André Goldman

Mouvement Brownien à plusieurs paramètres : mesure de Hausdorff des trajectoires

Astérisque, tome 167 (1988)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1988__167__1_0>

167 ASTÉRISQUE

1988

MOUVEMENT BROWNIEN A PLUSIEURS PARAMÈTRES : MESURE DE HAUSDORFF DES TRAJECTOIRES

André GOLDMAN

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

A.M.S. Subjects Classification : primary - 60 G 15, 17, 25, 60 J 65
secondary - 28 A 12, 75

TABLE DES MATIÈRES

1. INTRODUCTION ET PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

Ce travail a pour origine la recherche de l'exacte mesure de Hausdorff des trajectoires du mouvement brownien à plusieurs paramètres. Il s'agit d'un problème datant d'une vingtaine d'années, proposé par P. Levy ([23] et [24]) dans le prolongement de ses recherches sur la mesure de Hausdorff des trajectoires du mouvement brownien indexé sur la droite. Rappelons brièvement (voir [38] pour plus de détails) que si $B(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, est un mouvement brownien (à trajectoires presque-sûrement continues) à valeurs dans l'espace euclidien R^n, $n \geqslant 3$, et si μ_φ désigne la mesure de Hausdorff associée à la fonction déterminante $\varphi(x)$, $0 < x < 1$, alors pour toute portion de trajectoire $R(a) = R(a,\omega) = \{B(t,\omega) ; 0 \leqslant t \leqslant a\} \subset \mathbb{R}^n$, $a > 0$, on a : $0 < \mu_\varphi(R(a)) < +\infty$ presque-sûrement, en prenant :

i) $\varphi(x) = x^2[\log(1/x)]\log\log(1/x)$ pour $n = 2$ ([31] et [36]) ;
ii) $\varphi(x) = x^2 \log\log(1/x)$ pour $n \geqslant 3$ ([4] et [22]).

Le mouvement brownien à plusieurs paramètres, introduit par P. Levy en 1945 [20], est le processus gaussien centré $X(t) = X(t,\omega)$ indexé sur un espace euclidien $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 2$, et caractérisé par la covariance

$$E(X(t)X(s)) = \frac{1}{2}\left[\|t\| + \|s\| - \|t-s\|\right],\ t,s \in \mathbb{R}^p .$$

A une version près on peut supposer que ses trajectoires sont continues (voir [21]). Désignons par $\overline{X}(t) = (X_1(t),\ldots,X_n(t)) \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, le processus constitué de n copies indépendantes du processus linéaire $X(t)$; on trouvera dans [17] et [39] (voir également [16] et plus particulièrement la bibliographie qui s'y trouve indiquée) une description assez complète des propriétés des trajectoires, connues à ce jour. Au niveau de la "mesure" des trajectoires on ne disposait jusqu'à présent que leur dimension de Hausdorff. Ainsi, pour un mouvement brownien indexé sur $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 1$, la dimension de Hausdorff des trajectoires est égale à $\min(2p,n)$; ce résultat a été démontré par L. Yoder [40] en 1975. On pourra consulter également [1], [17] et [6] qui développent des estimations analogues relatives à des champs gaussiens plus généraux ; signalons encore que le problème de la mesure de Hausdorff des trajectoires a pu être résolu dans le cas du processus de Wiener à plusieurs paramètres (associé aux distributions empiriques vectorielles) par W. Ehm [10]. Actuellement, nous démontrons :

Théorème A. *Notons* $Q(a) = [-a,a]^n \subset \mathbb{R}^n$, $a > 0$, *et soit* $R(a) = R(a,\omega)$ - $\{\overline{X}(t,\omega)\ ;\ t \in Q(a)\}$ *la portion de trajectoire correspondante. Alors sous la condition* $n > 2p$ *on a* :

$$0 < \mu_\varphi(R(a)) < +\infty \ \textit{p.s., pour tout} \ a > 0,$$

où μ_φ *est la mesure de Hausdorff associée à la fonction déterminante* $\varphi(x) = x^{2p} \log\log(1/x)$.

Nous établissons le théorème A en reprenant, pour l'essentiel, la méthode qui a été utilisée par P. Lévy, Z. Ciesielski et S.J. Taylor ([4], [22] et [37]) lorsque le processus est à indice scalaire. Pour que cette méthode puisse s'appliquer il faut disposer, en premier lieu, d'une information suffisamment précise sur la structure de dépendance interne du processus. Désignons, à cette fin, par $B(\delta)$, $\delta > 0$, le sous-espace vectoriel fermé de L^2 engendré par les variables aléatoires $X(u)$, $\|u\| < \delta$: c'est le "passé" du processus. De même, notons par $C(\tau)$, $\tau > 0$, le "futur" du processus, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel de L^2 engendré par les variables aléatoires $X(u)$, $\|u\| > \tau$. Fixons un vecteur $X \in C(\tau)$, $X \neq \vec{0}$. Notre premier résultat concerne l'erreur de prédiction relative $E(|X-Y|^2)/E(X^2)$, où $Y = E(X|B(\delta))$ est la projection (dans l'espace L^2) de X sur le sous-espace $B(\delta)$. On obtient ainsi :

Théorème B. *Avec le choix* $0 < \delta \leqslant \tau$, *l'estimation suivante est satisfaite :*

$$E(|X-Y|^2) \geqslant (1 - \frac{\delta}{\tau})^{\tilde{p}^2} \ E(X^2),$$

où on a posé $\tilde{p} = p$ *lorsque la dimension* p *de l'espace sur lequel le processus est indexé est un nombre impair et* $\tilde{p} = p+1$ *si* p *est un nombre pair.*

La minoration obtenue est surtout efficace pour un choix du couple (δ,τ) rendant le quotient δ/τ "assez petit". Pour un quotient δ/τ voisin de un, elle cesse d'être intéressante. On peut remédier partiellement à ce défaut en faisant intervenir, au besoin, un second résultat de prédiction qui précise la distance (dans l'espace L^2) entre une variable aléatoire $X(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$ et sa projection $Y = E(X(t)|E(t_1,\ldots,t_N))$ sur le sous-espace vectoriel de L^2 engendré par une suite $X(t_1),\ldots X(t_N)$, $N \geqslant 1$, quelconque. Il s'énonce comme suit

Théorème C. *Soit* $\{t,t_1,\ldots,t_N\} \subset \mathbb{R}^p$, $p \geqslant 1$, $N \geqslant 1$, *un choix quelconque d'indices. Alors on a :*

$$E(|X(t)-Y|^2) \geqslant a(p)\min\{\|t\|, \|t-t_1\|,\ldots,\|t-t_N\|\},$$

la constante $a(p) > 0$ *ne dépendant que de la dimension* p *de l'espace des indices.*

Le théorème C sert, en particulier, à l'étude de la distribution du temps de séjour des trajectoires dans une boule $B(0,\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$, centrée à l'origine et de rayon $\varepsilon > 0$. Plus précisément, soit $g_\varepsilon(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction indicatrice de cette boule et $T(\varepsilon) = T(\varepsilon,\omega) = \int g_\varepsilon(\overline{X}(t))dt$ la durée totale du séjour de la trajectoire $t \to \overline{X}(t,\omega) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^p$, dans $B(0,\varepsilon)$, alors l'estimation précédente implique (ce résultat nous a été indiqué par L.D. Pitt) :

Théorème D. *Sous la condition* $n > 2p$, $p \geqslant 1$, *il existe une constante* $b > 0$ *ne dépendant que des dimensions* n *et* p, *telle que l'on ait :*

$$E(\exp bT(1)) < +\infty .$$

Des informations complémentaires, concernant notamment la durée du séjour $\tilde{T}(\varepsilon) = \tilde{T}(\varepsilon,\omega) = \int_{Q(1)} g_\varepsilon(\overline{X}(t))dt$ dans la boule $B(0,\varepsilon)$, de la restriction de la trajectoire au cube $Q(1)$, sont nécessaires. On montre ainsi :

Théorème E. *Pour tout nombre* $\alpha > 0$ *il existe une constante* $c > 0$ *ne dépendant que de* α, p *et* n, *de sorte que l'on ait :*

$$P\{\tilde{T}(\varepsilon) \geqslant \alpha\varphi(\varepsilon)\} \geqslant [\log(1/\varepsilon)]^{-c}, \textit{ pour tout } \varepsilon > 0,$$

pris suffisamment petit (en notant : $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon^{2p} \log\log(1/\varepsilon)$).

Le théorème E est difficile à démontrer. Cela tient au fait que pour un espace d'indices de dimension $p \geqslant 2$ le comportement asymptotique, lorsque $\varepsilon \downarrow 0$, de la distribution du maximum $P\{|X(t)| \leqslant \varepsilon$; pour tout $t \in Q(1)\}$, n'est pas connu. A défaut, nous avons pu obtenir, un encadrement convenable de la distribution du maximum absolu

$$M(X,\varepsilon) = \sup\{|X(t)|,\ t \in D(1,\varepsilon^2)\},$$

de la restriction du processus au cylindre $D(1,\varepsilon^2) = \{t = (u,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p-1},\ 0 < u < 1,\ \|x\| \leqslant \varepsilon^2\}$. Cet encadrement s'énonce comme suit :

Théorème F. *Pour tout nombre* $\alpha > 0$, *il existe deux constantes* $0 < b_1 < b_2$ *ne dépendant que de* α *et de la dimension* $p \geqslant 2$ *de l'espace des indices, telles que l'on ait*

$$\exp(-b_2/\varepsilon^2) \leqslant P\{M(X,\varepsilon) \leqslant \alpha\varepsilon\} \leqslant \exp(-b_1/\varepsilon^2),$$

pour tout $0 < \varepsilon < 1$.

La majoration de la distribution du maximum figurant ci-dessus ne présente pas de difficulté. En ce qui concerne la preuve de la minoration son principe consiste à comparer les distributions des fonctionnelles $M(X,\varepsilon)$ et $M_0(X)$ cette dernière désignant le maximum absolu de la restriction $X_0(u) = X(u,0)$, $0 < u < 1$, du processus $X(u,x)$, $(u,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p-1}$, à l'axe du cylindre $D(1,\varepsilon^2)$. En introduisant le processus $Y(u,x) = X(u,x) - X(u,0)$, puis son maximum $M(Y,\varepsilon) = \sup\{|Y(t)|, t \in D(1,\varepsilon^2)\}$, on voit que tout revient à montrer que les fonctionnelles $\log P\{M_0(X) \leqslant \alpha\varepsilon\}$ et $\log P\{M(Y,\varepsilon) \leqslant \alpha\varepsilon\}$ ont, lorsque $\varepsilon \downarrow 0$, un même ordre de grandeur. On est donc amené à étudier le processus $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$. On associe pour cela les informations précédentes (notamment le théorème C) aux résultats généraux de comparaison des distributions du maximum des processus gaussiens dont, en particulier, le

Théorème G. *Soit* $Z = (X,Y)$, $X = (X_1,\dots,X_N)$, $Y = (Y_1,\dots,Y_N)$ *un vecteur gaussien centré à valeurs dans l'espace euclidien* $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. *On suppose les conditions suivantes satisfaites :*

a) Les vecteurs X *et* Y *sont identiques en loi ;*
b) On a l'identité $E(X_iY_j) = E(X_jY_i)$ *pour tout choix* $i,j = 1,\dots,N$ *et la forme quadratique* $q(u) = \sum u_iu_j E(X_iY_j)$, $u = (u_1,\dots,u_N) \in \mathbb{R}^N$, *est positive*.
Dans ces conditions, on a :

$$P\{M(X) \leqslant \alpha \textit{ et } M(Y) \leqslant \alpha\} \geqslant [P\{M(X) \leqslant \alpha\}]^2,$$

pour tout $\alpha \geqslant 0$, *en notant :*

$$M(X) = \sup\{|X_i|, i = 1,\dots,N\} \textit{ et } M(Y) = \sup\{|Y_i|, i = 1,\dots,N\}.$$

Présentons maintenant le plan général de cet article. Les informations préliminaires ont été regroupées au second chapitre en trois paragraphes distincts. Le premier paragraphe rappelle quelques propriétés connues du mouvement brownien à un ou plusieurs paramètres. Dans le second paragraphe nous avons rassemblé l'essentiel des inégalités classiques de comparaison des maximums des processus gaussiens généraux. Nous y avons adjoint le théorème G figurant ci-dessus en décrivant une technique de perturbation permettant, sous certaines conditions, de s'affranchir de l'hypothèse restrictive b) de son énoncé. Ces informations contribuent, au paragraphe suivant, à l'étude du processus $Y(t) = X(u,x) - X(u,0)$, $t = (u,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p-1}$, intervenant dans la preuve du théorème F. En fait nous avons été amenés à étudier (voir la discussion du paragraphe (4.1)) la famille des processus $Y_w(t)$, $w \geqslant 0$, tous identiques en loi à $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, obtenus à partir d'un mouvement brownien $X(w,t)$ à $p+1$-paramètres en posant $Y_w(t) = X(w,u,x) - X(w,u,0)$.

Les démonstrations des théorèmes B, C et D sont données respectivement aux paragraphes 1,2,3 du chapitre 3.

Le quatrième chapitre est entièrement consacré à la preuve du théorème F.

Tous ces résultats concourent à démontrer, au chapitre 5, le théorème A. On notera que l'énoncé du théorème E ne figure pas explicitement dans ce chapitre ; on pourra vérifier que l'inégalité du théorème E s'obtient aisément en associant le raisonnement décrit à la fin du point (5.2.C.II) aux estimations numériques (5.2.79) et (5.2.81).

Signalons encore que l'essentiel des résultats obtenus a été annoncé dans trois Notes présentées à l'Académie des Sciences (voir [13], [14] et [15]).

Nota. Du fait d'un grand nombre de constantes apparaissant dans cette étude, il nous arrivera d'en désigner plusieurs différentes, par la même lettre, les énoncés auxquels elles se rapportent seront alors précisés.

2. PRÉLIMINAIRES

(2.1) Le mouvement brownien. Nous réservons la notation $X(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, $p \geqslant 1$, au mouvement brownien linéaire seul. Le processus $X(t) = X(t\,;\,\omega)$ est donc à valeurs réelles, il est gaussien centré et caractérisé par la covariance :

$$E(X(t)X(s)) = \frac{1}{2}[\| t \| + \| s \| - \| t\text{-}s \|]\,, \quad t,s \in \mathbb{R}^p\,,$$

où $\| t \| = (x_1^2 + \ldots + x_p^2)^{1/2}$ est la norme euclidienne d'un vecteur $t = (x_1,\ldots,x_p) \in \mathbb{R}^p$.

La notation $\overline{X}(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, désigne un mouvement brownien à valeurs dans un espace euclidien $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, le processus $\overline{X}(t)$ envisagé pouvant donc désigner également un mouvement brownien linéaire. Rappelons que l'on a :

$$\overline{X}(t) = (X_1(t),\ldots,X_n(t)) \in \mathbb{R}^n,\ n \geqslant 1,$$

où les processus $(X_i(t))$, $i = 1,\ldots,n$, sont des copies indépendantes du mouvement brownien linéaire.

Dans la suite nous serons amenés à employer la notation $t = (u,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p-1}$, $p \geqslant 2$, $u \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^{p-1}$, faisant apparaître la première coordonnée u du vecteur t . On écrira alors $\overline{X}(u,x) = \overline{X}(u,x\,;\,\omega)$. La norme du vecteur $t = (u,x)$ est de la forme $\| t \| = (u^2 + \| x \|^2)^{1/2}$ où $\|x\|$ désigne évidemment la norme euclidienne du vecteur $x \in \mathbb{R}^{p-1}$. Dans le cas particulier où le vecteur x est nul on note $t = (u,0)$.

Soulignons encore le fait simple suivant : si $\overline{X}(t)$ est un mouvement brownien indexé sur $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 2$, alors, en posant $\overline{X}_0(u) = \overline{X}(u,0)$, $u \in \mathbb{R}$, on obtient un mouvement brownien à indice scalaire. De même, si $\overline{X}(w,t)$, $w \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^p$, est un mouvement brownien à p+1-paramètres alors le processus $\overline{X}_1(t) = \overline{X}(0,t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, est un brownien indexé sur $\mathbb{R}^p$.

A une version du processus près, on peut supposer que les trajectoires $t \to \overline{X}(t\,;\,\omega)$ sont continues (voir par exemple [17]). Dans tout ce qui suit il s'agira d'une telle version.

Indiquons maintenant quelques propriétés d'invariances qui nous seront utiles.

Propriété 1. Le processus $\overline{X}(t)$ est homogène, c'est-à-dire pour tout nombre $a \neq 0$, fixé, on a l'identité en loi des processus :

(2.1.1) $\quad a\overline{X}(t) = \overline{X}(a^2 t),\ t \in \mathbb{R}^p,\ p \geqslant 1$.

Propriété 2. Pour tout point $t_0 \in \mathbb{R}^p$, fixé, on a l'identité en loi des processus :

(2.1.2) $\quad \overline{X}(t) - \overline{X}(t_0) = \overline{X}(t-t_0),\ t \in \mathbb{R}^p,\ p \geqslant 1.$

Propriété 3. . Considérons le processus $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, $p \geqslant 2$, défini par :

(2.1.3) $\quad Y(t) = X(u,x) - X(u,o),\ t = (u,x) \in \mathbb{R}^p,\ u \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^{p-1},\ p \geqslant 2.$

Alors, pour tout nombre $a \in \mathbb{R}$, fixé, on a l'identité en loi des processus

(2.1.4) $\quad Y(t + (a,o)) = Y(t),\ t \in \mathbb{R}^p,\ p \geqslant 2.$

De plus, le processus $Y(t)$ est lui aussi homogène, c'est-à-dire il vérifie l'identité en loi

(2.1.5) $\quad aY(t) = Y(a^2 t),\ t \in \mathbb{R}^p$, le nombre $a \neq 0$, étant fixé.

Remarquons finalement que le processus $Y(t)$ est invariant par la symétrie (au niveau des indices) $(u,x) \to (-u,x)$. Explicitement, posons

(2.1.6) $\quad Y'(t) = Y(-u,x)$, avec $t = (u,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p-1}$, $p \geqslant 2$,

alors on a l'identité en loi

(2.1.7) $\quad Y'(t) = Y(t),\ t \in \mathbb{R}^p$.

Toutes ces propriétés se démontrent très facilement en calculant directement les covariances des processus concernés. Les identités (2.1.1) et (2.1.2) sont bien connues, la formule (2.1.5) résulte de (2.1.1). Finalement (2.1.4) et (2.1.7) découlent du calcul suivant :

$$\textbf{(2.1.8)}\qquad E(Y(s)Y(t)) = E\{(X(u,x) - X(u,0))(X(v,y) - X(v,0))\}$$
$$= (1/2)\{[\,\|x\|^2 + (u-v)^2]^{1/2} + [\,\|y\|^2 + (u-v)^2]^{1/2} - [\,\|x-y\|^2 + (u-v)^2]^{1/2} - |u-v|\,\},$$

avec $s = (u,x)$, $t = (v,y)$, $u,v, \in \mathbb{R}$, $x,y \in \mathbb{R}^{p-1}$.

Indiquons encore une propriété d'invariance qui va nous être particulièrement utile.

Propriété 4. Considérons un mouvement brownien

$$X(w,t),\ w \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^p \text{, indexé sur } \mathbb{R}^{p+1},$$

puis posons :

$$\textbf{(2.1.9)}\qquad Y_w(t) = X(w,t) - X(w,(u,0)),\ w \in \mathbb{R},\ t = (u,x) \in \mathbb{R}^p,\ x \in \mathbb{R}^{p-1}.$$

Alors pour tout $w \in \mathbb{R}$, fixé, on a l'identité en loi

$$\textbf{(2.1.10)}\qquad Y_w(t) = Y(t),\ t \in \mathbb{R}^p.$$

La formule (2.1.10) est évidente, elle résulte directement de l'égalité

$$\textbf{(2.1.11)}\qquad E(Y_w(s)Y_w(t)) = (1/2)\{\,\|s-(v,0)\| + \|t-(u,0)\| - \|t-s\| - |u-v|\,\}$$
$$= E(Y(s)Y(t)),$$

satisfaite pour tout choix $s = (u,x)$, $t = (v,y)$, $u,v \in \mathbb{R}$, $x,y \in \mathbb{R}^{p-1}$.

Remarquons finalement la propriété de symétrie suivante (relative à la covariance mutuelle des couples de processus $(Y_w(s), Y_0(t))$ et $(Y_w(s), Y_0'(t))$) :

$$\textbf{(2.1.12)}\qquad E(Y_w(s)Y_0(t)) = E(Y_w(t)Y_0(s))$$
$$= (1/2)\{[\,\|x\|^2 + (u-v)^2 + w^2\,]^{1/2} + [\,\|y\|^2 + (u-v)^2 + w^2]^{1/2} - [\,\|x-y\|^2 + (u-v)^2 + w^2]^{1/2} - [(u-v)^2 + w^2]^{1/2}\},$$

et

$$\textbf{(2.1.13)}\qquad E(Y_w(s)Y_0'(t)) = E(Y_w(t)Y_0'(s))$$
$$= (1/2)\{[\,\|x\|^2 + (u+v)^2 + w^2]^{1/2} + [\,\|y\|^2 + (u+v)^2 + w^2]^{1/2} - [\,\|x-y\|^2 + (u+v)^2 + w^2]^{1/2} - [(u+v)^2 + w^2]^{1/2}\,\},$$

$s = (u,x)$, $t = (v,y)$, $s,t \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p-1}$.

Rappelons maintenant quelques résultats classiques. Le théorème qui suit, dû à I.J. SCHOENBERG [33], découlera également du théorème 21 établi au paragraphe (3.2).

Théorème 1. *Soit* $t, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^p \setminus \{\vec{0}\}$, *une suite de points, tels que l'on ait :*

$$t \neq t_i \text{ pour tout } i = 1, \ldots, n.$$

Désignons par $E(t_1, \ldots, t_n)$ *le sous-espace vectoriel de* L^2 *engendré par la suite finie* $\{X(t_1), \ldots, X(t_n)\}$. *Alors la variable aléatoire* $X(t)$ *n'appartient pas à l'espace* $E(t_1, \ldots, t_n)$.

Remarque. On notera en particulier, comme conséquence du théorème 1, que pour toute suite de points distincts $t_1, \ldots, t_n$, $t_i \neq t_j$ si $i \neq j$, et non nuls $t_i \neq \vec{0}$, $i = 1, \ldots, n$, le vecteur gaussien $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ est non-dégénéré.

Le second résultat, démontré par P. LEVY [21], précise le module de continuité uniforme du mouvement brownien linéaire restreint à un cube de $\mathbb{R}^p$.

Théorème 2. *Soit* $X(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, $p \geqslant 1$, *un mouvement brownien linéaire. Considérons le cube :*

$$Q(1) = [-1,1]^p \subset \mathbb{R}^p,$$

puis posons :

$$M_u(\varepsilon) = \sup\left\{ |X(t)-X(s)| / [2p\| t-s \| \log(1/\| t-s \|)]^{1/2},\ s,t \in Q(1),\ s \neq t,\ \| s-t \| \leqslant \varepsilon \right\},$$
$$0 < \varepsilon < 1.$$

On a alors :

(2.1.14) $$P\{\lim_{\varepsilon \downarrow 0} M_u(\varepsilon) = 1\} = 1.$$

Le théorème suivant, démontré par H.P. MC KEAN en [25], donne la décomposition du mouvement brownien en harmoniques sphériques. Avant de l'indiquer, précisons, au préalable, quelques notations.

a) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on désigne par $(S_{n,j}(\theta))$, $\theta \in S$, $1 \leqslant j \leqslant N(n)$, une base de l'espace des harmoniques sphériques de degrés n (définies sur la sphère unité $S = \{t \in \mathbb{R}^p \,;\, \| t \| = 1\}$) ; le nombre $N(n)$ est la dimension de cet espace, en particulier on a $N(0) = 1$. Pour une information assez complète sur les harmoniques sphériques, on pourra consulter [26] et [34] .

b) Soit $B^{n,j}(u)$, $u \in \mathbb{R}^+$, $1 \leqslant j \leqslant N(n)$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de mouvements browniens, à indices scalaires, et mutuellement indépendants.

c) On considère par ailleurs les fonctionnelles suivantes :

$$(2.1.15)\quad \begin{cases} \alpha)\ d_0(u) = 2a\displaystyle\int_u^1 (1-v^2)^{(p-3)/2}\, dv, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1\ ; \\ \beta)\ d_n(u) = au^{n-1}(1-u^2)^{(p-1)/2}, \ 0 \leqslant u \leqslant 1,\ n \geqslant 1, \\ \text{avec :} \\ \gamma)\ a = \dfrac{\Gamma(\frac{p}{2})}{(4\pi)^{1/2}\,\Gamma(\frac{p-1}{2})}\ . \end{cases}$$

d) Finalement on définit les intégrales stochastiques

$$U_{n,j}(u) = \int_0^u d_n\,(v/u)dB^{n,j}(v),\ u \geqslant 0,\ 1 \leqslant j \leqslant N(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

On a alors :

Théorème 3. *Soit* $X(t),\ t \in \mathbb{R}^p,\ p \geqslant 2,$ *un mouvement brownien. Avec les notations* $\theta = t/\| t \|$ et $\| t \| = \tau$, *on a l'identité en loi des processus :*

$$(2.1.16)\qquad X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\ \sum_{j=1}^{N(n)} S_{n,j}(\theta)U_{n,j}(\tau)\,, \quad t \in \mathbb{R}^p\,,$$

la série figurant dans cette expression étant convergente dans l'espace L^2.

Terminons ce paragraphe par deux énoncés. Le premier donne un critère de "transience" du mouvement brownien $\overline{X}(t)$ - on pourra consulter [18] pour une preuve de ce résultat, le second concerne la distribution du maximum absolu du mouvement brownien X(t) à indice scalaire et n'est valable que dans ce cas restrictif (voir [21] pour une preuve).

Théorème 4. *Soit* $\overline{X}(t),\ t \in \mathbb{R}^p,\ p \geqslant 1,$ *un mouvement brownien à valeurs dans* $\mathbb{R}^n,\ n \geqslant 2.$ *Alors, avec le choix* $n > 2p$, *le processus* $\overline{X}(t)$ *est transient, soit explicitement :*

$$(2.1.17)\qquad P\{\ \lim_{A \uparrow +\infty}\ \inf_{\|t\| \geqslant A}\ \{\|\overline{X}(t)\|\}\ = +\infty\ \} = 1$$

Théorème 5. *Soit* $X(t),\ t \in \mathbb{R}$, *un mouvement brownien linéaire. Notons :*

$$M_0(X) = \sup\{|X(t)|, \quad 0 < t < 1\}.$$

Alors on a :

$$\textbf{(2.1.18)} \qquad P\{M_0(X) \leqslant \varepsilon\} = (4/\pi) \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1} e^{-(2i+1)^2\pi^2/8\varepsilon^2}$$

On en déduit, en particulier, le corollaire suivant.

Corollaire. *Soit* $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *un mouvement brownien linéaire à indice scalaire. Fixons un nombre* $\alpha > 0$, *il existe deux constantes* $a > b > 0$ *(ne dépendant que de* α*) telles que l'on ait :*

$$\textbf{(2.1.19)} \qquad e^{-a/\varepsilon^2} \leqslant P\{M_0(X) \leqslant \alpha\varepsilon\} \leqslant e^{-b/\varepsilon^2},$$

pour tout ε, $0 < \varepsilon \leqslant 1$.

(2.2) Le coefficient de corrélation. Soit $U(t)$, $t \in T$, un processus gaussien centré, indexé sur un ensemble quelconque. Pour toute partie $A \subset T$ on désigne par $e(A)$ le sous-espace vectoriel de L^2 engendré par les variables aléatoires $U(t)$, $t \in A$. Soit $\overline{e(A)}$ son adhérence dans L^2. Si A et B sont deux parties disjointes de T, $A \cap B = \emptyset$, on définit le coefficient de corrélation associé par :

$$\textbf{(2.2.1)} \qquad c(A,B) = \sup_{\substack{X \in e(A) \\ Z \in e(B) \\ \|X\| = \|Z\| = 1}} \langle X,Z \rangle$$

Les normes ainsi que le produit scalaire figurant dans cette expression étant ceux de l'espace L^2.

Désignons par $\Sigma(A) = \sigma\{U(t), t \in A\}$ et $\Sigma(B) = \sigma\{U(t), t \in B\}$ les plus petites tribus rendant mesurables les variables aléatoires appartenant respectivement aux sous-espaces $e(A)$ et $e(B)$. Une évaluation précise du coefficient de corrélation permet de majorer la différence $P(K \cap L) - P(K)P(L)$, pour des événements $K \in \Sigma(A)$, $L \in \Sigma(B)$. A cet effet on dispose du théorème suivant (dû à KOLMOGOROV-ROZANOV, voir [9]).

Théorème 6. *Pour tout choix* $K \in \Sigma(A)$, $L \in \Sigma(B)$ *on a :*

$$\textbf{(2.2.2)} \qquad |P(K \cap L) - P(K)P(L)| \leqslant (1/4)c(A,B).$$

Le calcul exact du coefficient $c(A,B)$ est rarement possible. Cependant, des estimations efficaces peuvent être, dans des cas particuliers, tout de même obtenues - des exemples précis en seront donnés au paragraphe (3.1). Dans cette perspective on pourra noter que la recherche du coefficient $c(A,B)$ se ramène à des évaluations de variances conditionnelles. En effet, fixons $X \in e(A)$, $\|X\| = 1$, et soit $Y = E(X|\Sigma(B))$ sa projection sur $\overline{e(B)}$. On a trivialement :

$$\sup_{\substack{Z \in e(B) \\ \|Z\|=1}} \langle X,Z \rangle = \sup_{\substack{Z \in e(B) \\ \|Z\|=1}} \langle Y,Z \rangle = \|Y\| = [1 - \|X-Y\|^2]^{1/2} .$$

Par suite si $d(X,e(B)) = \|X-Y\|$ désigne la distance du vecteur X au sous-espace e(B), alors l'identité (2.2.1) s'écrit :

(2.2.3) $$c(A,B) = \sup_{\substack{X \in e(A) \\ \|X\| = 1}} [1-d^2(X,e(B))]^{1/2}$$

$$= [1 - \inf_{\substack{X \in e(A) \\ \|X\| = 1}} d^2(X,e(B))]^{1/2} .$$

(2.3) Inégalités fondamentales pour les processus gaussiens généraux. Ce paragraphe présente une sélection de théorèmes auxquels nous ferons appel. Certains résultats sont nouveaux, notamment les théorèmes 12, 13 et 14.

Tous les vecteurs et processus gaussiens figurant dans ce paragraphe sont supposés être centrés.

Si A est une variable aléatoire gaussienne, on notera par $\|A\| = (E(A^2))^{1/2}$, sa norme quadratique.

Pour tout vecteur gaussien $X = (X_1,...,X_N)$, $N \geqslant 1$, à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, nous poserons :

$$M(X) = \sup\{|X_i|, \quad 1 \leqslant i \leqslant N\}.$$

De même, si U(t), $t \in T$, est un processus gaussien, à valeurs réelles, indexé sur un ensemble T, on note

$$M(U) = M(U,T) = \sup\{|U(t)|, \ t \in T\}.$$

Un couple $\{U(s), V(t)\}$, $s,t \in T$, de processus gaussiens, indexés sur un même ensemble T, sera dit gaussien lorsque pour tout choix de points $t_1,...,t_m \in T$, le vecteur associé $(U(t_1),...,U(t_m), V(t_1),...,V(t_m))$ est gaussien.

Dans tout ce qui suit l'ensemble T est une partie bornée d'un espace euclidien $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 1$.

Rappelons en premier lieu le résultat classique suivant, dû à T.W. ANDERSON [2].

Théorème 7. *Soit* $X = (X_1,...,X_N)$, $N \geqslant 1$, *un vecteur gaussien à valeurs dans* $\mathbb{R}^N$. *Pour tout disque (ensemble convexe symétrique)* $D \subset \mathbb{R}^N$ *et tout point*
$a = (a_1,...,a_N) \in \mathbb{R}^N$, *on a :*

$$(2.3.1)\quad \begin{cases} \text{a) } P\{X \in a+D\} \leqslant P\{X \in D\} \\ \quad \text{et en particulier} \\ \text{b) } P\{\mathrm{Sup}(X_i + a_i) \leqslant \alpha \,;\, 1 \leqslant i \leqslant N\} \leqslant P\{M(X) \leqslant \alpha\}\,. \end{cases}$$

On en déduit trivialement, via un argument élémentaire de conditionnement, la conséquence suivante :

Théorème 8. *Soient* $X = (X_1,\ldots,X_N)$, $Y = (Y_1,\ldots,Y_N)$, $N \geqslant 1$, *deux vecteurs gaussiens indépendants. Pour tout scalaire* $\alpha \geqslant 0$, *on a :*

$$(2.3.2)\qquad P\{M(X+Y) \leqslant \alpha\} \leqslant P\{M(X) \leqslant \alpha\}\,.$$

Qui, à son tour, implique facilement :

Théorème 9. *Soit* $Z = (X,Y)$, $X = (X_1,\ldots,X_N)$, $Y = (Y_1,\ldots,Y_M)$, $N \geqslant 1$, $M \geqslant 1$, *un vecteur gaussien. On fixe deux nombres* a,b, $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, *vérifiant l'inégalité :* $a^2b^2 \leqslant (1-a^2)(1-b^2)$. *Alors, pour tout choix de scalaires* $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, *on a :*

$$(2.3.4)\qquad P\{M(X) \leqslant \alpha \text{ et } M(Y) \leqslant \beta\} \geqslant P\{M(X) \leqslant a\alpha\}\, P\{M(Y) \leqslant b\beta\},$$

en particulier, en prenant $a = b = 1/\sqrt{2}$ *on obtient :*

$$(2.3.5)\qquad P\{M(X) \leqslant \alpha \text{ et } M(Y) \leqslant \beta\} \geqslant P\{M(X) \leqslant \alpha/\sqrt{2}\}P\{M(Y) \leqslant \beta/\sqrt{2}\}\,.$$

Toutes ces inégalités se généralisent immédiatement au cadre des processus gaussiens à trajectoires continues, soit explicitement :

Théorème 10 :

a) Soit T une partie bornée de $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 1$. *Considérons deux processus gaussiens* $U(t)$, $V(t)$, $t \in T$, *à valeurs réelles et à trajectoires continues. On suppose que le processus* $U(t)$, $t \in T$, *est indépendant du processus* $V(t)$, $t \in T$. *Alors, pour tout scalaire* $\alpha \geqslant 0$, on a :

$$(2.3.6)\qquad P\{M(U+V) \leqslant \alpha\} \leqslant P\{M(U) \leqslant \alpha\}\,.$$

b) Soit $\{U(t), V(s)\}$, $t,s \in T$, *un couple gaussien. On suppose que les trajectoires de ces deux processus sont continues. Fixons deux nombres* a,b, $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, *vérifiant l'inégalité* $a^2b^2 \leqslant (1-a^2)(1-b^2)$. *Alors, pour tout choix des scalaires* $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, *on a :*

$$(2.3.7)\qquad P\{M(U) \leqslant \alpha \text{ et } M(V) \leqslant \beta\} \geqslant P\{M(U) \leqslant a\alpha\}P\{M(V) \leqslant b\beta\},$$

et en particulier

$$(2.3.8)\qquad P\{M(U) \leqslant \alpha \text{ et } M(V) \leqslant \beta\} \geqslant P\{M(U) \leqslant (1/\sqrt{2})\alpha\}P\{M(V) \leqslant (1/\sqrt{2})\beta\}\,.$$

Dans certains cas particuliers l'inégalité (2.3.4) peut être renforcée. Ainsi par exemple lorsque les vecteurs X et Y intervenant dans l'énoncé du théorème 9 sont indépendants alors on obtient trivialement l'inégalité (en fait l'égalité) :

(2.3.9) $$P\{M(X) \leqslant \alpha \text{ et } M(Y) \leqslant \beta\} \geqslant P\{M(X) \leqslant \alpha\}P\{M(Y) \leqslant \beta\}.$$

La condition d'indépendance n'est cependant pas indispensable pour que la formule (2.3.9) soit satisfaite. En effet, on dispose du résultat partiel suivant (dû à L.D. PITT [29], voir également [7]).

Théorème 11. *Soit* $Z = (X,Y)$, $X = (X_1,X_2)$, $Y = (Y_1,\ldots,Y_M)$, $M \geqslant 1$, *un vecteur gaussien. Alors, pour tout choix de scalaires* $\alpha \geqslant 0$ *et* $\beta \geqslant 0$, *l'inégalité (2.3.9) est satisfaite.*

On ignore si la condition restrictive figurant ci-dessus et qui consiste à imposer au vecteur X d'être de dimension inférieure ou égale à deux, est vraiment nécessaire - à notre connaissance il s'agit là d'un problème ouvert. Indiquons maintenant une situation différente qui assure encore l'inégalité (2.3.9) et qui ne requiert pas, non plus, l'indépendance. Considérons à cet effet un vecteur $Z = (X,Y)$, $X = (X_1,\ldots,X_N)$, $Y = (Y_1,\ldots,Y_N)$, $N \geqslant 1$ admettant les propriétés suivantes :

a) Le vecteur Z est gaussien non-dégénéré, c'est-à-dire sa loi Z(P) admet une densité h(x,y) par rapport à la mesure de Lebesgue dxdy sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

b) Les vecteurs X et Y sont identiques en loi. Notons que la non-dégénérescence de Z implique encore que la loi commune X(P) = Y(P) admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$.

c) On a l'identité $E(X_iY_j) = E(X_jY_i)$, pour tout choix $i,j = 1,\ldots,N$ et la forme quadratique
$$q(u) = \sum u_iu_j\, E(X_iY_j),\ u = (u_1,\ldots,u_N) \in \mathbb{R}^N,$$
est positive. Cette propriété équivaut trivialement à l'existence d'un vecteur auxiliaire $U=(U_1,\ldots,U_N)$, gaussien et vérifiant l'identité
$$E(X_iY_j) = E(U_iU_j),\quad i,j = 1,\ldots,N.$$

Enonçons notre résultat.

Théorème 12. *Soit* $Z = (X,Y)$, *un vecteur gaussien satisfaisant les conditions a), b) et c) décrites ci-dessus. Alors pour tout choix* $\alpha \geqslant 0$, *on a :*

(2.3.10) $$P\{M(X) \leqslant \alpha \text{ et } M(Y) \leqslant \alpha\} \geqslant [P\{M(X) \leqslant \alpha\}]^2.$$

Preuve du théorème 12. La transformée de Fourier du vecteur Z s'écrit :

$$\mathfrak{F}(Z)(u,v) = E\{\exp i(\sum_{p=1}^{N} u_p X_p + \sum_{q=1}^{N} v_q Y_q)\}$$

$$= H(u,v)e^{-Q(u,v)}, \; u = (u_1,\ldots,u_N),\; v = (v_1,\ldots,v_N),\; u,v \in \mathbb{R}^N,$$

en notant

$$H(u,v) = \exp\{-(1/2)(\| \sum_{p=1}^{N} u_p X_p \|^2 + \| \sum_{q=1}^{N} v_q\, Y_q \|^2)\},$$

et

$$Q(u,v) = \sum_{p,q=1}^{N} u_p\, v_q\, E(X_p\, Y_q).$$

Le vecteur Z étant non-dégénéré, la densité $h(x,y)$, $x,y \in \mathbb{R}^N$, de sa loi, s'obtient en prenant la transformée de Fourier réciproque, soit encore :

(2.3.11) $$h(x,y) = (1/2\pi)^{2N} \iint e^{-i(<x,u> + <y,v>)} H(u,v)e^{-Q(u,v)}dudv,$$

la notation $< x,u >$ désignant le produit scalaire des vecteurs x et u dans l'espace $\mathbb{R}^N$.

Soit $g(x)$ la fonction indicatrice de l'ensemble $[-\alpha,\alpha]^N \subset \mathbb{R}^N$, c'est-à-dire : $g(x) = 1$ si l'on a $|x_i| \leqslant \alpha$, pour tout $i = 1,\ldots,N$, $x = (x_1,\ldots,x_N) \in \mathbb{R}^N$; $g(x) = 0$, dans le cas contraire.

En faisant appel à l'identité (2.3.11) nous pouvons écrire :

(2.3.12) $$P\{M(X) \leqslant \alpha \text{ et } M(Y) \leqslant \alpha\} = \iint g(x)g(y)h(x,y)dxdy$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, I_n \text{, avec les notations}$$

(2.3.13) $$I_n = \iint g(x)g(y)\{\iint e^{-i(<u,x> + <v,y>)} H(u,v)[Q(u,v)]^n dudv\}dxdy$$

et

$$c_n = (1/2\pi)^{2N}(-1)^n/n\,!\,.$$

Remarquons que la fonctionnelle $H(u,v)$ est la transformée de Fourier d'un couple auxiliaire (X',Y'), le vecteur X' étant indépendant du vecteur Y', et, les lois des quatre vecteurs X',Y', X et Y étant identiques, $X(P) = Y(P) = X'(P) = Y'(P)$. On en déduit la formule :

(2.3.14) $$I_0 = P\{M(X') \leqslant \alpha \text{ et } M(Y') \leqslant \alpha\} = [P\{M(X') \leqslant \alpha\}]^2$$

$$= [P\{M(X) \leqslant \alpha\}]^2\,.$$

Remarquons encore l'identité immédiate :

(2.3.15) $I_n = 0$, valable pour tout entier $n = 2\ell+1$ impair.

Pour établir (2.3.15), il suffit de procéder à des changements de variables évidents dans l'expression intégrale (2.3.13), en exploitant les identités $g(x) = g(-x)$, $H(u,v) = H(-u,v)$ et $Q(u,v) = -Q(-u,v)$.

Un bref examen des expressions (2.3.12), (2.3.14) et (2.3.15) nous fait apparaître clairement que la conclusion (2.3.10) recherchée découle immédiatement du lemme suivant :

Lemme. *Pour tout entier* n *pair,* $n = 2\ell$ *, on a* $I_n \geqslant 0$.

Montrons ce dernier point. Désignons à cet effet par $h(x)$ la densité de la loi du vecteur X. En vertu de l'hypothèse b) de l'énoncé du théorème, la fonction $h(x)$ est également la densité de la loi du vecteur Y. En écrivant ces densités sous la forme d'une transformée de Fourier on obtient :

(2.3.16) $$h(x)h(y) = (2\pi)^{-2N} \iint e^{-i(<x,u> + <y,v>)} H(u,v)dudv, \quad x,y \in \mathbb{R}^N .$$

Pour tout entier $n \geqslant 2$, introduisons l'ensemble $S_N^n = \{1,...,N\}^n$ des suites comportant n termes pris parmi les N premiers entiers naturels non nuls. Convenons de l'emploi des notations suivantes :

1) Soit $J = (j_1,...,j_n) \in S_N^n$, on désigne par D_J l'opérateur de dérivation partielle d'ordre n, défini par :

$$D_J h(y) = (\partial^n/\partial y_{j_1} \cdots \partial y_{j_n})h(y), \quad y = (y_1,...,y_N) \in \mathbb{R}^N .$$

2) Pour tout point $u = (u_1,...,u_N) \in \mathbb{R}^N$ et toute suite $J = (j_1,...,j_n) \in S_N^n$, on pose :

$$u(J) = \prod_{p=1}^{n} u_{j_p} .$$

3) Pour tout couple $J,K \in S_N^n$, on note :

$$c(J,K) = \prod_{p=1}^{n} E(X_{j_p} Y_{k_p}) , \qquad J = (j_1,...,j_n), \ K = (k_1,...,k_n) .$$

Avec ces conventions, nous pouvons écrire

(2.3.17) $$[Q(u,v)]^n = \sum_{J,K \in S_N^n} u(J)v(K)c(J,K).$$

Par ailleurs, en dérivant l'identité (2.3.16) on obtient :

(2.3.18) $$(D_J h(x))(D_K h(y)) = (-1)^n(2\pi)^{-2N} \iint e^{-i(<x,u> + <y,x>)} H(u,v)u(J)v(K)dudv,$$
$$x,y \in \mathbb{R}^N, \quad J,K \in S_N^n .$$

En revenant vers la formule (2.3.13) définissant I_n, nous déduisons de (2.3.17) et (2.3.18) l'identité

(2.3.19) $$I_n = (-1)^n \sum_{J,K} c(J,K)\left(\int g(x)D_J h(x)dx\right)\left(\int g(y)D_K h(y)dy\right).$$

Faisons appel finalement à l'hypothèse c) de l'énoncé du théorème. En vertu de cette hypothèse il existe une suite auxiliaire de vecteurs gaussiens $U(p) = (U_1^p,\dots,U_N^p)$, $p = 1,\dots,n$, vérifiant les conditions suivantes :

1) Les vecteurs U(p) sont identiquement distribués et mutuellement indépendants.
2) On a l'identité

$$E(X_i Y_j) = E(U_i^p U_j^p), \qquad i,j = 1,\dots,N, \qquad p = 1,\dots,n .$$

Notons encore pour simplifier

$$U(J) = \prod_{p=1}^{n} U_{j_p}^p , \quad J \in S_N^n$$

et

$$a(J) = \int g(x)D_J h(x)dx, \quad J \in S_N^n .$$

Fixons un entier pair $n = 2\ell$. En faisant appel aux conditions 1) et 2) énumérées ci-dessus, on voit que le coefficient c(J,K) intervenant dans la formule (2.3.19) peut s'écrire sous la forme

$$c(J,K) = \prod_{p=1}^{n} E(X_{j_p} Y_{k_p}) = \prod_{p=1}^{n} E(U_{j_p}^p U_{k_p}^p)$$
$$= E(U(J)U(K)),\ J = (j_1,\dots,j_n),\ K = (k_1,\dots,k_n).$$

Par suite, avec (2.3.19) nous obtenons l'identité

(2.3.20) $$I_{2\ell} = \sum_{J,K} E(U(J)U(K))a(J)a(K)$$

$$= E\Big(\Big|\sum_{J\in S_N^n} U(J)a(J)\Big|^2\Big) \geqslant 0.$$

Le lemme est donc démontré et par là le théorème également.

Remarque. L'hypothèse a), relative à la non-dégénérescence de la loi du vecteur Z n'est pas essentielle, un procédé standard permettant facilement de s'en affranchir.

Envisageons le cas d'un couple gaussien $\{U(s),V(t)\}$ $s,t \in T$, et supposons les conditions suivantes réunies :

a) Le processus $U(t), t \in T$ et $V(t), t \in T$, sont identiques en loi et ont des trajectoires continues ;
b) La fonctionnelle $c(s,t) = E(U(s)V(t))$, $s,t \in T$, est la covariance d'un processus gaussien indexé sur T.

Alors, en vertu du théorème 12 et de la remarque qui le suit, nous obtenons trivialement :

Théorème 13. *Sous les hypothèses a) et b) décrites ci-dessus, l'inégalité suivante est satisfaite :*

(2.3.21) $P\{M(U) \leqslant \alpha \text{ et } M(V) \leqslant \alpha\} \geqslant [P\{M(U) \leqslant \alpha\}]^2$, *pour tout choix de* $\alpha \geqslant 0$.

La condition b) étant réalisée rarement, à première vue le théorème 13 peut sembler d'un emploi assez restrictif. Cela étant, lorsque la condition b) n'est pas satisfaite il peut être tout de même intéressant de s'y ramener par une technique de perturbation. Explicitement, supposons que la fonctionnelle $c(s,t) = E(U(s)V(t))$, $s,t \in T$, soit symétrique $c(s,t) = c(t,s)$. Considérons par ailleurs un processus gaussien auxiliaire $W(t)$, $t \in T$, tel que, en posant $b(s,t) = E(W(s)W(t))$, $s,t \in T$, la fonctionnelle

$$a(s,t) = c(s,t) + b(s,t) \qquad s,t \in T,$$

soit, elle-même, une covariance d'un processus gaussien . Fixons une suite quelconque de points $t_1,\ldots,t_n \in T$. Il existe alors un vecteur gaussien $(W_1(t_1),\ldots,W_1(t_n), W_2(t_1),\ldots,W_2(t_n))$, indépendant du couple $\{U(s),V(t)\}$, $s,t \in T$, et vérifiant :

$$\begin{aligned} E(W_1(t_i)W_1(t_j)) &= E(W_2(t_i)W_2(t_j)) \\ &= E(W_1(t_i)W_2(t_j)) \\ &= b(t_i,t_j), \qquad i,j = 1,\ldots,n . \end{aligned}$$

L'existence d'un tel vecteur résulte trivialement du fait que la forme quadratique correspondante

$$\begin{aligned} Q(\alpha,\beta) &= \sum_{i,j} \alpha_i\, \alpha_j\, b(t_i,t_j) + \sum_{i,j} \beta_i \beta_j\, b(t_i,t_j) + 2\sum_{i,j} \alpha_i\, \beta_j\, b(t_i,t_j) \\ &= \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_i)(\alpha_j + \beta_j) b(t_i,t_j), \qquad \alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n), \\ &\qquad\qquad \beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n), \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}^n , \end{aligned}$$

est positive.

Considérons maintenant le vecteur gaussien $Z = (X,Y)$, $X = (X_1,\ldots,X_n)$, $Y = (Y_1,\ldots,Y_n)$, défini par :

$$X_i = U(t_i) + W_1(t_i), \quad Y_i = V(t_i) + W_2(t_i), \quad i = 1,\ldots,n.$$

D'après ce qui vient d'être dit, la fonctionnelle

$$a(t_i,t_j) = E(X(t_i)Y(t_j)) = c(t_i,t_j) + b(t_i,t_j) \qquad i,j = 1,\dots,n,$$

est une covariance d'un vecteur gaussien. Par suite le couple $Z = (X,Y)$ vérifie l'inégalité (2.3.10), soit encore :

(2.3.22) $\qquad P\{M(X) \leqslant \alpha \text{ et } M(Y) \leqslant \alpha\} \geqslant [P\{M(X) \leqslant \alpha\}]^2$.

Posons :

$$M(U,n) = \sup\{|U(t_i)|, \quad i = 1,\dots,n\},$$

et

$$M(V,n) = \sup\{|V(t_i)|, \quad i = 1,\dots,n\} .$$

En vertu de (2.3.2) on a également :

(2.3.23) $\qquad P\{M(U,n) \leqslant \alpha \text{ et } M(V,n) \leqslant \alpha\} \geqslant P\{M(X) \leqslant \alpha \text{ et } M(Y) \leqslant \alpha\}$.

De ce fait, en comparant (2.3.22) et (2.3.23) on obtient :

(2.3.24) $\qquad P\{M(U,n) \leqslant \alpha \text{ et } M(V,n) \leqslant \alpha\} \geqslant [P\{M(X) \leqslant \alpha\}]^2$.

Supposons que les trajectoires des processus $U(t)$, $V(t)$ et $W(t)$, $t \in T$, soient continues. En passant à la limite sur l'expression (2.3.24) on en déduit trivialement :

(2.3.25) $\qquad P\{M(U) \leqslant \alpha \text{ et } M(V) \leqslant \alpha\} \geqslant [P\{M(U+W) \leqslant \alpha\}]^2$, avec

$$M(U+W) = \sup\{|U(t) + W(t)| , \quad t \in T\}.$$

Fixons maintenant un nombre ε, $0 < \varepsilon < 1$. On a trivialement :

(2.3.26) $\qquad P\{M(U+W) \leqslant \alpha\} \geqslant P\{M(U) \leqslant \alpha(1-\varepsilon) \text{ et } M(W) \leqslant \alpha\varepsilon\}$.

En appliquant l'inégalité (2.3.4) (avec le choix $a = 1-\varepsilon$ et $b = \varepsilon$) on obtient

(2.3.27) $\quad P\{M(U) \leqslant \alpha(1-\varepsilon) \text{ et } M(W) \leqslant \alpha\varepsilon\} \geqslant P\{M(U) \leqslant \alpha(1-\varepsilon)^2\}P\{M(W) \leqslant \alpha\varepsilon^2\}$

En rassemblant (2.3.25), (2.3.26) et (2.3.27) on est conduit vers l'énoncé suivant :

Théorème 14. *Soit* $\{U(t),V(t)\}$, $t \in T$, *un couple gaussien vérifiant les propriétés suivantes :*
a) Les processus $U(t)$, $t \in T$, *et,* $V(t)$, $t \in T$, *sont identiques en loi et ont des trajectoires continues.*

b) La fonction $c(s,t) = E(U(s)V(t))$, $s,t \in T$, *est symétrique et il existe un processus gaussien* $W(t)$, $t \in T$, *à trajectoires continues tel que, en posant* $b(s,t) = E(W(s)W(t))$, *la fonctionnelle* $a(s,t) = c(s,t) + b(s,t)$ *soit une covariance d'un processus gaussien.*
Sous ces conditions, pour tout $\alpha \geqslant 0$ *et tout* ε, $0 < \varepsilon < 1$, *on a :*

(2.3.28) $$P\{M(U) \leqslant \alpha \text{ et } M(V) \leqslant \alpha\} \geqslant [P\{M(U) \leqslant \alpha(1-\varepsilon)^2\}P\{M(W) \leqslant \alpha\varepsilon^2\}]^2 .$$

Le procédé qui vient d'être décrit est surtout intéressant à appliquer lorsque une "petite" perturbation W s'avère suffisante pour accéder à l'expression (2.3.28) soit, en d'autres termes, lorsque la probabilité $P\{M(W) \leqslant \alpha\varepsilon^2\}$ intervenant dans cette formule est "assez grande" pour $\varepsilon > 0$ pris "assez petit" . On se reportera au paragraphe (4.1) où cette technique permet de démontrer l'estimation fondamentale (4.1.23).

Tous les théorèmes qui précèdent constituent des critères de comparaison en loi, des maximums absolus des processus gaussiens. Une minoration précise de la distribution du maximum absolu peut être, dans certains cas, obtenue par un argument d'entropie. Indiquons un résultat dans ce sens.

Théorème 15. *Soit* $K = \{U(t),\ t \in T\} \subset L^2$, *un processus gaussien à trajectoires continues. On suppose que l'ensemble* K *est relativement compact dans l'espace* L^2 *et contient l'origine. Soit* $N(K,u)$, $u > 0$, *le nombre minimal de boules de rayon* u *(pour la distance hilbertienne de l'espace* L^2*) formant un recouvrement de* K. *Alors pour tout* $\alpha \geqslant 0$ *on a :*

(2.3.29) $$P\{M(U) \geqslant C\alpha + m\} \leqslant (2/\sqrt{2\pi}) \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du,$$

avec

$$C = \sup\{[E(U^2(t))]^{1/2},\ t \in T\},$$

et

$$m = E(M(U)),$$

le nombre $m > 0$, *pouvant être précisé à l'aide du logarithme néperien* $\log N(K,u)$ *et d'une constante universelle* $A > 0$ *(indépendante de* K *et de* α*) selon l'inégalité*

(2.3.30) $$m \leqslant A \int_0^{d(K)} [\log N(K,u)]^{1/2} du,$$

où $d(K)$ *désigne le diamètre de l'ensemble* K, *soit :*

$$d(K) = \sup\{[E\{U(s)-U(t))^2\}]^{1/2},\ s,t \in T\}.$$

L'inégalité (2.3.29) a été obtenue par C. BORELL [3] ; l'estimation (2.3.30) est due à R.M. DUDLEY [8]. Pour d'autres résultats reposant sur la notion d'entropie, on pourra consulter [5], [11] et [35] (voir également le chapitre 15 du livre de J.P. KAHANE [17]).

Terminons ce paragraphe par l'énoncé d'une inégalité particulière concernant les densités des vecteurs gaussiens non-dégénérés. Plus précisément, fixons un vecteur gaussien $Z = (X,Y)$ avec $X = (X_1,X_2) \in \mathbb{R}^2$ et $Y = (Y_1,\dots,Y_N) \in \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$. Désignons par $h(x,y) = h(x_1,x_2,y)$, $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,\dots,y_N)$ la densité de la loi du vecteur Z puis, par $k(y)$, $y = (y_1,\dots,y_N)$ la densité de la loi Y(P) du vecteur Y. En vertu du théorème de Fubini ces deux densités sont trivialement reliées par la relation

(2.3.31) $$k(y) = \int_{\mathbb{R}^2} h(x_1,x_2,y)dx_1dx_2, \quad y = (y_1,\dots,y_N) \in \mathbb{R}^N$$

Avec le choix particulier $y = \vec{0}$, on obtient :

(2.3.32) $$D(Y)^{-1/2} = (2\pi)^{N/2} \int_{\mathbb{R}^2} h(x_1,x_2,0)dx_1dx_2 ,$$

où D(Y) est le déterminant de la matrice de covariance $(E(Y_iY_j))$ $i,j = 1,\dots,N$, du vecteur Y.

Ecrivons le vecteur Z sous la forme $Z = (Z_1,\dots,Z_{N+2})$ c'est-à-dire en posant $Z_1 = X_1$, $Z_2 = X_2$ et $Z_{2+i} = Y_i$ pour $i = 1,\dots,N$. Soit $\mathcal{Q} = (E(Z_iZ_j))$ $i,j = 1,\dots,N+2$, la matrice de covariance du vecteur Z. Notons par A le déterminant de $\mathcal{Q}$ et par $\mathcal{Q}^{-1} = (a_{ij})$ $i,j = 1,\dots,N+2$, la matrice inverse de $\mathcal{Q}$. Comme il est bien connu, la densité h(x,y) s'écrit

(2.3.33) $$h(x,y) = h(0,y)\exp\{-(1/2)(a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + c(y)x_1 + d(y)x_2)\} ,$$

avec

$$c(y) = 2 \sum_{i=3}^{N+2} a_{i1}y_{i-2} , \quad d(y) = 2 \sum_{i=3}^{N+2} a_{i2}\, y_{i-2}$$

et

$$h(0,y) = [(2\pi)^{N+2} A]^{-1/2} \exp\{-(1/2) \sum_{i,j=3}^{N+2} a_{ij}\, y_{i-2}\, y_{j-2} .$$

Une expression explicite de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^2} h(x_1,x_2,y)dx_1\, dx_2$ s'obtient aisément à partir de la formule élémentaire

(2.3.34) $$\int_{\mathbb{R}^2} \exp\{su + tv - (1/2)(au^2 + bv^2 + 2cuv)\}du\, dv$$
$$= 2\pi(ab-c^2)^{-1/2} \exp\{(as^2 + bt^2 - 2cst)/2(ab - c^2)\} ,$$

valable pour tout choix de nombres $a > 0$, $b > 0$, $ab - c^2 > 0$ et tout $s,t \in \mathbb{R}$.

Tenant compte de (2.3.31) nous pouvons donc exprimer la densité k(y) à l'aide des termes de la matrice $\mathcal{Q}^{-1}$, soit encore

$$(2.3.35)\qquad k(y) = \int_{\mathbb{R}^2} h(x_1,x_2,y)dx_1\, dx_2$$
$$= 2\pi(a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2)^{-1/2}\, h(0,y)\exp\{(1/8)[a_{11}\, c(y)^2 + a_{22}\, d(y)^2 - 2a_{12}\, c(y)d(y)]/(a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2)\}\ .$$

Posons y = 0 dans l'expression (2.3.25). En comparant avec (2.3.32) et en tenant compte de l'identité

$$(2.3.36)\qquad h(0,0) = [(2\pi)^{N+2}\, A]^{-1/2}\ ,$$

on retrouve un résultat classique concernant les déterminants des matrices symétriques, définies positives, notamment

$$(2.3.37)\qquad D(Y) = A(a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2\,).$$

Enonçons finalement l'inégalité envisagée.

Théorème 16. *Avec les notations qui précèdent, l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$(2.3.38)\qquad h(x,y) \leqslant (1/2\pi)k(y)[D(Y)/A]^{1/2}\ ,\quad \textit{pour tout}\quad y \in \mathbb{R}^N,$$

et tout $x \in \mathbb{R}^2$ *de la forme* $x = (s,s)$ *ou* $x = (s,-s)$, $s \in \mathbb{R}$.

Preuve du théorème 16. En se reportant aux identités (2.3.33), (2.3.35) et (2.3.37) on voit qu'il suffit d'établir le lemme suivant :

Lemme. *Fixons trois nombres* $a > 0, b > 0,\ c \in \mathbb{R}$, *vérifiant* $ab - c^2 > 0$. *Alors on a*

$$(2.3.39)\qquad \frac{au^2 + bv^2 - 2cuv}{4(ab-c^2)} + (a+b+2\delta c)s^2 + (u+\delta v)s \geqslant 0,$$

pour tout choix de $u,v,s \in \mathbb{R}$ *et* $\delta = \mp 1$.

En effet, pour démontrer (2.3.38) il suffira de comparer les expressions (2.3.33) et (2.3.35) en se servant pour cela de l'inégalité (2.3.39) dans laquelle on aura posé :

$$a = a_{11},\ b = a_{22},\ c = a_{12},\ u = c(y),\ \ v = d(y),\ \ s = x_1,\ \ \delta s = x_2\ .$$

La preuve de l'inégalité (2.3.39) étant absolument triviale, nous ne l'indiquerons pas.

(2.4) Quelques propriétés des processus auxiliaires $Y_w(t)$, $t \in \mathbb{R}^p, p \geqslant 2$, $w \geqslant 0$. Les processus considérés, associés à un mouvement brownien indexé sur $\mathbb{R}^{p+1}$ ont été introduits au paragraphe (2.1) par la formule (2.1.9). Précisons quelques notations supplémentaires.

Pour tout point $t \in \mathbb{R}^p$ et tout $\varepsilon > 0$ on désigne par $B(t,\varepsilon) = \{s \in \mathbb{R}^p ; \|t-s\| \leqslant \varepsilon\}$ la boule euclidienne de l'espace $\mathbb{R}^p$, de centre t et de rayon $\varepsilon > 0$. Une telle boule étant fixée on note :

(2.4.1) $$M(U,B(t,\varepsilon)) = \sup\{|U(s)|, \quad s \in B(t,\varepsilon)\},$$

le processus $U(s)$, $s \in \mathbb{R}^p$, étant défini par

(2.4.2) $$U(s) = Y_0(s) - Y_0(t), \qquad s \in \mathbb{R}^p.$$

Fixons une suite $S = \{t_1,\dots,t_N\} \subset \mathbb{R}^p$, $N \geqslant 3$, de points $t_i = (u_i, x_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p-1}$, vérifiant :

1) $t_i \neq t_j$ si $i \neq j$, $i,j = 1,\dots,N$;
2) $u_i \neq 0$, $i = 1,\dots,N$;
3) $\|x_i\| \neq 0$, $i = 1,\dots,N$,

puis posons
$$M(Y_w,S) = \sup\{|Y_w(t)|, \quad t \in S\}$$

$$M(Y_w,S(\ell)) = \sup\{|Y_w(t)|, \quad t \in S(\ell), \quad \ell = 1,\dots,N\},$$

avec la notation $S(\ell) = S \setminus \{t_\ell\}$.

Considérons le processus $Y_0'(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, défini par
$$Y_0'(u,x) = Y_0(-u,x), \qquad t = (u,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p-1},$$

puis posons encore

$$M(Y_0',S) = \sup\{|Y_0'(t)|, \quad t \in S\},$$

et

$$M(Y_0',S(\ell)) = \sup\{|Y_0'(t)|, \quad t \in S(\ell)\}.$$

La suite $S = \{t_1,\dots,t_N\}$ étant fixée, ainsi que le nombre $\beta > 0$, introduisons la fonction

(2.4.3) $$f(w,S,\beta) = P\{M(Y_w,S) \leqslant \beta \text{ et } M(Y_0',S) \leqslant \beta\}, \quad w \geqslant 0.$$

Pour tout couple $\ell,q = 1,\dots,N$, on notera également,

(2.4.4) $$f(w,S(\ell,q),\beta) = P\{M(Y_w,S(\ell)) \leqslant \beta \text{ et } M(Y_0',S(q)) \leqslant \beta\}, \quad w \geqslant 0.$$

Ces notations étant acquises, rappelons l'identité en loi (découlant de (2.1.7) et (2.1.10))

$$Y_w(t) = Y'_0(t), \quad t \in \mathbb{R}^p, \; w \geqslant 0,$$

ainsi que la symétrie (voir (2.1.13))

$$E(Y_w(s)Y'_0(t)) = E(Y_w(t)Y'_0(s)), \qquad s,t \in \mathbb{R}^p .$$

Nous en déduisons, en particulier, l'égalité

(2.4.5) $\qquad f(w,S(\ell,q),\beta) = f(w,S(q,\ell),\beta) \;, \qquad \ell,q = 1,\ldots,N.$

Remarquons finalement que les trajectoires des processus $Y_w(t)$ et $Y'_0(t)$, $t \in T$, $w \geqslant 0$, sont toutes continues (car le mouvement brownien à partir duquel ils ont été construits est à trajectoires continues).

Le mode de construction implique encore trivialement que, pour tout $w \geqslant 0$, le couple $\{Y_w(s), Y'_0(t)\}$, $s,t \in \mathbb{R}^p$, est gaussien.

Les résultats qui vont suivre nous seront utiles lors de la preuve des inégalités fondamentales (4.1.22) et (4.1.23). Ils concernent essentiellement quatre types de questions :

A) Recherche d'une minoration efficace des probabilités

$$P\{M(U,B(t,\varepsilon^2)) \leqslant \varepsilon^{1-\alpha}\}, \; \varepsilon > 0, \; t \in \mathbb{R}^p ,$$

le nombre α, $0 < \alpha < 1$, étant fixé.

B) Mise en évidence d'une perturbation appropriée (à trajectoires continues) $W(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, du couple gaussien $\{Y_w(s), Y'_0(t)\}$, $s,t \in \mathbb{R}^p$, $w > 0$.

C) Minoration efficace des probabilités de la forme

$$P\{M(W,D(\varepsilon^2)) \leqslant \varepsilon^{1+\alpha}\} , \; \varepsilon > 0,$$

où

$$M(W,D(\varepsilon^2)) = \sup\{|W(t)| \;, \; t \in D(\varepsilon^2)\},$$

est le maximum de la perturbation $W(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, du couple gaussien $\{Y_w(s), Y'_0(t)\}$,$s,t \in \mathbb{R}^p$, restreinte au cylindre

$$D(\varepsilon^2) = \{t = (u,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p-1} \,;\, 0 < u < 1/2, \; \|x\| \leqslant \varepsilon^2\} ,$$

et associée à un choix du paramètre w, de la forme $w = \varepsilon^{2\alpha}$, $1/2 < \alpha < 1$.

D) Etude de la dérivée de la fonction $w \to f(w,S,\beta)$ et plus exactement, majoration du quotient $|f_w(S,\beta)|/f(w,S,\beta)$, où on a noté par

$$f_w(S,\beta) = (\partial/\partial w)f(w,S,\beta),$$

la dérivée envisagée.

Solution du problème A . Elle s'obtient en appliquant le théorème 15 du paragraphe (2.3). Posons à cet effet

$$K = \{U(s),\ s \in B(t,\varepsilon^2)\} \subset L^2 ,$$

et évaluons les constantes C, m et d(K) intervenant dans l'énoncé du théorème 15.

Notons, en premier lieu, l'identité :

$$\textbf{(2.4.6)} \qquad E\{(U(s)-U(s'))^2\} = E\{(Y_0(s)-Y_0(s'))^2\}$$
$$= \|x\| + \|y\| - \{[\|x\|^2 + (u-v)^2]^{1/2} + [\| y \|^2 + (u-v)^2]^{1/2} - [\| x-y \|^2 + (u-v)^2]^{1/2} - |u-v|\},$$

avec

$$s = (u,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p-1} \quad \text{et} \quad s' = (v,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p-1} ,$$

résultant de la définition (2.4.2) du processus $U(s)$, $s \in \mathbb{R}^p$, de l'identité en loi (2.1.10) et de la formule (2.1.8).

Nous en déduisons la majoration

$$E\{(U(s) - U(s'))^2\} \leqslant [\| x-y \|^2 + (u-v)^2]^{1/2} + |u-v| ,$$

soit encore

$$\textbf{(2.4.7)} \qquad E\{(U(s) - U(s'))^2\} \leqslant 2\| s-s'\| , \quad s,s' \in \mathbb{R}^p.$$

En faisant appel une seconde fois à la formule (2.1.8) on obtient trivialement :

$$\textbf{(2.4.8)} \qquad E(U^2(s)) = E\{(Y_0(s) - Y_0(t))^2\}$$
$$= \|x\| + \|x_0\| - \{[\|x\|^2 + (u-u_0)^2]^{1/2} + [\|x_0\|^2 + (u-u_0)]]^{1/2} - [\|x-x_0\|^2 + (u-u_0)^2]^{1/2} - |u-u_0 | \}$$
$$\leqslant [\|x-x_0\|^2 + (u-u_0)^2]^{1/2} + |u-u_0 | ,$$

avec $s = (u,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p-1}$ et $t = (u_0,x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p-1}$,

d'où la majoration :

$$\textbf{(2.4.9)} \qquad E(U^2(s)) \leqslant 2 \|t-s\| , \quad s \in \mathbb{R}^p .$$

L'inégalité (2.4.9) donne immédiatement

(2.4.10) $$C = \sup_{s \in B(t,\varepsilon^2)} [E(U^2(s))]^{1/2} \leqslant \sqrt{2}\,\varepsilon\,, \ \varepsilon > 0.$$

De la même manière, l'inégalité (2.4.7) implique :

(2.4.11) $$d(K) = \sup_{s,s' \in B(t,\varepsilon^2)} [E\{(U(s) - U(s'))^2\}]^{1/2} \leqslant 2\,\varepsilon\,.$$

Faisons appel finalement à la formule (2.3.30) qui permet d'obtenir une majoration de la constante m. Remarquons, à cet effet, que l'inclusion

$$B(0,\varepsilon^2) \subset [-\varepsilon^2,\varepsilon^2]^p \subset \mathbb{R}^p\,, \ \varepsilon > 0,$$

implique que pour tout δ, $0 < \delta < 2\varepsilon$, le nombre minimal de boules de rayon $\delta^2/2$ (pour la métrique de l'espace $\mathbb{R}^p$) formant un recouvrement de $B(t,\varepsilon^2)$ est majoré par

$$[(2\varepsilon^2)/(\delta^2/2\sqrt{p}) + 1]^p \leqslant (8\sqrt{p})^p(\varepsilon/\delta)^{2p} + 2^p\,.$$

Par suite si $N(K,\delta)$ désigne le nombre minimal de boules, de rayon δ, (pour la métrique de l'espace L^2) formant un recouvrement de K, alors, en se reportant à (2.4.7) on voit que l'on a :

(2.4.12) $$N(K,\delta) \leqslant (8\sqrt{p})^p(\varepsilon/\delta)^{2p} + 2^p$$

Avec (2.3.30) (et par un changement de variables élémentaires), on en tire l'inégalité

(2.4.13) $$m \leqslant A\int_0^{2\varepsilon} \{\log[(8\sqrt{p})^p(\varepsilon/\delta)^{2p} + 2^p\,]\}^{1/2} d\delta = B\varepsilon\,, \qquad \varepsilon > 0,$$

où $B = B(p) > 0$ est une constante ne dépendant que de la dimension $p \geqslant 2$.

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer (2.3.29). Ainsi avec (2.4.10) et (2.4.13) il vient :

$$\begin{aligned} P\{M(U,B(t,\varepsilon^2)) \geqslant a\sqrt{2}\varepsilon + B\varepsilon\} &\leqslant (2/\sqrt{2\pi}) \int_a^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du \\ &\leqslant (2/\sqrt{2\pi}\ a)e^{-a^2/2}\,, \quad a > 0. \end{aligned}$$

Avec le choix $a = (1/\sqrt{8})\varepsilon^{-\alpha}$, on obtient l'inégalité

$$P\{M(U,B(t,\varepsilon^2)) \geqslant (1/2)\varepsilon^{1-\alpha} + B\varepsilon\} \leqslant (4\varepsilon^{\alpha}/\sqrt{\pi})\exp\{-(1/16)\varepsilon^{-2\alpha}\}$$

valable pour tout $\varepsilon > 0$.

Nous en déduisons aisément l'énoncé suivant :

Proposition 1. *Fixons les nombres* $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$ *et* $d > 0$. *Il existe une constante* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\alpha,\beta,d,p) > 0$, *ne dépendant que de* α,β,d, *et de la dimension* p *de l'espace des indices, de sorte que l'on ait*

(2.4.14) $$P\{M(U,B(t,d\varepsilon^2)) \geqslant \beta\varepsilon^{1-\alpha}\} \leqslant \exp(-1/\varepsilon^{\alpha}),\ \textit{pour tout}\ \varepsilon,\ 0<\varepsilon<\varepsilon_0\ \textit{et tout}\ t \in \mathbb{R}^p.$$

Abordons, à son tour, le problème B), c'est-à-dire la recherche d'une perturbation convenable $W(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, du couple gaussien $\{Y_w(s), Y_0'(t)\}$, $s,t \in \mathbb{R}^p$. Notons

$$b(w,s,t) = E(Y_w(s)Y_0(t))$$

et

$$c(w,s,t) = E(Y_w(s)Y_0'(t)) \qquad s,t \in \mathbb{R}^p,$$

l'écriture explicite des fonctionnelles $b(w,s,t)$ et $c(w,s,t)$ étant donnée par (2.1.12) et (2.1.13).

La solution du problème B) s'exprime sous la forme suivante :

Proposition 2.

1) *Il existe un processus gaussien centré* $W(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, *à trajectoires continues et satisfaisant l'identité*

$$b(w,s,t) = E(W(s)W(t)), \qquad s,t \in \mathbb{R}^p,\ w > 0.$$

2) *La fonctionnelle*

$$a(w,s,t) = b(w,s,t) + c(w,s,t) \quad s,t \in \mathbb{R}^p,\ w > 0,$$

est une covariance d'un processus gaussien.

Preuve de la proposition 2. Pour établir la propriété 1) il suffit de vérifier que pour tout choix d'une suite de points $t_j = (u_j,x_j) \in \mathbb{R}^{p-1}$, $j = 1,\dots,N$, la forme quadratique associée

$$q(\alpha) = \sum_{k,\ell=1}^{N} \alpha_k\,\alpha_\ell\; b(w,t_k,t_\ell),\quad \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_N) \in \mathbb{R}^N,$$

est positive.

Pour le voir, nous allons écrire $q(\alpha)$ sous la forme d'une intégrale. Posons à cet effet

$$h(z,y) = (4\pi z)^{(1-p)/2}\exp(-\|y\|^2/4z),\ z>0,\ y \in \mathbb{R}^{p-1},$$
$$h(0,y) = 0, \quad y \in \mathbb{R}^{p-1},$$

puis encore

$$f(z) = 1-e^{iz} \ \text{ et } \overline{f(z)} = 1 - e^{-iz},\ z \in \mathbb{R}.$$

Fixons $w > 0$ et considérons la mesure positive $d\mu_w(z,y)$ définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{p-1}$ par :

$$d\mu_w(z,y) = (a/z^{3/2})h(z,y)\exp(-zw^2)dzdy, \quad z \in \mathbb{R}^+, \, y \in \mathbb{R}^{p-1},$$

où $a > 0$ est la constante

$$a = \left[\, 2\int_0^{+\infty} \frac{(1-e^{-z})}{z^{3/2}}\, dz\right]^{-1} .$$

L'identité (2.1.13) et les formules élémentaires

$$\text{(2.4.15)} \qquad a\int_0^{+\infty}\frac{(1-e^{-\alpha z})}{z^{3/2}}dz = (1/2)\alpha^{1/2}, \; \alpha > 0$$

et

$$\text{(2.4.16)} \qquad \int e^{i<x,y>} h(z,y)dy = \int e^{-i<x,y>} h(z,y)dy = e^{-z\|x\|^2}, \; z > 0, \, x \in \mathbb{R}^{p-1}$$

conduisent vers l'identité

$$\text{(2.4.17)} \qquad \int f(<x,y>)\overline{f(<x',y>)}e^{-z(u-v)^2}\, d\mu_w(z,y) = b(w,s,t),$$

avec $s = (u,x)$, $t = (v,x')$.

Cette expression implique la représentation suivante

$$\text{(2.4.18)} \qquad q(\alpha) = \sum_{k,\ell=1}^{N} \alpha_k\, \alpha_\ell\; b(w,t_k,t_\ell)$$

$$= \int \sum_{k,\ell=1}^{N} \alpha_k\, \alpha_\ell\, f(<x_k,y>)\overline{f}(<x_\ell,y>)\exp[\,-z(u_k - u_\ell)^2]\; d\mu_w(z,y),$$

en posant $t_k = (u_k,x_k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p-1}$, $k = 1,\ldots,N$.

On en déduit l'identité

$$\text{(2.4.19)} \qquad q(\alpha) = \int \sum_{n=0}^{+\infty} (2z)^n (n\,!)^{-1} \left| \sum_{k=1}^{N} \alpha_k\, u_k^n\, f(<x_k,y>)\exp(-zu_k^2) \right|^2 d\mu_w(x,y) \geqslant 0,$$

qui exprime le résultat souhaité.

La preuve du point 2) relève du même principe. Considérons la forme quadratique

$$q_1(\alpha) = \sum_{k,\ell=1}^{N} \alpha_k\, \alpha_\ell\; a(w,t_k,t_\ell), \quad \alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_N) \in \mathbb{R}^N,$$

$$t_k = (u_k, x_k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p-1},\ k = 1,\dots,N$$

avec

$$a(w,t_k,t_\ell) = b(w,t_k,t_\ell) + c(w,t_k,t_\ell)$$

et montrons que $q_1(\alpha)$ est positive.

En remplaçant v par -v dans la formule (2.4.17) on obtient :

$$\text{(2.4.20)} \qquad \int f(< x,y >)\overline{f}(< x',y >)e^{-z(u+v)^2}\, d\mu_w(z,y) = b(w,(u,x),(-v,x')) = c(w,s,t)$$

avec $s = (u,x)$ et $t = (v,x')$.

Par suite $q_1(\alpha)$ admet la représentation :

$$\text{(2.4.21)} \qquad q_1(\alpha) = \int \sum_{k,\ell=1}^{N} \alpha_k\, \alpha_\ell\, f(< x_k,y >)\overline{f}(< x_\ell ,y >) \{\exp[-(u_k - u_\ell)^2] + \exp[-(u_k + u_\ell)^2]\} d\mu_w(z,y),$$

soit encore :

$$\text{(2.4.22)} \quad q_1(\alpha) = 2 \int \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} \left| \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k^{2n}\, f(< x_k,y >)\exp(-zu_k^2) \right|^2 d\mu_w(z,y) \geqslant 0,$$

ce qui démontre le point 2) de la proposition 2.

Procédons maintenant à l'examen du point C). Fixons donc α, $1/2 < \alpha < 1$, puis considérons la perturbation $W(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, du couple gaussien $\{Y_w(s), Y_0'(t)\}$, $s,t \in \mathbb{R}^p$, décrite par l'énoncé de la proposition 2 et correspondant au choix $w = \varepsilon^{2\alpha}$, $0 < \varepsilon < 1$. Pour minorer la distribution du maximum

$$M(W,D(\varepsilon^2)) = \sup\{|W(t)|,\ t \in D(\varepsilon^2)\},$$

nous ferons appel, comme cela a été le cas lors de la preuve du point A), au théorème 15 du paragraphe (2.3). Ainsi, avec (2.1.12) nous obtenons

$$\text{(2.4.23)} \qquad E(W^2(t)) = b(w,t,t) = [\, \|x\|^2 + w^2]^{1/2} - w \leqslant \|x\|^2\, w^{-1}, \quad \text{avec } t = (u,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p-1}.$$

En prenant $w = \varepsilon^{2\alpha}$ (et en rappelant que pour tout $t = (u,x) \in D(\varepsilon^2)$ on a $\|x\| \leqslant \varepsilon^2$), nous en déduisons

$$\text{(2.4.24)} \qquad C = \sup_{t \in D(\varepsilon^2)} [E(W^2(t))]^{1/2} \leqslant \varepsilon^{2-\alpha}.$$

La formule (2.1.12) implique encore :

(2.4.25) $$E\{(W(t)-W(t'))^2\} = E(W^2(t)) + E(W^2(t')) - 2E(W(t)W(t'))$$
$$\leqslant [\ \|x-x'\|^2 + (u-u')^2 + w^2]^{1/2} + [(u-u')^2 + w^2]^{1/2} - 2w,$$

avec $t = (u,x)$ et $t' = (u',x')$,

puis, avec des majorations évidentes :

(2.4.26) $$E\{(W(t) - W(t'))^2\} \leqslant 2\|t-t'\| .$$

Notons

$$K_1 = \{W(t),\ t \in D(\varepsilon^2)\} \subset L^2 .$$

D'après (2.4.24) on a :

(2.4.27) $$d(K_1) = \sup_{t,t' \in D(\varepsilon^2)} [E\{(W(t) - W(t'))^2\}]^{1/2}$$

$$\leqslant 2 \sup_{t \in D(\varepsilon^2)} [E(W^2(t))]^{1/2} \leqslant 2\varepsilon^{2-\alpha} .$$

Donnons finalement une estimation du nombre minimal de boules (pour la métrique de l'espace L^2) de rayon $\delta > 0$, formant un recouvrement de K_1 . L'inclusion

$$D(\varepsilon^2) \subset [0,1] \times [-\varepsilon^2,\varepsilon^2]^{p-1} ,$$

implique que le nombre minimal de boules rayon $\delta^2/2$ (pour la métrique de l'espace $\mathbb{R}^p$) formant un recouvrement de $D(\varepsilon^2)$, est majoré par

$$(1 + 2\sqrt{p}\ \delta^{-2})[1 + 4\sqrt{p}(\varepsilon/\delta)^2]^{p-1} ,\ \varepsilon > 0.$$

Avec les notations du théorème 15 du paragraphe (2.3) nous en déduisons d'après (2.4.26) l'inégalité

(2.4.28) $$N(K_1,\delta) \leqslant c(p)[\delta^{-2} + (\varepsilon^{2(p-1)}/\delta^{2p})] ,$$

la constante $c(p) > 1$ ne dépendant que de la dimension p de l'espace des indices.

Les estimations (2.4.27) et (2.4.28) associées à la formule (2.3.30) donnent alors :

(2.4.29) $$m \leqslant A \int_0^{2\varepsilon^{2-\alpha}} \{\log c(p)[\delta^{-2} + (\varepsilon^{2(p-1)}/\delta^{2p})]\}^{1/2} d\delta$$

$$\leqslant B_1(p)\varepsilon^{2-\alpha} \log 1/\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

la constante $B_1(p) > 0$ ne dépendant que de la dimension $p \geqslant 2$.

Faisons appel à la formule (2.3.29). Les inégalités (2.4.24) et (2.4.29) nous autorisent à écrire :

$$P\{M(W,D(\varepsilon^2)) \geqslant a\varepsilon^{2-\alpha} + B_1(p)\varepsilon^{2-\alpha} \log 1/\varepsilon\} \leqslant (2/\sqrt{2\pi})\int_a^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du$$

$$\leqslant (2/\sqrt{2\pi})a^{-1}e^{-a^2/2}, \quad a > 0.$$

Avec le choix $a = (1/2)\varepsilon^{-\gamma}$, $\gamma > 0$, on obtient :

$$P\{M(W,D(\varepsilon^2)) \geqslant (1/2)\varepsilon^{2-\alpha-\gamma} + B_1(p)\varepsilon^{2-\alpha} \log 1/\varepsilon\} \leqslant (4\varepsilon^{\gamma}/\sqrt{2\pi})\exp(-1/8\varepsilon^{2\gamma}).$$

On peut alors énoncer :

Proposition 3. *Fixons deux nombres* α, γ *vérifiant* $1/2 < \alpha < 1$, $0 < \gamma < 1-\alpha$, *puis considérons la perturbation* $W(t), t \in \mathbb{R}^p$, *décrite par la proposition 2 et associée au choix du paramètre* $w = \varepsilon^{2\alpha}$. *Il existe alors une constante* $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\alpha,\gamma,p) > 0$, *telle que l'on ait*

(2.4.30) $\qquad P\{M(W,D(\varepsilon^2)) \leqslant \varepsilon^{2-\alpha-\gamma}\} \geqslant 1 - \exp(-1/2\varepsilon^{\gamma})$, *pour tout* ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$.

Abordons finalement le dernier problème, envisagé au début de ce paragraphe.

Problème D. Fixons une suite de points $t_i = (u_i,x_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p-1}$, $i = 1,\ldots,N$, vérifiant :

$$\textbf{(2.4.31)} \quad \begin{cases} 1)\ t_i \neq t_j \quad \text{si } i \neq j,\ i,j = 1,\ldots,N\,; \\ 2)\ \|x_i\| \neq 0, \qquad i = 1,\ldots,N\,; \\ 3)\ u_i \neq 0, \qquad i = 1,\ldots,N\,. \end{cases}$$

En faisant appel aux notations introduites lors de la preuve du théorème 12 du paragraphe (2.3) nous poserons :

$$H(u,v) = \exp\Big\{-(1/2)\Big(\|\sum_{\ell=1}^{N} u_\ell Y_w(t_\ell)\|^2 + \|\sum_{\ell=1}^{N} v_\ell\, Y'_o(t_\ell)\|^2\Big)\Big\}$$

et

$$Q(w,u,v) = \sum_{\ell,q=1}^{N} u_\ell v_q\, E\big(Y_w(t_\ell)Y'_o(t_q)\big),$$

avec $u = (u_1,\ldots,u_N)$, $v = (v_1,\ldots,v_N)$, $u,v \in \mathbb{R}^N$.

Avec ces conventions d'écriture, la transformée de Fourier de la loi du vecteur $Z_w = (Y_w,Y'_o)$, $Y_w = (Y_w(t_1),\ldots,Y_w(t_N))$ et $Y'_o = (Y'_o(t_1),\ldots,Y'_o(t_N))$, s'écrit :

$$(2.4.32) \qquad \mathcal{F}(Z_w)(u,v) = E(\exp i < Z_w,(u,v) >) = H(u,v)\exp\{-Q(w,u,v)\}, \qquad u,v \in \mathbb{R}^N .$$

Remarquons par ailleurs que le choix particulier des points t_i, $i = 1,\ldots,N$, exprimé par la conditions (2.4.31) implique que la loi du vecteur Z_w est non-dégénérée. Cette propriété est une conséquence immédiate de la remarque qui suit le théorème 1 du paragraphe (2.1). En effet, la dégénérescence éventuelle de la loi du vecteur Z_w équivaut au fait qu'une relation de la forme (égalité dans L^2)

$$\Sigma\, \alpha_i\, Y_w(t_i) \; + \Sigma\, \beta_i\, Y_o'(t_i) = 0$$

soit satisfaite pour un choix de scalaires α_i, β_i, $i = 1,\ldots,N$, non-identiquement nuls. En revenant vers le mouvement brownien $X(s)$, $s \in \mathbb{R}^{p+1}$, qui a permis de construire les processus $Y_w(t)$ et $Y_o'(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$ une telle relation s'écrit

$$\Sigma\alpha_i\,[X(w,(u_i,t_i)) - X(w,(u_i,0))] + \Sigma b_i\,[X(0,(-u_i,x_i)) - X(0,(-u_i,0))] = 0.$$

Supposons qu'il existe un indice i_0 pour lequel on ait $\alpha_{i_0} \neq 0$. La variable aléatoire $X(w,(u_{i_0},t_{i_0}))$ s'écrira donc comme combinaison linéaire des variables restantes. Or ces dernières sont indexées par des points (appartenant à l'espace $\mathbb{R}^{p+1}$) qui, en vertu de (2.4.31), sont tous distincts du vecteur $(w,(u_{i_0},x_{i_0}))$. D'après le théorème 1 on se trouve confronté à une contradiction. De la même manière s'il existe un coefficient $\beta_{i_0} \neq 0$ alors, la non-répétition du vecteur $(0,(-u_{i_0},x_{i_0}))$ associé, nous mène encore vers une conclusion absurde. La loi du vecteur Z_w est donc bien non-dégénérée et sa densité $h(w,x,y)$ s'obtient en prenant la transformée de Fourier réciproque, soit

$$(2.4.33) \qquad h(w,x,y) = (1/2\pi)^{2N} \iint e^{-i(< x,u > + < y,v >)}\, H(u,v)\exp\{-Q(w,u,v)\}du\, dv.$$

Observons maintenant que le paramètre $w \geqslant 0$ n'intervient dans l'expression intégrale donnant $h(w,x,y)$ que au niveau de la fonctionnelle $Q(w,u,v)$. Pour simplifier nous noterons par

$$(2.4.34) \qquad h_w(x,y) = (\partial/\partial w)h(w,x,y) \quad \text{et} \quad c_w(s,t) = (\partial/\partial w)c(w,s,t)$$

les dérivées partielles par rapport à w des fonctionnelles $w \to h(w,x,y)$ et $w \to c(w,s,t)$. Un calcul élémentaire effectué à partir de l'écriture explicite (2.1.13) des covariances $c(w,t_\ell,t_q) = E(Y_w(t_\ell)Y_o'(t_q))$, donne alors :

$$(2.4.35) \qquad c_w(t_\ell,t_q) = (w/2)\{\, [\|x_\ell\|^2 + (u_\ell+u_q)^2 + w^2\,]^{1/2} + [\|x_q\|^2 + (u_\ell+ u_q)^2 + w^2\,]^{-1/2} - [\|x_\ell - x_q\|^2 + (u_\ell + u_q)^2 + w^2\,]^{-1/2} - [(u_\ell+u_q)^2 + w^2\,]^{-1/2} \,\} .$$

Une dérivation sous le signe intégral, aisément justifiable, permet d'obtenir à partir de (2.4.33) l'identité

$$(2.4.36) \qquad h_w(x,y) = -(1/2\pi)^{2N} \iint e^{-i(<x,u>+<y,v>)} H(u,v)\Big[\sum_{\ell,q=1}^{N} u_\ell v_q c_w(t_\ell,t_q)\Big] \times \exp\{-Q(w,u,v)\} du\, dv.$$

Notons encore par

$$(2.4.37) \qquad D_{\ell q} h(w,x,y) = (\partial^2/\partial x_\ell\, \partial y_q) h(w,x,y)$$

la dérivée partielle d'ordre deux de la fonction $(x_\ell,y_q) \to h(w,x,y)$, $x = (x_1,\ldots,x_N)$, $y = (y_1,\ldots,y_N)$. En dérivant l'égalité (2.4.33) par rapport à x_ℓ et y_q, on obtient :

$$(2.4.38) \qquad D_{\ell q} h(w,x,y) = -(1/2\pi)^{2N} \iint e^{-i(<x,u>+<y,v>)} u_\ell v_q H(u,v) \times \exp\{-Q(w,u,v)\} du\, dv, \qquad \ell,q = 1,\ldots,N.$$

En confrontant les identités (2.4.36) et (2.4.38) on est conduit vers la formule

$$(2.4.39) \qquad h_w(x,y) = \sum_{\ell,q=1}^{N} c_w(t_\ell,t_q) D_{\ell q}\, h(w,x,y).$$

Revenons finalement vers la fonction $f(w,S,\beta)$ qui constitue l'objet de notre étude. Elle s'écrit trivialement

$$(2.4.40) \qquad f(w,S,\beta) = \iint g(x)g(y)h(w,x,y)dx\, dy,$$

où $g(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, désigne la fonction indicatrice du pavé $[-\beta,\beta]^N \subset \mathbb{R}^N$, soit

$$g(x) = 1 \quad \text{si l'on a } |x_i| \leqslant \beta \text{ pour tout } i = 1,\ldots,N,$$
$$g(x) = 0, \quad \text{dans le cas contraire.}$$

Une dérivation sous le signe intégral, par rapport au paramètre w, effectuée sur l'expression (2.4.40) montre avec (2.4.39) que la dérivée

$$f_w(S,\beta) = (\partial/\partial w) f(w,S,\beta)$$

se présente sous la forme

$$(2.4.41) \qquad f_w(S,\beta) = \iint g(x)g(y)h_w(x,y)dx\,dy = \sum_{\ell,q=1}^{N} c_w(t_\ell,t_q)\iint D_{\ell q}\,h(w,x,y)dx\,dy.$$

La formule (2.4.41) va nous servir à majorer convenablement la dérivée $f_w(S,\beta)$. Modifions tout d'abord quelque peu l'écriture, comme suit :

1) Notons le vecteur Z_w sous la forme

$$Z_w = (Z_1,\ldots,Z_N, Z_{N+1},\ldots,Z_{2N}),$$

obtenue en posant

$$Z_i = Y_w(t_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant N,$$

et

$$Z_{N+i} = Y_0'(t_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant N.$$

Désignons alors par A le déterminant de la matrice $\mathfrak{A} = (E(Z_iZ_j))$, $i,j = 1,\ldots,2N$.

2) Fixons un couple (ℓ,q), $1 \leqslant \ell \leqslant N$ et $1 \leqslant q \leqslant N$, puis considérons le vecteur gaussien $Z_w(\ell,q)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{2N-2}$, défini par

$$Z_w(\ell,q) = (Z_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant 2N, \quad i \neq \ell \ \text{ et } \ i \neq N+q.$$

Le vecteur $Z_w(\ell,q)$ est donc obtenu à partir de Z_w en "supprimant" dans ce dernier les coordonnées $Y_w(t_\ell) = Z_\ell$ et $Y_0'(t_q) = Z_{N+q}$.

Désignons par $A(\ell,q)$ le déterminant de la matrice de covariance

$$\mathfrak{A}(\ell,q) = E(Z_iZ_j), \quad i,j = 1,\ldots,2N, \quad i,j \neq \ell, \quad i,j \neq N+q,$$

du vecteur $Z_w(\ell,q)$.

Remarquons que pour tout choix du couple (ℓ,q) la loi du vecteur $Z_w(\ell,q)$ est non-dégénérée. C'est une conséquence du fait, déjà signalé, que la loi de Z_w est non-dégénérée. En particulier, les déterminants A et $A(\ell,q)$ sont non-nuls. On notera encore la symétrie $A(\ell,q) = A(q,\ell)$ résultant de l'identité en loi des vecteurs Y_w et Y_0' ainsi que des relations $E(Y_w(t_i)Y_0'(t_j)) = E(Y_w(t_j)Y_0'(t_i))$ valables pour tout $i,j = 1,\ldots,N$, (voir (2.1.13)).

Procédons maintenant à la preuve du résultat suivant :

Proposition 4. *Avec les notations qui précèdent (voir également (2.4.3) et (2.4.4)), l'inégalité suivante est satisfaite*

(2.4.42) $$|f_w(S,\beta)| \leqslant (2/\pi) \sum_{\ell,q=1}^{N} |c_w(t_\ell,t_q)| \, [A(\ell,q)/A]^{1/2} \, f(w,S(\ell,q),\beta).$$

Preuve de la proposition 4. Notons pour simplifier

$$I(\ell,q) = \iint g(x)g(y)D_{\ell q}\, h(w,x,y)dx\, dy, \qquad \ell,q = 1,\dots,N.$$

En vertu de (2.4.41) pour établir (2.4.42) il suffit de voir que l'on a

(2.4.43) $$|I(\ell,q)| \leqslant (2/\pi)[A(\ell,q)/A]^{1/2} \, f(w,S(\ell,q),\beta),$$
pour tout couple $\ell,q = 1,\dots,N$.

Une intégration directe fournit

(2.4.44) $$I(\ell,q) = \iint g(x')g(y') \, [h(w,x_\ell = \varepsilon, y_q = \varepsilon) + h(w,x_\ell = -\varepsilon, y_q = -\varepsilon) - h(w,x_\ell = \varepsilon, y_q = -\varepsilon) - h(w,x_\ell = -\varepsilon, y_q = \varepsilon)] \, dx'dy',$$

avec les notations évidentes

$$x' = (x_i), \ i = 1,\dots,N, \ i \neq \ell \quad \text{et } y' = (y_i), \ i = 1,\dots,N, \ i \neq q,$$

et où $h(w,x_\ell = \pm\varepsilon, y_q = \pm\varepsilon)$ désigne la fonction $h(w,x,y)$ dans laquelle la variable x_ℓ a été remplacée, selon le cas, par $\pm\varepsilon$ et de même y_q a été prise égale à $\pm\varepsilon$.

En se reportant à l'inégalité (2.3.38) on a également

(2.4.45) $$h(w,x_\ell = \delta\varepsilon, y_q = \delta'\varepsilon) \leqslant (1/2\pi)k(x',y')[A(\ell,q)/A]^{1/2},$$

en prenant $\delta = \pm 1$ et $\delta' = \pm 1$ et où $k(x',y')$ est la densité de la loi du vecteur $Z_w(\ell,q)$.

Multiplions les deux membres de l'inégalité (2.4.45) par $g(x')g(y')$, puis intégrons, on obtient :

(2.4.46) $$\begin{aligned} &\iint g(x')g(y')h(w,x_\ell = \delta\varepsilon, y_q = \delta'\varepsilon)dx'\, dy' \\ &\leqslant (1/2\pi)[A(\ell,q)/A]^{1/2} \iint g(x')g(y')k(x',y')dx'\, dy' \\ &= (1/2\pi)[A(\ell,q)/A]^{1/2} \, f(w,S(\ell,q),\beta), \qquad \delta,\delta' \in \{-1,1\}. \end{aligned}$$

La majoration (2.4.43) résulte alors trivialement de (2.4.44) et (2.4.46), ce qui termine la preuve de la proposition 4.

Remarque. Par abus de notation nous avons désigné par $g(x')$ et $g(y')$ la fonction indicatrice du pavé

$[-\beta,\beta]^{N-1} \subset \mathbb{R}^{N-1}$.

Notre objectif étant de majorer le quotient $|f_w(S,\beta)|/f(w,S,\beta)$, nous allons exploiter l'inégalité (2.4.42) en comparant les distributions $f(w,S(\ell,q),\beta)$ et $f(w,S,\beta)$. Faisons appel à cet effet au théorème 11 du paragraphe (2.3). L'inégalité (2.3.9) permet d'écrire :

$$
\begin{aligned}
(2.4.47) \qquad f(w,S,\beta) &\geqslant f(w,S(\ell,q),\beta)P\{|Y_w(t_\ell)| \leqslant \beta \ \text{ et } \ |Y_0'(t_q)| \leqslant \beta\} \\
&\geqslant f(w,S(\ell,q),\beta)P\{|Y_w(t_\ell)| \leqslant \beta\}P\{|Y_0'(t_q)| \leqslant \beta\} \\
&= f(w,S(\ell,q),\beta)P\{|Y_0(t_\ell)| \leqslant \beta\}P\{|Y_0(t_q)| \leqslant \beta\},
\end{aligned}
$$

la dernière égalité provenant de l'identité en loi des processus $Y_w(t)$, $Y_0'(t)$ et $Y_0(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$.

En associant (2.4.42) et (2.4.47) nous obtenons l'estimation finale suivante

$$
\begin{aligned}
(2.4.48) \qquad |f_w(S,\beta)|/f(w,S,\beta) \leqslant (2/\pi) &\sum_{\ell,q=1}^{N} c_w(t_\ell,t_q)[A(\ell,q)/A]^{1/2} \\
&\times \left[P\{|Y_0(t_\ell)| \leqslant \beta\}P\{|Y_0(t_q)| \leqslant \beta\}\right]^{-1}.
\end{aligned}
$$

Pour que cette formule soit efficace il faut pouvoir majorer avec suffisamment de précision le quoitient $A(\ell,q)/A$. Dans ce but, désignons par

$$d(Y_w(t_\ell), S(\ell)), \quad \ell = 1,\dots,N,$$

la distance (dans L^2) de la variable aléatoire $Y_w(t_\ell)$ au sous-espace vectoriel de L^2 engendré par les variables

$$Y_w(t_i), \quad i = 1,\dots,N, \quad i \neq \ell$$

et

$$Y_0'(t_i), \quad i = 1,\dots,N.$$

Notons encore par

$$d(Y_0'(t_q), S(\ell,q)), \qquad \ell,q = 1,\dots,N,$$

la distance de la variable aléatoire $Y_0'(t_q)$ au sous-espace vectoriel de L^2 engendré par les variables aléatoires

$$Y_w(t_i), \quad i = 1,\dots,N, \quad i \neq \ell,$$

et

$$Y_0'(t_i), \quad i = 1,\dots,N, \quad i \neq q.$$

On dispose alors de la formule classique suivante (donnant le carré du volume d'un parallélotope)

$$(2.4.49) \qquad A = d^2(Y_w(t_\ell),S(\ell))d^2(Y_0'(t_q),S(\ell,q))A(\ell,q).$$

Nous verrons par la suite (chapitre 3, théorème 21) que les distances intervenant dans cette formule peuvent être appréciées à partir de la disposition géométrique des points $t_1,...t_N$ de la suite S. Remarquons pour l'instant que la distance $d(Y_w(t_\ell),S(\ell))$ est minorée par la distance (dans L^2) de la variable aléatoire $X(w,t_\ell)$, $t_\ell = (u_\ell,x_\ell)$, au sous-espace vectoriel $E(\ell) \subset L^2$ engendré par l'ensemble des quatre suites suivantes :

α) $X(w,(u_i,x_i))$, $i = 1,...,N$, $i \neq \ell$;

β) $X(w,(0,x_i))$, $i = 1,...,N$;

γ) $X(0,(-u_i,x_i))$, $i = 1,...,N$;

δ) $X(0,(0,x_i))$, $i = 1,...,N$.

En désignant donc par $d(X(w,t_\ell),E(\ell))$ la distance en question, on a :

(2.4.50) $$d(Y_w(t_\ell),S(\ell)) \geqslant d(X(w,t_\ell),E(\ell)).$$

L'inégalité (2.4.50) est évidente, elle découle de la définition même des processus $Y_w(t)$ qui s'écrivent, rappelons-le, $Y_w(t) = X(w,(u,x)) - X(w,(0,x))$, avec $t = (u,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p-1}$.

De la même manière

(2.4.51) $$d(Y'_0(t_q),S(\ell,q)) \geqslant d(X(0,(-u_q,x_q)),\ E(\ell,q)),\ t_q = (u_q,x_q)$$

où $E(\ell,q)$ est le sous-espace vectoriel de L^2 engendré par l'ensemble des suites :

α') $X(w,(u_i,x_i))$, $i = 1,...,N$, $i \neq \ell$;

β') $X(w,(0,x_i))$, $i = 1,...,N$, $i \neq \ell$;

γ') $X(0,(-u_i,x_i))$, $i = 1,...,N$, $i \neq q$;

δ') $X(0,(0,x_i))$, $i = 1,...,N$.

3. THÉORÈMES DE PRÉDICTION. APPLICATION AU CALCUL DU COEFFICIENT DE CORRÉLATION ET A L'ÉTUDE DU TEMPS DE SÉJOUR DES TRAJECTOIRES DANS UNE BOULE.

(3.1) Prédiction et décomposition de Mc Kean. Le mouvement brownien linéaire $X(t)$ étant indexé sur $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 2$, désignons par $B(\tau)$, $S(\tau)$ et $C(\tau)$, $\tau > 0$, les sous-espaces vectoriels de L^2 engendrés respectivement par les familles de variables aléatoires $\{X(t), \|t\| < \tau\}$, $\{X(t), \|t\| = \tau\}$ et $\{X(t), \|t\| > \tau\}$. Fixons $\tau > 0$ et considérons un vecteur X appartenant à l'espace $C(\tau)$. Le vecteur X est donc de la forme

$$X = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i X(t_i), \ \|t_i\| > \tau, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \ i = 1,\dots,N.$$

Pour tout nombre δ, $0 < \delta < \tau$, notons par $d(X,B(\delta))$ la distance (dans L^2) du vecteur X au sous-espace $B(\delta)$. La décomposition de Mc Kean, rappelée par l'énoncé du théorème 3 du paragraphe (2.1) va nous permettre d'obtenir une minoration efficace du quotient

$$d(X,B(\delta))/\|X\|, \quad 0 < \delta < \tau,$$

où $\|X\| = \{E(X^2)\}^{1/2}$ représente la norme du vecteur X dans l'espace L^2.

Commençons par envisager le cas où X appartient à l'espace $S(\tau)$.

Théorème 17. *Soient* δ, τ, *deux nombres vérifiant* $0 < \delta < \tau$. *Pour tout vecteur* $X = \sum \alpha_i X(t_i)$, $X \in S(\tau)$, *la minoration suivante est satisfaite :*

$$\textbf{(3.1.1)} \quad \begin{cases} \text{a)} \ d(X,B(\delta)) \geqslant \|X\|(1 - \dfrac{\delta}{\tau})^{p/2} & \textit{dans le cas} \ \ p \geqslant 3, \\[2ex] \text{b)} \ d(X,B(\delta)) \geqslant \|X\|(1 - \dfrac{\delta}{\tau})^{3/2} & \textit{pour} \ \ p = 2. \end{cases}$$

Preuve du théorème 17. Remarquons en premier lieu qu'il suffit d'établir (3.1.1) dans le cas plus restrictif où $\tau = 1$ et $0 < \delta < 1$. En effet, désignons par $G(p)$ le sous-espace vectoriel de L^2 engendré par les variables aléatoires $X(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, puis, le nombre $\tau > 0$ étant fixé, notons par

$$T_\tau : G(p) \to G(p),$$

l'application définie selon

$$T_\tau \left(\Sigma \beta_i X(s_i)\right) = \tau^{1/2} \Sigma \beta_i X(s_i/\tau).$$

En vertu de la propriété d'homogénéité (2.1.1) l'application T_τ est une isométrie. Par ailleurs on a trivialement :

$$T_\tau (B(\delta)) = B(\delta/\tau), \; T_\tau (S(\tau)) = S(1) \text{ et } T_\tau(C(\tau)) = C(1).$$

On en déduit les identités :

$$\textbf{(3.1.2)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha)\; \|X\| = \|T_\tau(X)\| , \\ \beta)\; d(X,B(\delta)) = d(T_\tau(X),B(\delta/\tau)), \\ \gamma)\; T_\tau(X) \in S(1) \text{ si } X \in S(\tau), \end{array} \right.$$

qui nous ramènent à la situation restrictive envisagée (en prenant respectivement $\delta/\tau,1$ et $T_\tau(X)$ à la place de δ,τ et X).

Fixons donc δ, $0 < \delta < 1$, ainsi qu'un vecteur

$$X = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i X(t_i), \; X \in S(1).$$

En reprenant les notations du paragraphe (2.1), la décomposition de Mc Kean (2.1.16) permet d'écrire :

$$\textbf{(3.1.3)} \qquad X = \sum_{n,j} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i S_{n,j}(\theta_i) U_{n,j}(1), \quad \theta_i = t_i/\|t_i\|, \; i = 1,\dots,N.$$

Les variables aléatoires $U_{n,j}(1) = \int_0^1 d_n(v) dB^{n,j}(v)$ étant gaussiennes centrées et indépendantes, on en déduit l'identité :

$$\textbf{(3.1.4)} \qquad \|X\|^2 = \sum_{n,j} \left[\sum_{i=1}^{N} \alpha_i S_{n,j}(\theta_i) \right]^2 \|U_{n,j}(1)\|^2$$

avec

$$\textbf{(3.1.5)} \qquad \|U_{n,j}(1)\|^2 = E(U_{n,j}^2(1)) = \int_0^1 d_n^2(v) dv, \quad n \in \mathbf{N}, \; 1 \leqslant j \leqslant N(n).$$

Notons maintenant

$$(3.1.6)\quad \begin{cases} \text{a) } V_{n,j}(\delta) = \int_0^{\delta} d_n(v)dB^{n,j}(v), \\ \\ \text{b) } W_{n,j}(\delta) = U_{n,j}(1) - V_{n,j}(\delta) = \int_{\delta}^{1} d_n(v)dB^{n,j}(v), \end{cases}$$

puis posons

$$(3.1.7)\quad \begin{cases} \text{a) } Y = \sum_{n,j} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i S_{n,j}(\theta_i) V_{n,j}(\delta) \\ \\ \text{b) } Z = X - Y = \sum_{n,j} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i S_{n,j}(\theta_i) W_{n,j}(\delta). \end{cases}$$

Pour tout couple (n,j) fixé l'intégrale stochastique $W_{n,j}(\delta)$ est indépendante de la restriction à l'intervalle $[0,\delta]$ du mouvement brownien $B^{n,j}(v)$, $v \geqslant 0$. Comme de plus les mouvements browniens intervenant dans la décomposition de Mc Kean sont mutuellement indépendants, nous en déduisons que la variable aléatoire Z est orthogonale (dans L^2) à Y d'une part et au sous-espace $B(\delta)$ d'autre part. Désignons par pX la projection du vecteur X sur l'adhérence (dans L^2) du sous-espace $B(\delta)$. On obtient :

$$(3.1.8)\quad \begin{aligned} d^2(X,B(\delta)) &= \|X - pX\|^2 \\ &= \|Z + Y - pX\|^2 \\ &= \|Z\|^2 + \|Y - pX\|^2 \\ &\geqslant \|Z\|^2, \end{aligned}$$

soit encore

$$(3.1.9)\quad \begin{cases} d^2(X,B(\delta)) \geqslant \sum_{n,j} \left[\sum_{i=1}^{N} \alpha_i S_{n,j}(\theta_i)\right]^2 \|W_{n,j}(\delta)\|^2 \\ \text{avec} \\ \|W_{n,j}(\delta)\|^2 = \int_{\delta}^{1} d_n^2(v)dv, \quad n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant j \leqslant N(n). \end{cases}$$

En comparant les expressions (3.1.4) et (3.1.5) avec (3.1.9) on voit que la conclusion (3.1.1.a) du théorème découle directement du lemme suivant :

Lemme 1. Sous la condition $p \geqslant 3$, on a :

$$(3.1.10)\quad \int_{\delta}^{1} d_n^2(v)dv \geqslant (1-\delta)^p \int_0^1 d_n^2(v)dv, \quad \text{pour tout choix de } \delta,$$
$$0 \leqslant \delta \leqslant 1 \quad \text{et tout } n \in \mathbb{N}.$$

Preuve du lemme 1. Fixons deux nombres m,q, $m \geqslant 0$, $q \geqslant 1$, et montrons que la dérivée f'(x) de la fonction

(3.1.11) $$f(x) = (1-x)^{-q} \int_x^1 y^m(1-y^2)^{q-1}dy, \quad x \in [0,1[\,,$$

est positive.

Un calcul élémentaire donne :

(3.1.12) $$\begin{aligned} f'(x) &= (1-x)^{-q-1}\Big[q \int_x^1 y^m(1-y^2)^{q-1}\,dy - (1-x)x^m(1-x^2)^{q-1}\Big] \\ &\geqslant (1-x)^{-q-1}\Big[qx^m(1+x)^{q-1} \int_x^1 (1-y)^{q-1}dy - (1-x)x^m(1-x^2)^{q-1}\Big] \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Par suite, la fonction $f(x)$, $x \in [0,1[$ est croissante, ce qui se traduit par l'inégalité

(3.1.13) $$\int_x^1 y^m(1-y^2)^{q-1}\,dy \geqslant \Big(\frac{1-x}{1-u}\Big)^q \int_u^1 y^m(1-y^2)^{q-1}dy\,,$$
valable pour tout choix $0 \leqslant u \leqslant x < 1$.

Revenons vers l'écriture explicite (2.1.15) des fonctions $d_n(v)$ figurant dans l'inégalité (3.1.10). En remplaçant dans (3.1.13) le nombre m par 2(n-1) le nombre q par p et en prenant u = 0, on voit (en se reportant à (2.1.15.β) que la majoration (3.1.13) coïncide avec (3.1.10).

Il reste à examiner le cas n = 0. Dérivons à cet effet la fonction

(3.1.14) $$f_0(x) = (1-x)^{-p} \int_x^1 d_0^2\,(y)dy, \quad x \in [0,1[\,.$$

En remplaçant $d_0(y)$ par son expression explicite (2.1.15.α) on obtient :

(3.1.15) $$\begin{aligned} f_0'(x) = 4a^2(1-x)^{-p-1}\Big\{p \int_x^1 \Big[\int_y^1 (1-u^2)^{(p-3)/2}du\Big]^2 dy \\ - (1-x)\Big[\int_x^1 (1-u^2)^{(p-3)/2}du\Big]^2\Big\}\,. \end{aligned}$$

Supposons $p \geqslant 3$ et notons pour simplifier

$$I(x) = \int_x^1 (1-u^2)^{(p-3)/2}\,du, \quad x \in [0,1[\,.$$

Avec le choix q = (p-1)/2 l'inégalité (3.1.13) s'écrit :

(3.1.16) $$I(y) \geqslant \Big(\frac{1-y}{1-x}\Big)^{(p-1)/2} I(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant y < 1,$$

ce qui, avec (3.1.15), conduit à minorer $f_0'(x)$ selon :

$$\textbf{(3.1.17)} \qquad f_0'(x) = 4a^2(1-x)^{-p-1}\left\{p\int_x^1 I^2(y)dy - (1-x)I^2(x)\right\}$$

$$\geqslant 4a^2(1-x)^{-p-1}I^2(x)\left\{p(1-x)^{1-p}\int_x^1 (1-y)^{p-1}dy - (1-x)\right\} = 0.$$

La fonction $f_0(x)$ est donc croissante également, en particulier elle vérifie l'inégalité $f_0(x) \geqslant f(0)$ qui exprime précisément le résultat (3.1.10) souhaité relativement au choix $n = 0$.

Le cas $p = 2$ présente une difficulté, car comme on peut le vérifier facilement par un calcul direct, l'inégalité (3.1.10) n'est pas satisfaite pour $p = 2$ et $n = 0$. Pour établir le point (3.1.1.b) faisons appel à un mouvement brownien $X^1(t)$ indexé sur $\mathbb{R}^3$ puis considérons le processus associé

$$X_1(s) = X^1(0,s), \quad s \in \mathbb{R}^2 .$$

Ainsi que nous l'avons déjà signalé au paragraphe (2.1) le processus $X_1(s)$ est un mouvement brownien indexé sur $\mathbb{R}^2$. Par suite la variable aléatoire

$$X_1 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i X^1(0,t_i)$$

coïncide en loi avec la variable aléatoire $X = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i X(t_i)$. Notons par $S^1(\tau)$ et $B^1(\delta)$ les sous-espaces de L^2 associés au mouvement brownien $X^1(t)$, $t \in \mathbb{R}^3$ et désignons par $B^\circ(\delta)$ le sous-espace de L^2 engendré par les vecteurs $X_1(s)$, $\|s\| < \delta$. En vertu de l'inclusion $B^\circ(\delta) \subset B^1(\delta)$, de l'identité en loi $X_1(s) = X(s)$, $s \in \mathbb{R}^2$, du fait que le vecteur X_1 appartient au sous-espace $S^1(1)$ et que l'inégalité (3.1.1.a) est satisfaite avec le choix $p = 3$, on obtient :

$$\begin{aligned} \textbf{(3.1.18)} \qquad d(X,B(\delta)) &= d(X_1,B^\circ(\delta)) \\ &\geqslant d(X_1,B^1(\delta)) \\ &\geqslant \|X_1\|(1-\delta)^{3/2} \\ &= \|X\|(1-\delta)^{3/2}, \end{aligned}$$

ce qui démontre le point (3.1.1.b).

Remarque 1. Lorsque le vecteur X se réduit à un singleton $X(t)$, $\|t\| = 1$, il est possible de calculer exactement la norme du vecteur Z défini par (3.1.7.b). Explicitement, en faisant appel d'une part à la formule d'addition

$$\sum_{j=1}^{N(n)} S_{n,j}^2(t/\|t\|) = (N(n)/\sigma(p))P_n(1), \quad t \in \mathbb{R}^p, \ n \in \mathbb{N} ,$$

(dans laquelle on a désigné par $P_n(u)$ le polynôme de Legendre de degré n et de dimension p et par $\sigma(p)$ la mesure d'aire de la sphère unité de l'espace $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 2$, voir par exemple [26], page 10) puis, d'autre part, à l'identité de Poisson ([26], page 30)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} N(n)x^n P_n(t) = \frac{1-x^2}{(1-2xt+x^2)^{p/2}}\ , \quad 0 \leqslant x < 1,\ |t| \leqslant 1,$$

on obtient, à partir de (3.1.7.b) et (2.1.15) :

(3.1.19)
$$\begin{aligned}\|Z\|^2 &= \int_\delta^1 d_o^2(v)dv + \sum_{\substack{n,j\\ n\geqslant 1}} S_{n,j}^2(t/\|t\|)\int_\delta^1 d_n^2(v)dv\\ &= \int_\delta^1 d_o^2(v)dv + \sum_{n=1}^{+\infty}(N(n)/\sigma(p))P_n(1)\int_\delta^1 d_n^2(v)dv\\ &= \int_\delta^1 d_o^2(v)dv + (a^2/\sigma(p))\int_\delta^1 \Big[\sum_{n=0}^{+\infty} N(n)v^{2n}P_n(1) - 1\Big]v^{-2}\\ &\quad\times(1-v^2)^{p-1}dv\\ &= \int_\delta^1 d_o^2(v)dv + (a^2/\sigma(p))\int_\delta^1 [1+v^2-(1-v^2)^{p-1}]\,v^{-2}\,dv.\end{aligned}$$

Désignons par $B(0,u) \subset \mathbb{R}^p$, $u \geqslant 0$, la boule euclidienne de l'espace $\mathbb{R}^p$, centrée à l'origine et de rayon $u \geqslant 0$ et soit $S(0,u)$ sa frontière. Le théorème 17 permet de préciser le coefficient de corrélation $c(B(0,\delta), S(0,\tau))$, $0 < \delta < \tau$, (défini par (2.2.1)) des sous-espaces $B(\delta)$ et $S(\tau)$. Ainsi, en appliquant la caractérisation (2.2.3) et la majoration (3.1.1) il vient :

Théorème 18. *Pour tout choix* $0 < \delta < \tau$, *les inégalités suivantes sont satisfaites :*

(3.1.20)
$$\left\{\begin{array}{l} \text{a) } c(B(0,\delta), S(0,\tau)) \leqslant \Big[1-(1-\frac{\delta}{\tau})^p\Big]^{1/2} \leqslant \sqrt{3}\,(\delta/\tau)^{1/2}\text{, pour } p \geqslant 3,\\[2ex] \text{b) } c(B(0,\delta), S(0,\tau)) \leqslant \Big[1-(1-\frac{\delta}{\tau})^3\Big]^{1/2} \leqslant \sqrt{p}\,(\delta/\tau)^{1/2}\text{, pour } p = 2.\end{array}\right.$$

La minoration du quotient $d(X,B(\delta))/\|X\|$, pour un vecteur X pris dans $C(\tau)$, $0 < \delta < \tau$, présente un degré de difficulté supplémentaire. Ainsi l'estimation qui suit n'est certainement pas optimale, elle est cependant suffisamment précise pour constituer un outil efficace.

Théorème 19. *Pour tout vecteur* $X \in C(\tau)$, $0 < \delta < \tau$, *on a :*

$$(3.1.21) \qquad d(X,B(\delta)) \geqslant \left(1 - \frac{\delta}{\tau}\right)^{\tilde{p}^2/2} \|X\|, \quad p \geqslant 1,$$

avec la convention d'écriture $\tilde{p} = p$ *lorsque* p *est un nombre impair et* $\tilde{p} = p+1$ *si* p *est un nombre pair.*

Preuve du théorème 19. L'analyse du début de la preuve du théorème 17, notamment les identités (3.1.2.α), (3.1.2.β) et le fait que pour tout $X \in C(\tau)$ le vecteur $T_\tau(X)$ appartient à $C(1)$, montre clairement qu'il suffit d'établir (3.1.21) dans le cas plus restrictif où $\tau = 1$ et $0 < \delta < 1$. Fixons donc

$$(3.1.22) \qquad X = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i X(t_i), \quad X \in C(1),$$

et notons

$$\tau_i = \|t_i\|, \quad \theta_i = t_i/\tau_i, \quad i = 1,\dots,N.$$

Considérons tout d'abord le cas où la dimension p de l'espace des indices est un nombre impair $p = 2k + 1 \geqslant 3$.

Comme précédemment (lors de la preuve du théorème 17) la décomposition de Mc Kean (2.1.16) implique l'identité

$$(3.1.23) \qquad X = \sum_{n,j} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i S_{n,j}(\theta_i) U_{n,j}(\tau_i),$$

avec

$$(3.1.24) \qquad U_{n,j}(\tau_i) = \int_0^{\tau_i} d_n(v/\tau_i) dB^{n,j}(v).$$

Désignons par

$$g_i(v), \quad v \in \mathbb{R}, \quad i = 1,\dots,N,$$

les fonctions indicatrices des intervalles $[1,\tau_i]$ ($g_i(v) = 1$ si $v \in [1,\tau_i]$, $g_i(v) = 0$ dans le cas contraire), puis posons

$$A_{n,j}(\tau_i,\delta) = \int_0^{\delta} d_n(v/\tau_i) dB^{n,j}(v), \qquad B_{n,j}(\tau_i,\delta) = \int_{\delta}^{1} d_n(v/\tau_i) dB^{n,j}(v)$$
$$\text{et} \quad C_{n,j}(\tau_i) = \int g_i(v) d_n(v/\tau_i) dB^{n,j}(v),$$

et encore

$$A = \sum_{n,j} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i S_{n,j}(\theta_i) A_{n,j}(\tau_i,\delta)$$

(3.1.25) $$B = \sum_{n,j} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i S_{n,j}(\theta_i) B_{n,j}(\tau_i,\delta)$$

$$C = \sum_{n,j} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i S_{n,j}(\theta_i) C_{n,j}(\tau_i)$$

En vertu des inégalités $0 < \delta < 1 < \tau_i$, $i = 1,\ldots,N$, on a :

$$X = A + B + C.$$

De plus, pour tout couple (n_0,j_0), $n_0 \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant j_0 \leqslant N(n_0)$, fixé, les trois suites d'intégrales stochastiques $(A_{n_0,j_0}(\tau_i,\delta))$, $(B_{n_0,j_0}(\tau_i,\delta))$ et $(C_{n_0,j_0}(\tau_i,\delta))$, $i = 1,\ldots,N$, sont mutuellement indépendantes (comme conséquence des inégalités $0 < \delta < 1 < \tau_i$). Les mouvement browniens $(B^{n,j}(v))$ étant par ailleurs également mutuellement indépendants nous en déduisons qu'il en est de même pour les variables A,B et C. Par suite la variance du vecteur X s'écrit

(3.1.26) $$\|X\|^2 = \|A+B+C\|^2 = \|A+B\|^2 + \|C\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 + \|C\|^2 .$$

Remarquons d'autre part que (pour une raison identique à celle qui vient d'être développée) la variable aléatoire B+C est indépendante du sous-espace $B(\delta)$: pour tout couple (n_0,j_0) fixé, les suites $(B_{n_0,j_0}(\tau_i,\delta))$ et $(C_{n_0,j_0}(\tau_i))$ $i = 1,\ldots,N$ sont indépendantes des intégrales stochastiques $U_{n_0,j_0}(\|t\|)$, $\|t\| \leqslant \delta$, intervenant dans la décomposition de Mc Kean du mouvement brownien $X(t)$, $\|t\| \leqslant \delta$, ce qui, conjointement avec l'indépendance mutuelle des processus $(B^{n,j}(v))$, $v \geqslant 0$, prouve notre assertion. Soit finalement pX la projection du vecteur X sur l'adhérence de $B(\delta)$ dans L^2 . La propriété indiquée implique alors :

(3.1.27) $$\begin{aligned} d^2(X,B(\delta)) &= \|X-pX\|^2 \\ &= \|A+B+C - pX\|^2 \\ &= \|B+C\|^2 + \|A-pX\|^2 \\ &\geqslant \|B+C\|^2 \\ &= \|B\|^2 + \|C\|^2 . \end{aligned}$$

L'étape suivante consiste à comparer les variances $\|A+B\|^2$ et $\|B\|^2$. Plus précisément on se propose d'établir que, moyennant le caractère impair de la dimension p, l'inégalité suivante est satisfaite :

(3.1.28) $$\|B\|^2 \geqslant (1-\delta)^{p^2} \|A+B\|^2 .$$

Il est clair que si l'inégalité (3.1.28) est vérifiée alors, en vertu de (3.1.26) et (3.1.27) on aura :

$$(3.1.29)\qquad \begin{aligned} d^2(X,B(\delta)) &\geqslant \|B\|^2 + \|C\|^2 \\ &\geqslant (1-\delta)^{p^2} \|A+B\|^2 + \|C\|^2 \\ &\geqslant (1-\delta)^{p^2} (\|A+B\|^2 + \|C\|^2) \\ &= (1-\delta)^{p^2} \|X\|^2 , \end{aligned}$$

c'est-à-dire précisément la conclusion (3.1.21) souhaitée.

Montrons donc (3.1.28). L'indépendance des mouvements browniens $(B^{n,j}(v))$ intervenant dans la décomposition de Mc Kean permet de représenter la variance $\|A+B\|^2$ sous la forme :

$$(3.1.30)\qquad \begin{aligned} \|A+B\|^2 &= \Big\|\sum_{n,j} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i S_{n,j}(\theta_i)\big(A_{n,j}(\tau_i,\delta) + B_{n,j}(\tau_i,\delta)\big)\Big\|^2 \\ &= \sum_{n,j} \Big\| \sum_{i=1}^{N} \alpha_i S_{n,j}(\theta_i)\big(A_{n,j}(\tau_i,\delta) + B_{n,j}(\tau_i,\delta)\big)\Big\|^2 \\ &= \sum_{n,j} \Big\| \int_0^1 \sum_{i=1}^{N} \alpha_i S_{n,j}(\theta_i) d_n(v/\tau_i) dB^{n,j}(v)\Big\|^2 \\ &= \sum_{n,j} \int_0^1 \Big[\sum_{i=1}^{N} \alpha_i S_{n,j}(\theta_i) d_n(v/\tau_i)\Big]^2 dv. \end{aligned}$$

Pour simplifier, posons :

$$(3.1.31)\quad \begin{cases} \textbf{a)}\ P_{n,j}(v) = v^{1-n} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \alpha_i S_{n,j}(\theta_i) d_n(v/\tau_i) \\ \qquad = a \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \tau_i^{1-n} S_{n,j}(\theta_i)\big[1 - (v/\tau_i)^2\big]^{(p-1)/2}, \quad n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \\ \qquad 1 \leqslant j \leqslant N(n), \quad v > 0, \\ \text{et} \\ \textbf{b)}\ P_{0,1}(v) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \alpha_i S_{0,1}(\theta_i) d_o(v/\tau_i) \\ \qquad = 2a \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \alpha_i S_{0,1}(\theta_i) \int_{(v/\tau_i)}^{1} [1-u^2)]^{(p-3)/2} du . \end{cases}$$

L'écriture explicite des fonctionnelles $P_{n,j}(v)$ étant obtenue par la biais des identités (2.1.15), α, β) et γ). Avec ces notations, la formule (3.1.30) s'écrit :

(3.1.32)
$$\|A+B\|^2 = \int_o^1 P_{0,1}^2(v)dv + \sum_{\substack{n,j \\ n \geqslant 1}} \int_o^1 v^{2(n-1)} P_{n,j}^2(v)dv.$$

De la même manière on est conduit à une expression analogue donnant la variance de la variable aléatoire B, soit :

(3.1.33)
$$\|B\|^2 = \| \sum_{n,j} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i S_{n,j}(\theta_i) B_{n,j}(\tau_i,\delta)\|^2$$
$$= \sum_{n,j} \| \sum_{i=1}^{N} \alpha_i S_{n,j}(\theta_i) B_{n,j}(\tau_i,\delta)\|^2$$
$$= \sum_{n,j} \| \int_\delta^1 \alpha_i S_{n,j}(\theta_i) d_n(v/\tau_i) dB^{n,j}(v)\|^2$$
$$= \int_\delta^1 P_{0,1}^2(v)dv + \sum_{\substack{n,j \\ n \geqslant 1}} \int_\delta^1 v^{2(n-1)} P_{n,j}^2(v)dv.$$

En comparant (3.1.32) et (3.1.33) on voit que pour obtenir l'inégalité (3.1.28) souhaitée, il suffit de démontrer le lemme suivant :

Lemme 2. *Supposons que la dimension* p *de l'espace des indices soit un nombre impair* $p = 2k + 1 \geqslant 3$. *On a alors :*

(3.1.34)
$$\left\{ \begin{array}{l} \int_\delta^1 P_{0,1}^2(v)dv \geqslant (1-\delta)^{p^2} \int_o^1 P_{0,1}^2(v)dv \\ \textit{et} \\ \int_\delta^1 v^{2(n-1)} P_{n,j}^2(v)dv \geqslant (1-\delta)^{p^2} \int_o^1 v^{2(n-1)} P_{n,j}^2(v)dv, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \\ \qquad 1 \leqslant j \leqslant N(n). \end{array} \right.$$

Preuve du lemme 2. La démonstration repose sur le fait que pour p impair, $p = 2k+1$, les fonctionnelles $P_{n,j}(v)$ sont toutes des polynômes dont les degrés $d°P_{n,j}$ sont bornés supérieurement, plus précisément on a la majoration :

(3.1.35)
$$d°P_{n,j} \leqslant p-1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N(n),$$

découlant trivialement des identités (3.1.31). Cette propriété permet de montrer que les fonctions

$$(3.1.36)\quad \begin{cases} f_{0,1}(x) = (1-x)^{-p^2} \int_x^1 P_{0,1}^2(v)dv \\ \text{et} \\ f_{n,j}(x) = (1-x)^{-p^2} \int_x^1 v^{2(n-1)} P_{n,j}^2(v)dv, \ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, 1 \leqslant j \leqslant N(n) \end{cases}$$

sont croissantes sur l'intervalle $[0,1[$. Pour établir ce dernier point nous ferons appel à l'estimation analytique suivante :

Lemme 3. *Soit* $P(x)$ *un polynôme de degré* $q \geqslant 0$. *On a alors :*

$$(3.1.37)\qquad \int_x^1 P^2(v)dv \geqslant \frac{1-x}{(1+q)^2} P^2(x), \ \textit{pour tout} \quad x \in [0,1]\,.$$

Preuve du lemme 3. Sur l'espace vectoriel des polynômes de degré $q \geqslant 0$, restreints à un intervalle borné, la norme quadratique est équivalente à la norme uniforme. En particulier, pour tout polynôme $L(x)$ de degré $q \geqslant 0$, on a :

$$(3.1.38)\qquad \sup_{v \in [-1,1]} |L(v)| \leqslant \frac{q+1}{\sqrt{2}} \left[\int_1^1 L^2(v)dv\right]^{1/2}.$$

On pourra consulter [30] p. 89 pour une preuve de ce résultat. l'inégalité (3.1.37) se déduit facilement de (3.1.38). En effet, fixons un polynôme $P(x)$ de degré $q \geqslant 0$, puis posons :

$$L(v) = P\left(x + \frac{(1+v)(1-x)}{2}\right), \text{ le nombre } x \in [0,1[$$

étant fixé. Le polynôme $L(v)$ est également de degré $q \geqslant 0$ et l'inégalité (3.1.38) s'écrit (moyennant un changement de variable élémentaire) :

$$(3.1.39)\qquad \sup_{v \in [x,1]} |P(v)| = \sup_{v \in [-1,1]} |L(v)| \leqslant \frac{q+1}{\sqrt{2}} \left[\int_{-1}^1 L^2(v)dv\right]^{1/2} = \frac{q+1}{\sqrt{1-x}} \left[\int_x^1 P^2(v)dv\right]^{1/2},$$

ce qui implique (3.1.37).

Reprenons la preuve du lemme 2. Notre objectif étant de montrer que les fonctions $f_{n,j}(x)$, $x \in [0,1[$, définies par (3.1.36), sont croissantes, calculons les dérivées de ces fonctions puis minorons les expressions obtenues à l'aide de (3.1.37) en faisant appel à la limitation (3.1.35) des degrés des polynômes $P_{n,j}(x)$. Ainsi si $q \geqslant 0$ est le degré du polynôme $P_{0,1}(x)$, on obtient (en appliquant successivement (3.1.37) et (3.1.35)) :

(3.1.40)
$$\begin{aligned} f'_{0,1}(x) &= p^2(1-x)^{-p^2-1}\int_x^1 P_{0,1}^2(v)dv - (1-x)^{-p^2}P_{0,1}^2(x) \\ &\geqslant \left[\frac{p^2}{(1+q)^2}(1-x)^{-p^2} - (1-x)^{-p^2}\right]P_{0,1}^2(x) \\ &\geqslant 0, \; x \in [0,1[\,. \end{aligned}$$

De la même manière, si $q \geqslant 0$ désigne le degré d'un polynôme $P_{n,j}(x)$, le couple n,j, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $1 \leqslant j \leqslant N(n)$, étant fixé, alors en appliquant successivement le fait que la fonction $v \to v^{2(n-1)}$, $v > 0$, est croissante puis (3.1.37) et finalement (3.1.35), il vient :

(3.1.41)
$$\begin{aligned} f'_{n,j}(x) &= p^2(1-x)^{-p^2-1}\int_x^1 v^{2(n-1)}P_{n,j}^2(v)dv - (1-x)^{-p^2}x^{2(n-1)}P_{n,j}^2(x) \\ &\geqslant p^2(1-x)^{-p^2-1}x^{2(n-1)}\int_x^1 P_{n,j}^2(v)dv - (1-x)^{-p^2}x^{2(n-1)}P_{n,j}^2(x) \\ &\geqslant \left[\frac{p^2}{(1+q)^2}(1-x)^{-p^2} - (1-x)^{-p^2}\right]x^{2(n-1)}P_{n,j}^2(x) \\ &\geqslant 0, \; x \in [0,1[\,. \end{aligned}$$

Les dérivées $f'_{n,j}(x)$, $x \in [0,1[$, étant positives les fonctions $f_{n,j}(x)$, $x \in [0,1[$ sont croissantes. En particulier on a :

$$f_{n,j}(\delta) \geqslant f_{n,j}(o), \quad \delta \in [0,1[\,, \; n \in \mathbb{N}\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant N(n),$$

ce qui traduit précisément la conclusion (3.1.34) envisagée et termine par là-même la preuve du théorème 19, dans le cas où la dimension p de l'espace des indices est un nombre impair.

Lorsque la dimension p est un nombre pair $p = 2k \geqslant 2$, l'argument développé au cours de la preuve du théorème 16 et qui consiste à faire appel à l'identité en loi des processus $X(t)$ et $X_1(t) = X^1(0,t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, où $X^1(x)$, $x = (u,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$, est un mouvement brownien indexé sur $\mathbb{R}^{p+1}$, peut encore s'appliquer. Plus précisément, en notant par $B^1(\delta)$ et $C^1(\tau)$ les sous-espaces de L^2 associés au mouvement brownien $X^1(x)$, $x \in \mathbb{R}^{p+1}$, puis par $B^o(\delta)$ le sous-espace de L^2 engendré par les variables aléatoires $X_1(t)$, $\|t\| < \delta$ et finalement par $C^o(\tau)$ le sous-espace engendré par les variables aléatoires $X_1(t)$, $\|t\| > \tau$, on a trivialement l'inclusion

$$B^o(\delta) \subset B^1(\delta) \quad \text{et} \quad C^o(\tau) \subset C^1(\tau), \quad \delta,\tau > 0.$$

Soit maintenant X un vecteur appartenant à C(1). Il s'écrit

$$X = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i X(t_i), \; \|t_i\| > 1, \quad i = 1,\dots,N.$$

Considérons alors le vecteur X_1 associé défini par

$$X_1 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i X_1(t_i)\,.$$

Le vecteur X_0 appartient au sous-espace $C^1(1)$ ce qui, en vertu de l'identité en loi indiquée, de l'inclusion $B^o(\delta) \subset B^1(\delta)$ et de l'inégalité (3.1.21) satisfaite pour le mouvement brownien $X^1(x)$, $x \in \mathbb{R}^{p+1}$, donne :

(3.1.42)
$$\begin{aligned} d(X,B(\delta)) &= d(X_1,B^o(\delta)) \\ &\geqslant d(X_1,B^1(\delta)) \\ &\geqslant (1-\delta)^{(p+1)^2/2}\, \|X_1\| \\ &= (1-\delta)^{\tilde{p}^2/2}\, \|X\|, \qquad \text{avec } \tilde{p} = p+1. \end{aligned}$$

Le théorème 19 est donc complètement démontré.

Notons par $B^c(0,u) \subset \mathbb{R}^p$, $p \geqslant 1$, le complémentaire de la boule euclidienne $B(0,u)$ centrée à l'origine et de rayon $u > 0$. L'inégalité (3.1.21), que nous venons d'obtenir, permet de majorer le coefficient de corrélation $c(B(0,\delta), B^c(0,\tau))$ des espaces $B(\delta)$ et $C(\tau)$, $0 < \delta < \tau$. En se reportant à (2.2.3) on obtient immédiatement :

Théorème 20. *Pour tout choix* $0 < \delta < \tau$, *la majoration suivante est satisfaite :*

(3.1.43)
$$\begin{aligned} c(B(0,\delta), B^c(0,\tau)) &\leqslant \Big[1 - (1 - \frac{\delta}{\tau})^{\tilde{p}^2}\Big]^{1/2} \\ &\leqslant \tilde{p}(\delta/\tau)^{1/2}, \end{aligned}$$

avec $\tilde{p} = p$ *pour* p *impair et* $\tilde{p} = p+1$ *lorsque* p *est pair.*

Remarque 2. Il est intéressant de noter, à titre de comparaison, les estimations correspondantes (les meilleures possibles) pour un mouvement brownien indexé sur $\mathbb{R}$. Ainsi soit

$$X = \sum \alpha_i X(t_i) + \sum \beta_j X(s_j),\ \ t_i \geqslant \tau,\ \ s_j \leqslant -\tau,$$

un vecteur appartenant à l'espace $C(\tau)$, alors on a :

(3.1.44)
$$d(X,B(\delta)) \geqslant (1 - \frac{\delta}{\tau})^{1/2}\, \|X\|, \quad 0 < \delta < \tau\,.$$

L'inégalité (3.1.44) se démontre facilement car, en vertu de l'indépendance des accroissements du mouvement brownien $X(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, la projection pX du vecteur X sur $B(\delta)$ s'exprime sous la forme

$$pX = (\Sigma \alpha_i)X(\delta) + (\Sigma \beta_j)X(-\delta).$$

On en déduit les identités :

$$d^2(X,B(\delta)) = \|X-pX\|^2 = \|X\|^2 - \|pX\|^2 = \|X\|^2 - \delta[(\Sigma \alpha_i)^2 + (\Sigma \beta_j)^2]$$

et

$$0 \leqslant d^2(X,B(\tau)) = \|X\|^2 - \tau\,[(\Sigma \alpha_i)^2 + (\Sigma \beta_j)^2],$$

qui impliquent (3.1.44).

On voit également très facilement (à partir de (3.1.44)) que, pour un mouvemenrt brownien indexé sur $\mathbb{R}$, le coefficient de corrélation $c(B(0,\delta), B^c(0,\tau))$ $0 < \delta < \tau$ coïncide avec $c(B(0,\delta), S(0,\tau))$ et vaut exactement $(\delta/\tau)^{1/2}$. Le coefficient de corrélation croissant avec la dimension $p \geqslant 1$ de l'espace des indices, on en déduit (en complément de (3.1.20)) l'inégalité

(3.1.45) $$c(B(0,\delta), B^c(0,\tau)) \geqslant c(B(0,\delta), S(0,\tau)) \geqslant (\delta/\tau)^{1/2},$$

valable pour tout choix de δ,τ, $0 < \delta < \tau$, et pour toute dimension $p \geqslant 1$ de l'espace des indices.

(3.2) Prédiction et représentation de Schoenberg. Notons

$$f(u) = 1 - e^{iu},\ \overline{f(u)} = 1 - e^{-iu},\ u \in \mathbb{R}.$$

On désigne sous le terme de "représentation de Schoenberg" l'identité de covariance

(3.2.1) $$\begin{cases} \|s\|^\alpha + \|t\|^\alpha - \|t-s\|^\alpha = c(p) \displaystyle\int_{\mathbb{R}^p} f(\langle s,x \rangle)\overline{f(\langle t,x \rangle)}\|x\|^{-p-\alpha}\,dx, \\ s,t \in \mathbb{R}^p,\ \alpha \in\ ]0,2[, \\ \text{avec } c(p) = 2\Big[\displaystyle\int_{\mathbb{R}^p} |f(\langle e,x \rangle)|^2\,\|x\|^{-p-\alpha}\,dx\Big]^{-1},\ e \in \mathbb{R}^p,\ \|e\| = 1, \end{cases}$$

qui a permis à I.J. SCHOENBERG [33] de démontrer que le noyau $K(s,t) = \|t\|^\alpha + \|s\|^\alpha - \|t-s\|^\alpha$, $t,s \in \mathbb{R}^p$, est, pour tout $\alpha \in\ ]0,2[$ fixé, défini positif.

Pour toute suite finie de points $t_1,\ldots,t_N \in \mathbb{R}^p$, nous noterons par $E(t_1,\ldots,t_N)$ le sous-espace vectoriel de L^2 engendré par les variables aléatoires $X(t_1),\ldots,X(t_N)$. Soit $t \in \mathbb{R}^p$, un point quelconque, puis $d(X(t), E(t_1,\ldots,t_N))$ la distance (dans L^2) de la variable aléatoire $X(t)$ au sous-espace $E(t_1,\ldots,t_N)$. En partant de l'identité (3.2.1), avec le choix $\alpha = 1$, on peut obtenir une minoration du quotient

$$d^2(X(t),E(t_1,\dots,t_N))/\|t\|, \quad t \neq \vec{0},$$

ne faisant intervenir que les distances $\|t\|$, $\|t - t_i\|$, $i = 1,\dots,N$. Ainsi on a :

Théorème 21. *Il existe une constante* $a(p) > 0$, *ne dépendant que de la dimension* p *de l'espace des paramètres, telle que l'on ait*

$$(3.2.2) \qquad d^2(X(t),E(t_1,\dots,t_N)) \geqslant a(p)\min\{\|t\|, \|t-t_1\|,\dots,\|t-t_N\|\},$$

pour tout choix de points $t,t_1,\dots,t_N \in \mathbb{R}^p$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Preuve du théorème 21. En partant d'une idée de L.D. PITT [28], la représentation de Schoenberg (3.2.1) permet d'exprimer le carré de la distance $d(X(t),E(t_1,\dots,t_N))$ sous la forme :

$$(3.2.3) \quad d^2(X(t),E(t_1,\dots,t_N)) = \inf_{(\alpha_i) \in \mathbb{R}^N} E\Big\{(X(t) - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i X(t_i))^2\Big\}$$
$$= \inf_{(\alpha_i) \in \mathbb{R}^N} c(p) \int_{\mathbb{R}^p} \Big|f(<t,x>) - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f(<t_i,x>)\Big|^2 \times \|x\|^{-p-1}dx.$$

Désignons par $g_\varepsilon(x)$ la fonction indicatrice de la boule ouverte $B(0,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^p \,;\, \|x\| < \varepsilon\}$ ($g_\varepsilon(x) = 1$ lorsque $\|x\| < \varepsilon$, $g_\varepsilon(x) = 0$ si $\|x\| \geqslant \varepsilon$) puis considérons la transformée de Fourier

$$(3.2.4) \qquad \hat{g}_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^p} e^{i<x,y>} g_\varepsilon(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^p.$$

L'écriture explicite de la fonction $\hat{g}_\varepsilon(x)$ (qui est à valeurs réelles) est bien connue. On sait (voir par exemple [34] p. 171) qu'elle s'écrit :

$$(3.2.5) \qquad \hat{g}_\varepsilon(x) = \varepsilon^p \hat{g}_1(\varepsilon x) = (2\pi\varepsilon/\|x\|)^{p/2} J_{p/2}(\varepsilon\|x\|),$$

où $J_{p/2}(u)$, $u \in \mathbb{R}$, est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre $p/2$.

L'identité (3.2.5) va nous permettre de minorer l'intégrale intervenant dans la formule (3.2.3) par une expression analogue dans laquelle figurera le carré du module de la transformée de Fourier $\hat{g}_\varepsilon(x)$ (à la place de la fonction $\|x\|^{-p-1}$). L'idée consiste à faire appel à la relation asymptotique (voir [27] p. 134) suivante :

$$(3.2.6) \qquad J_{p/2}(u) \underset{u \to +\infty}{\sim} (2/\pi u)^{1/2} \cos(u - (p+1)\frac{\pi}{4}) .$$

La fonction $u \to J_{p/2}(u)$ étant continue sur $\mathbb{R}$, il résulte de (3.2.6) qu'il existe une constante $d = d(p) > 0$ telle que l'on ait :

$$(3.2.7) \qquad |J_{p/2}(u)| \leqslant d|u|^{-1/2} \text{ , pour tout } u \in \mathbb{R}.$$

Nous en déduisons avec (3.2.5) la minoration

$$(3.2.8) \qquad \begin{aligned} \|x\|^{-p-1} &= \left[\|x\|(2\pi\varepsilon)^p J^2_{p/2}(\varepsilon\|x\|) \right]^{-1} |\hat{g}_\varepsilon(x)|^2 \\ &\geqslant d^{-2}(2\pi)^{-p} \varepsilon^{1-p} |\hat{g}_\varepsilon(x)|^2 \\ &= b\varepsilon^{1-p} |\hat{g}_\varepsilon(x)|^2 , \end{aligned}$$

satisfaite pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $x \neq \vec{0}$ et tout $\varepsilon > 0$, et dans laquelle on a posé $b = d^{-2}(2\pi)^{-p}$.

Notons d'autre part par $g_\varepsilon(y,x)$ la fonction indicatrice de la boule $B(y,\varepsilon) \subset \mathbb{R}^p$, centrée au point y et de rayon $\varepsilon > 0$, soit :

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(y,x) &= 1 \quad \text{si} \quad \|y-x\| < \varepsilon \\ g_\varepsilon(y,x) &= 0 \quad \text{si} \quad \|y-x\| \geqslant \varepsilon , \quad x \in \mathbb{R}^p . \end{aligned}$$

L'inégalité (3.2.8) associée aux identités classiques entre transformées de Fourier

$$\hat{g}_\varepsilon(x)\exp i < t,x > \ = \hat{g}_\varepsilon(t,x)$$

et

$$\hat{g}_\varepsilon(x)\exp i < t_j,x > \ = \hat{g}_\varepsilon(t_j,x) , \quad x \in \mathbb{R}^p , j = 1,\dots,N,$$

permet de minorer l'expression intégrale intervenant dans la formule (3.2.3) selon :

$$(3.2.9) \qquad \begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^p} \left|f(< t,x >) - \sum_{j=1}^N \alpha_j f(< t_j ,x >)\right|^2 \|x\|^{-p-1} \varepsilon^{p-1} b^{-1} \, dx \\ &\geqslant \int_{\mathbb{R}^p} \left|f(< t,x >) - \sum_{j=1}^N \alpha_j f(< t_j,x >)\right|^2 |\hat{g}_e(x)|^2 \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \left|(1 - \sum_{j=1}^N \alpha_j)\hat{g}_\varepsilon(x) - e^{i< t,x >} \hat{g}_\varepsilon(x) - \sum_{j=1}^N \alpha_j \, \hat{g}_\varepsilon(x)\exp i< t_j,x >\right|^2 dx \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^p} |(1 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j)\hat{g}_\varepsilon(x) - \hat{g}_\varepsilon(t,x) - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \hat{g}_\varepsilon(t_j,x)|^2 \, dx$$
$$= (1/2\pi)^p \int_{\mathbb{R}^p} |(1- \sum_{j=1}^{N} \alpha_j)g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(t,x) - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \, g_\varepsilon(t_j,x)|^2 \, dx,$$

la dernière égalité résultant du théorème de Plancherel.

La majoration (3.2.9) est satisfaite pour tout $\varepsilon > 0$, elle l'est en particulier en prenant $\varepsilon = \varepsilon_0$ avec :

(3.2.10) $$\varepsilon_0 = (1/2)\min\{\|t\|, \|t-t_j\|, j = 1,\dots,N\} .$$

Pour un tel choix on a trivialement :

(3.2.11) $$g_{\varepsilon_0}(x)\, g_{\varepsilon_0}(t,x) = g_{\varepsilon_0}(t,x)\, g_{\varepsilon_0}(t_j,x) = 0, \text{ pour tout } j = 1,\dots,N, \text{ et tout } x \in \mathbb{R}^p,$$

par suite il vient :

(3.2.12) $$\int_{\mathbb{R}^p} |(1 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j)g_{\varepsilon_0}(x) - g_{\varepsilon_0}(t,x) - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \, g_{\varepsilon_0}(t_j,x)|^2 \, dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^p} |(1 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j)g_{\varepsilon_0}(x) - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \, g_{\varepsilon_0}(t_j,x)|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^p} |g_{\varepsilon_0}(t,x)|^2 \, dx$$
$$\geqslant \int_{\mathbb{R}^p} |g_{\varepsilon_0}(t,x)|^2 \, dx = \varepsilon_0^p \, v(p), \text{ où } v(p) \text{ est le volume de la boule}$$

unité $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^p \,;\, \|x\| < 1\}$.

En rassemblant (3.2.3), (3.2.9), (3.2.12) et (3.2.10), on obtient finalement :

(3.2.13) $$d^2(X(t),E(t_1,\dots,t_N)) \geqslant [bc(p)v(p)(2\pi)^{-p}]\varepsilon_0 = a \min\{\|t\|, \|t-t_j\|, j = 1,\dots,N\},$$

en posant $a = bc(p)v(p)/2(2\pi)^p$.

C'est la conclusion souhaitée.

Le théorème 21 implique trivialement le théorème 1 du paragraphe (2.1). Il permet également de retrouver certaines minorations antérieures (démontrées en [13]) du déterminant de la matrice de covariance

(3.2.14) $$D(t_1,\dots,t_N) = \text{dét}(E(X(t_i)X(t_j) \,;\, i,j = 1,\dots,N).$$

Ainsi par exemple, en itérant (N-1)-fois la formule classique

(3.2.15) $$D(t_1,\ldots,t_N) = d^2(X(t_1),E(t_2,\ldots,t_N))D(t_2,\ldots,t_N)$$

on obtient l'identité

(3.2.16) $$D(t_1,\ldots,t_N) = \|t_N\| \prod_{i=1}^{N-1} d^2(X(t_i),\ E(t_{i+1},\ldots,t_N)),$$

qui, associée à la majoration (3.2.2), conduit immédiatement au résultat suivant :

Théorème 22. *Pour tout choix de vecteurs* $\{t_1,\ldots,t_N\} \subset \mathbb{R}^p$ *vérifiant les inégalités :*

$$\|t_i - t_{i+1}\| \leqslant \|t_i - t_j\| \quad \textit{pour} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant N$$
$$\|t_i - t_{i+1}\| \leqslant \|t_i\| \qquad \textit{pour} \quad i = 1,\ldots,N-1,$$

on a :

(3.2.17) $$D(t_1,\ldots,t_N) \geqslant a^{N-1}\,\|t_N\| \prod_{i=1}^{N-1} \|t_i - t_{i+1}\|,$$

où $a = a(p) > 0$ *est la constante intervenant dans l'énoncé du théorème 21.*

(3.3) Temps de séjour dans une boule pour un mouvement brownien transient. Le mouvement brownien $\overline{X}(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, $p \geqslant 1$, étant à valeurs dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, on notera par

(3.3.1) $$T(\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^p} g_\varepsilon(\overline{X}(t))dt,\ \ \varepsilon > 0,\ \ T(1) = T,$$

la durée totale du séjour de la trajectoire $\overline{X}(t) = \overline{X}(t,\omega)$ dans la boule $B(0,\varepsilon) = \{x\ ;\ \|x\| < \varepsilon\} \subset \mathbb{R}^n$, la fonction $g_\varepsilon(x)$ désignant la fonction indicatrice de cette boule.

Considérons le cas $n > 2p$. Le mouvement brownien $\overline{X}(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, étant alors transient (voir (2.1.17)) la durée du séjour $T(\varepsilon) = T(\varepsilon\ ;\ \omega)$ est, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, finie presque-sûrement. Le résultat qui suit précise le comportement asymptotique de la variable aléatoire $T(1) = T$. En dimension $p = 1$ ce résultat peut être obtenu à partir de la propriété de Markov du mouvement brownien indexé sur la droite (voir [4]), en dimension supérieure, $p \geqslant 2$, une telle approche n'est plus possible et une méthode différente est nécessaire. La démonstration présentée ici nous a été communiquée par L.D. Pitt.

Théorème 23. *Sous la condition* $n > 2p$, $p \geqslant 1$, *il existe une constante* $b = b(n,p) > 0$, *ne dépendant que des dimensions* n *et* p, *telle que l'on ait :*

(3.3.2) $$E(\exp bT) < +\infty\,.$$

Preuve du théorème 23. La méthode consiste à majorer convenablement les moments $E(T^k)$, $k \in \mathbb{N}$, de la variable aléatoire T, en faisant appel à cet effet au théorème de prédiction établi au paragraphe (3.2). Plus précisément, nous allons montrer qu'il existe une constante $c = c(n,p)$, ne dépendant que des dimensions n et p et telle que l'on ait :

(3.3.3) $$E(T^k) \leqslant c^k k!\,, \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}\,.$$

Il est clair que si la relation (3.3.3) est satisfaite alors pour tout b, $0 < b < 1/c$, on obtiendra l'inégalité

$$E(\exp bT) = \sum_{k=0}^{+\infty} (b^k/k!)E(T^k) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} (bc)^k < +\infty,$$

qui coïncide avec la majoration (3.3.2) envisagée.

Preuve de la majoration (3.3.3). Fixons un nombre entier $k \geqslant 2$. Une application évidente du théorème de Fubini donne :

(3.3.4) $$\begin{aligned} E(T^k) &= E\{[\textstyle\int g_1(\overline{X}(t))dt]^k\} \\ &= \int_{(\mathbb{R}^p)^k} P\{\|\overline{X}(t_i)\| < 1,\ i = 1,\dots,k\}dt_1 \dots dt_k\,. \end{aligned}$$

Rappelons par ailleurs que le processus $\overline{X}(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, est de la forme

$$\overline{X}(t) = (X_1(t),\dots,X_n(t)), \quad t \in \mathbb{R}^p,$$

les coordonnées $X_i(t)$, $i = 1,\dots,n$, étant des copies indépendantes du mouvement brownien linéaire. Considérons maintenant une suite de points $\{t_1,\dots,t_k\} \subset \mathbb{R}^p$, fixée, vérifiant :

(3.3.5) $$\begin{cases} t_i \neq \vec{0}\,, & i = 1,\dots,k, \\ t_i \neq t_j & \text{pour tout couple } i \neq j,\ i,j = 1,\dots,k, \end{cases}$$

puis désignons par

$$Y_j = E(X_j(t_1)|E_j(t_2,\dots,t_k)),\ j = 1,\dots,n,$$

les projections respectives des variables aléatoires $X_j(t_1)$ sur les sous-espaces (de L^2) $E_j(t_2,\dots,t_k)$ engendrés par les suites $X_j(t_2),\dots,X_j(t_k)$. En notant $Y = (Y_1,\dots,Y_n)$ on voit que le vecteur $\overline{X}(t_1) - Y$ est indépendant de la suite $\overline{X}(t_2),\dots,\overline{X}(t_k)$. En appliquant le théorème d'Anderson (2.3.1) on en déduit, par un argument facile de conditionnement, l'inégalité

$$(3.3.6)\quad P\{\|\overline{X}(t_i)\| < 1,\ i = 1,\dots,k\} = P\{\|\overline{X}(t_1) - Y + Y\| < 1 \text{ et } \|\overline{X}(t_i)\| < 1,\ i = 2,\dots,k\}$$
$$\leqslant P\{\|\overline{X}(t_1) - Y\| < 1\} P\{\|\overline{X}(t_i)\| < 1,\quad i = 2,\dots,k\}$$

Notons

$$\sigma(t_1) = E\{(X_1(t_1) - Y_1)^2\} = \dots = E\{(X_n(t_1) - Y_n)^2\},$$

puis majorons la probabilité $P\{\|\overline{X}(t_1) - Y\| < 1\}$. En vertu des conditions (3.3.5) et de la caractérisation (3.2.2), la variance $\sigma(t_1)$ est non nulle, par suite il vient :

$$(3.3.7)\quad P\{\|\overline{X}(t_1) - Y\| < 1\} = (2\pi\sigma(t_1))^{-n/2} \int_{B(0,1)} \exp\{-\|y\|^2/2\sigma(t_1)\} dy$$
$$\leqslant \min\{1, v_n (2\pi\sigma(t_1))^{-n/2}\}$$
$$\leqslant 2[1 + v_n^{-1}(2\pi\sigma(t_1))^{n/2}]^{-1},$$

où v_n est le volume de la boule unité $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$.

Appliquons maintenant le théorème de prédiction du paragraphe (3.2). En vertu de (3.2.2) on a :

$$(3.3.8)\quad \sigma(t_1) \geqslant a(p) \min\{\|t_1\|, \|t_1 - t_i\|,\ i = 2,\dots,k\},$$

où $a(p) > 0$ est une constante. Notons $A = v_n^{-1}(2\pi a(p))^{n/2}$, les inégalités (3.3.7) et (3.3.8) donnent :

$$(3.3.9)\quad (1/2) P\{\|\overline{X}(t_1) - Y\| < 1\} \leqslant [1 + A(\min\{\|t_1\|, \|t_1 - t_i\|,\ i = 2,\dots,k\})^{n/2}]^{-1}$$
$$\leqslant [1 + A\|t_1\|^{n/2}]^{-1} + \sum_{i=2}^{k} [1 + A\|t_1 - t_i\|^{n/2}]^{-1}.$$

En revenant vers l'identité (3.3.4) on voit que les inégalités (3.3.6) et (3.3.9) impliquent :

$$(3.3.10)\quad E(T^k) \leqslant \int_{(\mathbb{R}^p)^k} P\{\|\overline{X}(t_1) - Y\| < 1\} P\{\|\overline{X}(t_i)\| < 1,\ i = 2,\dots,k\} dt_1 \dots dt_k$$
$$\leqslant 2 \int_{(\mathbb{R}^p)^k} [1 + A\|t_1\|^{n/2}]^{-1}) P\{\|\overline{X}(t_i)\| < 1,\ i = 2,\dots,k\} dt_1 \dots dt_k$$
$$+ 2 \sum_{i=2}^{k} \int_{(\mathbb{R}^p)^k} [1 + A\|t_1 - t_i\|]^{-1} P\{\|\overline{X}(t_i)\| < 1,\ i = 2,\dots,k\}\ dt_1 \dots dt_k$$
$$= 2k \left\{ \int_{\mathbb{R}^p} [1 + A\|t_1\|^{n/2}]^{-1} dt_1 \right\} E(T^{k-1}) = ck\, E(T^{k-1}),$$

avec $c = 2\int_{\mathbb{R}^p} [1 + A\|t\|^{n/2}]^{-1}\, dt$. On remarque que du fait de la condition $n > 2p$ reliant les dimensions n et p, la fonction $t \to [1 + A\|t\|^{n/2}]^{-1}$ est intégrable sur l'espace $\mathbb{R}^p$ (pour la mesure de Lebesgue), par suite la constante $c > 0$ est finie.

En itérant la formule de récurrence (3.3.10) et en notant au passage la majoration

$$E(T) = \int_{\mathbb{R}^p} P\{\|\overline{X}(t)\| < 1\}dt \leqslant c,$$

on obtient le résultat (3.3.3) annoncé. Le théorème 23 est donc démontré.

L'estimation (3.3.2) associée à l'identité en loi

(3.3.11) $$\varepsilon^{-1}\ \overline{X}(\varepsilon^2 t) = \overline{X}(t),\ t \in \mathbb{R}^p,\ \varepsilon > 0 \text{ étant fixé,}$$

(voir (2.1.1)) conduit à des formules analogues pour les temps de séjour $T(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. En effet, en appliquant (3.3.11) puis un changement de variables élémentaires, il vient

(3.3.12) $$\begin{aligned} E(\exp bT) &= E\Big(\exp b \int_{\mathbb{R}^p} g_1(\overline{X}(t))dt\Big) \\ &= E\Big(\exp b \int_{\mathbb{R}^p} g_\varepsilon(\overline{X}(\varepsilon^2 t))dt\Big) \\ &= E(\exp b\varepsilon^{-2p}\, T(\varepsilon)) < +\infty,\ 0 < \varepsilon < +\infty, \end{aligned}$$

en prenant pour $b > 0$ la constante intervenant dans l'énoncé du théorème 23.

4. DISTRIBUTION DU MAXIMUM SUR UN CYLINDRE

Considérons les cylindres

(4.0.1) $$D(a,\varepsilon^2) = \{t = (u,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p-1} \,;\, 0 < u < a,\ \|x\| \leqslant \varepsilon^2\},\quad a > 0,\ \varepsilon > 0,$$

et notons plus particulièrement (conformément à la convention d'écriture introduite au paragraphe (2.4), voir l'énoncé du problème C)

(4.0.2) $$D(1/2,\varepsilon^2) = D(\varepsilon^2)\,,\ \varepsilon > 0.$$

Soit maintenant $X(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, $p \geqslant 2$, un mouvement brownien linéaire. Désignons par

(4.0.3) $$M(X,\varepsilon) = \sup\{|X(t)|\,,\ t \in D(1,\varepsilon^2)\},$$

le maximum absolu du processus restreint au cylindre $D(1,\varepsilon^2)$. Ce chapitre est entièrement consacré à la preuve du résultat suivant.

Théorème 24. *Fixons un nombre* $\alpha > 0$. *Il existe deux constantes* $0 < b_1 < b_2$ *ne dépendant que de* α *et de la dimension* $p \geqslant 2$ *de l'espace des indices, telles que l'on ait :*

(4.0.4) $$\exp(-b_2/\varepsilon^2) \leqslant P\{M(X,\varepsilon) \leqslant \alpha\varepsilon\} \leqslant \exp(-b_1/\varepsilon^2),\qquad \text{pour tout } \varepsilon,\ 0 < \varepsilon < 1.$$

La majoration $P\{M(X,\varepsilon) \leqslant \alpha\varepsilon\} \leqslant \exp(-b_1/\varepsilon^2)$ est évidente. Elle résulte du fait (déjà mentionné au paragraphe (2.1)) selon lequel le processus $X_0(u) = X(u,0)$, $u \in \mathbb{R}$, est un mouvement brownien à indice scalaire. Par suite, en exploitant l'inégalité $M_0(X) \leqslant M(X,\varepsilon)$ (voir le théorème 5 pour la notation) puis la formule (2.1.19), on accède à la majoration

$$P\{M(X,\varepsilon) \leqslant \alpha\varepsilon\} \leqslant P\{M_0(X) \leqslant \alpha\varepsilon\} \leqslant \exp(-b_1/\varepsilon^2),$$

satisfaite pour tout ε, $0 < \varepsilon < 1$.

La démonstration de la seconde inégalité de (4.0.4) est longue et nécessite de nombreux calculs intermédiaires. Cela étant, l'idée qui la sous-tend est relativement aisée à saisir. Débutons ce chapitre par une description de la démarche envisagée et des obstacles que l'on rencontre lors de sa mise en oeuvre.

(4.1) Présentation de la méthode.

A. Remarquons en premier lieu que la difficulté essentielle se situe au niveau de la minoration des probabilités

$$P\{M(Y,\varepsilon) \leqslant \beta\varepsilon\},\ 0<\varepsilon<1, \text{ le nombre } \beta>0 \text{ étant fixé,}$$

associées au processus $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$ (défini par (2.1.3)) et où nous avons posé

(4.1.1) $$M(Y,\varepsilon) = \sup\{|Y(u,x)|,\ 0<u<1,\ \|x\| \leqslant \varepsilon^2\}.$$

En effet, nous venons de rappeler que le processus $X_0(u) = X(u,0)$ est un mouvement brownien indexé sur la droite. Ecrivons donc $X(t)$ sous la forme

$$X(t) = Y(t) + X_0(u), \quad t=(u,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p-1},$$

et rappelons encore la notation

$$M_0(X) = \sup\{|X_0(u)|, \quad 0<u<1\}.$$

On obtient trivialement

(4.1.2) $$P\{M(X,\varepsilon) \leqslant \alpha\varepsilon\} \geqslant P\{M(Y,\varepsilon) \leqslant (1/2)\alpha\varepsilon \text{ et } M_0(X) \leqslant (1/2)\alpha\varepsilon\}.$$

Appliquons l'inégalité (2.3.8), on en déduit

(4.1.3) $$P\{M(X,\varepsilon) \leqslant \alpha\varepsilon\} \geqslant P\{M(Y,\varepsilon) \leqslant (1/2\sqrt{2})\alpha\varepsilon\}\ P\{M_0(X) \leqslant (1/2\sqrt{2})\alpha\varepsilon\}.$$

Posons

$$\beta = \alpha/2\sqrt{2},$$

la probabilité $P\{M_0(X) \leqslant \beta\varepsilon\}$ est connue. En particulier, avec (2.1.19), il vient :

(4.1.4) $$P\{M_0(X) \leqslant \beta\varepsilon\} \geqslant \exp(-a/\varepsilon^2), \quad 0<\varepsilon<1,$$

où $a>0$, est une constante ne dépendant que de β.

On constate, en examinant les expressions (4.1.3) et (4.1.4), qu'il nous faut estimer la probabilité $P\{M(Y,\varepsilon) \leqslant \beta\varepsilon\}$. Plus précisément, pour établir le théorème 24 il suffit de voir qu'il existe une constante $b' > 0$ ne dépendant que de β et de la dimension p et telle que l'on ait

(4.1.5) $$P\{M(Y,\varepsilon) \leqslant \beta\varepsilon\} \geqslant \exp\{-b'/\varepsilon^2\}$$

pour tout ε, $0 < \varepsilon < 1$.

B. Pour accéder à la minoration (4.1.5) on dispose, comme point de départ, de trois informations intéressantes : ce sont les identités en loi (2.1.4), (2.1.5) et (2.1.7). Ainsi, on voit à partir de (2.1.4) que les processus

$$Y(t),\ t \in \mathbb{R}^p \quad \text{et} \quad Y(t - (1/2,0)),\ t \in \mathbb{R}^p,$$

sont identiques en loi. Par suite, la variable aléatoire $M(Y,\varepsilon)$ a la même distribution que

(4.1.6) $$M_1(Y,\varepsilon) = \sup\{|Y(t)|,\ t = (u,x),\ -1/2 < u < 1/2,\ \|x\| \leqslant \varepsilon^2\},$$

ce qui, en particulier, se traduit par l'égalité

(4.1.7) $$P\{M(Y,\varepsilon) \leqslant \beta\varepsilon\} = P\{M_1(Y,\varepsilon) \leqslant \beta\varepsilon\},\ 0 < \varepsilon < 1.$$

Notons maintenant

(4.1.8) $$Y'(u,x) = Y(-u,x),\quad (u,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p-1},$$

puis posons

(4.1.9) $$\begin{cases} \text{a) } M(Y,D(\varepsilon^2)) = \sup\{|Y(t)|,\ t \in D(\varepsilon^2)\}, \\ \text{b) } M(Y',D(\varepsilon^2)) = \sup\{|Y'(t)|,\ t \in D(\varepsilon^2)\}, \end{cases}$$

où $D(\varepsilon^2)$ est le cylindre défini par (4.0.2).

En vertu de (2.1.7) les distributions des variables aléatoires $M(Y,D(\varepsilon^2))$ et $M(Y',D(\varepsilon^2))$ coïncident, d'où l'égalité

(4.1.10) $$P\{M(Y,D(\varepsilon^2)) \leqslant \beta\varepsilon\} = P\{M(Y',D(\varepsilon^2)) \leqslant \beta\varepsilon\},\ 0 < \varepsilon < 1.$$

Par ailleurs on a l'équivalence triviale (voir (4.1.6))

(4.1.11) $$M_1(Y,\varepsilon) \leqslant \beta\varepsilon \Leftrightarrow M(Y,D(\varepsilon^2)) \leqslant \beta\varepsilon \quad \text{et} \quad M(Y',D(\varepsilon^2)) \leqslant \beta\varepsilon,$$

qui, à son tour, implique

(4.1.12) $$P\{M_1(Y,\varepsilon) \leqslant \beta\varepsilon\} = P\{M(Y,D(\varepsilon^2)) \leqslant \beta\varepsilon \quad \text{et} \quad M(Y',D(\varepsilon^2)) \leqslant \beta\varepsilon\}$$

Supposons que l'on soit en droit d'écrire

(4.1.13) $$P\{M_1(Y,\varepsilon) \leqslant \beta\varepsilon \ \text{et} \ M(Y',D(\varepsilon^2)) \leqslant \beta\varepsilon\} \geqslant P\{M(Y,D(\varepsilon^2)) \leqslant \beta\varepsilon\} \,.\, \times P\{M(Y',D(\varepsilon^2)) \leqslant \beta\varepsilon\},$$

alors, en appliquant successivement (4.1.7), (4.1.12), (4.1.13) et (4.1.10), on aura

(4.1.14) $$P\{M(Y,\varepsilon) \leqslant \beta\varepsilon\} \geqslant [P\{M(Y,D(\varepsilon^2)) \leqslant \beta\varepsilon\}]^2 \,,\, 0 < \varepsilon < 1.$$

Exploitons maintenant la propriété d'homogénéité (2.1.5). Elle a pour conséquence l'identité en loi des processus $\sqrt{2}\, Y(t)$ et $Y(2t)$, $t \in \mathbb{R}^p$. Comme précédemment nous en déduisons que les variables aléatoires

$$\sqrt{2}\, M(Y,D(\varepsilon^2)) \quad \text{et} \quad M(Y,\sqrt{2}\,\varepsilon)$$

ont la même distribution. Par suite la formule (4.1.14) s'écrit sous la forme récurrente

(4.1.15) $$P\{M(Y,\varepsilon) \leqslant \beta\varepsilon\} \geqslant [P\{M(Y,\sqrt{2}\,\varepsilon)) \leqslant \beta\sqrt{2}\,\varepsilon\}]^2 \,.$$

En prenant $\sqrt{2}\,\varepsilon$ à la place de ε et en répétant le raisonnement qui vient d'être indiqué, on est conduit vers l'expression

(4.1.16) $$P\{M(Y,\varepsilon) \leqslant \beta\varepsilon\} \geqslant [P\{M(Y,2\varepsilon)\} \leqslant \beta 2\varepsilon\}]^{2^2} .$$

Plus généralement, en itérant ce procédé N-fois, on obtient, au rang N, la formule

(4.1.17) $$P\{M(Y,\varepsilon) \leqslant \beta\varepsilon\} \geqslant [P\{M(Y,2^{N/2}\,\varepsilon) \leqslant \beta 2^{N/2}\,\varepsilon\}]^{2^N} , \quad N \geqslant 1.$$

Fixons un entier $N = N(\varepsilon) \geqslant 1$, vérifiant :

(4.1.18) $$2^{N-1} < \varepsilon^{-2} \leqslant 2^N .$$

Pour un tel choix de l'entier N on obtient la majoration

(4.1.19) $$P\{M(Y,2^{N/2}\,\varepsilon) \leqslant \beta 2^{N/2}\,\varepsilon\} \geqslant P\{M(Y,2^{N/2}\,\varepsilon) \leqslant \beta\} \geqslant P\{M(Y,\sqrt{2}) \leqslant \beta\}$$

comme conséquence des inégalités $1 \leqslant 2^{N/2}\ \varepsilon \leqslant \sqrt{2}$ et de l'implication évidente

$$0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon' \Rightarrow M(Y,\varepsilon) \leqslant M(Y,\varepsilon').$$

Posons finalement $b' = -2\log P\{M(Y,\sqrt{2}) \leqslant \beta\}$. Le nombre b', $0 < b' < +\infty$, ne dépend que de β et de la dimension p de l'espace des indices. On voit ainsi, avec (4.1.18), et (4.1.19), que la formule (4.1.17) traduit le résultat souhaité, notamment

(4.1.20) $$P\{M(Y,\varepsilon) \leqslant \beta\varepsilon\} \geqslant e^{-b'/\varepsilon^2}\ , 0 < \varepsilon < 1.$$

Cette méthode se heurte malheureusement à un écueil de taille, à savoir : nous ne sommes pas en mesure de justifier l'inégalité (4.1.13). A défaut on pourrait envisager de faire appel à l'inégalité moins précise (2.3.7) ; le procédé itératif amplifiant l'imprécision, nous n'obtiendrons pas à son issue le résultat souhaité. En fait, l'unique argument non-trivial, dont on dispose et qui puisse justifier (4.1.13) est donné par le théorème 13 du paragraphe (2.3). Cependant, pour pouvoir l'appliquer il faudrait que la condition b) de ce théorème soit satisfaite, explicitement, que la fonctionnelle

$$c(s,t) = E(Y(t)Y'(s)), \quad s,t \in D(\varepsilon^2)$$

soit une covariance d'un processus gaussien. On peut vérifier assez facilement que cela n'est malheureusement pas le cas.

C. Le théorème 13 en question n'étant pas directement applicable on peut envisager d'emprunter une voie détournée en faisant appel à la technique des perturbations décrite par l'énoncé du théorème 14 du paragraphe (2.3). Un examen attentif de la fonctionnelle $c(s,t)$, $s,t \in D(\varepsilon^2)$, permet de voir que les perturbations "convenables" modifient excessivement la distribution du maximum et que, de ce fait, une telle approche est également vouée à l'échec : nous ne détaillerons pas cet aspect du problème qui, de par son caractère négatif, présente peu d'intérêt et qui surchargerait considérablement ce travail.

D. Pour réduire la difficulté exposée au point C, nous allons introduire un paramètre supplémentaire qui va nous permettre de faire "varier" la situation envisagée afin de la rendre accessible à la technique des perturbations. L'idée est la suivante. Considérons un mouvement brownien $X(w,t)$, $w \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^p$, indexé sur l'espace $\mathbb{R}^{p+1}$, ainsi que les processus $Y'_w(t)$ et $Y'_0(t)$ associés, étudiés au paragraphe (2.4) et définis (rappelons-le) par

$$Y_w(t) = X(w,t) - X(w,(u,0)),\ t = (u,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p-2},\ w \geqslant 0,$$
$$Y'_0(u,x) = Y_0(-u,x), \quad (u,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p-1}.$$

Posons encore pour tout $\alpha > 0$:

$$f(w,D(\varepsilon^2),\alpha) = P\{M(Y_w,D(\varepsilon^2)) \leqslant \alpha \quad \text{et} \quad M(Y'_0,D(\varepsilon^2)) \leqslant \alpha\}, \quad w \geqslant 0.$$

L'identité en loi (2.1.10) implique alors :

(4.1.21) $$f(0,D(\varepsilon^2),\beta\varepsilon) = P\{M(Y,D(\varepsilon^2)) \leqslant \beta\varepsilon \quad \text{et} \quad M(Y',D(\varepsilon^2)) \leqslant \beta\varepsilon\}\ .$$

Le fait que l'on soit capable de résoudre le problème envisagé repose sur les deux points suivants :

I. La variation, à l'origine, de la fonction $w \rightarrow f(w,D(\varepsilon^2),\beta\varepsilon)$ peut être contrôlée ;

II. Pour une valeur "appropriée" du paramètre $w > 0$ il existe une perturbation "convenable" $W(t)$, $t \in D(\varepsilon^2)$, du couple gaussien $(Y_w(s), Y'_0(t))$, $s,t \in D(\varepsilon^2)$, qui modifie sensiblement peu la distribution du maximum envisagé.

Concrètement, cela se traduit respectivement par les formulations suivantes :

Lemme 1. *Fixons trois nombres* $0 < \alpha < 1$, $\gamma > 0$ *et* $c > 0$. *Il existe deux constantes* $d > 0$ *et* ε_0 , $0 < \varepsilon_0 < 1$, *ne dépendant que de* α, γ, c *et de la dimension* p *de l'espace des indices, de sorte que l'on ait :*

(4.1.22) $$f(0,D(\varepsilon^2),\beta\varepsilon) \geqslant f(\varepsilon^{2\alpha},D(\varepsilon^2), \beta\varepsilon(1-\varepsilon^{\gamma})^2)\exp\{-d\varepsilon^{4\alpha-4-8\gamma(1+p)}\}$$

pour tout ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *et pour tout* $\beta \geqslant c$.

Lemme 2. *Fixons trois nombres* α,δ,c, *vérifiant* $c > 0$, $\alpha = 1/2 + \delta$ *et* $0 < \delta < 1/12$. *Il existe une constante* ε_1, $0 < \varepsilon_1 < 1$, *ne dépendant que de* α,δ,c *et de la dimension* p *de l'espace des indices, telle que l'on ait :*

(4.1.23) $$f(\varepsilon^{2\alpha},D(\varepsilon^2), \beta\varepsilon) \geqslant \left[1 - \exp\{-(1/2)\varepsilon^{6\delta-1/2}\}\right] \times \left[P\{M(Y,D(\varepsilon^2)) \leqslant \beta\varepsilon(1-\varepsilon^{\delta})^2\}\right]^2 ,$$

pour tout ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ *et pour tout* $\beta \geqslant c$.

Les démonstrations de ces deux lemmes seront données au paragraphe suivant. Admettons-les provisoirement et montrons comment la formule (4.1.5) souhaitée, en découle.

E. Preuve du théorème 24 à partir des relations (4.1.22) et (4.1.23). Fixons un nombre δ, $0 < \delta < 1/12$, puis posons

(4.1.24) $$\alpha = 1/2 + \delta\ .$$

Ce choix étant fait, fixons un second nombre $\gamma > 0$, de sorte que, en prenant

(4.1.25) $$a = 4 + 8\gamma(1+p) - 4\alpha,$$

on ait :

(4.1.26) $$0 < a < 2.$$

Le nombre γ vérifie donc l'inégalité

(4.1.27) $$0 < \gamma < \delta/2(p+1),$$

et en particulier $0 < \gamma < \delta$, ce qui implique

(4.1.28) $$P\{M(Y,D(\varepsilon^2)) \leqslant \beta\varepsilon(1-\varepsilon^{\gamma})^2(1-\varepsilon^{\delta})^2\} \geqslant P\{M(Y,D(\varepsilon^2)) \leqslant \beta\varepsilon(1-\varepsilon^{\gamma})^4\}$$

pour tout ε, $0 < \varepsilon < 1$ et tout $\beta > 0$.

Remarquons par ailleurs que du fait de l'inégalité $6\delta - 1/2 < 0$, il existe un nombre $\varepsilon_2 > 0$ ne dépendant que de δ et tel que l'on ait

(4.1.29) $$1 - \exp\{-(1/2)\varepsilon^{6\delta-1/2}\} \geqslant 1/2,$$

pour tout ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$.

Nous aurons besoin encore du lemme élémentaire suivant :

Lemme 3. *Il existe une constante* $c_1 = c_1(\gamma)$ *vérifiant :*

(4.1.30) $$\prod_{i=0}^{n} [1 - 2^{\gamma(i-n-2)/2}]^4 \geqslant c_1 ,$$

pour tout nombre entier $n \geqslant 0$.

La preuve du lemme 3 est évidente. Il suffit d'utiliser l'inégalité
$\log(1-u) \geqslant -u(1-2^{-\gamma})^{-1}$ valable pour tout u, $0 < u \leqslant 2^{-\gamma}$, pour en déduire la majoration

$$\prod_{i=0}^{n} [1 - 2^{\gamma(i-n-2)/2}]^4 \geqslant \exp\{-4/2^{\gamma/2}(2^{\gamma/2}-1)(1 - 2^{-\gamma})\} = c_1(\gamma).$$

Fixons maintenant une constante $\beta > 0$. Posons

(4.1.31) $$c = \beta c_1(\gamma),$$

puis considérons les constantes $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\alpha,\gamma,\varepsilon)$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\alpha,\delta,c)$ intervenant dans les énoncés des lemmes 1 et 2, et associées aux nombres α,γ,c définis respectivement en (4.1.24), (4.1.27) et (4.1.31). Posons alors

(4.1.32) $$\varepsilon_3 = \min(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,1/2).$$

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre vérifiant $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_3$. On a en particulier $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$ ce qui, en vertu de (4.1.30) (avec $n = 0$) et (4.1.31), implique

$$\beta(1 - \varepsilon^{\gamma})^2 \geqslant c.$$

Par suite, nous pouvons appliquer le lemme 2 en prenant à la place de β le nombre $\beta(1 - \varepsilon^{\gamma})^2$. En tenant compte des relations (4.1.28) et (4.1.29) on obtient

(4.1.33) $$f(\varepsilon^{2\alpha},D(\varepsilon^2), \beta\varepsilon(1-\varepsilon^{\gamma})^2) \geqslant (1/2)\left[P\{M(Y,D(\varepsilon^2)) \leqslant \beta\varepsilon(1 - \varepsilon^{\gamma})^4\right]^2.$$

Le couple ε, β satisfait encore les majorations $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ et $\beta > c$. De ce fait la formule (4.1.22) du lemme 1 est valable, ce qui, avec (4.1.33) et (4.1.25), donne

(4.1.34) $$f(0,D(\varepsilon^2), \beta\varepsilon) \geqslant (1/2)\exp(-d/\varepsilon^{a})[P\{M(Y,D(\varepsilon^2)) \leqslant \beta\varepsilon(1 - \varepsilon^{\gamma})^4]^2.$$

Faisons appel aux propriétés d'homogénéité (2.1.4) et (2.1.5) du processus Y. En répétant mot pour mot l'argument développé au point 4.1.B. (voir également 4.1.A. pour les notations) on est conduit à l'identité

(4.1.35) $$\begin{aligned} P\{M(Y,D(u^2) \leqslant v\} = P\{M(Y,\sqrt{2}\, u) \leqslant \sqrt{2}\, v\} &= P\{M_1(Y,\sqrt{2}\, u) \leqslant \sqrt{2}\, v\} \\ &= f(0,D(2u^2), \sqrt{2}\; v) \end{aligned}$$

laquelle est satisfaite pour tout choix de $u \geqslant 0$ et $v \geqslant 0$.

Avec (4.1.34) nous en déduisons

(4.1.36) $$f(0,D(\varepsilon^2),\beta\varepsilon) \geqslant (1/2)\exp(-d/\varepsilon^{a})\left[f(0,D(2\varepsilon^2), \beta\sqrt{2}\,\varepsilon(1 - \varepsilon^{\gamma})^4)\right]^2.$$

Cette expression n'est pas exactement une formule récurrente, ce qui peut sembler présenter quelques inconvénients. En fait la difficulté est plus apparente que réelle. Pour le voir, posons tout d'abord

$$(4.1.37)\quad \begin{cases} \text{a) } c(\varepsilon,n) = \prod_{i=0}^{n-1} [1 - (\varepsilon 2^{i/2})^{\gamma}]^4, \quad n \geqslant 1. \\ \text{b) } d(\varepsilon,n) = \exp\left\{ - \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \log 2 - (d/\varepsilon^a) \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i(2-a)/2} \right\}, \end{cases}$$

puis procédons à la preuve du lemme suivant :

Lemme 4. *Fixons* ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_3$. *Soit* $N = N(\varepsilon) \geqslant 1$, *l'unique nombre entier vérifiant :*

$$(4.1.38)\qquad \varepsilon_3^2 < \varepsilon^2\, 2^N \leqslant 2\varepsilon_3^2 .$$

Alors pour tout nombre entier n, $1 \leqslant n \leqslant N$, *on a :*

$$(4.1.39)\qquad f(0,D(\varepsilon^2), \beta\varepsilon) \geqslant d(\varepsilon,n)\big[f(0,D(2^n \varepsilon^2), \beta 2^{n/2} \varepsilon c(\varepsilon,n))\big]^{2^n} .$$

Preuve du lemme 4. On établit ce résultat par récurrence. Au rang $n = 1$, la formule (4.1.39) coïncide avec (4.1.36). Supposons donc que (4.1.39) soit satisfaite au rang $n < N(\varepsilon)$. L'inégalité (4.1.38) implique (avec (4.1.32))

$$(4.1.40)\qquad \varepsilon^2 2^n \leqslant \varepsilon_3^2 \leqslant 1/4,$$

soit encore

$$\varepsilon \leqslant 2^{-(n+2)/2},$$

et de ce fait

$$\varepsilon 2^{i/2} \leqslant 2^{(i-n-2)/2},$$

pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

On en déduit la majoration

$$c(\varepsilon,n+1) \geqslant \prod_{i=0}^{n} [1 - 2^{\gamma(i-n-2)/2}]^4,$$

puis avec (4.1.30) et (4.1.31) :

$$(4.1.41)\qquad \beta c(\varepsilon,n) > \beta c(\varepsilon,n)\, [1 - (2^{n/2} \varepsilon)^{\gamma}]^4 = \beta c(\varepsilon,n+1) \geqslant c.$$

En vertu de (4.1.32) on a également :

$$\varepsilon\, 2^{n/2} \leqslant \varepsilon_3 \leqslant \varepsilon_0 .$$

Nous pouvons donc appliquer la formule (4.1.22) du lemme 1 dans laquelle on aura pris $\varepsilon 2^{n/2}$ à la place de ε et $\beta c(\varepsilon,n)$ à la place de β. En notant

$$w = (2^{n/2}\,\varepsilon)^{2\alpha},$$

il vient

(4.1.42) $f(0,D(2^n\varepsilon^2),\ \beta 2^{n/2}\,\varepsilon c(\varepsilon,n)) \geqslant \exp\{-d/(2^{n/2}\varepsilon)^a\}$

$$\times\ f(w,D(2^n\,\varepsilon^2),\ \beta 2^{n/2}\varepsilon c(\varepsilon,n)[1-(2^{n/2}\,\varepsilon)^\gamma\,]^2\,).$$

D'après (4.1.41) on a encore :

$$\beta c(\varepsilon,n)[1 - (2^{n/2}\,\varepsilon)^\gamma]^2 \geqslant c,$$

et en vertu de (4.1.40)

$$\varepsilon 2^{n/2} \leqslant \varepsilon_3 \leqslant \mathrm{Min}(\varepsilon_1,\varepsilon_2\,)$$

On est donc en droit de faire appel au lemme 2 en prenant $\varepsilon 2^{n/2}$ à la place de ε et $\beta c(\varepsilon,n)[1 - (2^{n/2}\,\varepsilon)^\gamma\,]^2$ à la place de β. La formule (4.1.23) et les inégalités

$$c(\varepsilon,n)[(1-(2^{n/2}\,\varepsilon)^\gamma\,)(1 - (2^{n-2}\,\varepsilon)^\delta\,)]^{\,2} \geqslant c(\varepsilon,n)[1 - (2^{n/2}\,\varepsilon)^\gamma\,]^4 = c(\varepsilon,n+1)$$

résultant de la majoration $\gamma \leqslant \delta$) et (4.1.29) donnent alors :

(4.1.43) $f(w,D(2^n\,\varepsilon^2),\ \beta 2^{n/2}\,\varepsilon c(\varepsilon,n)[1 - (2^{n/2}\,\varepsilon)^\gamma\,]^2\,) \geqslant$

$$(1/2)[P\{M(Y,D(2^n\,\varepsilon^2)) \leqslant \beta 2^{n/2}\,\varepsilon\, c(\varepsilon,n+1)\}]^2\,.$$

On en déduit facilement que l'inégalité (4.1.39) est satisfaite au rang $n+1$. Il suffira, à cet effet, d'associer les inégalités (4.1.42) et (4.1.43) à l'hypothèse de récurrence. En outre on remarquera que l'on a :

(4.1.44) $d(\varepsilon,n)[(1/2)\exp\{-d/(2^{n/2}\,\varepsilon)^a\}]^{2^n} = d(\varepsilon,n+1),$

et

$$\begin{aligned}&P\{M(Y,D(2^n\,\varepsilon^2)) \leqslant \beta 2^{n/2}\,\varepsilon c(\varepsilon,n+1)\}\\ &= f(0,D(2^{n+1}\,\varepsilon^2),\ \beta 2^{(n+1)/2}\,\varepsilon c(\varepsilon,n+1)),\end{aligned}$$

la dernière identité résultant de la formule (4.1.35).

Le lemme 4 est donc démontré. En particulier, en écrivant l'inégalité (4.1.39) au rang $N(\varepsilon)$ et en tenant compte de (4.1.38) et (4.1.41) on obtient :

(4.1.45) $$\begin{aligned} f(0,D(\varepsilon^2),\beta\varepsilon) &\geqslant d(\varepsilon,N)[f(0,D(2^N\varepsilon^2),\ \beta 2^{N/2}\varepsilon c(\varepsilon,N))]^{2^N} \\ &\geqslant d(\varepsilon,N)[f(0,D(2\varepsilon_3^2),\ \beta\varepsilon_3 c(\varepsilon,N))]^{2^N} \\ &\geqslant d(\varepsilon,N)[f(0,D(2\varepsilon_3^2),\ \varepsilon_3 c)]^{2^N} \\ &\geqslant d(\varepsilon,N)\exp\{(\sqrt{2}\,\varepsilon_3/\varepsilon)^2 \log f(0,D(2\varepsilon_3^2),\ \varepsilon_3 c)\}\ . \end{aligned}$$

Par ailleurs, on voit à partir de (4.1.37. b) que l'on a :

(4.1.46) $$d(\varepsilon,N) = \exp\{-(2^N-1)\log 2 - (d/\varepsilon^a)(2^{N(2-a)/2}-1)/(2^{(2-a)/2}-1)\},$$

et avec (4.1.38)

(4.1.47) $$d(\varepsilon,N) \geqslant \exp\{-2(\varepsilon_3/\varepsilon)^2 - (d_1/\varepsilon^a)(\sqrt{2}\,\varepsilon_3/\varepsilon)^{2-a}\}$$

où on a posé

$$d_1 = d/(2^{(2-a)/2}-1),$$

soit encore (avec (4.1.26))

(4.1.48) $$d(\varepsilon,N) \geqslant \exp\{-(1/\varepsilon^2)[2\varepsilon_3^2 + d_1(\sqrt{2}\,\varepsilon_3)^{2-a}]\}\ .$$

Notons finalement

(4.1.49) $$b = 2\varepsilon_3^2 + d_1(\sqrt{2}\,\varepsilon_3)^{(2-a)} - 2\varepsilon_3^2 \log f(0,D(2\varepsilon_3^2),\ \varepsilon_3 c).$$

Le nombre b ainsi défini est positif non-nul et les inégalités (4.1.45) et (4.1.48) impliquent

(4.1.50) $$P\{M(Y,\varepsilon) \leqslant \beta\varepsilon\} = f(0,D(\varepsilon^2),\ \beta\varepsilon) \geqslant \exp(-b/\varepsilon^2)$$

avec pour unique contrainte $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_3$.

Ce résultat conduit aisément vers la majoration (4.1.5) souhaitée. En effet, en appliquant successivement : l'identité en loi

$$\varepsilon_3 M(Y,\varepsilon) = M(Y,D(\varepsilon_3^2,\ (\varepsilon\varepsilon_3)^2)),$$

(résultant de la propriété d'homogénéité (2.1.5)), puis la majoration triviale

$$M(Y,D(\varepsilon_3^2,\ (\varepsilon\varepsilon_3)^2)) \leqslant M(Y,\varepsilon\varepsilon_3)$$

(comme conséquence de l'inégalité $\varepsilon_3 \leqslant 1/2$, voir (4.1.32)), et finalement la formule (4.1.50), on obtient, pour tout ε, $0 < \varepsilon < 1$:

$$\textbf{(4.1.51)} \qquad \begin{aligned} P\{M(Y,\varepsilon) \leqslant \beta\varepsilon\} &= P\{M(Y,D(\varepsilon_3^2, (\varepsilon\varepsilon_3)^2)) \leqslant \beta\varepsilon\varepsilon_3\} \\ &\geqslant P\{M(Y,\varepsilon\varepsilon_3) \leqslant \beta\varepsilon\varepsilon_3\} \\ &\geqslant \exp\{-b/(\varepsilon\varepsilon_3)^2\} \\ &= \exp\{-b'/\varepsilon^2\}, \end{aligned}$$

en posant $b' = b/\varepsilon_3^2$.

4.2. Preuves des lemmes 1 et 2 du paragraphe 5.2.

Preuve du lemme 1. On la décompose en deux étapes. Dans un premier temps on procède par discrétisation, explicitement, le nombre $\eta > 2$ étant fixé, on considère la suite

$$S(\varepsilon,\eta) = \{t_1,\dots,t_N\} \ , \ N = N(\varepsilon,\eta),$$

de tous les points appartenant au cylindre $D(\varepsilon^2)$, dont les coordonnées sont des multiples entiers (relatifs) non nuls de ε^η . En clair, on a l'équivalence :

Un point $t = (u,x)$, $u \in \mathbb{R}$, $x = (v_1,\dots,v_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1}$ appartient à $S(\varepsilon,\eta)$, si et seulement si il satisfait aux conditions suivantes :

a) Le point t appartient à $D(\varepsilon^2)$;

b) On a $u \neq 0$ et $v_i \neq 0$, $i = 1,\dots,p-1$;

c) On a $u = 0 \bmod \varepsilon^\eta$ et $v_i = 0 \bmod \varepsilon^\eta$, $i = 1,\dots,p-1$.

En particulier, cela implique

$$\textbf{(4.2.1)} \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \|t-s\| \geqslant \varepsilon^\eta \text{ , pour tout couple } t \neq s, \ t,s \in S(\varepsilon,\eta), \\ \\ \text{b) } \|t\| \geqslant u \geqslant \varepsilon^\eta \text{ , pour tout } t = (u,x) \in S(\varepsilon,\eta). \end{array} \right.$$

Avec l'inclusion évidente

$$D(\varepsilon^2) \subset [0,1/2] \times [-\varepsilon^2, \varepsilon^2]^{p-1} ,$$

nous obtenons trivialement la majoration

$$\textbf{(4.2.2)} \qquad N(\varepsilon,\eta) \leqslant (1/2\ \varepsilon^\eta)(2\varepsilon^2/\varepsilon^\eta)^{p-1} = 2^{p-2}\, \varepsilon^{2(p-1)-p\eta} .$$

Fixons $\varepsilon > 0$, et considérons l'application

$$w \to f(w,S,\beta\varepsilon),\ w \geqslant 0,\ S = S(\varepsilon,\eta),\ \beta > 0,$$

définie par (2.4.3). Cette application est non-nulle et dérivable sur $\mathbb{R}^+$, l'expression de la dérivée $f_w(S,\beta\varepsilon)$ étant donnée par la formule (2.4.41). Par suite l'application

$$w \to \log f(w,S,\beta\varepsilon),\ w \geqslant 0,$$

est également bien définie et dérivable. En écrivant la formule des accroissements finis on obtient

$$\log f(w,S,\beta\varepsilon) - \log f(0,S,\beta\varepsilon) = wf_\theta(S,\beta\varepsilon)/f(\theta,S,\beta\varepsilon),$$
$$\text{avec } \theta = \theta(w) \in\ ]0,w[\ ,$$

soit encore :

(4.2.3) $$f(w,S,\beta\varepsilon)/f(0,S,\beta\varepsilon) = \exp\{wf_\theta(S,\beta\varepsilon)/f(\theta,S,\beta\varepsilon)\},\ w > 0,$$
$$\theta = \theta(w) \in\ ]0,w[\ .$$

En faisant appel à l'inégalité (2.4.48) nous en déduisons la majoration essentielle suivante :

(4.2.4) $$f(w,S,\beta\varepsilon)/f(0,S,\beta\varepsilon) \leqslant \exp\{(2w/\pi) \sum_{\ell,q=1}^{N} |c_\theta(t_\ell,t_q)|\,[A(\ell,q)/A]^{1/2}$$
$$\times\ [P\{|Y_0'(t_\ell)| \leqslant \beta\varepsilon\}P\{|Y_0'(t_q)| \leqslant \beta\varepsilon\}]^{-1},$$
$$\text{avec } \theta \in\ ]0,w[\ ,\ S = S(\varepsilon,\eta) \ \text{ et } \ N = N(\varepsilon,\eta),$$

les déterminants A et $A(\ell,q)$ (qui dépendent également de θ) étant décrits au paragraphe (2.4).

Abordons maintenant l'estimation des différents termes intervenant dans la formule (4.2.4).

A. Minoration des probabilités $P\{|Y_0'(t)| \leqslant \beta\varepsilon\},\ t \in S(\varepsilon,\eta)$.

Le point $t = (u,x) \in S(\varepsilon,\eta)$ appartenant au cylindre $D(\varepsilon^2)$ on a $\|x\| \leqslant \varepsilon^2$. Par suite, en vertu de l'identité $E(Y_0'(t)^2) = \|x\|$ (provenant de (2.1.8)) nous pouvons écrire

(4.2.5) $$P\{|Y_0'(t)| \leqslant \beta\varepsilon\} = (4/2\pi\|x\|)^{1/2} \int_0^{\beta\varepsilon} e^{-y^2/2\|x\|}\,dy \geqslant I(\beta),$$

avec

(4.2.6) $$I(\beta) = (4/2\pi)^{1/2} \int_0^{\beta} e^{-y^2/2}\,dy.$$

B. Majoration de la valeur absolue de la dérivée $c_\theta(s,t),\ s,t \in S(\varepsilon,\eta)$.

Elle s'obtient immédiatement à partir de l'expression (2.4.35), sous la forme

$$|c_\theta(s,t)| = (\theta/2)\left[\frac{\sqrt{\|x\|^2+(u+v)^2+\theta^2}-\sqrt{\|x-y\|^2+(u+w)^2+\theta^2}}{[(\|x\|^2+(u+v)^2+\theta^2)(\|x-y\|^2+(u+v)^2+\theta^2)]^{1/2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{\|y\|^2+(u+v)^2+\theta^2}-\sqrt{(u+v)^2+\theta^2}}{[(\|y\|^2+(u+v)^2+\theta^2)((u+v)^2+\theta^2)]^{1/2}})\right],\ s=(u,x),\ \ t=(v,y),$$

d'où on déduit trivialement (en vertu des inégalités $\|x\| \leqslant \varepsilon^2$ et $\|y\| \leqslant \varepsilon^2$)

(4.2.7) $$|c_\theta(s,t)| \leqslant \frac{3\theta\varepsilon^4}{(u+v)^3},\quad s=(u,x),\quad t=(v,y).$$

C. Majoration du quotient $[A(\ell,q)/A]^{1/2}$.

On voit, à partir des formules (2.4.49), (2.4.50) et (2.4.51), qu'il suffit de minorer les distances $d(X(\theta(t_\ell), E(\ell))$ et $d(X(0,(-u_q,x_q)), E(\ell,q))$ décrites vers la fin du paragraphe (2.4). Or, en appliquant la formule (3.2.2) du théorème 21, on a :

(4.2.8) $$d^2(X(\theta,t_\ell), E(\ell)) \geqslant a \inf_{x\in P} \|(\theta,t_\ell)-x\|,\ \ a>0,$$

où $P \subset \mathbb{R}^{p+1}$, désigne l'ensemble des indices des variables aléatoires engendrant l'espace $E(\ell)$ soit, en se reportant à la définition de celui-ci,

$$P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4,$$

les ensembles dont P est la réunion étant définis par :

α) $P_1 = \{(\theta,(u_i,x_i)),\ i=1,\dots,N,\ i\neq \ell\}$;
β) $P_2 = \{(\theta,(0,x_i)),\ \ i=1,\dots,N\}$;
γ) $P_3 = \{(0,(-u_i,x_i)),\ i=1,\dots,N\}$;
δ) $P_4 = \{(0,(0,x_i)),\ \ i=1,\dots,N\}$,

les points $t_i=(u_i,x_i)$ appartenant à $S(\varepsilon,\eta)$.

Notons que, en vertu de (4.2.1) a) et b), on obtient :

$$\|(\theta,t_\ell)-z\| \geqslant \varepsilon^\eta \quad \text{pour tout}\quad z\in P_1\cup P_2\cup P_4$$

et, de même d'après (4.2.1.b) :

$$\|(\theta,t_\ell) - z\| \geqslant |u_\ell + u_i| \geqslant 2\varepsilon\eta ,$$

pour tout point $z = (0,(-u_i,x_i)) \in P_3$ (avec $t_\ell = (u_\ell,x_\ell)$).

Avec (4.2.8) on en déduit :

(4.2.9) $$d^2(X(\theta,t_\ell), E(\ell)) \geqslant a\varepsilon\eta , \; t_\ell \in S(\varepsilon,\eta), \; c > 0.$$

De la même manière, la formule (3.2.2) implique l'inégalité

(4.2.10) $$d^2(X(0,(-u_q,x_q)), E(\ell,q)) \geqslant a \inf_{z \in Q} \|(0,(-u_q,x_q)) - z\|$$

où Q est l'ensemble des indices des variables aléatoires engendrant l'espace $E(p,q) \subset L^2$ soit encore, en se reportant au paragraphe (2.4)

$$Q = P_1 \cup P_2 \cup P_4 \cup Q_1 ,$$

les ensembles P_1, P_2 et P_4 étant définis aux points α), β) et δ) figurant ci-dessus, l'ensemble Q_1 étant défini par

$$Q_1 = \{(0,(-u_i,x_i), i = 1,\ldots,N, \; i \neq q\} .$$

On voit immédiatement (avec (4.2.1.a) et (4.2.1.b)) que, dans ce cas, on a également

(4.2.11) $$d^2(X(0,(-u_q,x_q)), E(\ell,q)) \geqslant a\varepsilon\eta , \; t = (u_q,x_q) \in S(\varepsilon,\eta) .$$

En conclusion, la succession des relations (2.4.49), (2.4.50), (2.4.51), (4.2.9) et (4.2.11) nous conduit vers l'estimation (indépendante de $\theta \in \,]0,w[$)

(4.2.12) $$[A(\ell,q)/A]^{1/2} \leqslant 1/a\varepsilon\eta .$$

Reprenons le fil de la preuve du lemme 1. Les inégalités A) et C), que nous venons d'établir, appliquées à l'expression (4.2.4), permettent d'écrire celle-ci sous la forme :

(4.2.13) $$f(w,S,\beta\varepsilon)/f(0,S,\beta\varepsilon) \leqslant \exp\left\{ d_0 w \varepsilon^{-\eta} I(\beta)^{-2} \sum_{\ell,q=1}^{N} |c_\theta(t_\ell,t_q)| \right\} ,$$

où $d_o > 0$, est une constante.

Il reste à majorer la somme $\sum_{\ell,q=1}^{N} |c_\theta(t_\ell,t_q)|$ figurant dans cette formule. Pour simplifier on notera par

$$S_1 = \{u \in \,]0,1/2]\,,\ u = 0 \mod \varepsilon^\eta\},$$

l'ensemble des multiples entiers de ε^η appartenant à l'intervalle $]0,1/2]$. Si $N_1 = \text{card } S_1$ est le nombre d'éléments de S_1, alors on a trivialement

$$N_1 \leqslant 1/\varepsilon^\eta .$$

Pour tout $u \in S_1$, désignons par

$$S_u = \{t = (u,x) \in S(\varepsilon,\eta)\},$$

l'ensemble des points $t \in S(\varepsilon,\eta)$ dont u est la première coordonnée. Le nombre $N_2 = \text{card } S_u$ d'éléments de l'ensemble S_u ne dépend pas du choix de $u \in S_1$ et satisfait la majoration

$$N_2 \leqslant (2\varepsilon^2/\varepsilon^\eta)^{p-1}. \tag{4.2.14}$$

Faisons appel à l'inégalité (4.2.7) qui s'écrit :

$$|c_\theta(t_\ell,t_q)| \leqslant 3\theta\varepsilon^4/(u_\ell + u_q)^3 ,\ t_\ell = (u_\ell,x_\ell),\ t_q = (u_q,x_q),\ t_\ell,t_q \in S(\varepsilon,\eta).$$

Avec les notations qui viennent d'être précisées, et tenant compte de l'inégalité $0 < \theta < w$, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell,q=1}^{N} |c_\theta(t_\ell,t_q)| &= \sum_{u,v \in S_1} \sum_{\substack{t \in S_u \\ s \in S_v}} |c_\theta(t,s)| \\ &\leqslant 3w\varepsilon^4 N_2^2 \sum_{u,v \in S_1} (u+v)^{-3} . \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

Par ailleurs on a trivialement

$$\sum_{u,v \in S_1} (u+v)^{-3} = \varepsilon^{-3\eta} \sum_{i,j=1}^{N_1} (i+j)^{-3} \leqslant \varepsilon^{-3\eta}, \tag{4.2.16}$$

en vertu de l'estimation élémentaire

$$\sum_{i,j=1}^{+\infty} (i+j)^{-3} \leqslant 1.$$

En rassemblant (4.2.13), (4.2.14), (4.2.15) et (4.2.16) nous pouvons finalement énoncer la formule fondamentale suivante

(4.2.17) $$f(0,S,\beta\varepsilon) \geqslant f(w,S,\beta\varepsilon)\exp\{-(d_1 w/I(\beta))^2\ \varepsilon^{4p-2\eta(1+p)}\},$$

valable pour tout $\varepsilon > 0$, $\beta > 0$, $\eta > 2$, avec $S = S(\varepsilon,\eta)$, et dans laquelle $d_1 > 0$ est une constante (ne dépendant que de la dimension $p \geqslant 2$).

Avec ce résultat s'échève la première étape de la preuve du lemme 1. La seconde étape consiste à voir qu'une inégalité analogue à (4.2.17) peut être obtenue en calculant le maximum du processus Y sur le cylindre $D(\varepsilon^2)$ tout entier. On procède de la manière suivante.

Fixons ε, $0 < \varepsilon < 1$, ainsi que $\eta = 2 + 4\gamma$, $\gamma > 0$, puis considérons comme précédemment la suite
$$S = S(\varepsilon,\eta) \subset D(\varepsilon^2)$$

associée. Notons, pour simplifier, par

(4.2.18) $$B(t) = B(t,\sqrt{p}\ \varepsilon^{\eta}),\ \ t \in S(\varepsilon,\eta),$$

la boule euclidienne de l'espace $\mathbb{R}^p$, centrée au point t et de rayon $\sqrt{p}\ \varepsilon^{\eta}$.

Remarquons alors l'inclusion évidente

(4.2.19) $$D(\varepsilon^2) \subset \bigcup_{t \in S(\varepsilon,\eta)} B(t).$$

En effet, si $s = (v,y)$, $y = (r_1,\ldots,r_{p-1})$ est un point appartenant au cylindre $D(\varepsilon^2)$ alors de par le mode de construction même de la suite $S(\varepsilon,\eta)$ il existe un point $t = (u,x)$, $x = (v_1,\ldots,v_{p-1})$, $t \in S(\varepsilon,\eta)$ tel que l'on ait :

$$|v-u| \leqslant \varepsilon^{\eta} \ \text{ et }\ |r_i - v_i| \leqslant \varepsilon^{\eta},\ \ i = 1,\ldots,p-1.$$

De ce fait le point s appartient à la boule B(t).

L'inclusion indiquée a pour conséquence évidente l'implication

$$(4.2.20)\quad \left.\begin{cases} M(Y_0,S) \leqslant \beta\varepsilon(1-\varepsilon^{\gamma}) \\ \text{et} \\ M(U,B(t)) \leqslant \beta\varepsilon^{1+\gamma}, \text{ pour tout } t \in S \end{cases}\right\} \Rightarrow M(Y_0,D(\varepsilon^2)) \leqslant \beta\varepsilon$$

dans laquelle nous avons fait appel aux notations du paragraphe (2.4), notamment à (2.4.2) (il suffit en effet d'utiliser l'inégalité $|Y_0(s)| \leqslant |U(s)| + |Y_0(t)|$, $s \in B(t)$).

L'implication (4.2.20) est encore valable en prenant le processus Y_0' à la place du processus Y_0 à condition de remplacer le processus U par $U'(s) = Y_0'(s) - Y_0'(t)$, $s \in B(t)$.

En prenant les probabilités des ensembles concernés nous en déduisons trivialement

$$(4.2.21)\quad \begin{aligned} f(0,D(\varepsilon^2),\beta\varepsilon) \geqslant P\{&M(Y_0,S) \leqslant \beta\varepsilon(1-\varepsilon^{\gamma}),\ M(Y_0',S) \leqslant \beta\varepsilon(1-\varepsilon^{\gamma}),\\ &M(U,B(t)) \leqslant \beta\varepsilon^{1+\gamma} \text{ et } M(U',B(t)) \leqslant \beta\varepsilon^{1+\gamma}\\ &\text{pour tout } t \in S\}. \end{aligned}$$

Appliquons l'inégalité (2.3.7) avec le choix $a = \varepsilon^{\gamma/2}$, $b = 1 - \varepsilon^{\gamma}$, il vient

$$(4.2.22)\quad f(0,D(\varepsilon^2),\beta\varepsilon) \geqslant f(0,S,\beta\varepsilon(1-\varepsilon^{\gamma})^2)A(\varepsilon,\eta,\beta),$$

avec

$$A(\varepsilon,\eta,\beta) = P\{M(U,B(t)) \leqslant \beta\varepsilon^{(2+3\gamma)/2} \text{ et } M(U',B(t)) \leqslant \beta\varepsilon^{(2+3\gamma)/2}, \text{ pour tout } t \in S\}.$$

Faisons appel maintenant à (2.3.8). En notant l'identité en loi des processus U et U' on obtient

$$(4.2.23)\quad A(\varepsilon,\eta,\beta) \geqslant [A_1(\varepsilon,\eta,\beta)]^2,$$

avec

$$A_1(\varepsilon,\eta,\beta) = P\{M(U,B(t)) \leqslant (\beta/\sqrt{2})\varepsilon^{(2+3\gamma)/2}, \text{ pour tout } t \in S\}.$$

On minore la probabilité $A_1(\varepsilon,\eta,\beta)$ à l'aide de (2.4.14). Ecrivons tout d'abord l'inégalité évidente suivante

$$(4.2.24)\quad A_1(\varepsilon,\eta,\beta) \geqslant 1 - \sum_{t \in S} P\{M(U,B(t)) \geqslant (\beta/\sqrt{2})\,\varepsilon^{(2+3\gamma)/2}\}$$

puis appliquons à chaque terme de la somme figurant ci-dessus la majoration suivante découlant de (2.4.14) :

(4.2.25) $P\{M(U,B(t)) \geqslant (\beta/\sqrt{2})\varepsilon^{(2+3\gamma)/2}\} \leqslant \exp\{-e^{-\gamma/2}\}$,
pour tout ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon(p,\gamma,\beta)$ et tout $t \in \mathbb{R}^p$.

On obtient alors :

(4.2.26) $A_1(\varepsilon,\eta,\beta) \geqslant 1 - N(\varepsilon,\eta)\exp\{-\varepsilon^{-\gamma/2}\}$,
pour tout ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon(p,\gamma,\beta)$.

En remarquant que la probabilité $A1(\varepsilon,\eta,\beta)$ est une fonction croissante de β et que pour $\varepsilon > 0$ pris suffisamment petit (η étant fixé) on a (voir (4.2.2)) :

$$N(\varepsilon,\eta)\exp\{-\varepsilon^{-\gamma/2}\} \leqslant \exp\{-\varepsilon^{-\gamma/4}\}$$

nous pouvons énoncer :

Proposition. *Les nombres* $c > 0$, $\eta = 2 + 4\gamma$, $\gamma > 0$, *étant fixés, il existe une constante* $0 < \varepsilon(\eta,c,p) < 1$ *telle que l'on ait :*

(4.2.27) $A_1(\varepsilon,\eta,\beta) \geqslant 1 - \exp\{-\varepsilon^{-\gamma/4}\}$, *pour tout* ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon(\eta,c,p)$
et tout $\beta \geqslant c$.

En rassemblant (4.2.22), (4.2.23) et (4.2.27) il vient :

(4.2.28) $f(0,D(\varepsilon^2),\beta\varepsilon) \geqslant f(0,S,\beta\varepsilon(1-\varepsilon^\gamma)^2)[1 - \exp\{-\varepsilon^{-\gamma/4}\}]^2$,

cette formule étant valable pour tout ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon(\eta,c,p) < 1$ et tout $\beta \geqslant c$.

L'association des inégalités (4.2.17) (dans laquelle on aura remplacé β par $\beta(1-\varepsilon^\gamma)^2$) et (4.2.28) conduit facilement vers la conclusion (4.1.22) du lemme 1. On s'appuiera, en particulier, sur les propriétés suivantes :

a) La majoration $f(w,S,\beta\varepsilon(1 - \varepsilon^\gamma)^2) \geqslant f(w,D(\varepsilon^2), \beta\varepsilon(1 - \varepsilon^\gamma)^2)$, résultant de l'inclusion $S(\varepsilon,\eta) \subset D(\varepsilon^2)$;
b) L'inégalité $I(\beta(1 - \varepsilon^\gamma)^2) \geqslant I(c(1 - \varepsilon(\eta,c,p)^\gamma)^2)$, valable pour tout $\beta \geqslant c$ et tout $0 < \varepsilon < \varepsilon(\eta,c,p) < 1$, se déduisant du fait que l'application $\beta \to I(\beta)$ (définie par (4.2.6)) est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

c) Finalement le fait que, avec le choix $0 < \alpha < 1$ et $\eta = 2 + 4\gamma$, $\gamma > 0$, l'exposant $4\alpha + 4p - 2\eta(p+1)$ (intervenant dans (4.2.17) après remplacement de w par $\varepsilon^{2\alpha}$) est négatif, ce qui implique en particulier que l'on a

$$[1 - \exp\{-\varepsilon^{-\gamma/4(1+2\gamma)}\}]^2 \exp\{d\varepsilon^{4\alpha + 4p - 2\eta(p+1)}\} \geqslant 1,$$

pour tout $\varepsilon > 0$ pris suffisamment petit, $d > 0$ étant une constante arbitrairement fixée.

Preuve du lemme 2. Fixons $\alpha = 1/2 + \delta$, $0 < d < 1/12$, puis posons $w = \varepsilon^{2\alpha}$, $0 < \varepsilon < 1$. La perturbation $W(t)$, $t \in D(\varepsilon^2)$ du couple $(Y_w(s), Y_0'(t))$, $s,t \in D(\varepsilon^2)$, décrite par l'énoncé de la proposition 2 du paragraphe (2.4) satisfait aux conditions d'application du théorème 14 du paragraphe (2.3). Appliquons la formule (2.3.28), il vient :

$$\textbf{(4.2.29)} \qquad f(w,D(\varepsilon^2), \beta\varepsilon) \geqslant [P\{M(Y_0,D(\varepsilon^2)) \leqslant \beta\varepsilon(1 - \varepsilon^{\delta})^2\} \times P\{M(W,D(\varepsilon^2)) \leqslant \beta\varepsilon^{1+2\delta}\}]^2,$$

avec $0 < \varepsilon < 1$, $\beta > 0$ et $w = \varepsilon^{2\alpha}$.

Reportons-nous vers la proposition 3 du paragraphe (2.3). Fixons $c > 0$, l'inégalité $1/2 < \alpha < 7/12$ nous autorise à faire appel à l'estimation (2.4.30), qui s'écrit :

$$\textbf{(4.2.30)} \qquad \begin{aligned} P\{M(W,D(\varepsilon^2)) \leqslant c\varepsilon^{1+2\delta}\} &\geqslant P\{M(W,D(\varepsilon^2)) \leqslant \varepsilon^{1+4\delta}\} \\ &\geqslant 1 - \exp\{-(1/2)\varepsilon^{4\delta+\alpha-1}\} \\ &= 1 - \exp\{-(1/2)\varepsilon^{5\delta - 1/2}\}, \end{aligned}$$

pour tout ε, $0 < \varepsilon < \mathrm{Min}(c^{1/2\delta}, \varepsilon(\delta,p))$,

soit encore :

$$\textbf{(4.2.31)} \qquad [P\{M(W,D(\varepsilon^2)) \leqslant c\varepsilon^{1+2\delta}\}]^2 \geqslant 1 - \exp\{-(1/2)\varepsilon^{6\delta-1/2}\}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, pris suffisamment petit.

La probabilité $P\{M(W,D(\varepsilon^2)) \leqslant \beta\varepsilon^{1+2\delta}\}$ étant une fonction croissante de $\beta > 0$, on voit que (4.2.29) et (4.2.31) impliquent directement la conclusion du lemme 2.

5. DÉMONSTRATION DU RÉSULTAT PRINCIPAL

Notons

(5.0.1) $\varphi(u) = u^{2p} \log\log(1/u),\ 0 < u < 1/e,$

et soit μ_φ la mesure borélienne définie sur l'espace $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, construite par la méthode de Hausdorff et associée à la fonction déterminante φ ; on pourra consulter [17] et [32] pour un exposé détaillé sur cette notion. Considérons par ailleurs un mouvement brownien $\overline{X}(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, à valeurs dans l'espace $\mathbb{R}^n$. Posons

(5.0.2) $Q(a) = [-a,a]^p \subset \mathbb{R}^p,\ a > 0,\ p \geqslant 2,$

et désignons par

(5.0.3) $R(a) = R(a,\omega) = \{\overline{X}(t,\omega)\ ;\ t \in Q(a)\} \subset \mathbb{R}^n,$

la portion de trajectoire correspondante (rappelons que les trajectoires sont continues). Notre objectif est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 24. *Sous la condition* $n > 2p$ *(assurant que le processus* $\overline{X}(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, *est transient) on a presque-sûrement :*

(5.0.4) $0 < \mu_\varphi(R(a)) < +\infty,$ *pour tout* $a > 0.$

Si B est un borélien de $\mathbb{R}^n$, la condition $0 < \mu_\varphi(B) < +\infty$ implique trivialement que l'on a $0 < \mu_\varphi(\alpha B) < +\infty$ pour tout homothétique αB, $\alpha > 0$, de B ; avec la propriété d'homogénéité (2.1.1) nous en déduisons qu'il suffit d'établir (5.0.4) pour un choix particulier du nombre $a > 0$. Nous prendrons $a = 1/2$ et on notera $R(1/2) = R$. La démonstration du théorème 25 se décompose en deux parties distinctes suivant que l'on désire prouver l'inégalité $\mu_\varphi(R) > 0$ ou $\mu_\varphi(R) < +\infty$.

(5.1) Preuve de l'inégalité $0 < \mu_\varphi(R)$. Pour l'établir il suffit de reprendre, pratiquement mot pour mot, l'argument développé dans l'article [4] de Z. Ciesielski et S.J. Taylor. En effet, en partant de l'inégalité (3.3.12) on obtient la majoration suivante (qui exprime le fait que la trajectoire ne passe pas trop de temps dans les boules $B(0,\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$)

$$(5.1.1) \qquad \sup_{\varepsilon > 0} E(\exp b\varepsilon^{-2p} T(\varepsilon)) = A < +\infty,$$

où $b = b(p)$ est une constante convenable.

On en déduit, à l'aide de la partie triviale du lemme de Borel-Cantelli (qui ne requiert pas l'hypothèse d'indépendance), l'estimation asymptotique

$$(5.1.2) \qquad \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{T(\varepsilon,\omega)}{\varepsilon^{2p} \log\log(1/\varepsilon)} \leqslant \frac{1}{b},$$

satisfaite presque-sûrement. Pour démontrer (5.1.2) on utilise essentiellement la majoration (découlant trivialement de (5.1.1))

$$(5.1.3) \qquad P\{T(\varepsilon) > (b^{-1} + \eta)\varepsilon^{2p} \log\log(1/\varepsilon)\} \leqslant A[\log(1/\varepsilon)]^{1-b\eta},$$

valable pour tout ε, $0 < \varepsilon < 1$ et tout $\eta > 0$. On pourra consulter [4] p. 447 pour le détail du raisonnement qui (moyennant une modification évidente) conduit (à partir de (5.1.3)) vers (5.1.2).

Le reste de la preuve de l'inégalité $0 < \mu_\varphi(R)$ suit fidèlement la démarche décrite dans [4] p. 448. Succinctement, cela consiste à introduire la mesure borélienne F_ω sur $\mathbb{R}^n$, définie presque-sûrement par :

$$(5.1.4) \qquad F_\omega(B) = m\{t \in Q(1/2) ; \overline{X}(t,\omega) \in B\},$$

B étant un borélien quelconque de $\mathbb{R}^n$ et m la mesure de Lebesgue de l'espace $\mathbb{R}^p$, puis à considérer la densité

$$(5.1.5) \qquad \overline{D}_\varphi F_\omega(x) = \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{F_\omega(B(x,\varepsilon))}{\varphi(2\varepsilon)}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où $B(x,\varepsilon)$ désigne la boule euclidienne de centre x et de rayon $\varepsilon > 0$. En comparant $F_\omega(B(x,\varepsilon))$ avec $T(\varepsilon,\omega)$ on obtient, à l'aide de (5.1.2), pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la majoration presque-sûre

$$(5.1.6) \qquad \overline{D}_\varphi F_\omega(x) \leqslant b^{-1}.$$

On termine en appliquant le théorème de Fubini sur l'espace $Q(1/2) \times \Omega$ (relativement à la mesure produit $m \otimes P$) puis le théorème fondamental B de [4] p. 435.

(5.2) Preuve de l'inégalité $\mu_\varphi(R) < +\infty$. Comme nous l'avons déjà indiqué dans l'introduction, la démarche envisagée reprend dans les grandes lignes la méthode utilisée par S.J. Taylor [37] pour résoudre le problème analogue dans le cas d'un processus stable indexé sur $\mathbb{R}$. Cela étant, nos informations sur le mouvement brownien à plusieurs paramètres sont moins précises que celles dont on dispose dans le cadre des processus à indice scalaire. Plus particulièrement, la distribution du maximum de la restriction du mouvement brownien à une boule de l'espace des indices nous étant inconnue, on doit se contenter, en remplacement, de l'estimation (4.0.4) pour un cylindre ; de même, les théorèmes 19 et 21 du chapitre 3 ne rendent pas entièrement compte de la structure de dépendance interne du processus. Pour toutes ces raisons la technique de Taylor a dû être sur certains points réaménagée, ceci, afin d'exploiter au maximum nos résultats préliminaires. Débutons notre démonstration par une description générale du cheminement envisagé, les preuves des lemmes intermédiaires étant reportées à la fin de ce paragraphe.

A. Description de la méthode. Soit $\overline{X}(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, $p \geqslant 2$, un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $n > 2p$. Pour établir la majoration presque-sûre $\mu_\varphi(R) < +\infty$, il suffit de montrer qu'il existe $\Omega_0 \subset \Omega$, $P(\Omega_0) = 1$ tel qu'il soit possible d'associer à tout $\omega \in \Omega_0$ une suite de scalaires (ε_m), $m \in N \leqslant \setminus \{0\}$, $\lim_{m\to+\infty} \varepsilon_m = 0$, ainsi qu'une suite $\mathcal{R}(\omega,\varepsilon_m)$, $m \geqslant 1$, de familles de parties de l'espace $\mathbb{R}^n$, vérifiant les points suivants :

(5.2.1)

a) Pour tout $m \geqslant 1$, la famille $\mathcal{R}(\omega,\varepsilon_m)$, est un recouvrement de la portion de trajectoire $R(\omega) = \{\overline{X}(t,\omega) \; ; \; t \in Q(1/2)\}$, c'est-à-dire on a :

$$R(\omega) \subset \bigcup_{B \in \mathcal{R}(\omega,\varepsilon_m)} .$$

b) Pour tout $m \geqslant 1$, les éléments $B \in \mathcal{R}(\omega,\varepsilon_m)$, sont des boules ouvertes de $\mathbb{R}^n$ de rayon $r(B)$ inférieur à ε_m.

c) On a la majoration :

$$\sup_{m \geqslant 1} \sum_{B \in \mathcal{R}(\omega,\varepsilon_m)} \varphi(r(B)) < +\infty .$$

Les résultats essentiels qui vont nous permettre d'établir l'existence de tels recouvrements, sont :

a) Le théorème 2 du paragraphe (2.1) précisant le module de continuité uniforme du processus $X(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$.

b) Le théorème 20 du paragraphe (3.1) indiquant le degré de dépendance interne du processus.

c) La minoration (4.0.4) de la distribution du maximum sur le cylindre $D(1,\varepsilon^2)$, $\varepsilon > 0$.

Indiquons maintenant les étapes successives.

Première étape. On fait appel au théorème 2 qui implique en particulier :

Lemme 1. *Fixons* ε_0, $0 < \varepsilon_0 < 1$. *Il existe un événement* $\Omega(\varepsilon_0) \subset \Omega$, $P(\Omega(\varepsilon_0)) \geqslant 1-\varepsilon_0$ *ainsi qu'un nombre* $\varepsilon(1)$, $0 < \varepsilon < 1/e$, *tels que l'on ait :*

$$(5.2.2) \qquad \|\overline{X}(t,\omega) - \overline{X}(s,\omega)\| \leqslant 2n[2p\|t-s\|\log(1/\|t-s\|)]^{1/2},$$

pour tout $t,s \in Q(1)$, $0 < \|t-s\| \leqslant \varepsilon(1)$, *et tout* $\omega \in \Omega(\varepsilon_0)$.

Dans la suite nous allons montrer que la majoration $\mu_\varphi(R(\omega)) < +\infty$ est satisfaite pour presque-tout $\omega \in \Omega(\varepsilon_0)$. Le nombre $\varepsilon_0 > 0$ étant arbitraire, la majoration presque-sure s'en déduira trivialement.

Seconde étape. Notons

$$(5.2.3) \qquad \varphi_1(u) = \frac{u^2}{\log(1/u)}, \quad 0 < u < 1,$$

et convenons de désigner pour tout nombre $u \geqslant 0$ par $\mathrm{Ent}(u)$, $0 \leqslant \mathrm{Ent}(u) \leqslant u < \mathrm{Ent}(u)+1$, sa partie entière.

Fixons $0 < \varepsilon < 1/e$, puis considérons la subdivision de l'intervalle $[-1/2, 1/2]$ définie par :

$$(5.2.4) \begin{cases} a_i(\varepsilon) = -\dfrac{1}{2} + i\varphi_1(\varepsilon)a, \quad i = 0,\dots M(\varepsilon) - 1, \\ \\ a_{M(\varepsilon)}(\varepsilon) = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

avec

$$(5.2.5) \begin{cases} \alpha) \ a = (32 \ n^2 p^{3/2})^{-1} \\ \quad \text{et} \\ \beta) \ M(\varepsilon) = \mathrm{Ent}(1/a\, \varphi_1(\varepsilon)) + 1, \end{cases}$$

où p et n désignent évidemment les dimensions respectives de l'espace des indices et de l'espace des valeurs du processus.

Pour toute suite

$$I = (i_k) \in \{0,...,M(\varepsilon) - 1\}^p,$$

posons

(5.2.6) $$Q(I,\varepsilon) = \prod_{k=1}^{p} [a_{i_k}(\varepsilon), a_{i_k+1}(\varepsilon)] .$$

Le cube $Q(1/2)$ coïncide avec la réunion des cubes $Q(I,\varepsilon)$ ce qui implique que les ensembles

(5.2.7) $$\overline{X}(Q(I,\varepsilon),\omega) = \{\overline{X}(t,\omega) \,;\, t \in Q(I,\varepsilon)\},\ I \in \{0,...,M(\varepsilon) - 1\}^p,$$

recouvrent la trajectoire $R(1/2,\omega)$.

Avec le choix $\omega \in \Omega(\varepsilon_0)$, le diamètre des ensembles $\overline{X}(Q(I,\varepsilon),\omega)$ peut être précisé. Ainsi, en appliquant (5.2.2), il vient :

Lemme 2. *Posons*

(5.2.8) $$\varepsilon(2) = \min(\varepsilon(1), 1/32n^2p),$$

et soient : $\omega \in \Omega(\varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon(2)$ *et* $s,t \in Q(1)$ *deux points vérifiant* :

(5.2.9) $$\|t-s\| \leqslant (32n^2p)^{-1}\, \varphi_1(\varepsilon).$$

Alors on a :

(5.2.10) $$\|\overline{X}(t,\omega) - \overline{X}(s,\omega)\| < \varepsilon.$$

En particulier, en désignant par

(5.2.11) $$t_I = \left(\frac{a_{i_k}(\varepsilon) + a_{i_k+1}(\varepsilon)}{2}\right),\ I = (i_k) \in \{0,...,M(\varepsilon) - 1\}^p ,$$

le centre du cube $Q(I,\varepsilon)$, *on voit que l'ensemble* $\overline{X}(Q(I,\varepsilon),\omega)$ *est inclus dans la boule ouverte* $B(\overline{X}(t_I,\omega),\varepsilon)$ *centrée au point* $\overline{X}(t_I,\omega)$ *et de rayon* $\varepsilon > 0$ *(en effet, d'après (5.2.4), (5.2.5) et (5.2.6) on a* $\|t_I - t\| \leqslant (32n^2p)^{-1}\varphi_1(\varepsilon)$ *pour tout* $t \in Q(I,\varepsilon)$).

Soit $\mathcal{R}_0(\omega,\varepsilon)$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon(2)$, le recouvrement de $R(\omega)$, $\omega \in \Omega(\varepsilon_0)$, constitué de boules

$$B(\overline{X}(t_I(\varepsilon),\omega),\varepsilon),\ I \in \{0,\dots,M(\varepsilon)-1\}^p .$$

Ce recouvrement satisfait trivialement (5.2.1.b), mais non la condition (5.2.1.c), car on a :

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sum_{B \in \mathcal{R}_0(\omega,\varepsilon)} \varphi(r(B)) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} M(\varepsilon)^p \varphi(\varepsilon) = +\infty.$$

De ce fait nous devons affiner notre construction.

Troisième étape. La méthode employée pour construire un recouvrement approprié de $R(\omega)$ repose sur l'idée lumineuse de S.J. Taylor selon laquelle : si une famille de boules recouvre une portion de trajectoire et si la trajectoire séjourne "longtemps" dans chacune d'elles, alors une réunion d'un "petit" nombre de ces boules peut la recouvrir entièrement. En pratique, il ne va pas être possible d'accéder exactement à un tel recouvrement, le temps de séjour dans certaines boules pouvant être de courte durée. Cela étant on verra que la contribution de ces dernières n'est pas très importante. Concrètement on procède de la manière suivante.

Considérons une suite d'intervalles $[2\varepsilon_m, 2\varepsilon'_m]$, $m \geqslant 1$, $0 < \varepsilon_m < \varepsilon'_m \leqslant 1$, les deux suites (ε_m) et (ε'_m) étant prises décroissantes avec $\lim_{m \to +\infty} \varepsilon'_m = 0$. Désignons par m_0 un entier vérifiant

(5.2.12) $$\varepsilon'_{m_0} \leqslant (1/2)\varepsilon(2),$$

la constante $\varepsilon(2)$ étant définie par (5.2.8). Fixons encore une constante $\beta > 0$; les valeurs numériques de tous ces nombres seront indiquées plus loin.

Notons par

(5.2.13) $$\tilde{T}(x,\varepsilon,\omega) = \int_{Q(1)} g_\varepsilon(x - \overline{X}(t,\omega))dt$$

la fraction de temps du cube $Q(1)$ durant laquelle la trajectoire aura séjourné dans la boule de centre $x \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $\varepsilon > 0$; on a désigné par $g_\varepsilon(y)$, $y \in \mathbb{R}^n$, la fonction indicatrice de la boule centrée à l'origine et de rayon $\varepsilon > 0$.

Fixons ε_m, $m \geqslant mo$, ainsi que $\omega \in \Omega(\varepsilon_0)$ puis classons les indices

$$I \in \{0,\dots,M(\varepsilon_m)-1\}^p ,$$

introduits au cours de la seconde étape, en deux catégories distinctes.

A. Les indices I vérifiant la propriété suivante :

Pour tout point $x \in \overline{X}(Q(I,\varepsilon_m),\omega)$, il existe un nombre $\varepsilon(x) \in [2\varepsilon_m, 2\varepsilon'_m]$, tel que l'on ait

$$\tilde{T}(x,\varepsilon(x),\omega) \geqslant \beta\varphi(\varepsilon(x)). \tag{5.2.14}$$

B. Les indices I ne vérifiant pas cette propriété :

(5.2.15) Notons par $A(m,\omega)$ l'ensemble des indices I de la catégorie A et par $B(m,\omega)$ l'ensemble des indices de la catégorie B.

La portion de trajectoire $R(\omega)$ peut alors s'écrire sous la forme d'une réunion

$$R(\omega) = R_1(m,\omega) \cup R_2(m,\omega),$$

les deux parties compactes $R_1(m,\omega)$ et $R_2(m,\omega)$ étant définies par :

$$R_1(m,\omega) = \bigcup_{I \in A(m,\omega)} \overline{X}(Q(I,\varepsilon_m),\omega) \tag{5.2.16}$$

et

$$R_2(m,\omega) = \bigcup_{I \in B(m,\omega)} \overline{X}(Q(I,\varepsilon_m),\omega). \tag{5.2.17}$$

On voit ainsi que tout point

$$x = \overline{X}(t,\omega), \ t \in Q(I,\varepsilon_m), \ i \in A(m,\omega),$$

appartenant au compact $R_1(m,\omega)$, est le centre d'une boule ouverte

$$B(x,\varepsilon(x)), \ \varepsilon(x) \in [2\varepsilon_m, 2\varepsilon'_m] ,$$

dans laquelle la trajectoire séjourne "longtemps", c'est-à-dire, en d'autres termes, vérifiant l'inégalité (5.2.14). Désignons par $\mathcal{R}_1(\omega,m)$ le recouvrement de $R_1(m,\omega)$ constitué de toutes ces boules. Faisons appel au lemme classique suivant (voir [19] p. 197).

Lemme 3. *Soient* $K \subset \mathbb{R}^n$ *un compact et* $\mathcal{R}(K)$ *un recouvrement de* K *tels que tout point* $x \in K$ *soit le centre d'une boule ouverte* $B(x,\varepsilon(x))$, $\varepsilon(x) > 0$, *appartenant à* $\mathcal{R}(K)$. *Il existe alors une suite* $B(x_i,\varepsilon(x_i))$, $i = 1,\dots,N$, *de telles boules, recouvrant* K,

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i,\varepsilon(x_i)),$$

et vérifiant par ailleurs l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{N} g_{\varepsilon(x_i)}(x_i-y) \leqslant c(n), \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}^n, \tag{5.2.18}$$

où $c(n) > 0$ est une constante universelle ne dépendant que de la dimension $n \geqslant 1$.

Prenons pour compact K de l'énoncé du lemme 3 l'ensemble $R_1(m,\omega)$ et pour recouvrement associé la famille $\mathcal{R}_1(\omega,m)$. Notons par

$$\mathcal{R}_1(\omega,2\varepsilon'_m) = \{B(x_i,\varepsilon(x_i)),\ i = 1,\dots,N\} \subset \mathbb{R}_1(\omega,m) \tag{5.2.19}$$

le sous-recouvrement de $R_1(m,\omega)$ dont l'existence est assurée par la conclusion du lemme 3. En vertu de (5.2.18) on aura :

$$\sum_{i=1}^{N} g_{\varepsilon(x_i)}(x_i - \overline{X}(t,\omega)) \leqslant c(n), \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}^p. \tag{5.2.20}$$

En intégrant cette inégalité sur le cube $Q(1)$ on en déduit tout d'abord (avec la notation (5.2.13)) :

$$\sum_{i=1}^{N} \tilde{T}(x_i,\varepsilon(x_i),\omega) \leqslant c(n), \tag{5.2.21}$$

puis, en tenant compte de la majoration (5.2.14) satisfaite par toutes les boules $B(x_i,\varepsilon(x_i))$, on obtient l'estimation fondamentale :

$$\sum_{i=1}^{N} \varphi(\varepsilon(x_i)) \leqslant c(n)/\beta. \tag{5.2.22}$$

Nous avons établi l'existence d'un recouvrement $\mathcal{R}_1(\omega,2\varepsilon'_m)$ de la composante $R_1(m,\omega)$ de $R(\omega)$ constitué de boules de rayon inférieur à $2\varepsilon'_m$ et vérifiant l'inégalité (5.2.22). Pour terminer, nous devons obtenir un recouvrement convenable $\mathcal{R}_2(\omega,2\varepsilon'_m)$ de la seconde composante $R_2(m,\omega)$ de $R(\omega)$. Prenons pour $\mathcal{R}_2(\omega,2\varepsilon'_m)$ l'ensemble des boules

$$B(\overline{X}(t_I,\omega),\varepsilon_m),\ \ I \in B(m,\omega),$$

introduites au cours de la seconde étape : les conditions $\omega \in \Omega(\varepsilon_0)$ et $0 < \varepsilon_m \leqslant \varepsilon(2)$ assurent, avec le lemme 2, que leur réunion contient $R_2(m,\omega)$. Tout repose alors sur le lemme technique suivant (qui traduit le fait que l'ensemble $B(m,\omega)$ comporte peu d'éléments).

Lemme 4. *Considérons les valeurs numériques suivantes :*

$$(5.2.23)\qquad \begin{cases} \text{a) } \varepsilon_m = [(2m)!]^{-p-4}\ ; \\ \text{b) } \varepsilon'_m = (m!)^{-p-4}\ ; \\ \text{c) } \beta = v_{p-1}(4npb_2)^{-1} \textit{ où :} \end{cases}$$

i) p *et* n *sont les dimensions respectives de l'espace des indices et de l'espace des valeurs du processus* $\overline{X}$;

ii) v_{p-1} *est le volume de la boule unité de l'espace* $\mathbb{R}^{p-1}$;

iii) b_2 *désigne la constante intervenant dans la formule (4.0.4) du théorème 24 et associée au choix* $\alpha = 1/2n$ *; en particulier* b_2 *ne dépend que des dimensions* n *et* p.

Alors, en notant par $\operatorname{card} B(m,\omega)$ *le nombre d'éléments de l'ensemble* $B(m,\omega)$, *il existe un événement* $\Omega'(\varepsilon_0) \subset \Omega(\varepsilon_0)$, $P\{\Omega'(\varepsilon_0)\} = P\{\Omega(\varepsilon_0)\}$, *tel que l'on ait :*

$$(5.2.24)\qquad \sup_{m \geqslant m_0} \varphi(\varepsilon_m)\operatorname{card} B(m,\omega) < +\infty,\ \text{ pour tout } \omega \in \Omega'(\varepsilon_0).$$

Nous sommes maintenant en mesure de conclure. Fixons $\omega \in \Omega'(\varepsilon_0)$ et considérons la suite

$$(5.2.25)\qquad \mathcal{R}(\omega,2\varepsilon'_m) = \mathcal{R}_1(\omega,2\varepsilon'_m) \cup \mathcal{R}_2(\omega,2\varepsilon'_m),\ m \geqslant m_0\ ,$$

des recouvrements de la trajectoire $R(\omega)$. Pour tout $m \geqslant m_0$, la famille $\mathcal{R}(\omega,2\varepsilon'_m)$ est constituée de boules ouvertes, de rayons inférieurs à $2\varepsilon'_m$. Par ailleurs, en vertu de (5.2.24), on a :

$$(5.2.26)\qquad \sup_{m \geqslant m_0} \sum_{B \in \mathcal{R}_1(\omega,2\varepsilon'_m)} \varphi(r(B)) = \sup_{m \geqslant m_0} \varphi(\varepsilon_m)\operatorname{card} B(m,\omega) < +\infty,$$

et d'après (5.2.19) et (5.2.22)

$$(5.2.27)\qquad \sup_{m \geqslant m_0} \sum_{B \in \mathcal{R}(\omega,2\varepsilon'_m)} \varphi(r(B)) \leqslant c(n)/\beta\ ,$$

par suite on obtient :

$$(5.2.28) \qquad \sup_{m \geqslant m_0} \sum_{B \in \mathcal{R}(\omega, 2\varepsilon'_m)} \varphi(r(B)) < +\infty .$$

Si on ajoute à tout ceci le fait que la suite (ε'_m), $m \geqslant 1$, converge vers zéro, alors on voit que les recouvrements $\mathcal{R}(\omega,2\varepsilon'_m)$ ainsi obtenus satisfont, pour presque tout $\omega \in \Omega'(\varepsilon_0)$ aux exigences du point (5.2.1). L'assertion annoncée à la fin de la première étape se trouve donc démontrée, ce qui termine la preuve de l'inégalité $\mu_\varphi(R) < +\infty$. Il reste cependant à établir les lemmes 1, 2 et 4.

B. Preuve des lemmes 1 et 2. Le lemme 1 découle très simplement du théorème 2 du paragraphe (2.1). En effet, fixons ε_0, $0 < \varepsilon_0 < 1$, et soient $X_1(t),\dots,X_n(t)$, les coordonnées du processus $\overline{X}(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$. L'indépendance des processus coordonnés et la relation limite (2.1.14) impliquent qu'il existe $\varepsilon(1)$, $0 < \varepsilon(1) < 1$, ainsi qu'une suite d'événements indépendants $\Omega_i(\varepsilon_0)$, $i = 1,\dots,n$, vérifiant :

$$(5.2.29) \quad \begin{cases} \text{a) } P(\Omega_i(\varepsilon_0)) \geqslant 1 - (\varepsilon_0/n),\ i = 1,\dots,n\ ; \\ \text{b) Pour tout } \omega \in \Omega_i(\varepsilon_0), \text{ et tous } s,t \in Q(1) \text{ vérifiant } \|s-t\| \leqslant \varepsilon(1), \text{ on a :} \\ \qquad |X_i(s,\omega) - X(t,\omega)| \leqslant 2[2p\|s-t\|\log(1/\|s-t\|)]^{1/2},\ i = 1,\dots,n. \end{cases}$$

Posons $\Omega(\varepsilon_0) = \bigcap_{i=1}^{n} \Omega_i(\varepsilon_0)$. En vertu de (5.2.29.a) et de l'indépendance des événements considérés, on obtient :

$$(5.2.30) \qquad P(\Omega(\varepsilon_0)) = \prod_{i=1}^{n} P(\Omega_i(\varepsilon_0)) \geqslant 1-\varepsilon_0 ,$$

et d'après (5.2..29.b) :

$$(5.2.31) \qquad \begin{aligned} \|\overline{X}(s,\omega) - \overline{X}(t,\omega)\| &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |X_i(s,\omega) - X_i(t,\omega)| \\ &\leqslant 2n[2p\|s-t\|\log(1/\|s-t\|)]^{1/2} , \end{aligned}$$

pour tout $\omega \in \Omega(\varepsilon_0)$ et tout choix de points $s,t \in Q(1)$ vérifiant $\|s-t\| \leqslant \varepsilon(1)$.

Le lemme 1 est donc démontré.

Le lemme 2 se déduit aisément du lemme 1. Pour le voir, fixons $\omega \in \Omega(\varepsilon_0)$ et soit $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon(2)$. D'après (5.2.8) et la majoration $0 < \varepsilon(1) \leqslant 1/e$ il vient :

$$(5.2.32)\quad \begin{cases} \text{a) } (1/32n^2p)\varphi_1(\varepsilon) \leqslant \varepsilon(1)\,; \\ \text{b) } (1/32n^2p)\varphi_1(\varepsilon) \leqslant 1/e\,; \\ \text{c) } 32n^2p \leqslant 1/\varepsilon\,. \end{cases}$$

Considérons maintenant un couple de points $s,t \in Q(1)$ vérifiant :

$$(5.2.33)\qquad \|s-t\| \leqslant (1/32n^2p)\varphi_1(\varepsilon).$$

D'après (5.2.32.a) on a aussi $\|s-t\| \leqslant \varepsilon(1)$, ce qui nous autorise à écrire l'inégalité (5.2.2). Par ailleurs, la fonction $u \to u^2 \log(1/u)$ étant croissante sur l'intervalle $]0,1/e]$ on voit que le membre de droite de (5.2.2) se majore, en vertu de (5.2.32.b) et (5.2.33), par :

$$2n[2p(1/32n^2p)\varphi_1(\varepsilon)\log(32n^2p/\varphi_1(\varepsilon))]^{1/2}$$
$$= (1/2)\varepsilon\left[\frac{\log 32n^2p + 2\log 1/\varepsilon + \log\log(1/\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}\right]^{1/2} < \varepsilon,$$

l'inégalité de la fin résultant de (5.2.32.c) et du fait que l'on a $\log\log(1/\varepsilon) < \log(1/\varepsilon)$ pour tout $0 < \varepsilon < 1/e$. Le lemme est donc démontré également.

C. Preuve du lemme 4. Ce résultat est plus difficile à établir que les deux précédents. Remarquons tout d'abord que la majoration escomptée (5.2.24) est une conséquence immédiate de l'inégalité :

$$(5.2.34)\qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \varphi(\varepsilon_m)\int_{\Omega(\varepsilon_0)} \operatorname{card} B(m,\omega)\,dP(\omega) < +\infty.$$

Nous allons démontrer (5.2.34). Pour cela on procèdera en plusieurs étapes.

Etape I : On explicite une condition suffisante (d'un maniement plus aisé que celle de la définition) qui exprime le fait qu'un indice $I \in \{0,\ldots,M(\varepsilon_m)-1\}$ $m \geq mo$ appartient à l'ensemble $B(m,\omega)$, $\omega \in \Omega(\varepsilon_0)$ étant fixé.

Fixons donc $\omega \in \Omega(\varepsilon_0)$. En vertu de la définition (5.2.15) on a l'équivalence :

$$(5.2.35)\qquad I \in B(m,\omega) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Il existe } x = \overline{X}(t,\omega),\ t \in Q(I,\varepsilon_m) \text{ vérifiant :} \\ \\ \tilde{T}(x,\varepsilon,\omega) < \beta\varphi(\varepsilon), \text{ pour tout } \varepsilon \in [2\varepsilon_m, 2\varepsilon'_m]\,. \end{cases}$$

Notons par ailleurs que lorsque ω appartient à $\Omega(\varepsilon_0)$, alors avec le choix $m \geq mo$ (voir (5.2.12)) le lemme 2 implique que l'on a :

(5.2.36) $\|\overline{X}(t_I,\omega) - \overline{X}(t',\omega)\| < \varepsilon_m$, pour tout $t' \in Q(I,\varepsilon_m)$,

en notant t_I le centre de $Q(I,\varepsilon_m)$ (voir (5.2.11)). On en déduit encore la majoration

(5.2.37)
$$g_\varepsilon(\overline{X}(t_I,\omega) - \overline{X}(s,\omega)) \leqslant g_{\varepsilon_m+\varepsilon}(\overline{X}(t,\omega) - \overline{X}(s,\omega)) \leqslant g_{2\varepsilon}(\overline{X}(t,\omega) - \overline{X}(s,\omega)) = g_{2\varepsilon}(x - \overline{X}(s,\omega)),$$

satisfaite pour un choix quelconque de $t \in Q(I,\varepsilon_m)$, de $\varepsilon \geqslant \varepsilon_m$ et pour tout $s \in \mathbb{R}^p$ (g_ε désignant la fonction indicatrice de la boule centrée à l'origine et de rayon $\varepsilon > 0$).

En intégrant l'inégalité (5.2.37) par rapport à la variable $s \in Q(1)$, on obtient :

(5.2.38)
$$\tilde{T}(\overline{X}(t_I,\omega), \varepsilon,\omega) \leqslant \tilde{T}(x,2\varepsilon,\omega),$$
avec $x = \overline{X}(t,\omega)$, $t \in Q(I,\varepsilon_m)$ et $\varepsilon \geqslant \varepsilon_m$.

En comparant l'inégalité (5.2.38) avec la caractérisation (5.2.35), on est conduit vers l'implication :

(5.2.39)
$$\left.\begin{array}{l} I \in B(m,\omega) \\ \omega \in \Omega(\varepsilon_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{On a : } \tilde{T}(\overline{X}(t_I,\omega),\varepsilon,\omega) < \beta\varphi(2\varepsilon), \text{ pour tout } \varepsilon \in [\varepsilon_m,\varepsilon'_m] .$$

Etape II. On déduit de (5.2.39) une nouvelle implication faisant intervenir cette fois-ci le maximum du processus sur un cône approprié.

Posons à cet effet :

(5.2.40) $\varphi_2(\varepsilon) = \varepsilon^2\log_2(1/\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 1/e$

(avec la convention d'écriture $\log_2 u = \log\log u$) puis considérons le cône

(5.2.41)
$$F(\varepsilon) = \{t = (u,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p-1} ; \|x\| \leqslant u[d\log_2(1/\varepsilon)]^{-1} \text{ et } 0 < u \leqslant d\varphi_2(\varepsilon)\},$$

avec

(5.2.42) $d = \beta p/v_{p-1}$, où v_{p-1} est le volume de la boule unité de l'espace $\mathbb{R}^{p-1}$.

Fixons une constante $\varepsilon(3)$, $0 < \varepsilon(3) \leqslant \varepsilon(2)$, ne dépendant que de n,p,β et vérifiant les points suivants :

$$\textbf{(5.2.43)}\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) On a } 0 < d\varphi_2(\varepsilon(3)) < 1/2\ ; \\ \\ \text{b) La fonction } u \to \varphi_2(u) \text{ est croissante sur l'intervalle }]0,\varepsilon(3)]. \end{array} \right.$$

Dans ces conditions, pour tout point $t = (u,x) \in F(\varepsilon)$ et $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon(3)$, on aura :

$$\textbf{(5.2.44)}\quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < u < d\varphi_2(\varepsilon) \leqslant d\varphi_2(\varepsilon(3)) < 1/2 \\ \text{et} \\ \|x\| \leqslant \varepsilon^2 \leqslant \varepsilon(2)^2 < 1/2, \text{ (voir (5.2.8)),} \end{array} \right.$$

d'où il en résultera l'inclusion

$$\textbf{(5.2.45)}\qquad F(\varepsilon) \subset Q(1/2).$$

Désignons par

$$\textbf{(5.2.46)}\qquad F_m(I,\varepsilon) = t_I + F(\varepsilon),\ I \in \{0,\ldots,M(\varepsilon_m) - 1\}^p,$$

le cône obtenu à partir de $F(\varepsilon)$ par la translation de vecteur t_I. Comme pour tout indice I le vecteur t_I appartient au cube $Q(1/2)$, nous en déduisons (avec (5.2.45)) l'inclusion essentielle

$$\textbf{(5.2.47)}\qquad F_m(I,\varepsilon) \subset Q(1),\ \text{ valable pour tout I et tout } \varepsilon,\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon(3).$$

Remarquons finalement que le volume du cône $F_m(\varepsilon)$ est égal (en vertu de (5.2.41) et (5.2.42)) à :

$$\textbf{(5.2.48)}\qquad \int_{F_m(I,\varepsilon)} dt = \int_{F(\varepsilon)} dt = \int_o^{d\varphi_2(\varepsilon)} v_{p-1}\left[\frac{u}{d\log_2(1/\varepsilon)}\right]^{p-1} du = \beta\varphi(\varepsilon).$$

Notons maintenant

$$\textbf{(5.2.49)}\quad \left\{ \begin{array}{ll} M(F_m(I,\varepsilon),\omega) & = \sup\|\overline{X}(t_I,\omega) - \overline{X}(t,\omega)\|,\ t \in F_m(I,\varepsilon), \\ \text{et} & \\ M(F(\varepsilon),\omega) & = \sup\|\overline{X}(t,\omega)\|,\ t \in F(\varepsilon). \end{array} \right.$$

En confrontant les propriétés (5.2.47) et (5.2.48) avec l'implication (5.2.39) de la première étape et en tenant compte de la définition (5.2.13), on voit que l'implication suivante est satisfaite :

$$\textbf{(5.2.50)} \qquad \left.\begin{array}{l} I \in B(m,\omega) \\ \omega \in \Omega(\varepsilon_0) \\ \varepsilon'_m \leqslant (1/2)\varepsilon(3) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{On a : } M(Fm(I,2\varepsilon),\omega) > \varepsilon, \text{ pour tout } \varepsilon \in [\varepsilon_m,\varepsilon'_m]\,.$$

Etape III. On montre que l'on peut remplacer le cône $F_m(I,2\varepsilon)$, figurant dans la formule (5.2.50), par un cône tronqué ; pour cela on s'appuiera sur le lemme 2.

Considérons ainsi le cône tronqué

$$\textbf{(5.2.51)} \qquad G(2\varepsilon) = \{t = (u,x) \in F(2\varepsilon)\ ;\ u \geqslant (1/64n^2p)\varphi_1(\varepsilon)\},$$

et soit $\varepsilon(4)$, $0 < \varepsilon(4) \leqslant (1/2)\varepsilon(3)$, une constante vérifiant :

$$\textbf{(5.2.52)} \qquad d \log_2(1/2\varepsilon(4)) > 1, \text{ (d étant défini par (5.2.42)).}$$

Cette condition assure, en particulier (comparer avec (5.2.41) que l'ensemble $G(2\varepsilon)$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon(4)$, est non-vide. Avec le choix

$$t = (u,x) \in F(2\varepsilon) \setminus G(2\varepsilon) \quad \text{et} \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon(4),$$

elle implique également que l'on a :

$$\textbf{(5.2.53)} \qquad \|x\| \leqslant u[d \log_2(1/2\varepsilon)]^{-1} \leqslant u[d \log_2(1/2\varepsilon(4))]^{-1} \leqslant u \leqslant (1/64n^2p)\varphi_1(\varepsilon),$$

soit encore

$$\textbf{(5.2.54)} \qquad \|t\| \leqslant u + \|x\| \leqslant (1/32n^2p)\varphi_1(\varepsilon).$$

Fixons $\omega \in \Omega(\varepsilon_0)$ et $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon(4)$. D'après (5.2.45) le cône $F(2\varepsilon)$ est inclus dans $Q(1/2)$ (car on a $2\varepsilon \leqslant 2\varepsilon(4) \leqslant \varepsilon(3)$), tout point t appartenant à $F(2\varepsilon) \setminus G(2\varepsilon)$ vérifiant (5.2.54) nous en déduisons avec le lemme 2 la majoration $\|\overline{X}(t)\| < \varepsilon$. En résumé on obtient :

$$\textbf{(5.2.55)} \qquad \left.\begin{array}{l} \omega \in \Omega(\varepsilon_0) \\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon(4) \\ t \in F(2\varepsilon) \setminus G(2\varepsilon) \end{array}\right\} \Rightarrow \|\overline{X}(t,\omega)\| < \varepsilon.$$

Posons finalement

$$G_m(I,\varepsilon) = t_I + G(\varepsilon), \ \ I \in \{0,\ldots,M(\varepsilon_m) - 1\}^p,$$

puis

$$M(G_m(I,\varepsilon),\omega) = \sup\{\|\overline{X}(t_I,\omega) - \overline{X}(t,\omega)\|,\ t \in G_m(I,\varepsilon)\}$$

et

$$M(G(\varepsilon),\omega) = \sup\{\|\overline{X}(t,\omega)\|,\ t \in G(\varepsilon)\}.$$

Il suffit alors de comparer (5.2.55) avec (5.2.50) pour en déduire le résultat souhaité, notamment :

$$\textbf{(5.2.56)} \qquad \left.\begin{array}{l} I \in B(m,\omega) \\ \omega \in \Omega(\varepsilon_0) \\ \varepsilon'_m \leqslant \varepsilon(4) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{On a : } M(G_m(I,2\varepsilon),\omega) > \varepsilon \text{ pour tout } \varepsilon \in [\varepsilon_m, \varepsilon'_m].$$

Etape IV. On majore le terme général de la série intervenant dans l'inégalité (5.2.34) en appliquant la caractérisation (5.2.56).

Partons de l'identité élémentaire :

$$\textbf{(5.2.57)} \qquad \int_{\Omega(\varepsilon_0)} \operatorname{card} B(m,\omega)\,dP(\omega) = \sum_{I \in \{0,\ldots,M(\varepsilon_m)-1\}^p} P\{\omega \in \Omega(\varepsilon_0)\,;\, I \in B(m,\omega)\}.$$

Avec le choix $\varepsilon'_m \leqslant \varepsilon(4)$, la condition (5.2.56) implique :

$$\textbf{(5.2.58)} \qquad \begin{aligned} P\{\omega \in \Omega(\varepsilon_0)\,;\, I \in B(m,\omega)\} &\leqslant P\{\omega \in \Omega(\varepsilon_0)\,;\, M(G_m(I,2\varepsilon),\omega) > \varepsilon \\ &\qquad \text{pour tout } \varepsilon \in [\varepsilon_m,\varepsilon'_m]\} \\ &\leqslant P\{M(G_m(I,2\varepsilon)) > \varepsilon \text{ pour tout } \varepsilon \in [\varepsilon_m,\varepsilon'_m]\} \\ &= P\{M(G(2\varepsilon)) > \varepsilon \text{ pour tout } \varepsilon \in [\varepsilon_m,\varepsilon'_m]\}, \end{aligned}$$

l'égalité de la fin provenant de la propriété d'invariance (2.1.2). Revenons vers les valeurs numériques (5.2.23) et désignons par $n_0 \geqslant 1$ un nombre entier vérifiant l'inégalité

$$\textbf{(5.2.59)} \qquad \varepsilon'_{n_0} = (n_0\,!)^{-p-4} \leqslant \varepsilon(4),$$

puis introduisons les événements

$$\textbf{(5.2.60)} \qquad H(r) = \{M(G(2\varepsilon'_r)) > \varepsilon'_r\}\ ,\quad r \geqslant n_0\,.$$

La suite (ε'_r), $r \geqslant n_0$, étant décroissante, on a trivialement

(5.2.61) $$P\{M(G(2\varepsilon)) > \varepsilon \text{ pour tout } \varepsilon \in [\varepsilon_m, \varepsilon'_m]\} \leqslant P\{\bigcap_{r=m}^{r=2m} H(r)\}.$$

En rassemblant (5.2.57), (5.2.58) et (5.2.61) il vient

(5.2.62) $$\int_{\Omega(\varepsilon_0)} \operatorname{card} B(m,\omega)dP \leqslant M(\varepsilon_m)^p \, P\{\bigcap_{r=m}^{r=2m} H(r)\}, \quad m \geqslant n_0 .$$

Etape V. En faisant appel au théorème de Kolmogorov-Rozanov (voir (2.2.2)) ainsi qu'au théorème 20 du paragraphe (3.1) (décrivant le niveau de dépendance interne du processus) on établit une relation de comparaison entre la probabilité de l'intersection des événements H(r) (figurant en (5.2.62)) et le produit des probabilités de ces événements pris séparément.

Commençons par préciser la position d'un cône tronqué $G(2\varepsilon)$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon(4)$, par rapport à l'origine. Ainsi, d'après (5.2.44) , pour tout point $t = (u,x) \in G(2\varepsilon) \subset F(2\varepsilon)$, il vient (on remarquera que, en vertu des inégalités $2\varepsilon \leqslant 2\varepsilon(4) \leqslant \varepsilon(3) \leqslant \varepsilon(2) \leqslant 1/32n^2p$ on a $\log_2(1/2\varepsilon) \geqslant 1$) :

(5.2.63) $$\|t\| \leqslant u + \|x\| \leqslant d\varphi_2(2\varepsilon) + (2\varepsilon)^2 \leqslant (d+1)\varphi_2(2\varepsilon).$$

Dans un autre sens, pour tout point $t = (u,x) \in G(2\varepsilon)$ on a également (en vertu de (5.2.51)) :

(5.2.64) $$\|t\| \geqslant u \geqslant (1/64n^2p)\varphi_1(\varepsilon).$$

On voit donc que l'ensemble $G(2\varepsilon'_r)$, $r \geqslant n_0$, est inclus dans la boule $B(0,R(r))$, centrée à l'origine et de rayon

(5.2.65) $$R(r) = (d+1)\varphi_2(2\varepsilon'_r),$$

ainsi que dans le complémentaire $B^c(0,\rho(r))$ de la boule centrée à l'origine et de rayon

(5.2.66) $$\rho(r) = (1/64n^2p)\varphi_1(\varepsilon'_r), \quad r \geqslant n_0 .$$

Considérons maintenant deux indices consécutifs ε'_r , ε'_{r-1} et formons le rapport (consulter (5.2.33))

(5.2.67) $$\varphi_2(2\varepsilon'_r)/\varphi_1(\varepsilon'_{r-1}) = \frac{4(p+4)}{r^{2p+8}}\big(\log(r-1)!\big)\log_2\left[\frac{(r!)^{p+4}}{2}\right] .$$

En appliquant des majorations évidentes, il résulte de (5.2.65), (5.2.66) et (5.2.67) que l'inégalité

(5.2.68) $R(r)/\rho(r-1) \leqslant r^{-2p-6}$, est satisfaite pour tout $r \geqslant n_0$ pris suffisamment grand.

En résumé nous pouvons énoncer :

Proposition 1. *Il existe un nombre entier* $n_1 \geqslant n_0$, *ne dépendant que de* β *et des dimensions* p *et* n, *de sorte que pour tout* $r > n_1$ *le cône tronqué* $G(2\xi_r')$ *soit inclus dans la couronne* $c(\rho(r), R(r))$, *centrée à l'origine, de rayon intérieur égal à* $\rho(r)$ *et avec* $R(r)$ *pour rayon extérieur. Par ailleurs les inégalités suivantes sont vérifiées :*

(5.2.69)
$$\begin{cases} \text{a) } R(n_1) > \rho(n_1) > \ldots > R(r) > \rho(r) > R(r+1) > \ \ldots, r > n_1 \\ \quad \text{(en particulier les couronnes sont disjointes)} \\ \text{b) } R(r)/\rho(r-1) \leqslant r^{-2p-6}, \ r > n_1 . \end{cases}$$

La proposition que nous venons de formuler garantit encore, en reprenant les conventions d'écriture du paragraphe (3.1), que :

(5.2.70)

a) Pour tout $r \geqslant n_1$, l'événement $H(r)$ définit par (5.2.60) appartient à la tribu engendrée par le sous-espace $B(R(r)) \subset L^2$;

b) Pour tout $r > n_1$, les événements $H(\ell)$, $r > \ell \geqslant n_1$, appartiennent tous à la tribu engendrée par le sous-espace $C(\rho(r-1))$.

Notons pour simplifier par

(5.2.71)
$$cor(r) = c(B(0,R(r)), B^c(0,\rho(r-1)),$$

le coefficient de corrélation défini par (2.2.1). Une majoration explicite en est donnée par (3.1.43) sous la forme :

(5.2.72)
$$cor(r) \leqslant \tilde{p}(R(r)/\rho(\rho-1))^{1/2} \leqslant \tilde{p}\, r^{-p-3}, \quad r > n_1,$$

l'inégalité de la fin provenant de (5.2.69.b).

Nous sommes en mesure maintenant d'accéder à l'estimation envisagée. Fixons un nombre entier $m \geqslant n_1$. La propriété (5.2.70) permet de faire appel à la formule (2.2.2) du théorème de Kolmogorov-Rozanov. Une itération facile fournit alors :

(5.2.73)
$$P\{H(2m)\cap[\bigcap_{r=m}^{r=2m-1}H(r)]\}$$
$$\leqslant P\{H(2m)\}P\{\bigcap_{r=m}^{r=2m-1}H(r)\}+(1/4)\mathrm{cor}(2m)\leqslant\ldots$$
$$\leqslant\prod_{r=m}^{r=2m}P\{H(r)\}+(1/4)\sum_{r=m+1}^{r=2m}\mathrm{cor}(r),$$

avec l'estimation numérique suivante (résultant de (5.2.72)) :

(5.2.74)
$$\sum_{r=m+1}^{2m}\mathrm{cor}(r)\leqslant\tilde{p}\sum_{r=m+1}^{2m}r^{-p-3}\leqslant\frac{\tilde{p}}{p+2}m^{-p-2}.$$

Etape VI. On majore les probabilités $P\{H(r)\}$ intervenant en (5.2.73) à l'aide du théorème 24 (précisant la distribution du maximum sur un cylindre).

Notons tout d'abord que l'inclusion $G(2\varepsilon)\subset F(2\varepsilon)$, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon(4)$, implique l'inégalité :

(5.2.75)
$$P\{M(G(2\varepsilon))\leqslant\varepsilon\}\geqslant P\{M(F(2\varepsilon))\leqslant\varepsilon\}.$$

Le cône $F(2\varepsilon)$, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon(4)\leqslant\varepsilon(3)/2$, est à son tour inclus dans le cylindre $D(d\varphi_2(2\varepsilon),4\varepsilon^2)$ (d'après (5.2.44), voir aussi (4.0.1)) ; en notant, pour tout $a>0$ et tout $\varepsilon>0$

(5.2.76)
$$M(D(a,\varepsilon))=\sup\{\|\overline{X}(t)\|,\ t\in D(a,\varepsilon)\},$$

il en résulte que l'on a :

(5.2.77)
$$P\{M(F(2\varepsilon))\leqslant\varepsilon\}\geqslant P\{M(D(d\varphi_2(2\varepsilon),4\varepsilon^2))\leqslant\varepsilon\}.$$

Soient par ailleurs $X_1,\ldots,X_n$, les coordonnées du processus $\overline{X}$. L'inégalité triviale $\|\overline{X}(t)\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|X_i(t)|$, $t\in\mathbb{R}^p$, implique l'inclusion d'événements

(5.2.78)
$$\bigcap_{i=1}^{n}\{M(X_i,D(a,\varepsilon))\leqslant\varepsilon/n\}\subset\{M(D(a,\varepsilon))\leqslant\varepsilon\},$$

soit encore, d'après l'indépendance des processus coordonnées, la majoration

(5.2.79) $$P\{M(D(a,\varepsilon)) \leqslant \varepsilon\} \geqslant [P\{M(X_1,D(a,\varepsilon)) \leqslant \varepsilon/n\}]^n ,$$

satisfaite pour tout $a > 0$ et $\varepsilon > 0$.

Faisons appel à la propriété d'homogénéité (2.1.1). En vertu de cette propriété les processus

$$[d\varphi_2(2\varepsilon)]^{-1/2} X_1(t) \quad \text{et} \quad X_1(t[d\varphi_2(2\varepsilon)]^{-1}), \ t \in \mathbb{R}^p,$$

sont identiques en loi. Par suite il vient (avec la notation (4.0.3)) :

(5.2.80) $$P\{M(X_1,D(d\varphi_2(2\varepsilon),4\varepsilon^2)) \leqslant \varepsilon/n\}$$
$$= P\{M(X_1,(d \log_2(1/2\varepsilon))^{-1/2}) \leqslant (4n^2 d \log_2(1/2\varepsilon))^{-1/2}\} .$$

Avec le choix $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon(4)$, on a d'après (5.2.52) $d \log_2(1/2\varepsilon) > 1$, ce qui nous autorise à appliquer la conclusion (4.0.4) du théorème 23. En remplaçant dans la formule (4.0.4) le nombre ε par $(d \log_2(1/2\varepsilon))^{-1/2}$ et le nombre α par $1/2n$, on voit qu'il existe une constante b_2 ne dépendant que des dimensions p et n, telle que l'on ait (en tenant compte de l'égalité (5.2.80)) :

(5.2.81) $$P\{M(X_1,D(d\varphi_2(2\varepsilon),4\varepsilon^2) \leqslant \varepsilon/n\} \geqslant \exp\{-b_2 d \log_2(1/2\varepsilon)\} = [\log(1/2\varepsilon)]^{-b_2 d}.$$

L'ensemble des inégalités (5.2.75), (5.2.77), (5.2.79) et (5.2.81) nous conduit vers l'estimation souhaitée. En effet, fixons $r \geqslant n_1$, on obtient :

(5.2.82)
$$\begin{aligned} P\{H(r)\} = P\{M(G(2\varepsilon_r')) > \varepsilon_r' \} &= 1 - P\{M(G(2\varepsilon_r')) \leqslant \varepsilon_r' \} \\ &\leqslant 1 - P\{M(F(2\varepsilon_r')) \leqslant \varepsilon_r' \} \\ &\leqslant 1 - P\{M(D(d\varphi_2(2\varepsilon_r',(2\varepsilon_r')^2) \leqslant \varepsilon_r' \} \\ &\leqslant 1 - [\log(1/2\varepsilon_r']^{-nb_2 d}. \end{aligned}$$

D'après (5.2.23.c) et (5.2.42), il vient

(5.2.83) $$nb_2 d = 1/4 ,$$

ainsi, en appliquant la majoration élémentaire $\log(1/2\varepsilon_r') \leqslant \log(1/\varepsilon_r') = (p+4)\log r! \leqslant r^2$, satisfaite pour tout nombre entier r pris assez grand, nous pouvons énoncer :

Proposition 2. *Il existe un nombre entier* $n_2 \geqslant n_1$ *, tel que l'on ait :*

$$\text{(5.2.84)} \qquad P\{H(r)\} \leqslant 1 - r^{-1/2}, \text{ pour tout } r \geqslant n_2 .$$

Etape VII. On termine la preuve du lemme 4.

Nous devons établir l'inégalité (5.2.34). En vertu de (5.2.62), (5.2.73) et (5.2.74), le terme général de la série intervenant dans cette expression se majore selon :

$$\text{(5.2.85)} \qquad \varphi(\varepsilon_m)\int_{\Omega(\varepsilon_o)} \operatorname{card} B(m,\omega)dP(\omega)$$

$$\leqslant \varphi(\varepsilon_m)M(\varepsilon_m)^p\Big[\prod_{r=m}^{2m} P\{H(r)\} + \frac{\tilde{p}}{p+2}m^{-p-2}\Big] \text{ pour tout } m \geqslant n_1 .$$

A une constante multiplicative près (ne dépendant que des dimensions n et p, voir (5.2.5)) le produit $\varphi(\varepsilon_m)M(\varepsilon_m)^p$ se majore par $\varphi(\varepsilon_m)(\varphi_1(\varepsilon_m))^{-p}$, soit encore, en remplaçant ε_m par son expression numérique (5.2.23.a) :

$$\text{(5.2.86)} \qquad \varphi(\varepsilon_m)(\varphi_1(\varepsilon_m))^{-p} = (\log(1/\varepsilon_m))^p\log_2(1/\varepsilon_m)$$

$$= [(p+4)\log(2m)!]^p \log_2[(2m)!]^{p+4} \leqslant m^{p+1/4},$$

à condition de prendre m assez grand.

En confrontant l'estimation (5.2.85) ainsi obtenue avec (5.2.84), on voit que pour conclure il ne reste plus qu'à montrer que la série de terme général

$$u_m = m^{p+1/4}\prod_{r=m}^{2m} P\{H(r)\},$$

est convergente. Or d'après (5.2.84), pour tout $m \geqslant n_2$, on a (avec $\log(1-x) \leqslant -x$ pour $x \in [0,1[$) :

$$\text{(5.2.87)} \qquad \prod_{r=m}^{2m} P\{H(r)\} \leqslant \prod_{r=m}^{2m}(1 - r^{-1/2})$$

$$\leqslant \exp(-\sum_{r=m}^{2m} r^{-1/2})$$

$$\leqslant \exp(-\sqrt{\frac{m}{2}}),$$

ce qui implique trivialement la propriété souhaitée. Le lemme 4 est donc démontré.

Bibliographie

1. **ADLER, R.J.** : *Hausdorff dimension and gaussian fields.* Ann. prob. 5, 145-151 (1977).

2. **ANDERSON, T.W.** : *The integral of symmetric unimodal function over a symmetric convex set and some probability inequalities.* Proc. Amer. Math. Soc., 6, 170-176 (1955).

3. **BORELL, C.** : *The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space.* Inventiones Math. 30, 107-216 (1975).

4. **CIESIELSKI, Z., TAYLOR, S.J.** : *First passage times and sojourn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path.* Trans. Amer. math. Soc. 10, 434-450 (1962).

5. **CIRELSON, B.S., IBRAGIMOV, I.A., SUDAKOV, V.N.** : *Norms of Gaussian sample functions.* Lecture Notes in Math. 550, Springer, 20-41 (1975).

6. **CUZIK, J.** : *Some local properties of Gaussian vector fields* . Ann. Prob. 6, 984-994 (1978).

7. **DAS GUPTA, S., EATON, M.L., OLKIN, I., PERLMAN, M., SAVAGE, L.J. and SOBEL, M.** : *Inequalities on the probability content of convex regions for elliptically contoured distributions* . Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob., 2, 241-264, Univ. of California Press (1972).

8. **DUDLEY, R.M.** : *The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes* . J. Funct.Anal. 1, 290-330, (1967).

9. **DYM, H., McKEAN, H.P.** : *Gaussian processes, function theory, and the inverse spectral problem* . Academic Press (1976).

10. **EHM, W.** : *Sample function properties of multi-parameter stable processes.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 56, 195-228 (1981).

11. **FERNIQUE, X.** : *Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes.* Lecture Notes in Math., 480, Springer (1975).

12. **GOLDMAN, A.** : *Points multiples des trajectoires de processus gaussiens* . Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 57, 481-494 (1981).

13. **GOLDMAN, A.** : *Estimations analytiques concernant le mouvement brownien fractionnaire à plusieurs paramètres.* C.r. hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris 298, 5, 91-93 (1984).

14. **GOLDMAN, A.** : *La mesure de Hausdorff des trajectoires du mouvement brownien à plusieurs paramètres.* C.r. hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris 300, 18, 643-645 (1985).

15. **GOLDMAN, A.** : *Un principe de réflexion pour le mouvement brownien de P.Lévy à trois paramètres.* C.r. hebd. Acad. Sci., Paris 305, 693-696 (1987).

16. **GOLDMAN, A.** :*Techniques biharmoniques pour l'étude du mouvement brownien à trois paramètres.* Proposé

17. KAHANE, J.P. : *Some random series of functions* (nouvelle éd.) Cambridge Univ. Press (1985).

18. KONO, N. : *Sur la minoration asymptotique et le caractère transitoire des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 33, 95-112 (1975).

19. LANDKOF, N.S. : *Foundations of modern potential theory.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg - New-York (1972).

20. LEVY, P. : *Sur le mouvement brownien dépendant de plusieurs paramètres.* C.r. hebd. Acad. Sci. Paris, 220, 420-422 (1945).

21. LEVY, P. : *Processus stochastiques et mouvement brownien.* Gauthier Villars (2nd-édition 1965).

22. LEVY, P. : *La mesure de Hausdorff de la courbe du mouvement brownien.* Giornale dell Instituto Ital. Attuari 16, 1-37 (1953).

23. LEVY P. : *Le mouvement brownien fonction d'un ou de plusieurs paramètres.* Rend. Mathematica 22, 24-101 (1963).

24. LEVY P. : *Fonctions browniennes dans l'espace euclidien et dans l'espace de Hilbert* . Festschrift for J. Neyman, London (Wiley and Sons) 189-223 (1966).

25. McKEAN, H.P. : *Brownian motion with several-dimensional time.* Th. Prob. Appl. VIII, 335-354 (1963).

26. MULLER, C. : *Spherical harmonics.* Lecture Notes in Math. 17 (1966).

27. PETIAU, G. : *La théorie des fonctions de Bessel exposée en vue de ses applications à la Physique Mathématique.* Publications du C.N.R.S. (1955).

28. PITT, L.D. : *Local times for Gaussian vector fields.* Indiana Univ. Math. J. 27, 309-330 (1978).

29. PITT, L.D. : *A Gaussian correlation inequality for symmetric convex sets.* Ann. Prob. 5, 470-474 (1977).

30. POLYA, G., SZEGO, G. : *Problems and theorems in analysis II* . Springer (1976).

31. RAY, D. : *Sojourn times and the exact Hausdorff measure of the sample path for planar Brownian motion.* Trans. Amer. Math. Soc. 106, 436-444 (1963).

32. ROGERS, C.A., TAYLOR, S.J. : *Function continuous and singular with respect to a Hausdorff measure* . Mathematica 8, 1-31 (1961).

33. SCHOENBERG, I.J. : *On certain metric spaces arising from euclidean spaces by a change of metric and their imbedding in Hilbert space.* Ann. Math. 38, 787-793 (1937).

34. STEIN, E.M., WEISS, G. : *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces,* Princeton Univ. Press (1971).

35. SUDAKOV, V.N. : *Geometric problems in the theory of infinite-dimensional probability distribution.* Proceedings of the Steklov Inst. math. 2, 1-67 (1979).

36. TAYLOR, S.J. : *The exact Hausdorff measure of the sample path for planar Brownian motion.* Proc. Camb. Phil. Soc. 60, 253-258 (1964).

37. **TAYLOR, S.J.** : *Sample path properties of a transient stable process.* J. Math. Mech. 16, 1229-1246 (1967).

38. **TAYLOR, S.J.** : *The measure theory of random fractals.* Proc. Camb. Phil. Soc. 100, 383-406 (1986).

39. **TESTARD, F.** : *Processus gaussiens : polarité, points multiples, géométrie.* Publ. Lab. Stat. Prob. Univ. Paul Sabatier, Toulouse, 1-45 (1986).

40. **YODER, L.** : *The Hausdorff dimension of the graph and the range of* N*-parameter Brownian motion in* d*-space.* Ann. Prob. 3, 159-171 (1975).

André GOLDMAN
Université Claude Bernard - Lyon I
Institut de Mathématiques et Informatique
43, boulevard du 11 Novembre 1918
69622 VILLEURBANNE CEDEX (France)

Summary

The function $\varphi(x) = x^{2p} \log\log(1/x)$ is shown to be exact Hausdorff measure fucntion for the range of a transient Levy Brownian motion with p-dimensional time ; this result settles a question asked by P. Levy. The approach adopted to prove the result is based on ideas developped by P. Levy, Z. Ciesielski and S.J. Taylor in the study of the process with scalar index. In order to be applied, these methods require a sufficiently precise informations about "the dependence structure" and "the distribution of the maximum". With this aim in view, two prediction theorems are established, the proofs use :

a) expansion of the Brownian motion as a sum of spherical harmonics, discovered by H.P. McKean ;
b) I.J. Schoenberg's representation of the covariance function.

Next, a close upper and lover bounds for the distribution function of the absolute maximum are obtained when the process is restricted to an appropriate cylinder. This last result relies on a perturbation technique and exploits a general comparaison theorem for the distribution functions of the absolute maximum of gaussian processes.

Résumé

L'exacte mesure de Hausdorff des trajectoires du mouvement brownien transient, indexé sur un espace euclidien $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 2$, est associée à la fonction déterminante $\varphi(x) = x^{2p} \log \log(1/x)$, ce qui résout un problème posé par P. Levy. L'approche adoptée pour démontrer ce résultat repose sur les idées développées par P. Levy, Z. Ciesielski et S.J. Taylor dans l'étude du processus à indice scalaire. Pour pouvoir être appliquées ces méthodes nécessitent une information suffisamment précise sur la "structure de dépendance" et sur la "distribution du maximum". Dans ce but, deux théorèmes de prédiction sont établis, leurs preuves reposant sur :

a) la décomposition du processus en harmoniques sphériques découverte par H.P. McKean ;
b) la représentation de I.J. Schoenberg de la fonction de covariance.

Par la suite, un encadrement convenable de la distribution du maximum absolu est obtenu, le processus étant restreint à un cylindre approprié ; ce dernier résultat s'appuie sur une technique de perturbation et exploite un théorème général de comparaison des distributions du maximum absolu pour les processus gaussiens.