delta,\lambda}(f'_H)$. Donc,d'après le théorème (4-2-1), $\Theta_{\varphi}(f_H - f'_H) = 0$ pour toute section φ de ${}^LH_s$ telle que $\tilde{\varphi}$ est bornée. Pour ces sections, il existe un quasi-caractère χ de $H(\mathbb{R})$ tel que $\Theta_{\varphi}.\chi^{-1}$est tempérée. Donc pour tout φ bornée on a $\Theta_{\varphi}(\chi f_H - \chi f'_H) = 0$. Donc ,d'après le lemme 5-3 de [S-4], les intégrales orbitales stables de χf_H et $\chi f'_H$ sur les éléments réguliers de $H(\mathbb{R})$ coincident et donc aussi celles de f_H et f'_H. Ceci termine la démonstration du théorème.

RÉFÉRENCES

[A-J] J. Adams and J. Johnson , Endoscopic groups and packets of non-tempered representations, Compositio Math. 64 (1987), 271-309.

[Bor] A. Borel , Automorphic L-functions , Proc. Symp. Pure Math. 33,part 2 , Amer. Math Soc. (1977), 27-61.

[B-1] A. Bouaziz , Sur les caractères des groupes de Lie réductifs non connexes , J. of Funct. Anal. 70 , No. 1 (1987), 1-79.

[B-2] A. Bouaziz , Sur les représentations des groupes de Lie réductifs non connexes, Math. Ann. 268 (1984), 539-555.

[C] L. Clozel , Changement de base pour les représentations tempérées des groupes réductifs réels,Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 15 (1982), 45-115 .

[C-D] L. Clozel et P. Delorme , Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs, Invent. Math. 77 (1984), 427-453.

[D] M. Duflo , Constructions de représentations unitaires d'un groupe de Lie , "Cours d'été au C.I.M.E. Cortona (1980)", Liguori,Naples, 1982.

[K] R.E. Kottwitz , Rational conjugacy classes in reductive groups, Duke Math. J. 49 (1982), 785-806.

[L] R.P. Langlands , On the classification of irreducible representations of real algebraic groups , preprint (1973).

[S-1] D. Shelstad , Endoscopic groups and base change $\mathbb{C}/\mathbb{R}$, Pac. J. of Math. 110 , No. 2 (1984), 397-416.

[S-2] D. Shelstad , L-indistinguishability for real groups, Math. Ann. 259 (1982), 385-430.

[S-3] D. Shelstad , Embeddings of L-groups , Canad. J. Math. 33 (1981), 513-558.

[S-4] D. Shelstad , Characters and inner forms of a quasi-split group over $\mathbb{R}$ Compositio Math. 39 (1979), 11-45.

[Spr] T.A. Springer , reductive groups , Proc. Sympos. Pure Math. 33 ,part 1, Amer. Math. Soc. (1979), 3-27.

[V] V.S. Varadarajan , Harmonic Anaysis on Real Reductive groups, Lectures notes in Math. 576, Springer-Verlag, Berlin/New York,(1977).

Abderrazak Bouaziz

Université Paris VII,U.A. 748 du C.N.R.S

U.F.R. de mathématiques

2,Place Jussieu

75251 PARIS Cedex 05 , France.