Astérisque

SYLVESTRE GALLOT

# Inégalités isopérimétriques et analytiques sur les variétés riemanniennes

*Astérisque*, tome 163-164 (1988), p. 31-91

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1988__163-164__31_0>

© Société mathématique de France, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques*

http://www.numdam.org/

*Société Mathématique de France*
*Astérisque 163-164 (1988), p.31-91.*

# INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES ET ANALYTIQUES SUR LES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES

*par Sylvestre GALLOT*

## Table des Matières

6. **Etablissement d'inégalités isopérimétriques sur les variétés.** Historique et préoccupations.

A. Discussion sur les hypothèses retenues.

a) Nécessité d'une majoration du diamètre.

b) Autre hypothèse pouvant remplacer celle sur le diamètre.

c) Nécessité d'une minoration de la courbure de Ricci.

d) Illustration du rôle joué par la double hypothèse "diamètre majoré et courbure de Ricci minorée" : compactification de l'ensemble des variétés de révolution qui la vérifient.

B. La fonction isopérimétrique pour elle-même. Sa continuité, son comportement au voisinage de zéro, sa croissance comparée à celle qui prévaut dans une variété de courbure constante. Majoration du nombre de composantes connexes des domaines de bord minimal.

C. Inégalités isopérimétriques optimales sous les hypothèses "courbure de Ricci et constante isopérimétrique de Cheeger minorées".

D. Inégalités isopérimétriques sous les hypothèses : "courbure de Ricci minorée et diamètre majoré".

a) Relations optimales entre constante isopérimétrique de Cheeger et diamètre.

b) Comparaison entre fonctions isopérimétriques riemannienne (sur une variété) et euclidienne.

c) Comparaison entre fonctions isopérimétriques d'une variété et de la sphère.

E. L'hypothèse $L^\infty$ faite sur le minorant de la courbure de Ricci peut être remplacée par une hypothèse $L^{\frac{n+\varepsilon}{2}}$ : énoncé et motivations.

F. Minoration du rapport entre $i$ème et 1ère valeurs propres.

**Appendice : Espaces de révolution**

A.0. Relation entre courbure et profil isopérimétrique.

A.1. Les domaines de périmètre minimal sont (asymptotiquement) les boules centrées sur le pôle.

A.2. Quelques propriétés-limites du spectre des variétés de révolution.

A.3 et A.4. Calculs des invariants analytiques sur les double-cônes euclidiens puis les double-cusps.

A.5. Une inégalité isopérimétrique du type $h_{(M,g)}(\beta) \geqslant C.\beta^{1+\alpha}$ $(\alpha > 0)$ ne donne aucune estimée spectrale.

A.6. Une suite de variétés de révolution dont chacune des valeurs propres tend vers zéro, bien que volume et diamètre restent à peu près constants.

## 0. Introduction

Au sens strict, établir une *inégalité isopérimétrique* sur une variété riemannienne donnée $(M, g)$ , c'est calculer le minimum de la fonctionnelle qui, à chaque domaine de volume interne fixé, associe le volume $(n-1)$-dimensionnel de son bord. Sur une variété de volume fini, ceci revient à calculer la fonction $h_{(M,g)}$ définie par

$$h_{(M,g)}(\beta) = \operatorname{Inf}\left\{\frac{\operatorname{Vol}_g(\partial\Omega)}{\operatorname{Vol}_g(M)} : \Omega \text{ inclus dans } M \text{ tel que } \frac{\operatorname{Vol}_g(\Omega)}{\operatorname{Vol}_g(M)} = \beta\right\},$$

les volumes étant calculés relativement à la mesure canonique $dv_g$ de $M$ (resp. de $\partial\Omega$) associée à la métrique $g$ . Au sens large, on appelle communément "inégalités isopérimétriques" toute inéquation reliant une fonctionnelle énergie du type $u \mapsto \int_M |du|_g^q . dv_g$ (où $|\ |_g$ est la norme sur les 1-formes obtenue par dualité à partir de la métrique $g$) à la norme $L^p$ de $u$ . Ainsi en est-il des estimations des valeurs propres $0 = \lambda_0(M,g) < \lambda_1(M,g) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_i(M,g) \leqslant \ldots < +\infty$ (resp. $0 < \lambda_1^D(\Omega) < \ldots \leqslant \lambda_i^D(\Omega) \leqslant \ldots < +\infty$) du spectre d'une variété compacte $(M, g)$ [resp. du spectre d'un de ses domaines $\Omega$ pour le problème de Dirichlet] en fonction d'une ou plusieurs informations retenues sur la géométrie de $(M, g)$ [resp. de $(\Omega, g)$]. Entre aussi dans ce type d'inégalités toute estimation de la solution fondamentale $k_{(M,g)}$ de l'équation de la chaleur sur $(M, g)$ [la définition de ces notions est donnée dans les sections 2.B et 2.D]. Afin de lever toute ambiguïté, *nous préfèrerons pour ces estimations l'appellation "inégalités analytiques", réservant le terme "inégalités isopérimétriques" aux estimations du volume du bord d'un domaine en fonction du volume interne.* Le lien entre inégalités analytiques et isopérimétriques fut pressenti par Lord Rayleigh lorsqu'il conjectura en 1877 que, parmi toutes les membranes planes, la membrane circulaire (qui est de périmètre minimal) a aussi la plus petite fréquence propre. La conjecture de Rayleigh fut établie indépendamment par G. Faber ([FR], 1923) et E. Krahn ([KN1], 1924), puis généralisée en toute dimension par E. Krahn ([KN2], 1926). Pour être plus exact, Faber et Krahn démontraient seulement que la résolution de la conjecture de Rayleigh se ramène à la résolution de la conjecture isopérimétrique proprement dite "parmi tous les domaines de même volume dans $\mathbf{R}^n$ , la boule a un bord de volume $(n-1)$-dimensionnel minimal".

Dans la section 5, nous établissons un analogue du résultat de Faber et Krahn sur les variétés qui pourrait s'exprimer ainsi.

THÉORÈME (*cf.* [B-G1] et théorème 5.4). — *Considérons une fonction donnée $h^*$ et une variété de révolution $(M^*, g^*)$ , de pôle $x_0$ , telle que toutes les boules $B$ centrées en $x_0$ satisfont aux deux hypothèses suivantes :*

*(i)* $\frac{\operatorname{Vol}(\partial B)}{\operatorname{Vol}(M^*)} = h^*\left(\frac{\operatorname{Vol} B}{\operatorname{Vol} M^*}\right)$

*(ii) Parmi tous les domaines de $M^*$ de même volume que la boule $B$ , celle-ci a un bord de volume minimal.*

*Alors, sur l'ensemble des variétés $(M,g)$ qui vérifient l'inégalité isopérimétrique $h_{(M,g)} \geqslant h^*$ , la fonctionnelle $(M,g) \mapsto \lambda_1(M,g)$ [resp.$(M,g) \mapsto \mathrm{Vol}(M,g)$. $\mathrm{Sup}_{x,y}\, k_{(M,g)}(t,x,y)$ pour $t$ quelconque fixé] atteint son minimum (resp. son maximum) en $(M^*,g^*)$ .*

En fait ce théorème est généralement vide, sauf lorsque $h^*$ est, au départ, suffisamment symétrique (comme c'est le cas dans [B-B-G] et dans le théorème 6.16). Dans le cas contraire, une fois donnée la fonction $h^*$ , il est généralement impossible de construire une variété de révolution qui vérifie simultanément les hypothèses (i) et (ii). Ceci devient possible si on remplace l'ensemble des variétés riemanniennes qui vérifient l'inégalité isopérimétrique $h_{(M,g)} \geqslant h^*$ par un complété qui permet un prolongement par continuité des fonctionnelles étudiées (dans l'esprit de la proposition 6.1). *Le théorème ci-dessus reste vrai et devient non vide dans ce cadre* (*cf.* l'énoncé 5.5) : la fonctionnelle $(M,g) \mapsto \lambda_1(M,g)$ [resp.$(M,g) \mapsto \mathrm{Vol}(M,g)\cdot \mathrm{Sup}_{x,y}\, k_{(M,g)}(t,x,y)$] atteint alors son minimum [resp. son maximum] en un "point" du complété qui est la limite d'une famille de variétés de révolution obtenues en écrasant une variété de révolution $(M^*,g^*)$ sur son axe selon un procédé canonique décrit dans la section 5.B, la proposition 6.1 et les appendices A.1 et A.2. L'optimalité des inégalités analytiques énoncées dans le théorème ci-dessus découle donc du résultat suivant (appendice A.1) : quand on écrase sur son axe une variété de révolution qui vérifie l'hypothèse (i), on obtient un objet-limite dans le complété qui vérifie asymptotiquement (ii).

Tout comme le théorème dé Faber-Krahn, le théorème précédent est conditionné par la résolution du problème isopérimétrique suivant : Etant donné un ensemble $\mathcal{R}$ de variétés riemanniennes (le plus vaste possible, donc en particulier contenant une infinité de types topologiques et de métriques), établir une inégalité isopérimétrique $h_{(M,g)} \geqslant h^*$ valable pour tous les éléments $(M,g) \in \mathcal{R}$ et si possible optimale [*i.e.* il existe $(M_n,g_n) \in \mathcal{R}$ tel que $h_{(M_n,g_n)}$ tende vers $h^*$]. Si l'ensemble $\mathcal{R}$ considéré est trop vaste ou si le minorant universel $h^*$ des fonctions isopérimétriques des variétés de $\mathcal{R}$ n'est pas assez fin, les inégalités analytiques données par le théorème 5.4 (énoncé ci-dessus) peuvent être triviales, c'est-à-dire qu'elles minorent par zéro ou majorent par $+\infty$ (voir aussi la proposition 6.10). Le théorème 5.3 donne une condition nécessaire et suffisante sur $h^*$ pour qu'il n'en soit pas ainsi. Il est établi dans la section 6.A qu'une hypothèse conjointe "diamètre majoré et courbure de Ricci minorée" est nécessaire pour délimiter un ensemble $\mathcal{R}$ de variétés riemanniennes tel que la borne inférieure des fonctions isopérimétriques des variétés de $\mathcal{R}$ vérifie cette condition. Il est démontré dans la section 6.D que cette hypothèse est également suffisante, d'une manière qui permet le calcul d'un minorant universel $h^*$ des fonctions isopérimétriques des variétés de $\mathcal{R}$ et de bornes universelles des invariants analytiques considérés. Cependant, ces bornes ne sont quantitativement optimales que si on remplace l'hypothèse "diamètre majoré" par l'hypothèse "constante isopérimétrique de Cheeger minorée" (théorèmes 6.11, 6.13 et 6.15) [le théorème 6.14 montre en effet que, si ces deux hypothèses sont qualitativement équivalentes dans le cadre où elles sont appliquées, elles ne sont pas quantitativement équivalentes]. Ces résultats s'appuient sur une estimation du volume des voisinages tubulaires d'une hypersurface. L'inégalité de E. Heintze et H. Karcher [théorème 1.6 (ii)] permet de majorer ce volume à l'aide de la mesure de l'hypersurface et de sa courbure moyenne. On montre ensuite (Lemme 6.4 et Proposition 6.5) que, lorsqu'un domaine $\Omega^*$ réalise le minimum d'une fonctionnelle du type $\Omega \mapsto \frac{\mathrm{Vol}(\partial\Omega)}{f[\mathrm{Vol}(\Omega)]}$ , alors sa courbure moyenne est calculable a priori en fonction des volumes de $\Omega^*$ et de $\partial\Omega^*$ . Ceci permet de majorer le volume du tube en fonction de celui de l'hypersurface et d'en déduire l'inégalité isopérimétrique (à l'inverse de l'inégalité de Brunn Minkowski, on arrive à ce résultat non pas en considérant les petits tubes, mais au contraire des tubes qui recouvrent toute la variété).

La démonstration nécessite l'établissement d'un certain nombre de propriétés qualitatives de la fonction $h_{(M,g)}$ (section 6.B) ainsi que des domaines dont le bord est de volume minimal pour un volume interne fixé (Lemme 6.4, Corollaires 6.6 (ii)) qui se déduisent de propriétés des courants minimaux (en particulier une remarque de M. Gromov [GV2] sur un résultat de F. Almgren [AN]).

Dans la section 6.E, on montre que l'hypothèse $L^\infty$ faite sur la borne inférieure de la courbure de Ricci peut être remplacée par une hypothèse plus faible de type $L^{\frac{n+\varepsilon}{2}}$ . Ceci permet d'inclure dans l'étude certaines variétés singulières construites par chirurgie riemannienne et d'obtenir des estimées d'invariants topologiques par des intégrales de courbure dans l'esprit d'une généralisation des formules de Gauss-Bonnet et Chern-Weil (pour plus de détails sur les énoncés et les motivations, voir la section 6.E et [GT6]).

Enfin, dans la section 6.F (théorème 6.18), on donne un minorant universel du rapport $\dfrac{\lambda_i(M,g)}{\lambda_1(M,g).i^{2/\dim(M)}}$ dans un esprit voisin de celui de la conjecture de Polya. Ce résultat nécessite l'établissement d'un minorant optimal de la constante isopérimétrique de Cheeger (théorème 6.14).

Les chapitres 5 et 6 et l'appendice A, présentés ci-dessus, forment donc le cœur de l'article. Les chapitres qui les précèdent ne contiennent pas d'énoncés originaux, exception faite des résultats de la section 2.E qui établissent des rapports entre spectres de Neumann et de Dirichlet d'une variété à bord et le spectre de son double (considéré comme une variété sans bord singulière) [proposition 2.8] et d'une relation optimale établie entre le spectre d'un domaine dans une variété et le spectre de la variété elle-même. La section 1 est une présentation rapide, destinée aux analystes non spécialistes de géométrie, de ce qu'il faut savoir sur la courbure pour comprendre comment elle influe sur les inégalités analytiques et sur la mesure riemannienne. On y privilégie le point de vue intuitif de la "courbure apparaissant comme premier terme non euclidien dans un développement limité de la métrique et de la distance" [formules (1.1) et (1.2)] (point de vue classique mais rarement explicité dans les ouvrages) et le point de vue analytique (sous-jacent aux formules de Bochner-Weitzenböck) de la "courbure comme défaut de commutation des dérivées d'une fonction" (section 1.B) qui permet une variante amusante de la démonstration du théorème de comparaison des mesures de Bishop-Heintze-Karcher dont l'origine séminale se trouve dans les théorèmes de comparaison de Rauch (théorème 1.6).

A l'inverse, les sections 2.A à 2.D sont une présentation (destinée aux géomètres non spécialistes d'analyse) de l'opérateur laplacien et de son spectre. Après une approche intuitive (sections 2.A et 2.D), on essaie de mettre les choses un peu en forme (sections 2.B et 2.C) et de présenter le principe du min-max (à utiliser comme une introduction avec renvois aux ouvrages classiques de la théorie spectrale).

Dans la section 3, l'auteur a tiré de ses conversations avec des analystes, de leurs réactions et de l'observation de quelques quiproquos, une liste de difficultés irréductibles que l'on rencontre dès que l'on veut transposer dans un cadre géométrique global des résultats d'analyse qui sont pourtant classiques dans $\mathbf{R}^n$ (cette préoccupation est présente chez de nombreux auteurs, voir en particulier [AU]).

La section 4 se veut une présentation de méthodes développées par S.Y. Cheng, P. Li, S.T. Yau, M. Gromov et P. Buser pour les majorations/minorations de valeurs propres : par le principe du min-max, on ramène l'évaluation de $\lambda_i(M,g)$ à celle de la première valeur propre d'une boule géodésique. On remarquera que la dépendance de la géométrie globale (et pas seulement locale) se voit en particulier dans le fait que ces boules, ayant un rayon éventuellement plus grand que le rayon d'injectivité, ne sont généralement pas difféomorphes à des boules de $\mathbf{R}^n$ .

Les sections 5 et 6 ayant été présentées ci-dessus, nous avons regroupé dans l'appendice "A" tous les exemples qui illustrent notre propos, qui donnent le calcul effectif des majorants/minorants dans les inégalités isopérimétriques ou analytiques ou qui permettent de vérifier l'optimalité de ces inégalités. Les résultats A.1 et A.2 sur les variétés de révolution (ce dernier à relier à la proposition

6.1) ont un intérêt propre.

L'auteur remercie M. Berger et D. Meyer dont les questions l'ont amené à préciser sa pensée. Le lecteur notera qu'une partie de ce travail doit beaucoup à une collaboration avec P. Bérard et G. Besson (théorèmes 5.4 et 6.16); de plus, bon nombre des préoccupations auxquelles la section 5 apporte des réponses étaient déjà présentes ou sous-jacentes dans un cours effectué "en duo" par P. Bérard et l'auteur à l'Ecole Normale Supérieure ([B–G2], voir aussi [BE2]). Remerciements également à Y. Colin de Verdière, M. Gromov, G. Courtois et B. Teissier pour des conversations ou précisions utiles. Enfin, si ce texte est devenu lisible, le lecteur le doit au referee qui n'a pas ménagé sa peine.

## 1. Courbure et théorèmes de comparaison

### A. La courbure vue comme invariant qui mesure l'écart entre géométrie infinitésimale et locale.

Nous allons présenter quelques-unes des bases de la géométrie riemannienne dans une optique très proche de celle de M. Gromov dans [GV 1] :

*a) La géométrie infinitésimale.* —

1.1. PREMIÈRE APPROCHE. — La définition habituelle d'une variété riemannienne $(M, g)$ comporte la donnée de la structure différentiable (c'est-à-dire $C^\infty$) $M$ et d'un *champ de 2-tenseurs* $x \mapsto g_x$ (*i.e.* une section de $T^*M \otimes T^*M$) tel que $g_x$ soit une forme quadratique définie positive sur chaque espace tangent $T_xM$ .

1.2. SECONDE APPROCHE (*cf.* [GV 1]). — Au lieu de définir la géométrie par la donnée de la métrique $g$ , *on peut vouloir partir de la distance* $d$ . Dans ce cas, il faut supposer que la distance $d$ confère à la variété une structure d'espace de longueurs, *i.e.* que $d(x, y)$ est la borne inférieure de la longueur des courbes qui joignent $x$ à $y$ .

Ces deux structures géométriques (métrique riemannienne $g$ d'une part, distance $d$ d'espace de longueurs d'autre part) permettent de définir la longueur de toutes les courbes de $M$ qui sont suffisamment régulières (par intégration de la norme du vecteur vitesse pour $g$ , par partition de plus en plus fine de la courbe pour $d$). Il y a identité entre ces deux structures lorsque les deux notions de longueurs coïncident. Ceci suppose que la distance $d$ , alors appelée "riemannienne", vérifie a priori un certain nombre de propriétés : en particulier, pour tout point $x_0$ , la limite (au sens de Lipschitz, *cf.* [GV1]) de $(M, x_0, \lambda \cdot d)$ lorsque $\lambda$ tend vers l'infini (*i.e.* la variété vue par un microscope centré en $x_0$ dont le grossissement tend vers l'infini) est l'espace tangent $T_{x_0}M$ , centré en zéro et muni de la distance euclidienne canoniquement associée au produit scalaire $g_{x_0}$ (*cf.* [GV1], proposition 3.15). En coordonnées locales, ceci implique :

$$d^2(x_0, x_0 + h) = g_{x_0}(h, h).(1 + o(1)) \ .$$

Il est donc naturel de se demander quel est le terme significatif suivant dans le développement limité de la métrique. Nous allons montrer qu'il s'agit de la courbure.

*b) La courbure.* — Sur une variété riemannienne $(M, g)$ (*cf.* définition 1.1), toutes les courbes $c$ , suffisamment régulières, paramétrées par leur longueur, vérifient $d[c(t_1), c(t_2)] \leqslant |t_2 - t_1|$ pour tous les $t_1, t_2$ . Les courbes minimisantes sont celles pour lesquelles l'égalité est vérifiée.

Suivant la démarche classique, o. démontre l'existence de courbes localement minimisantes appelées *géodésiques* et d'une application de l'espace tangent $T_{x_0}M$ au point $x_0$ sur la variété $M$ , appelée *"application exponentielle"* ou *"carte normale" et notée* $\exp_{x_0}$ . La traduction de la notion d'application exponentielle dans le langage des espaces de longueurs riemanniens (une démonstration directe serait à écrire) peut se faire de la manière suivante : Au cours de la convergence (décrite en 1.a) de l'espace pointé $(M, x_0, \lambda.d)$ vers l'espace tangent euclidien $(T_{x_0}M, 0, d_{x_0})$ , les géodésiques $c_\lambda$ (associées à la distance $\lambda.d$) restent globalement invariantes; pour toute géodésique $c_1$ issue de $x_0$ , en envoyant $c_1(t)$ sur $c_\lambda(t) = c_1(t/\lambda)$ et en passant à la limite, on obtient donc une carte canonique d'un voisinage $U$ de $x_0$ dans $M$ sur un voisinage $\Omega$ de 0 dans $T_{x_0}M$ qui envoie $c_1(t)$ sur $t.\dot{c}_1(0)$ et n'est autre que la carte exponentielle inverse.

En identifiant $U$ et $\Omega$ via $\exp_{x_0}$ , on peut considérer $U$ et $\Omega$ comme étant un même ouvert de $\mathbf{R}^n$ sur lequel on peut comparer les deux distances $d$ et $d_{x_0}$ et les deux métriques $g$ et $g_{x_0}$ . Moyennant cette identification, on prouve l'existence d'une forme bilinéaire symétrique $R_{x_0}$ (le tenseur de courbure), définie sur $\Lambda^2[T_{x_0}M]$ , telle que

$$d(x_0+h, x_0+k)^2 = d_{x_0}(h,k)^2 - \frac{1}{3}R_{x_0}(h_\wedge k, h_\wedge k) + \mathrm{O}\left[(d_{x_0}(x_0, x_0+h)^3 + d_{x_0}(x_0, x_0+k)^3)\cdot d_{x_0}(h,k)^2\right] , \tag{1.1}$$

lorsque $h$ et $k$ sont petits.

$$g_{x_0+h}(X,Y) = g_{x_0}(X,Y) - \frac{1}{3}R_{x_0}(h_\wedge X, h_\wedge Y) + \mathrm{O}\left[g_{x_0}(h,h)^{3/2}\cdot g_{x_0}(X,X)^{1/2}\cdot g_{x_0}(Y,Y)^{1/2}\right] \tag{1.2}$$

lorsque $h$ est petit et lorsque $X$ et $Y$ sont deux vecteurs tangents à $\mathbf{R}^n$ .

Les égalités (1.1) et (1.2) pourraient servir de définition à la notion de courbure, nous préfèrerons cependant partir de la définition plus formelle qui suit.

*c) Définition de la courbure et preuves des égalités (1.1) et (1.2).* — Notons $D$ la dérivation covariante de la connexion (de Levi-Civita) canoniquement associée à la métrique $g$ (nous renvoyons aux ouvrages d'introduction à la géométrie riemannienne, tels [B-G-M] ou [G-H-L], pour la définition de cette notion). Etant donné quatre champs de vecteurs $X, Y, U$ et $V$ , *on définit le tenseur de courbure, indifféremment noté* $R(X,Y,U,V)$ *ou* $R(X\wedge Y, U\wedge V)$ , *par l'égalité*

$$R(X,Y,U,V) = g(D_XD_YV - D_YD_XV - D_{[X,Y]}V, U) . \tag{1.3}$$

Ce tenseur peut également être considéré comme un 3-tenseur à valeur vectorielle que nous noterons alors

$$R(X,Y)V = D_XD_YV - D_YD_XV - D_{[X,Y]}V .$$

*Nous noterons* $\Phi$ *le système de coordonnées polaires associé à la carte exponentielle, i.e.* l'application de $]0,+\infty[\times S^{n-1}_{x_0}$ dans $M$ définie par $\Phi(t,x) = \exp_{x_0}(t.x)$ , où $S^{n-1}_{x_0}$ est la sphère unitaire de $T_{x_0}M$ . Il existe une application $t_0$ de $S^{n-1}_{x_0}$ dans $]0,+\infty[$ (appelée rayon de coupure) telle que $\Phi$ soit un difféomorphisme de l'ouvert $U = \{(t,x) : 0 < t < t_0(x)\}$ sur son image et telle que cette image soit égale à $M\setminus\{x_0\}$ privée d'un ensemble de mesure nulle (le cut-locus du point $x_0$). Fixons un point $x$ de $S^{n-1}_{x_0}$ , la courbe $t\mapsto\Phi(t,x)$ est une géodésique (paramétrée par sa longueur) que nous noterons $c$ . A chaque vecteur $X$ (tangent en $x$ à $S^{n-1}_{x_0}$) on peut associer le champ de Jacobi le long de $c$ :

$$J_X(t) = T_{(t,x)}\Phi(X) = t.T_{t.x}\exp_{x_0}(X) .$$

L'application tangente en zéro à $\exp_{x_0}$ étant (par construction) l'identité, on a

$$J_X(0) = 0 \quad \text{et} \quad D_{\dot c} J_{X|_{t=0}} = X \ . \tag{1.4}$$

Par ailleurs, en effectuant des permutations dans les dérivées et en utilisant le fait que les courbes $t \mapsto \Phi(t, y)$ sont toutes des géodésiques, on obtient l'équation classique des champs de Jacobi

$$D_{\dot c} D_{\dot c} J_X = D_{\dot c}[T(\dot c, J_X)] - R(J_X, \dot c)\dot c \ ,$$

où $T(U, V) = D_U V - D_V U - [U, V]$ est la torsion de la connexion. La torsion d'une connexion de Levi-Civita étant nulle par définition, on obtient

$$D_{\dot c} D_{\dot c} J_X = -R(J_X, \dot c)\dot c \tag{1.5}$$

Remarquons d'abord que $R(J_X, \dot c)\dot c$ est orthogonal à $\dot c$ , donc que $J_X(t)$ est orthogonal à $\dot c(t)$ pour tout $t$ d'après (1.4) et (1.5) [cette propriété se nomme "*lemme de Gauss*"]. Par ailleurs, les égalités (1.4) et (1.5) permettent le calcul des dérivées successives de $g(J_X(t), J_Y(t))$ , par rapport à la variable $t$ , au point $t = 0$ . Un développement limité donne :

$$g_{c(t)}(J_X(t), J_Y(t)) = t^2.g_{x_0}(X, Y) - \frac{t^4}{3} \cdot g_{x_0}[R(X, \dot c(0))\dot c(0), Y] + O(t^5) \ .$$

Si on identifie un voisinage $U$ de $x_0$ avec un voisinage $\Omega$ de 0 dans $T_{x_0}M$ par l'application $\exp_{x_0}^{-1}$ , les vecteurs $J_X(t)$ et $J_Y(t)$ se confondent alors avec les vecteurs $t.X$ et $t.Y$ tangents en $t.x$ à $\Omega$ . Ceci et le lemme de Gauss prouvent l'égalité (1.2). L'égalité (1.2) implique (1.1). Notons en effet $l_g(\gamma)$ la longueur d'une courbe $\gamma$ , mesurée par la métrique $g$ . Si $c$ (resp. $c_0$) désigne la géodésique minimisante de la métrique riemannienne $g$ (resp. de la métrique euclidienne $g_{x_0}$) qui relie les deux points $x_0 + h$ et $x_0 + k$ de $U$ (considéré ici comme un ouvert de $\mathbf{R}^n$), on a

$$d(x_0 + h, x_0 + k) = l_g(c) \leqslant l_g(c_0) = \int_0^{l_{g_{x_0}}(c_0)} g(\dot c_0(t), \dot c_0(t))^{1/2} dt \ ,$$

$$d_{x_0}(h, k) = l_{g_{x_0}}(c_0) \leqslant l_{g_{x_0}}(c) = \int_0^{l_g(c)} g_{x_0}(\dot c(t), \dot c(t))^{1/2} dt \ .$$

L'égalité (1.2) permet de développer $g(\dot c_0(t), \dot c_0(t))^{1/2}$ par rapport à $g_{x_0}$ et $g_{x_0}(\dot c(t), \dot c(t))^{1/2}$ par rapport à $g$ . Ceci, ajouté au fait que les courbes $c_0$ et $c$ sont asymptotiquement proches, prouve (1.1). ∎

*d) Autres notions de courbure. —*

1.3. DÉFINITIONS. —

• *La courbure sectionnelle $\sigma$ est une fonction, définie sur le fibré en grasmannienne des 2-plans tangents $P$ , par l'égalité*

$$\sigma(P) = R(e_1, e_2, e_1, e_2)$$

*où $\{e_1, e_2\}$ est une base orthonormée de $P$ .*

• *La courbure de Ricci Ric est le champ de formes bilinéaires symétriques qui, à tout couple de vecteurs $X$ et $Y$ de $T_xM$ , associe la trace de l'endomorphisme : $Z \mapsto R_x(Z, X)Y$ de $T_xM$ .*

• *La courbure scalaire est la fonction de $M$ dans $\mathbf{R}$ dont la valeur au point $x$ est la trace de la courbure de Ricci* $\mathrm{Ric}_x$ *relativement à la métrique $g_x$ .*

**Interprétation géométrique de ces notions** (*cf.* par exemple [G–H–L]) :

Reprenons l'identification d'un voisinage $U$ de $x_0$ avec un voisinage ouvert $\Omega$ de 0 dans $\mathbf{R}^n$ par l'application $\exp_{x_0}^{-1}$ . La métrique $g$ s'y lit comme une métrique sur $\Omega$ dont les géodésiques issues de 0 sont des droites de $\mathbf{R}^n$ . C'est par rapport à cette métrique que nous mesurons la longueur $l_g[S(P,\varepsilon)]$ du cercle de rayon $\varepsilon$ tracé dans le 2-plan $P$ de $\mathbf{R}^n$ , la densité $\frac{dv_g}{dv_{g_{x_0}}}$ au point $h \in \mathbf{R}^n$ de la mesure riemannienne canonique $dv_g$ par rapport à la mesure euclidienne du plan tangent et le volume de la boule $B(\varepsilon)$ , de centre 0 et de rayon $\varepsilon$ . Les égalités (1.1) et (1.2) et un calcul direct donnent :

$$l_g(S_\varepsilon) = 2\pi\varepsilon\big(1 - \frac{\sigma(P)}{6}\varepsilon^2 + 0(\varepsilon^3)\big) \ ,$$

$$\frac{dv_g}{dv_{g_{x_0}}}(h) = 1 - \frac{1}{6}\cdot \mathrm{Ric}_{x_0}(h,h) + 0[g_{x_0}(h,h)^{3/2}] \ ,$$

$$\mathrm{vol}_g[B(\varepsilon)] = \mathrm{vol}(B^n)\cdot\varepsilon^n\cdot\big(1 - \frac{u(x_0)}{6(n+2)}\cdot\varepsilon^2 + 0(\varepsilon^3)\big) \ .$$

D'après ce qui précède, une hypothèse qui impose une borne à la courbure sectionnelle n'est autre qu'un contrôle infinitésimal de l'écart entre distance riemannienne et distance euclidienne (en effet, la donnée de la courbure sectionnelle permet de reconstituer tout le tenseur de courbure); par contre, une hypothèse qui impose une borne à la courbure de Ricci équivaut au contrôle infinitésimal du rapport entre les mesures. *Ceci explique pourquoi ce deuxième type d'hypothèse, beaucoup plus faible, aura notre préférence dans la suite.*

1.4. DÉFINITION. — *Nous dirons que la courbure de Ricci est minorée par la constante $(n-1)k$ (notation : Ricci $\geqslant (n-1)k$) lorsqu'elle vérifie, pour tout champ de vecteurs tangents $X$ ,*

$$\mathrm{Ric}(X,X) \geqslant (n-1)k.g(X,X) \ .$$

Comme la courbure de Ricci représente le premier terme significatif du développement limité du rapport entre mesure riemannienne et mesure euclidienne, on pourrait être tenté d'en induire un contrôle global de ce rapport par un théorème d'accroissements finis. Le but du chapitre suivant est de donner un contenu correct à ce désir. Cependant, remarquons que les objections ne manquent pas :

– il est impossible de définir la métrique euclidienne de référence $g_{x_0}$ sans ambiguïté là où l'application $\exp_{x_0}$ n'est pas injective.

– L'expression, dans la carte normale de $x_0$ , du développement limité de la mesure au voisinage d'un point $x$ non situé au centre $x_0$ de la carte n'obéit pas aux formules énoncées ci-dessus.

D'ailleurs, si le principe des accroissements finis pouvait s'appliquer sans précautions, des boules géodésiques de même rayon $\rho$ , dans deux variétés d'Einstein $M$ et $N$ (*i.e.* vérifiant respectivement $\mathrm{Ric}_M = k_M \cdot g_M$ et $\mathrm{Ric}_N = k_N \cdot g_N$ , où $k_M$ et $k_N$ sont des constantes), auraient le même volume dès que leurs coefficients de proportionnalité $k_M$ et $k_N$ sont égaux. Or, ceci est faux : par exemple, le projectif complexe $P^d(\mathbf{C})$ (muni de la métrique canonique dont la courbure sectionnelle est pincée entre 1/4 et 1) a un volume strictement inférieur à celui de la boule géodésique de rayon $\pi$ tracée sur la sphère de même courbure de Ricci (donc de rayon $\big[\frac{2(2d-1)}{d+1}\big]^{1/2}$) [la démonstration peut s'obtenir par un calcul direct ou comme corollaire du théorème 1.6, (i)].

**B. Théorèmes de comparaison.**

*a) Comment la courbure intervient dans un problème d'analyse.* — La dérivée covariante étant définie sur les champs de vecteurs, on la définit par dualité sur les 1-formes différentielles [*i.e.* $D\alpha(X,Y) = g(D_X\alpha^\sharp, Y) = X\alpha(Y) - \alpha(D_XY)$ pour toute 1-forme $\alpha$], puis sur leurs produits tensoriels selon la formule classique de dérivation d'un produit.

Etant donné une fonction $C^\infty$ $f$ , on peut ainsi définir ses dérivées covariantes successives. Un calcul direct fait apparaître que le défaut de commutation entre dérivées est mesuré, au niveau des dérivées secondes, par la torsion (nulle pour une connexion de Levi-Civita) et, au niveau des dérivées troisièmes, par la courbure. En effet, la définition (1.3) donne

$$DDdf(X,Y,Z) - DDdf(Y,X,Z) = R(X,Y,Z,\text{grad } f) .$$

L'opérateur laplacien $\Delta$ (pour une présentation de cet opérateur, voir le chapitre 2) s'applique à une fonction $C^\infty$ $f$ selon la formule

$$\Delta f = -\ \text{Trace}(Ddf) = \ \text{div}[\text{grad } f] .$$

Un calcul direct, fondé sur des commutations de dérivées, permet d'en déduire la formule suivante, due à Bochner,

$$d(\Delta f)(\bullet) = -\sum_{i=1}^{n} DDdf(e_i, e_i, \bullet) + \text{Ric}(\bullet, \text{grad } f) \tag{1.6}$$

où $\{e_i\}$ est une base orthonormée de l'espace tangent au point où s'effectue le calcul.

*b) Laplacien de la fonction "distance à une sous-variété".* — Considérons une sous-variété régulière $H$ de codimension $p$ dans $M$ , ou plus généralement une sous-variété singulière vérifiant la propriété (P) suivante :

1.5. PROPRIÉTÉ (P). — *Le pied sur $H$ d'une géodésique qui réalise la distance d'un point $x$ de $M \setminus H$ à $H$ est toujours un point régulier de $H$ .*

Notons $\widetilde{H}$ l'ensemble des points réguliers de $H$ et $T_HM$ la restriction au-dessus de $\widetilde{H}$ du fibré $TM$ . La métrique $g$ permet de définir le sous-fibré $N(H)$ normal à $TH$ dans $T_HM$ ainsi que le fibré $U(H) \xrightarrow{\pi} H$ formé des vecteurs de norme 1 de $N(H)$ . La *carte normale* $\Phi$ (ou "système de coordonnées cylindriques") est l'application de $[0,+\infty[\times U(H)$ dans $M$ définie par

$$\Phi(t,X) = \exp_{\pi(x)}(t_\bullet X) .$$

La propriété (P) implique la surjectivité de $\Phi$ sur $M \setminus H$ . Comme, par ailleurs, il existe une fonction $X \mapsto t(X)$ (appelée *rayon de coupure*) telle que les géodésiques $t \mapsto \Phi(t,X)$ sont minimisantes si et seulement si $t \in [0,t(X)]$ , l'ouvert $\Omega = \{(t,X) : X \in U(H) \text{ et } 0 < t < t(X)\}$ s'envoie difféomorphiquement sur $M \setminus H$ privé d'un ensemble de mesure nulle (le "cut-locus" de $H$). De plus, en tout point de $\Phi(\Omega)$ , on a $d(\Phi(t,X),H) = t$ . Notons $\rho$ la fonction $x \mapsto d(x,H)$ et $a$ *la densité de la mesure riemannienne* par rapport à la mesure-produit des coordonnées cylindriques (*i.e.* $\Phi^*dv_g = a(t,X).dt\ dX$). A tout point $(t,X)$ de $\Omega$ , associons un voisinage de la forme $[t-\varepsilon,t+\varepsilon] \times V$ encore inclus dans $\Omega$ . La formule de Green, appliquée à $\mathcal{V}_\varepsilon = \Phi([t-\varepsilon,t+\varepsilon]\times V)$ , donne

$$\int_{[t-\varepsilon,t+\varepsilon]\times V} (\Delta\rho \circ \Phi).a.dt\ dX = \int_{\partial\mathcal{V}_\varepsilon} d\rho(N).dv_g = \int_V (a(t-\varepsilon,X) - a(t+\varepsilon,X)).dX ,$$

où $N$ est le champ de vecteurs normal dirigé vers l'intérieur de $\mathcal{V}_\varepsilon$ . En diminuant la taille du voisinage et en passant à la limite, on obtient la formule classique

$$\Delta\rho = -\frac{1}{a}\cdot\frac{\partial a}{\partial t} \tag{1.7}$$

*c) Contrôle de la mesure riemannienne en fonction de la distance* (variante d'une démonstration de M. Gage ([GE])). — Par différentiation de l'égalité précédente, nous obtenons (en tout point où la fonction distance est régulière)

$$\langle d(\Delta\rho), d\rho\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\Big[-\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial t}\Big] = -\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial^2 t} + (\Delta\rho)^2 .$$

En reportant dans (1.6) et en notant que $\Delta\rho = -\operatorname{Trace}(Dd\rho)$ et que $\Delta(|d\rho|^2) = 0$ , ceci devient

$$\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + \operatorname{Ric}(\operatorname{grad}\rho, \operatorname{grad}\rho) = (\operatorname{Trace} Dd\rho)^2 - \|Dd\rho\|^2$$

En faisant le changement de fonction $b = a^{\frac{1}{n-1}}$ , nous obtenons l'équation suivante, due à M. Gage ([GE])

$$(1.8) \qquad \frac{\partial^2 b}{\partial^2 t} + \frac{1}{n-1}.\operatorname{Ric}(\operatorname{grad}\rho, \operatorname{grad}\rho).b = \frac{-b}{n-1}\Big[\|Dd\rho\|^2 - \frac{\operatorname{Trace}(Dd\rho)^2}{n-1}\Big] \leqslant 0 . \blacksquare$$

Posons :

$$(1.9) \qquad s_k(t) = \begin{cases} = k^{-1/2}\sin(k^{1/2}t) & \text{si } k > 0 \\ = t & \text{si } k = 0 \\ = |k|^{-1/2} sh(|k|^{1/2}t) & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

et notons $c_k(t)$ sa dérivée. Le principe de comparaison de Sturm-Liouville s'applique à l'inéquation (1.8) et donne, lorsque $\operatorname{Ric}(X,X)$ est minoré par $(n-1).k$ ,

$$b(t,\bullet) \leqslant b(0,\bullet)\cdot c_k(t) + \frac{\partial b}{\partial t}(0,\bullet)\cdot s_k(t) .$$

Les conditions initiales $b(0,\bullet)$ et $\frac{\partial b}{\partial t}(0,\bullet)$ sont données par la géométrie du plongement de $H$ dans $M$ . Nous allons les préciser dans deux cas particuliers : celui où $H$ est un point (étudié par R.L. Bishop, voir [B–C]) et celui où $H$ est une hypersurface (un des cas étudiés par E. Heintze et H. Karcher dans [H–K]). Dans le premier cas, la carte $\Phi$ coïncide avec les coordonnées polaires définies en 1.A.c, et on a (d'après (1.4)) :

$$b(0,\bullet) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial b}{\partial t}(0,\bullet) = 1 .$$

Dans le second cas, $\Phi$ peut être considérée comme une application de $]-\infty,+\infty[\times\widetilde{H}$ sur $M$ . La condition initiale $b(0,x) = 1$ est vérifiée par construction; la dérivée initiale $\frac{\partial b}{\partial t}(0,x)$ est égale à la *courbure moyenne (notée* $\eta(x)$) de l'hypersurface au point régulier $x$ . Ceci découle de (1.7) et du fait que $Dd\rho(x)$ est la seconde forme fondamentale de $\widetilde{H}$ au point $x$ , dont la trace vaut $(n-1)\eta(x)$ . Ceci nous amène au

1.6. THÉORÈME. — *Soit $(M,g)$ une variété riemannienne dont la courbure de Ricci est minorée par $(n-1)k$ . Alors*

*(i) (R.L. Bishop, cf. [B–C]) : Pour tout point $x$ de $M$, la fonction* $r \mapsto \frac{\operatorname{Vol}_g B(x,r)}{\operatorname{Vol} S^{n-1}.\int_0^r s_k(t)^{n-1}dt}$ *est décroissante (au sens large) et tend vers 1 en zéro.*

*(ii) (E. Heintze et H. Karcher, cf. [H–K]) : Pour toute hypersurface $H$ vérifiant la propriété (P), la carte normale $\Phi$ vérifie, en tout point $\Phi(x,t)$ de $M$ situé en deçà du cut-locus :*

$$\Phi^*(dv_g) \leqslant (c_k(t) + \eta(x)s_k(t))_+^{n-1}.dx.dt ,$$

*où $\eta(x)$ est la courbure moyenne de $H$ au point régulier $x$ et où la notation $a_+$ désigne* $\sup(a,0)$ .

*Remarque.* — Ce théorème permet de comparer l'évolution de la mesure sur $(M,g)$ avec celle de la mesure de la variété simplement connexe de courbure constante $k$ . En effet, sur cette dernière, la fonction introduite en (i) est constante et égale à 1 tandis que l'inégalité de (ii) est une égalité dès que l'hypersurface considérée est totalement ombilicale (*i.e.* a toutes ses courbures principales égales).

## 2. Introduction à l'opérateur laplacien

### A. Signification physique du laplacien et de son spectre, présentation intuitive.

De manière classique, on introduit l'opérateur laplacien $\Delta$ en le faisant apparaître dans l'approximation au premier ordre de l'équation du mouvement $t \mapsto u(t,x)$ d'un point $x$ d'une membrane $M$ vibrante compacte. Si l'énergie potentielle est supposée proportionnelle à l'accroissement de l'aire de la membrane, son approximation au premier ordre vaut $\frac{1}{2}\int_M |\nabla u|^2$ . Les mouvements étant les "points" critiques du Lagrangien [*i.e.* (Energie potentielle) – (Energie cinétique)], ils vérifient l'équation d'Euler associée :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta u = 0 \ , \tag{2.1}$$

où $\Delta$ est l'opérateur symétrique canoniquement associé à la forme quadratique $q(u) = \int_M |\nabla u|^2$ (voir par exemple [G–H–L] p. 170–2 et [BE2] pour plus de détails). Ainsi défini, le laplacien de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ s'écrit, dans un système de coordonnées orthonormées, $\Delta = -\Sigma_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ . Sur une variété riemannienne quelconque, dans une carte normale centrée en un point $m_0$ , cette écriture reste vraie au seul point $m_0$ , ce qui la rend d'ailleurs le plus souvent inutilisable pour les calculs. C'est pourquoi on préfèrera une écriture intrinsèque de l'opérateur $\Delta$ . Celle-ci s'obtient à l'aide de la dérivation covariante de Levi-Civita canoniquement associée à la métrique riemannienne.

2.1. Définitions. —

• *L'application $\alpha \mapsto \alpha^\sharp$ est l'application de $T_x^*M$ dans $T_xM$ canoniquement associée à la métrique riemannienne. Pour toute fonction différentiable $u$ , le gradient de $u$ est le champ de vecteurs $\nabla u = (du)^\sharp$ .*

• *Le laplacien est défini sur les fonctions $u$ de classe $C^2$ par*

$$\Delta u(x) = \ -\mathrm{Trace}_{T_xM}[X \mapsto D_X(\nabla u)] \ .$$

**N.B.** : Le laplacien est une application d'un espace fonctionnel dans un autre. Nous n'avons ici précisé que la correspondance point par point $u \mapsto \Delta u$ , restent à définir l'espace de départ et l'espace d'arrivée qui dépendent des conditions aux limites (contraintes imposées à la fonction $u$ sur le bord de la membrane et au voisinage d'éventuelles singularités de la métrique). Cette discussion sera poursuivie en 2.B.

Supposons momentanément que la membrane $M$ est compacte et fixée sur son bord. La méthode de séparation des variables nous amène à considérer la solution générale comme somme infinie (sous réserve de convergence) de solutions décomposables de (2.1) ou "sons purs" de la forme $f(t).\varphi(x)$ , où $\varphi = 0$ sur $\partial M$ . A chacune de ces solutions décomposables est associé un scalaire $\lambda$ tel que

$$f'' + \lambda.f = 0 \ , \quad \Delta\varphi = \lambda.\varphi \ , \quad \varphi = 0 \text{ sur } \partial M \ .$$

L'ensemble des $\lambda$ pour lesquels ces trois équations ont des solutions non triviales forme une suite discrète ($M$ étant supposée compacte) appelée "spectre de $M$" [Une définition plus formelle de ce concept sera donnée dans la section 2.B]. Cette présentation fait apparaître la notion de spectre du laplacien et la décomposition de toute fonction en somme infinie de fonctions propres (voir le théorème 2.5) comme une généralisation, aux fonctions définies sur une variété riemannienne, de la décomposition en séries de Fourier multidimensionnelles, a priori valable pour les fonctions définies sur un rectangle de $\mathbf{R}^n$ ou sur un tore rectangulaire, et ce, sans passer par un système de coordonnées locales. Aussi n'est-il pas étonnant que certains usages que l'on peut faire du laplacien et de son spectre, par exemple pour démontrer l'existence ou la régularité de solutions d'équations aux dérivées partielles ou de limites de suites de fonctions, soient des transpositions des méthodes classiques de décomposition en séries de Fourier. Nous verrons en 2.E.b un exemple d'application de ce parallèle entre les deux théories.

Cette présentation interprète l'omniprésence du laplacien dans les problèmes de la physique comme le fait que la nature sélectionne les solutions d'énergie critique, or les valeurs et points critiques de la forme quadratique $q(f) = \int_M |\nabla f|^2$ sont les valeurs propres et fonctions propres du laplacien (*cf.* théorème 2.5). L'apparition du laplacien dans de nombreux problèmes de la géométrie, en particulier dès qu'il s'agit de calculer les variations d'un invariant riemannien provoquées par des modifications de la métrique, s'explique aussi par le résultat (folklorique et trivial) suivant :

2.2. LEMME. — *Tout opérateur différentiel linéaire d'ordre 2 à coefficients réels sur $M$ , formellement symétrique par rapport au produit scalaire de $L^2(M, dv_g)$ , dont le symbole principal est égal à la métrique riemannienne duale de $g$ (définie sur $T^*M$) est de la forme $\Delta_g + V$ , où $V$ est une fonction-potentiel.*

Ce lemme se déduit du fait que tout opérateur d'ordre 1, symétrique par rapport à une mesure donnée, est automatiquement d'ordre zéro (l'intégration par parties fait en effet apparaître que le terme d'ordre 1 est nul). Le symbole principal au point $x$ d'un opérateur $L$ d'ordre $k$ est le polynôme homogène $\sigma(L;x)$ de degré $k$ sur $T^*_xM$ défini par

$$\sigma(L;x)(\xi) = \frac{i^k}{k!} L(\varphi^k)(x) \ ,$$

où $\varphi$ est n'importe quelle fonction vérifiant $\varphi(x) = 0$ et $d\varphi = \xi$ au point $x$ . Le fait que le symbole principal de $\Delta$ soit la métrique duale $g^\sharp$ de $g$ découle de manière immédiate de l'égalité

$$\frac{1}{2}\Delta(f^2) = f.\Delta f - g(df^\sharp, df^\sharp) \ . \tag{2.2}$$

Une des conséquences de ce lemme est que, sur tout espace homogène dont le groupe d'isotropie agit irréductiblement sur l'espace tangent, tout opérateur différentiel linéaire $L$ d'ordre 2 à coefficients réels, formellement symétrique et invariant par les isométries de l'espace, est de la forme $L =$ constante $(\Delta + V)$ [en effet, le lemme de Schur assure que le symbole principal est proportionnel à la métrique]. Ceci confirme la place privilégiée du laplacien parmi les opérateurs différentiels qui sont des invariants riemanniens.

### B. Définition de l'opérateur laplacien et de son spectre.

Il est bien connu qu'un opérateur défini sur un domaine donné d'un espace de Hilbert possède a priori plusieurs extensions autoadjointes. Dans la suite, nous ne nous intéresserons qu'à l'extension de Friedrichs qui (lorsqu'elle existe) est unique et ne dépend que du domaine de départ. La formule de calcul de $\Delta f$ restant toujours la même (une fois fixée la variété et sa métrique), c'est donc le choix du domaine de définition $\mathcal{D}^*$ de l'opérateur qui différencie les divers problèmes au laplacien que l'on peut considérer. Ainsi, sur une variété riemannienne sans bord $(M, g)$ , le laplacien est a priori défini sur l'ensemble $\mathcal{D}^{SB}$ des fonctions $C^\infty$ à support compact. Sur une variété riemannienne à bord $(M, \partial M, g)$ , on considère les deux problèmes "de Dirichlet" et "de Neumann" suivant que le domaine considéré est l'ensemble $\mathcal{D}^D$ des fonctions $C^\infty$ à support compact dans l'intérieur de $M$ ou l'ensemble $\mathcal{D}^N$ des fonctions $C^\infty$ à support compact dans l'adhérence de $M$ .

NOTATION. — *Dans la suite,* $*$ *symbolisera, suivant le problème considéré,* $SB, D$ *ou* $N$.

*a) Définition par extension de l'opérateur.* — Les domaines ci-dessus définis n'étant pas complets, on ne peut leur appliquer les résultats généraux de la théorie spectrale qu'en prolongeant l'application $f \mapsto \Delta f$ [par un procédé standard de fermeture du graphe utilisant la symétrie de l'opérateur et un lemme de Riesz (*cf.* [R–S] sections VIII.1 et VIII.2)] en un opérateur autoadjoint de $\mathcal{D}_2^*$ dans $L^2(M)$ , où $\mathcal{D}_2^*$ est le complété de $\mathcal{D}^*$ pour la norme $H_2$ définie par $||f||_{H_2} = ||f||_{L^2} + ||\Delta f||_{L^2}$ .

2.3. DÉFINITION. — *Le spectre du laplacien d'une variété sans bord (resp. du problème de Dirichlet, resp. du problème de Neumann) est l'ensemble des* $\lambda$ *tels que* $(\Delta - \lambda.\mathrm{id})$ , *considéré comme opérateur de* $\mathcal{D}_2^{SB}$ *(resp.* $\mathcal{D}_2^D$, resp. $\mathcal{D}_2^N$*) dans* $L^2(M)$ , *n'admette pas d'opérateur réciproque borné.*

*b) Définition par extension de Friedrichs de la forme quadratique.* — Soit $Q$ une forme quadratique définie sur un sous-espace dense $W$ de $L^2(M, dv_g)$ et vérifiant, pour au moins une constante réelle $C$ ,

$$\forall w \in W\ , \quad Q(w) \geqslant C.||w||_{L^2}^2$$

(*i.e.* $Q$ est *semi bornée* dans la terminologie de [R–S, II]).

2.4. DÉFINITIONS. — *Les suites croissantes de* $[C, +\infty[$ *définies par :*

$$\mu_i(Q) = \sup_{\substack{V \text{ ss. esp. vect} \\ \text{de dimension } i \\ \text{de } W}} \ \inf_{\substack{w \perp V \\ ||w||=1}} [Q(w)]$$

$$\nu_i(Q) = \inf_{\substack{V \text{ ss. esp. vect} \\ \text{de dimension } i+1 \\ \text{de } W}} \ \sup_{\substack{v \in V \\ ||v||=1}} [Q(v)]$$

*[ou l'orthogonalité et les normes s'entendent au sens du produit scalaire de* $L^2(M, dv_g)$*] sont égales et sont appelées "spectre de la forme quadratique* $Q$*".*

*La fonction de comptage* $N_Q(\lambda)$ *est le nombre de valeurs du spectre de* $Q$ *qui sont strictement inférieures à* $\lambda$ .

**N.B.** L'égalité des suites $\mu_i(Q)$ et $\nu_i(Q)$ peut se démontrer, comme les théorèmes 2.5 et 2.6, à l'aide du théorème XIII.1 de [R–S].

Notons $g^\sharp$ la métrique duale de $g$ , définie sur $T^*M$ , et $q^*$ *la forme quadratique définie*, sur le domaine $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^{SB}$ , $\mathcal{D}^D$ ou $\mathcal{D}^N$ suivant le problème $*$ considéré, *par la formule*

$$q^*(f) = \int_M g^\sharp(df, df)dv_g \ ,$$

[que *nous noterons encore* $\int_M |df|^2$ ou $||df||_{L^2}^2$ lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur la métrique $g$ choisie]. Notons $\mathcal{D}_1^*$ le complété de $\mathcal{D}^*$ pour la norme

$$||f||_{H_1}^2 = ||f||_{L^2}^2 + q^*(f) \ . \tag{2.3}$$

Puisque $q^*$ est (par la formule de Green) la forme quadratique canoniquement associée à l'opérateur symétrique $\Delta$ , $\mathcal{D}_1^*$ s'injecte canoniquement dans $L^2(M, dv_g)$ et l'extension canonique $\widehat{q^*}$ de $q^*$ à $\mathcal{D}_1^*$ est une forme quadratique fermée au sens de [R–S], chapitre VIII. Ceci suffit pour démontrer qu'à la forme quadratique $\widehat{q^*}$ correspond *un unique opérateur autoadjoint* qui coïncide avec l'extension évoquée en 2.B.a (*cf.* par exemple [R–S], théorème VIII.15). Ce procédé, s'il s'applique évidemment au cas où la métrique est $C^\infty$ , permet également la construction de laplaciens autoadjoints pour certaines métriques singulières, telles celles que nous étudierons en 2.E.a et dans l'appendice A.

**C. Relations entre Spectre du laplacien, spectre de la forme quadratique et valeurs propres du Laplacien – Principe du min-max.**

Sur une variété riemannienne (avec ou sans bord suivant le problème considéré) on peut établir, pour chacun des trois problèmes "$*$" considérés (sans bord, de Dirichlet ou de Neumann) les relations suivantes entre le spectre du laplacien $(\Delta, \mathcal{D}^*)$ , ses valeurs propres, le spectre de la forme quadratique $(q^*, \mathcal{D}^*)$ et celui de son extension $\widehat{q^*}$ au complété $\mathcal{D}_1^*$ de $\mathcal{D}^*$ pour la norme $H^1(M)$ .

*a) Le cas des variétés compactes à métrique régulière.* —

2.5. THÉORÈME. — *Si $(M, g)$ est une variété riemannienne compacte (avec ou sans bord suivant le problème considéré) :*

*(i) Tous les éléments du spectre de $(\Delta, \mathcal{D}^*)$ sont des valeurs propres de $\Delta$ , de multiplicité finie.*

*(ii) Les spectres de $\Delta$ , de $q^*$ et de $\widehat{q^*}$ coïncident.*

*(iii) Valeurs propres et fonctions propres du laplacien coïncident avec les valeurs et les points critiques de la fonctionnelle $f \mapsto \frac{\widehat{q^*}(f)}{\|f\|^2_{L^2}}$ , définie sur l'espace $\mathcal{D}_1^* \setminus \{0\}$ .*

*(iv) Les espaces propres engendrent, par somme directe, un sous-espace simultanément dense dans $L^2(M)$ et dans $C^k_*(M)$ munis de leurs topologies canoniques respectives, où $C^k_*(M)$ est le complété de $\mathcal{D}^*$ pour la norme $C^k$ .*

*Remarques.* —

• L'égalité (ii) est connue sous le nom de "principe du min-max".

• Ce théorème est le point de départ de tout ouvrage sur le spectre des variétés compactes, aussi pourra-t-on en trouver la démonstration dans la littérature. Une mention particulière pour la jolie preuve de [BE2] (pp. 53–64) qui a l'avantage de s'appuyer sur des arguments simples et souligne le rôle majeur de l'inclusion compacte et continue de $H^1(M)$ dans $L^2(M)$ .

• L'égalité (ii) montre que le spectre du problème de Neumann est celui de la forme quadratique $f \mapsto \int_M |df|^2_g . dv_g$ étendue à l'espace $H^1(M)$ tout entier (car le complété de $\mathcal{D}^N$ pour la norme $H^1$ est $H^1(M)$ entier). La condition d'annulation de la dérivée normale, qui était nécessaire pour définir le domaine de l'opérateur initial, devient donc superflue lorsqu'on passe par la forme quadratique. Les fonctions propres (définies alors par le principe variationnel de (iii)) sont de dérivée normale nulle au bord, sans que cette condition ait besoin d'être posée a priori (ceci découle de l'équation d'Euler de la variation).

Dans la suite, les variétés que nous étudierons seront généralement compactes. Cependant certains des espaces–modèles qui nous serviront dans les théorèmes de comparaison seront non compacts et/ou singuliers et nous aurons besoin de quelques informations sur leur spectre.

*b) Le cas des variétés non compactes ou à métrique singulière.* — Sur une variété non compacte ou singulière, le spectre de $(\Delta, \mathcal{D}^*)$ se décompose en deux parties : le "*spectre discret*", formé des points isolés du spectre qui sont des valeurs propres de multiplicité finie, et son complémentaire le "*spectre essentiel*". *Notons* $\Lambda(\Delta, \mathcal{D}^*)$ la borne inférieure du spectre essentiel. Les rapports avec le spectre de la forme quadratique associée sont régis par le

2.6. THÉORÈME (*cf.* par exemple [R–S] Théorème XIII.1). — *Sur une variété riemannienne $M$ non compacte avec ou sans bord suivant le problème considéré, on a (pour chacun des problèmes sans bord, de Dirichlet ou de Neumann) :*

*(i)* $\Lambda(\Delta, \mathcal{D}^*) = \mathrm{Sup}_i\, \mu_i(q^*) = \mathrm{Sup}_i\, \mu_i(\widehat{q^*})$

*(ii) Tous les éléments du spectre situés dans l'intervalle* $[0, \Lambda(\Delta, \mathcal{D}^*)[$ *sont des valeurs propres de multiplicité finie de* $\Delta$ . *En adoptant la convention de numérotation ad hoc (voir 2.C.c), leur suite (éventuellement finie) coïncide avec les parties des spectres de* $q^*$ *et de* $\widehat{q^*}$ *qui sont incluses dans* $[0, \Lambda(\Delta, \mathcal{D}^*)[$ .

Ce théorème est également valable pour des variétés à métrique singulière dès que le procédé d'extension de Friedrichs peut s'appliquer. Des exemples de calculs de spectres de variétés non compactes ou singulières sont donnés dans l'appendice.

*c) Conventions de numérotation des valeurs propres.* — Les valeurs propres du laplacien seront notées $\lambda_i$ ou $\lambda_i(M, g)$ . L'usage le plus répandu est de commencer la numérotation des valeurs propres du spectre d'une variété compacte sans bord et du spectre de Neumann à $\lambda_0 = 0$ (ceci afin que la première valeur propre non nulle soit $\lambda_1$) et de répéter les valeurs propres multiples autant de fois que l'exige leur multiplicité. C'est la convention que nous adopterons désormais, bien qu'elle pose quelques problèmes de cohérence lorsqu'on passe au cas non-compact, ou lorsqu'on doit comparer avec le problème de Dirichlet dont le spectre s'écrira $0 < \lambda_1^D < \lambda_2^D \leqslant \cdots \leqslant \lambda_i^D \leqslant \cdots$ . Avec cette convention de numérotation, les énoncés 2.5 et 2.6 donnent $\lambda_i^* = \mu_i^* = \nu_i^*$ dans les cas du problème $*$ sans bord et du problème de Neumann et $\lambda_i^D = \mu_{i-1}^D = \nu_{i-1}^D$ dans le cas du problème de Dirichlet.

**D. Noyau de l'opérateur de la chaleur.**

Le principe physique "la variation de la quantité de chaleur à l'intérieur d'un domaine $\Omega$ est proportionnelle au flux du gradient de la température à travers le bord de ce domaine" se traduit, dans un système d'unités convenablement choisi, par la formule

$$\frac{d}{dt}\left[\int_\Omega u(t,x)dv_g\right] = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial N} \cdot dv_g^{n-1} \ ,$$

où $u(t,x)$ est la température du point $x$ à l'instant $t$ , où $\frac{\partial u}{\partial N}$ est sa dérivée normale (la normale étant orientée vers l'intérieur de $\Omega$) et où $dv_g^{n-1}$ est la mesure $(n-1)$-dimensionnelle induite sur $\partial\Omega$ . La formule de Green permet d'en déduire l'équation de la chaleur

$$\Delta u + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \ . \tag{2.4}$$

On appellera "noyau de l'opérateur de la chaleur" une solution $(t,y) \mapsto k(t,x,y)$ de (2.4) satisfaisant à la condition initiale $k(0,x,\bullet) = \delta_x$ (masse de Dirac en $x$). L'existence et l'unicité de cette solution pour tout point $x$ fixé est assurée lorsque $M$ est compacte et la métrique $g$ régulière (*cf.* par exemple [B–G–M] pp.205–214). Dans le cas non-compact, seule l'existence est assurée mais, parmi toutes les solutions possibles, il en existe une qui est minimale et qui s'obtient comme limite, quand $R$ tend vers l'infini, du noyau de l'opérateur de la chaleur sur une boule de rayon $R$ qui vérifie, sur le bord, la condition de Dirichlet (voir par exemple [AT] sec.7, [DK] et [CL] p.188). L'appellation "noyau" se justifie par le fait que la connaissance de $k$ donne toutes les autres solutions de l'équation (2.4), une fois connue la distribution initiale $u_0$ , en posant

$$u(t,y) = \int_M k(t,y,z) \cdot u_0(z) dv_g(z) \ .$$

L'opérateur de la chaleur $e^{-t\Delta}$ agit (lorsque $M$ est compacte et $g$ régulière) sur chaque fonction propre $\varphi_i$ par multiplication par $e^{-t.\lambda_i}$ . Ceci implique que son noyau s'exprime comme

$$k(t,x,y) = \sum_{i \in \mathbf{N}} e^{-t.\lambda_i} \cdot \varphi_i(x) \cdot \varphi_i(y)$$

si les $\{\varphi_i\}$ sont choisis orthonormés dans $L^2(M, dv_g)$ .

**E. Quelques relations entre les trois problèmes (de Neumann, de Dirichlet et sans bord).**

*a) Le spectre du double d'une variété à bord.* — Etant donné une variété riemannienne $(M,g)$ , à bord compact et différentiable $\partial M$ , on construit la réunion disjointes $M_1 \amalg M_2$ de deux exemplaires de $M$ et les *applications canoniques* $\psi_1$ et $\psi_2$ de $M$ sur $M_1$ et $M_2$ . On construit le "*double*" $M \sharp M$ comme quotient de $M_1 \amalg M_2$ par la relation : $\psi_1(x) \sim \psi_2(x)$ ssi $x \in \partial M$ . Les deux bords ainsi identifiés forment une hypersurface que nous nommerons "*équateur*". La structure différentielle ainsi obtenue par recollement est $C^\infty$ . En effet, si $\Phi$ est la carte normale de $[0,\varepsilon[\times\partial M$ dans $M$ (définition donnée en 1.B.b), on obtient une carte $C^\infty$ de $]-\varepsilon,\varepsilon[\times\partial M$ sur un voisinage de l'équateur en posant

$$\psi(s,x) = \begin{cases} \psi_1 \circ \Phi(-s,x) & \text{si } s \leqslant 0 \ , \\ \psi_2 \circ \Phi(s,x) & \text{si } s \geqslant 0 \ . \end{cases}$$

Les deux métriques $g_1$ et $g_2$ sur $M_1$ et $M_2$ qui sont les images de $g$ par $\psi_1$ et $\psi_2$ se recollent continuement sur $M \sharp M$ en une métrique de type $C^{0,1}$ que nous appellerons $h$ .

2.7. LEMME. — *L'opérateur $\Delta_h$ de $C^\infty(M \sharp M)$ dans $L^2(M \sharp M, dv_h)$ , défini par*

$$(\Delta_h f) \circ \psi_1 = \Delta_{(M,g)}[f \circ \psi_1] \ , \quad (\Delta_h f) \circ \psi_2 = \Delta_{(M,g)}[f \circ \psi_2]$$

*est un opérateur symétrique dont la forme quadratique est $q(f,f) = \int_{M \sharp M} h^\sharp(df,df).dv_h$ . Il admet une extension de Friedrichs autoadjointe.*

*Preuve.* — La définition de $q$ et la formule de Green appliquée à $(M, \partial M)$ donnent

$$\begin{aligned} q(f,u) = & \int_M (u \circ \psi_1).\Delta_{(M,g)}(f \circ \psi_1).dv_g + \int_M (u \circ \psi_2).\Delta_{(M,g)}(f \circ \psi_2).dv_g \\ & - \int_{\partial M} [d(f \circ \psi_1)(N).u \circ \psi_1 + d(f \circ \psi_2)(N).u \circ \psi_2].dv_g \ , \end{aligned}$$

où $N$ est le champ de vecteur normal unitaire intérieur de $\partial M$ . La première partie du Lemme se déduit du fait que $d\psi_1(N) = -d\psi_2(N) = -d\psi(\frac{\partial}{\partial s})$ . Par ailleurs, le procédé d'extension de Friedrichs décrit en 2.B.b s'applique au cas présent. ∎

La proposition suivante est une mise en forme d'arguments sous-jacents dans [M–S] et dans [FS].

2.8. PROPOSITION.

*(i) Le spectre du laplacien de $(M \sharp M, h)$ (en tant que variété sans bord) est la réunion des spectres des problèmes de Neumann et de Dirichlet sur $(M,g)$ .*

*(ii) Il existe une base hilbertienne de fonctions propres dont la restriction à chacun des deux exemplaires de $M$ est une fonction propre pour le problème de Dirichlet ou de Neumann.*

*(iii) Le noyau de l'opérateur de la chaleur de $M \sharp M$ existe et est égal à $u$ , où*

$$u[t, \psi_i(x), \psi_j(y)] = \frac{1}{2}[k_N(t,x,y) + (-1)^{i-j} k_D(t,x,y)]$$

*où $k_N$ et $k_D$ sont les noyaux de l'opérateur de la chaleur pour les problèmes de Neumann et de Dirichlet sur $(M,g)$ .*

*Preuve.* — L'isométrie $\sigma$ de $M \sharp M$ , définie par $\sigma \circ \psi_1 = \psi_2$ et $\sigma \circ \psi_2 = \psi_1$ , agit (par action à la source) de manière involutive sur $C^\infty(M \sharp M)$ . Cet espace se décompose donc en somme directe des deux sous-espaces propres $E_D$ et $E_N$ correspondant aux valeurs propres $-1$ et $+1$ de l'action de $\sigma$ . Le laplacien $\Delta_h$ commutant avec les isométries, il laisse $E_D$ et $E_N$ invariants. On démontre (i) et (ii) en remarquant que les fonctions de $E_D$ et $E_N$ vérifient respectivement la condition de Dirichlet et de Neumann sur l'équateur et en appliquant le lemme 2.7. La fonction $u$ définie en (iii) vérifie, de manière évidente, $\Delta_h u \in L^2$ (le laplacien étant pris par rapport à la variable $y$) et $\Delta_h u + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ . Comme $\Delta_h$ est autoadjoint (lemme 2.7), cette solution est la seule qui vérifie $u(0,x,\bullet) = \delta_x$ et telle que $u$ et $\Delta_h u$ appartiennent tous deux à $L^2(M \sharp M, dv_h)$ pour tout $t > 0$ . ■

*b) Une relation entre le spectre d'une variété sans bord et le spectre du problème de Dirichlet sur tout sous-domaine.* — Soit $(M,g)$ une variété riemannienne compacte et $\Omega$ un domaine inclus dans $M$ . Notons $\{\varphi_j\}$ une base orthonormale hilbertienne de $L^2(M, dv_g)$ constituée de fonctions propres du laplacien. A tout entier $k \in \mathbf{N}^*$ , associons le plus grand entier $e(k)$ tel que

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i=0}^{e(k)} \varphi_i^2\Big) dv_g \leqslant k+1$$

et l'élément $m(k)$ de $[0,1[$ vérifiant

$$m(k) + \int_\Omega \Big(\sum_{i=0}^{e(k)} \varphi_i^2\Big) dv_g = k+1 \ .$$

Moyennant ces notations, on a la

2.9. Proposition ([C–G]). — *Pour tout entier $k \in \mathbf{N}$ et tout domaine $\Omega$ inclus dans $M$ , on a*

*(i)* $\sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j^D(\Omega) \geqslant \sum_{i=0}^{e(k)} \lambda_i(M). \int_\Omega \varphi_i^2 dv_g + m(k).\lambda_{e(k)+1}$ .

*(ii) Si de plus $(M,g)$ est un espace homogène, on a $1 + e(k) =$ partie entière de $\frac{\mathrm{Vol}(M)}{\mathrm{Vol}(\Omega)}(k+1), m(k) = k+1 - \frac{\mathrm{Vol}\,\Omega}{\mathrm{Vol}\,M}(e(k)+1)$ et*

$$\sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j^D(\Omega) \geqslant \Big(\frac{\mathrm{Vol}(\Omega)}{\mathrm{Vol}(M)}\Big) \sum_{i=0}^{e(k)} \lambda_i(M) + m(k).\lambda_{e(k)+1} \ .$$

*Remarque.* — Afin de situer l'optimalité de cette proposition, remarquons qu'elle implique en particulier que

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^D(\Omega) \geqslant \frac{4\pi^2}{(\mathrm{Vol}\,B^n)^{2/n}} \cdot \sum_{j=1}^{k} \Big(\frac{j}{\mathrm{Vol}\,\Omega}\Big)^{2/n}$$

pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et pour tout domaine $\Omega$ de $\mathbf{R}^n$ [la preuve se fait en prenant pour $M$ un tore plat rectangulaire qui contient $\Omega$]. Or la conjecture de Polya consiste à se demander si la même inégalité vaut pour chacune des valeurs propres [*i.e.* est-il vrai que $\lambda_k^D(\Omega) \geqslant \frac{4\pi^2}{(\mathrm{Vol}\, B^n)^{2/n}}\left(\frac{k}{\mathrm{Vol}\,\Omega}\right)^{2/n}$ pour tout $k$], le second membre de l'inégalité étant l'équivalent asymptotique du premier lorsque $k$ tend vers l'infini (*cf.* la proposition 4.3). La proposition 2.8 est également optimale lorsque $\mathrm{Vol}(\Omega)$ est proche de $\mathrm{Vol}(M)$ , puisqu'on obtient dans ce cas

$$\sum_{j\leqslant k+1} \lambda_j^D(\Omega) \geqslant \sum_{i\leqslant k} \lambda_i(M) + (k+1)\left(1 - \frac{\mathrm{Vol}\,\Omega}{\mathrm{Vol}\,M}\right).\lambda_{k+1}(M)\,.$$

*Preuve.* — Notons $\{u_j\}$ une base orthonormée de $L^2(\Omega, dv_g)$ formée de fonctions propres du problème de Dirichlet sur $\Omega$ ; appelons $\tilde{u}_j$ la fonction obtenue en prolongeant $u_j$ par zéro hors de $\Omega$ et $P_k$ la projection orthogonale de $L^2(M, dv_g)$ sur le sous-espace engendré par $\{\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_{k+1}\}$ . En utilisant la nullité de $\tilde{u}_j$ sur $\partial\Omega$ et sa continuité et en décomposant ensuite $\tilde{u}_j$ selon la base des $\varphi_i$ , nous obtenons :

$$\sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j^D(\Omega) = \sum_{j=1}^{k+1} \int_M |d\tilde{u}_j|^2 dv_g = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i(M) \sum_{j\leqslant k+1} \langle \tilde{u}_j, \varphi_i\rangle^2_{L^2(M)}$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i(M) ||P_k(\varphi_i)||^2_{L^2(\Omega)}\,,$$

la convergence des deux séries infinies étant assurée par le fait que $\tilde{u}_j \in H_1(M)$ . Posons $A_i = ||\varphi_i||^2_{L^2(\Omega)}$ . Comme la trace de $P_k$ est égale à $k+1$ , on a

$$\sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j^D(\Omega) \geqslant \mathrm{Min}\left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i(M).x_i : \sum_{i=0}^{\infty} x_i = k+1 \quad x_i \in [0, A_i] \text{ pour tout } i \right\}.$$

La croissance de la suite $\lambda_i(M)$ donne (i). On obtient (ii) en remarquant que, sur tout espace homogène, si $\{\varphi_i^\lambda\}$ est une base $L^2$-orthonormée de l'espace propre $\mathrm{Ker}(\Delta - \lambda.\mathrm{id})$ , alors la fonction $\sum_i \varphi_i^\lambda(x)^2$ est constante et, par conséquent, égale à $\frac{\dim(E\lambda)}{\mathrm{Vol}(M)}$ . ■

### 3. Quelques difficultés spécifiques à l'analyse sur les variétés

Le calcul effectif du spectre d'une variété est pratiquement toujours impossible. A titre d'illustration, les domaines de $\mathbf{R}^2$ pour lesquels un calcul effectif est possible sont le disque, le rectangle, l'ellipse (bien que le calcul ne soit pas dans ce dernier cas très effectif, *cf.* [M–F]), le secteur circulaire ([P–S]) et les triangles équilatéral, isocèle-rectangle et demi-équilatéral (voir [BE1] pour une méthode générale de calcul). On ne sait pas, par exemple, calculer le spectre d'un triangle isocèle quelconque. En fait, le calcul n'est actuellement possible que lorsque la variété a suffisamment de symétries pour que le problème se présente (après réduction) comme un problème à une seule dimension d'espace : c'est le cas des variétés de révolution que nous utiliserons abondamment comme exemples et espaces-modèles (*cf.* Appendice). Dans certains cas, le calcul du spectre se ramène à un problème algébrique ou arithmétique : c'est le cas en particulier lorsque le domaine (resp. la variété) considéré est un domaine fondamental (resp. le quotient) de l'action d'un groupe sur un espace de spectre connu (domaines pavant le plan ou quotients de l'espace hyperbolique par exemple) [la difficulté est alors de déterminer quelles sont les fonctions propres invariantes par l'action du groupe].

Puisque le spectre n'est pratiquement jamais calculable, nous en sommes réduits à chercher des estimations. Dans les sections suivantes, nous chercherons des minorations des valeurs propres $\lambda_i(M, g)$ du laplacien à l'aide d'une fonction $C(i)$ (ayant un comportement asymptotique convenable par rapport à $i$) que l'on peut déterminer de manière uniforme sur un ensemble de variétés $M$ et de métriques $g$ le plus vaste possible.

Du point de vue de la physique, les phénomènes de résonance sont un sujet d'étude important, d'où l'intérêt de savoir situer, en fonction de la géométrie de variétés, les intervalles où peuvent éventuellement se situer leurs fréquences propres. D'un point de vue plus interne aux mathématiques, remarquons que, pour une variété $M$ donnée, les *espaces* $L^2(M)$ et $H_1(M)$ (*i.e.* l'ensemble des fonctions qui les constituent) ne dépendent pas de la métrique choisie, car ils peuvent être définis par passage aux cartes locales et partition de l'unité. Par contre, les *normes* $L^2(M, dv_g)$ et $H_1(M, g)$ [voir la définition en (2.3)] en dépendent. Cette dépendance est relativement faible en ce qui concerne la norme $L^2$ , puisqu'à deux métriques $g_1$ et $g_2$ de même volume, on peut toujours associer un difféomorphisme $\varphi$ de $M$ sur $M$ tel que $f \mapsto f \circ \varphi$ soit une isométrie de $L^2(M, dv_{g_1})$ sur $L^2(M, dv_{g_2})$ (ceci découle d'un résultat de J. Moser : deux densités $C^\infty$ de même intégrale sur une variété compacte sont conjuguées par un difféomorphisme, *cf.* [MO]). En ce qui concerne la norme $H_1$ , et plus généralement les normes des espaces de Sobolev et de Hölder, celles-ci doivent être préalablement exprimées par rapport à une métrique de référence fixée pour permettre la transposition aux variétés riemanniennes des résultats de compacité qui sont classiques dans $\mathbf{R}^n$ . Par conséquent, dans un certain nombre de problèmes de convergence géométrique faisant intervenir une suite de métriques $g_p$ , les théorèmes analytiques de compacité ne sont applicables que si l'on sait estimer uniformément le rapport entre les normes de $H_1(M, g_p)$ et de $H_1(M, g_0)$ . Ceci explique en particulier pourquoi les métriques de courbure bornée ne forment pas un sous-ensemble compact de l'ensemble de toutes les métriques riemanniennes sur une variété donnée, bien que les dérivées secondes de ces métriques soient bornées. En effet, chacune de ces dérivées secondes est mesurée (ainsi que sa norme) par rapport à la métrique correspondante qui, par définition, peut varier (voir [GV1] pour une étude plus approfondie des résultats de compacité en géométrie). Il serait bien sûr possible de définir la norme $H_1$ , via une partition de l'unité $(\varphi_i)_{i\in I}$ subordonnée à un système de cartes locales, par la formule

$$||f||_{H_1} = \sum_{i\in I} ||f.\varphi_i||_{H_1(\mathbf{R}^n)} \ ,$$

ce qui permettrait d'étendre trivialement aux variétés les résultats d'analyse classiques pour $\mathbf{R}^n$ . Cependant, cette norme ne répond pas à nos besoins puisque sa définition suppose en particulier que la structure différentiable de $M$ est entièrement fixée. De plus, pour que le rapport entre cette nouvelle norme et la norme $H_1(M, g)$ [selon la définition (2.3)] soit borné, il faut également supposer que le volume de $(M, g)$ est minoré indépendamment de $g$ (en effet, on a dans ce cas : $\mathrm{Vol}(M, g) = ||1||^2_{H_1(M,g)} \geqslant C\cdot||1||^2_{H_1}$). La première de ces deux suppositions est évidemment exclue dès qu'on se propose d'appliquer ces résultats d'analyse à l'estimation d'invariants topologiques (*cf.* [LI], [GT2, 3 et 5], [B–G1], [ME] et [G–M]). La seconde supposition doit également être exclue, car un des exemples-types dont notre étude devra rendre compte est celui d'une suite de métriques $g_p$ , de courbure et de diamètre bornés, dont le rayon d'injectivité tend vers zéro (ce qui, sous ces hypothèses, signifie que le volume tend vers zéro) et dont le spectre converge (voir [CR–GV], [FA1 et 2] et la proposition 6.1). C'est aussi la raison pour laquelle le lemme standard suivant est insuffisant, puisqu'il suppose la structure différentiable $M$ fixée et le volume uniformément minoré.

3.1. LEMME (folk.). — *Sur une variété compacte, si deux métriques $g_1$ et $g_2$ vérifient*

$C_1.g_1 \leqslant g_2 \leqslant C_2.g_1$ , *alors les valeurs propres de leurs laplaciens vérifient :*

$$\frac{C_1^{n/2}}{C_2^{\frac{n}{2}+1}}.\lambda_i(g_1) \leqslant \lambda_i(g_2) \leqslant \frac{C_2^{n/2}}{C_1^{\frac{n}{2}+1}}.\lambda_i(g_1) \ .$$

[La preuve découle du fait que les formes quadratiques $q_{g_1}$ et $q_{g_2}$ associées aux laplaciens des métriques $g_1$ et $g_2$ sont dans un rapport borné. On applique alors la définition 2.4 des spectres des formes quadratiques et leur identité avec le spectre des laplaciens correspondants (*cf.* théorème 2.5).]

Cette discussion montre la nécessité d'arguments géométriques globaux pour l'établissement d'inégalités analytiques sur les variétés riemanniennes. La suite de cet article est consacrée à la mise en place de tels arguments.

## 4. Une méthode d'estimation des valeurs propres fondée sur le principe du min-max

(méthode utilisée par S.Y. CHENG [CH], P. LI et S.T. YAU [L–Y], M. GROMOV [GV2], voir aussi [BU1])

Le point de départ est le lemme élémentaire suivant :

4.1. LEMME. — *Soient $H_1$ et $H_2$ deux espaces de Hilbert dont les produits scalaires sont notés $\langle \bullet, \bullet \rangle_1$ et $\langle \bullet, \bullet \rangle_2$ . Soient $Q_1$ et $Q_2$ deux autres formes quadratiques sur $H_1$ et $H_2$ . S'il existe une application linéaire $\Phi$ de $H_1$ dans $H_2$ telle que, pour tout $x \in H_1$ ,*

$$\langle x, x\rangle_1 \leqslant C_1\langle \Phi(x), \Phi(x)\rangle_2 \quad \text{et} \quad Q_1(x) \geqslant C_2.Q_2 \circ \Phi(x) \ ,$$

*alors* $\nu_i(Q_1) \geqslant \dfrac{C_2}{C_1}\nu_i(Q_2)$ .

La preuve s'obtient en remarquant que $\Phi$ est injective, la définition 2.4 conduit à

$$\nu_i(Q_2) \leqslant \frac{C_1}{C_2}. \underset{\substack{V \text{ s.e.v.} \\ \text{de dimension } i+1 \\ \text{de } H_1}}{\operatorname{Inf}} \ \operatorname{Sup}_{x\in V} \frac{Q_1(x)}{\langle x, x\rangle_1} = \frac{C_1}{C_2}\nu_i(Q_1) \ .$$

4.2. COROLLAIRE. — *Sur une variété riemannienne compacte $(M, g)$ on considère des domaines disjoints $D_1, \ldots, D_k$ et un recouvrement $\Omega_1, \ldots, \Omega_j$ . On a*

$$\lambda^*_{kl-1}(M) \leqslant \operatorname{Sup}_{i\leqslant k} \lambda_l^D(D_i)$$

$$\lambda^*_{jl}(M) \geqslant \frac{1}{m}.\operatorname{Inf}_{i\leqslant j} \lambda_l^N(\Omega_i) \ ,$$

*où $\{\lambda_l^D\}_l$ et $\{\lambda_l^N\}_l$ désignent les spectres des domaines $D_i$ et $\Omega_i$ pour les problèmes de Dirichlet et de Neumann, où $\lambda_i^*(M)$ désigne le spectre du laplacien de $M$ pour l'un quelconque des problèmes sans bord, de Dirichlet ou de Neumann et où $m$ est l'indice du recouvrement (i.e. $m = \operatorname{Max}_x \sharp\{i : x \in \Omega_i\}$).*

*Preuve.* — Notons $\mathcal{D}_1^*(M), \mathcal{D}_1^D(D_i)$ et $\mathcal{D}_1^N(\Omega_i)$ les complétés (pour la norme $H_1$ relative à $g$) des domaines de l'opérateur laplacien sur $M$ (pour le problème $*$ considéré), sur $D_i$ (pour le problème de Dirichlet) et sur $\Omega_i$ (pour le problème de Neumann). Considérons les trois espaces de Hilbert $\mathcal{H}_1 = \mathcal{D}_1^*(M)$ , $\mathcal{H}_2 = \oplus_{i\leqslant k}\mathcal{D}_1^D(D_i)$ et $\mathcal{H}_3 = \oplus_{i\leqslant j}\mathcal{D}_1^N(\Omega_i)$ munis de leurs produits scalaires

$$\langle f,f\rangle_1 = \|f\|^2_{L^2(M)} \ , \quad \langle f,f\rangle_2 = \sum_{i\leqslant k}\|f\|^2_{L^2(D_i)} \ , \quad \langle f,f\rangle_3 = \sum_{i\leqslant j}\|f\|^2_{L^2(\Omega_i)} \ ,$$

et des formes quadratiques

$$Q_1(f) = \|df\|^2_{L^2(M)} \ , \quad Q_2(f) = \sum_{i\leqslant k}\|df\|^2_{L^2(D_i)} \ , \quad Q_3(f) = \sum_{i\leqslant j}\|df\|^2_{L^2(\Omega_i)} \ .$$

Considérons les applications $\Phi$ de $\mathcal{H}_2$ dans $\mathcal{H}_1$ et $\psi$ de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_3$ définies par

$$\Phi(f_1,\ldots,f_k) = \sum_{i\leqslant k}\tilde{f}_i \ ; \qquad \psi(f) = (\overline{f}_1,\ldots,\overline{f}_j) \ ,$$

où $\tilde{f}_i$ représente la fonction obtenue en prolongeant la fonction $f_i$ de $\mathcal{D}_1^D(D_i)$ par zéro hors de $D_i$ et où $\overline{f}_i$ est la restriction à $\Omega_i$ de la fonction $f$ de $\mathcal{D}_1^*(M)$ . On achève la preuve en appliquant le Lemme 4.1 aux applications $\Phi$ et $\psi$ et un utilisant l'identité entre les suites de valeurs $\nu_i$ et $\mu_i$ et le spectre du laplacien (*cf.* la définition 2.4 et le théorème 2.5 avec la convention de numérotation 2.C.c). ■

Les deux propositions suivantes illustrent la manière dont les résultats 4.1 et 4.2 agissent comme méthode de comparaison entre le spectre (inconnu) d'une variété et le spectre (supposé connu) d'un pavé ou d'une boule.

4.3. PROPOSITION (H. WEYL [WL]). — *Le comportement asymptotique du spectre du problème de Dirichlet sur tout domaine $\Omega$ compact de bord régulier de $\mathbf{R}^n$ est, lorsque $i$ tend vers l'infini,*

$$\lambda_i^D(\Omega).\operatorname{Vol}(\Omega)^{2/n} \sim 4\pi^2\Big(\frac{i}{\operatorname{Vol} B^n}\Big)^{2/n}$$

La preuve est laissée au lecteur (indication : recouvrir par des petits pavés et appliquer le corollaire 4.2). On remarquera que la preuve fonctionne essentiellement parce que le nombre de carrés qui rencontrent le bord est asymptotiquement petit par rapport à leur nombre total. Le résultat 4.3 se généralise à toute variété compacte, avec ou sans bord, car toute métrique riemannienne est infinitésimalement euclidienne (*cf.* 1.A.a).

4.4. DÉFINITIONS (*cf.* [GV1 et 2]). — *On appelle $\varepsilon$-remplissage d'une variété riemannienne $(M,g)$ toute famille de boules disjointes $B_i$ , de rayon $\varepsilon$ , incluses dans $M$ et dont le nombre est maximal. Le coefficient de $\varepsilon$-remplissage $N(\varepsilon)$ est le nombre de ces boules.*

A tout $\varepsilon$-remplissage d'une variété sans bord, on peut associer un $2\varepsilon$-recouvrement en recouvrant la variété par les boules concentriques de rayon $2\varepsilon$ . Cette remarque établit le corollaire classique suivant de 4.2.

4.5. COROLLAIRE (utilisé par [CG] pour (i), [L–Y] et [GV2] pour (ii)). — *Sur une variété riemannienne compacte sans bord $(M,g)$ , on considère un $\varepsilon$-remplissage maximal $(B_i)_i$ et le $2\varepsilon$-recouvrement $(\widetilde{B}_i)$ qui lui est canoniquement associé. Si $m$ est l'indice de ce recouvrement et si $N(\varepsilon)$ est le coefficient du $\varepsilon$-remplissage, on a*

*(i)* $\lambda_{N(\varepsilon)-1}(M) \leqslant \operatorname{Sup}_i \lambda_1^D(B_i)$

*(ii)* $\lambda_{N(\varepsilon)}(M) \geqslant \frac{1}{m}\operatorname{Inf}_i \lambda_1^N(\widetilde{B}_i)$ .

Le corollaire 4.5 ne résoud que la partie analytique d'un problème d'estimation de valeurs propres en ramenant l'estimation des $\lambda_i(M)$ au calcul (de difficulté à peu près identique) de la première valeur propre des problèmes de Dirichlet et de Neumann d'une boule non petite. *Résoudre la partie géométrique du problème pour rendre le résultat non vide, c'est savoir majorer ou minorer les quatre invariants suivants (correspondant aux points $a, b, c$ et $d$) en fonction d'un minorant $(n-1)k$ de la courbure de Ricci (définition 1.4) et d'un majorant $D$ du diamètre).* [Nous suivrons ici la méthode adoptée par [GV2], voir [L–Y] pour une autre démarche aboutissant à un résultat comparable] :

*a) Majorer le coefficient de $\varepsilon$-remplissage $N(\varepsilon)$.* — Il découle du théorème 1.6 (i) que

$$N(\varepsilon) \leqslant \frac{\mathrm{Vol}(M,g)}{\mathrm{Inf}_i \mathrm{Vol}(B_i)} \leqslant \frac{b_k(D)}{b_k(\varepsilon)} ,$$

où $b_k(\rho) = \int_0^\rho s_k(t)^{n-1}dt$ (voir la définition de $s_k$ en (1.9)).

*b) Majorer l'indice $m$ du recouvrement.* — Le nombre de boules de rayon $2\varepsilon$ du recouvrement $(\widetilde{B}_i)_i$ qui contiennent un point donné $x$ ne peut être supérieur au nombre de boules $B_i$ de rayon $\varepsilon$ qui sont incluses dans la boule $B(x, 3\varepsilon)$ . Ceci donne

$$m \leqslant \sup_{\substack{x,y \\ y\in B(x,2\varepsilon)}} \frac{\mathrm{Vol}\, B(x,3\varepsilon)}{\mathrm{Vol}\, B(y,\varepsilon)} \leqslant \mathrm{Sup}_y \frac{\mathrm{Vol}\, B(y,5\varepsilon)}{\mathrm{Vol}\, B(y,\varepsilon)} \leqslant \frac{b_k(5\varepsilon)}{b_k(\varepsilon)}$$

d'après le théorème 1.6 (i).

*c) Majorer $\lambda_1^D(B_i)$.* — En posant $x_i$ = centre de $B_i$ et $f(\bullet) = 1 - \frac{1}{\varepsilon}.d(x_i, \bullet)$ , on obtient une fonction qui vérifie la condition de Dirichlet sur $\partial B_i$ . En remarquant que $|df| = \frac{1}{\varepsilon}$ en tout point $x$ non situé sur le cut-locus de $x_i$ et que celui-ci est de mesure nulle, on a, d'après le théorème 1.6 (i),

$$\mu_0(\hat{q}^D) \leqslant \frac{\int_{B_i} |df|^2.dv_g}{\int_{B_i} f^2.dv_g} \leqslant \frac{4}{\varepsilon^2}\frac{\mathrm{Vol}\, B(x_i,\varepsilon)}{\mathrm{Vol}\, B(x_i,\varepsilon/2)} \leqslant \frac{4}{\varepsilon^2}\cdot\frac{b_k(\varepsilon)}{b_k(\varepsilon/2)} .$$

Ceci donne bien un majorant de $\lambda_1^D(B_i)$ d'après le théorème 2.5 (ii) et la convention de numérotation 2.C.c.

*d) Minorer $\lambda_1^N(\widetilde{B}_i)$.* — Ce dernier point se déduit également du théorème 1.6 (i), mais de manière non triviale comme on peut s'en convaincre en lisant [GV2] auquel nous renvoyons pour cette partie de la preuve, nous contentant ici de souligner l'importance du théorème de comparaison 1.6 dans les estimations spectrales. Remarquons cependant que nous avons d'ores et déjà les moyens de prouver le

4.6. THÉORÈME (interprétation libre de [CH] et [BU1]). — *Sur une variété riemannienne $(M,g)$ , de diamètre $d$ , de volume $V$ et dont la courbure de Ricci est minorée par $(n-1).k$ , on peut déterminer un nombre critique $i_0 = \left(\frac{\mathrm{Vol}(B^n).d^n}{V}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ tel que*

$$\lambda_i(M,g) \leqslant \begin{cases} 16\frac{i^2}{d^2}.A_1\left(\frac{d.|k|^{1/2}}{i}\right) & \text{pour } i \leqslant i_0 ,\\ 16\left(\frac{(i+1).\,\mathrm{Vol}(B^n)}{V}\right)^{2/n}.A_2\left[\left(\frac{V.|k|^{n/2}}{(i+1)\,\mathrm{Vol}(B^n)}\right)^{1/n}\right] & \text{pour } i > i_0 ,\end{cases}$$

*où $A_1(x) = \left(\frac{sh(x/2)}{sh(x/4)}\right)^n$ et où $A_2(x) = \left(\frac{sh\ x}{x}\right)^2.A_1(x)$ .*

*Remarque.* — L'exemple de la variété $M = S^{n-1}(\varepsilon) \times S^1(D)$ , munie de la métrique riemannienne produit $g$ qui confère à $S^{n-1}(\varepsilon)$ et à $S^1(D)$ les diamètres respectifs $\pi.\varepsilon$ et $\pi.D$

($\varepsilon \ll D$) , montre qu'il est nécessaire d'avoir une majoration différente pour $i \leqslant i_0$ et pour $i \geqslant i_0$ , que la première est au mieux de la forme $\lambda_i \leqslant$ Cte $\times \frac{i^2}{d^2}$ (puisque, sur l'exemple, on a $\lambda_i(M,g) = \lambda_i[S^1(D)] = \frac{i^2}{D^2}$ tant que $i < (n-1)^{1/2}\frac{D}{\varepsilon}$), que la seconde est au mieux de la forme $\lambda_i(M,g) \leqslant$ Cte $\times \left(\frac{i}{V}\right)^{2/n}$ , pour être en accord avec l'estimation asymptotique lorsque $i$ tend vers l'infini (*cf.* l'estimation asymptotique généralisant la proposition 4.3). Le théorème 4.6 est optimal dans la mesure où il obéit à ces deux conditions et où, de plus, la valeur de coupure qu'il annonce est du même ordre que la valeur de coupure

$$i_0' = (n-1)^{1/2}\frac{D}{\varepsilon} \simeq \frac{(n-1)^{1/2}}{\pi}(2n)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left[\frac{\mathrm{Vol}(B^n).\mathrm{diam}(M,g)^n}{\mathrm{Vol}(M,g)}\right]^{\frac{1}{n-1}}$$

que l'on obtient sur l'exemple.

*Preuve de 4.6.* — Nous faisons la démonstration en nous plaçant dans le cas le plus défavorable : celui où $k$ est négatif. Si $i \leqslant i_0$ , posons $\varepsilon = \frac{d}{2i}$ . Sur $(M,g)$ , il existe une géodésique minimisante $\gamma$ de longueur $d$ . Les boules de rayon $\varepsilon$ centrées aux points $\gamma(\frac{j.d}{i})$ sont disjointes, d'où $N(\varepsilon) \geqslant i+1$ . On conclut en appliquant le corollaire 4.5 et la majoration de $\lambda_1^D(B_i)$ obtenue en 4.c. Si $i > i_0$ , posons

$$\varepsilon = \frac{1}{2}|k|^{-1/2}\mathrm{Arg}\ sh\left[\left(\frac{V|k|^{n/2}}{\mathrm{Vol}(B^n)i}\right)^{1/n}\right] .$$

Comme les boules $\widetilde{B}_j$ de rayon $2\varepsilon$ , concentriques à celles d'un $\varepsilon$-remplissage maximal, recouvrent $M$ , le théorème 1.6 (i) donne

$$N(\varepsilon) \geqslant \frac{V}{\sup_i[\mathrm{Vol}(\widetilde{B}_i)]} \geqslant \frac{V}{b_k(\varepsilon)} \geqslant i .$$

On achève la preuve (dans le cas où $i \geqslant i_0$) en appliquant le corollaire 4.5 (i) et la majoration de $\lambda_1^D(B_i)$ donnée en 4.c et en utilisant la croissance de $A_2$ . ∎

## 5. D'une inégalité isopérimétrique à des inégalités analytiques

Dans toute cette section *les variétés riemanniennes seront supposées sans bord et de volume fini* (compactes ou non). Sur une telle variété, notée $(M,g)$ , pour tout $\beta \in ]0,\frac{1}{2}]$ , notons $W_\beta$ l'ensemble des domaines à bord régulier dont le volume interne vaut $\beta.\mathrm{Vol}(M,g)$ (par "domaine" on entend : sous-variété de même dimension que $M$ à bord régulier).

5.0. — *Sur toute variété riemannienne $(M,g)$ et pour chaque valeur de $\beta \in ]0,1[$ , l'ensemble $W_\beta$ est non vide.*

*Preuve.* — En opérant au besoin une homothétie sur la métrique $g$ nous pouvons supposer que $\mathrm{Vol}(M,g) = 1$ . Soit $\varepsilon$ un nombre réel strictement positif. Soit $\Omega$ un domaine de $M$ dont le volume est strictement compris entre $\beta - \varepsilon$ et $\beta$ (l'existence d'un tel domaine se prouve en appliquant par exemple le lemme de Sard). Considérons une fonction $u_0$ , positive, de classe $C^\infty$ , d'intégrale égale à 1 , dont le support est inclus dans $\Omega$ . Posons $\beta' = \mathrm{Vol}(\Omega,g)$ et

$$u = \left(1 - \frac{\beta-\beta'}{1-\beta'}\right) + \left(\frac{\beta-\beta'}{1-\beta'}\right)u_0 .$$

Si $\varepsilon$ est choisi suffisamment petit, $u$ est positif et $\int_\Omega u \cdot dv_g = \beta$ . Le résultat de J. Moser ([MO]) prouve l'existence d'un difféomorphisme $\varphi$ de $M$ tel que $\varphi^* dv_g = u \cdot dv_g$ , ce qui prouve que $\varphi(\Omega) \in W_\beta$ . ∎

5.1. DÉFINITION. — *La fonction isopérimétrique $h_M$ [ou $h_{(M,g)}$] est la fonction de* $]0, \frac{1}{2}]$ *dans* $\mathbf{R}^+$ *définie par*

$$h_M(\beta) = \operatorname*{Inf}_{\Omega \in W_\beta} \left[ \frac{\mathrm{Vol}(\partial\Omega)}{\mathrm{Vol}(M,g)} \right]$$

La donnée de la fonction isopérimétrique est une information plus fine que celle de la classique *"constante isopérimétrique de Cheeger"* définie par

$$H(M,g) = \mathrm{Inf}_{\Omega \subset M} \frac{\mathrm{Vol}\,\partial\Omega}{\mathrm{Min}(\mathrm{Vol}\,\Omega, \mathrm{Vol}\,M \setminus \Omega)} = \mathrm{Inf}_{\beta \in ]0,\frac{1}{2}]} \frac{h_M(\beta)}{\beta}$$

Comme le bord de $M \setminus \Omega$ est aussi celui de $\Omega$ , la fonction $h_M$ permet de minorer le volume du bord de tout domaine de $M$ , une fois connu son volume interne.

5.2. DÉFINITIONS. —

*(i) Une fonction positive $h^*$ , définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ , sera dite "de comportement asymptotique en $\beta^{1-r}$" s'il existe une fonction strictement positive $H$ , de classe $C^1$ sur $[0, \frac{1}{2}]$ , telle que $h^*(\beta) = \beta^{1-r}.H(\beta)$ pour tout $\beta \in [0, \frac{1}{2}]$ . Le prolongement de $h^*$ à $[0,1]$ par la symétrie $h^*(1-\beta) = h^*(\beta)$ sera encore noté $h^*$ .*

*(ii) Nous noterons $\mathcal{M}_{h^*}$ l'ensemble des variétés riemanniennes $(M,g)$ [quelles que soient leur dimension, leur topologie et leur métrique] dont la fonction isopérimétrique $h_M$ vérifie l'inégalité isopérimétrique $h_M \geqslant h^*$ .*

Fixons des éléments quelconques $i \in \mathbf{N}^*$ , $t \in \mathbf{R}^+$ et $\beta \in [0,1]$ . Sur l'espace $\mathcal{M}_{h^*}$ , nous étudierons les extrema des fonctionnelles

$$(M,g) \mapsto \lambda_i(M,g) = i^{\text{ème}} \text{ valeur propre du spectre de } (M,g)$$

$$(M,g) \mapsto \lambda_{m,q}(M,g) = \mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{m}} . \operatorname*{Inf}_{u \in C^\infty(M)} \left( \frac{||du||_{L^m}}{\operatorname*{Inf}_{a \in \mathbf{R}} ||u-a||_{L^q}} \right)$$

$$(M,g) \mapsto \mathrm{Vol}(M,g). \sup_{x \in M} k_{(M,g)}(t,x,x)$$

$$(M,g) \mapsto \mathrm{Inf}\{\lambda_1(\Omega,g) : \Omega \subset M \text{ tel que } \mathrm{Vol}(\Omega,g) = \beta.\mathrm{Vol}(M,g)\} .$$

où

$$||du||_{L^m} = \int_M g^\sharp(du,du)^{\frac{m}{2}} . dv_g$$

et

$$||u-a||_{L^q} = \int_M |u-a|^q . dv_g \ .$$

Nous répondrons aux questions suivantes.

(1) Ces fonctionnelles admettent-elles des bornes non triviales sur $\mathcal{M}_{h^*}$ tout entier (Théorème 5.3)?

(2) Est-il possible d'expliciter ces bornes sous forme d'un théorème de comparaison avec des espaces–modèles construits à partir de la seule donnée de $h^*$ (Théorème 5.4) où avec un problème spectral–modèle sur l'espace de Hilbert $L^2([0,1])$ (Théorème 5.6)?

(3) Est-il possible de calculer les extrema de ces fonctionnelles sur $\mathcal{M}_{h^*}$ . Ces extrema sont-ils réalisés par les espaces–modèles ci-dessus (Théorème 5.5)?

Les espaces–modèles seront décrits en 5.B.

*Remarque.* — Bien que nous ne focalisions pas l'étude sur ce point, il convient de remarquer que l'espace $\mathcal{M}_{h^*}$ contient des variétés singulières. Les énoncés des théorèmes qui suivent sont donc aussi valables pour ces variétés.

**A. L'existence de bornes non triviales sur $\mathcal{M}_{h^*}$ ne dépend que du comportement asymptotique de $h^*$ :.**

5.3. THÉORÈME. — *Soit $h^*$ une fonction dont le comportement asymptotique est en $\beta^{1-r}$*

*(i) Pour tout $i \in \mathbf{N}^*$ , $\mathrm{Inf}_{(M,g)\in\mathcal{M}_{h^*}} \lambda_i(M,g)$ est strictement positif si et seulement si $r$ est positif ou nul. De plus, la suite de ces bornes inférieures tend vers l'infini avec $i$ si et seulement si $r$ est strictement positif.*

*(ii) $\mathrm{Inf}_{(M,g)\in\mathcal{M}_{h^*}} \lambda_{m,q}(M,g) > 0$ si et seulement si $r \geqslant \frac{1}{m} - \frac{1}{q}$ .*

*(iii) Pour tout $t \in \mathbf{R}^+$ , $\mathrm{Sup}_{(M,g)\in\mathcal{M}_{h^*}} \left[\mathrm{Vol}(M,g).\,\mathrm{Sup}_{x\in M}\, k_{(M,g)}(t,x,x)\right]$ est fini si et seulement si $r$ est strictement positif.*

*Preuve de 5.3.* — La compacité de $[0,\frac{1}{2}]$ assure l'existence de deux constantes $C_1$ et $C_2$ telles que, pour tout $\beta \in [0,\frac{1}{2}]$

$$C_1\beta^{1-r} \leqslant h^*(\beta) \leqslant C_2\beta^{1-r}$$

Si $r < 0$ , l'appendice A.5 donne une suite de variétés $(M, g_n)$ appartenant à $\mathcal{M}_{h^*}$ et telles que $\lim_{n\to\infty} \lambda_i(M,g_n) = 0$ . Ceci démontre que (i) donne bien une condition nécessaire pour que la borne inférieure soit non triviale.

Lorsque $r \leqslant 0$ , les variétés $(M^*, g_\varepsilon)$ de l'appendice A.3 appartiennent à $\mathcal{M}_{h^*}$ dès que $\varepsilon$ est assez petit (à condition d'y choisir $L < \frac{p}{2^{1/p}.C_2}$) car, d'après l'appendice A.1, leur fonction isopérimétrique vérifie $h_{(M,g_\varepsilon)}(\beta) \geqslant (1 - B\sqrt{\varepsilon})\frac{p}{2^{1/p}L}\beta^{1-\frac{1}{p}} \geqslant C_2\beta^{1-r}$ . Posons $L = \frac{p}{2C_2}$ . Il est prouvé dans l'appendice A.3 que, dans ce cas,

$$\mathrm{Vol}(M^*, g_\varepsilon)\,\mathrm{Sup}_{x\in M^*}\, k_{(M^*,g_\varepsilon)}(t,x,x) > (\frac{C}{p})^{p/2}.(4\pi\frac{t}{L^2})^{-\frac{p}{2}} > C.(4\pi t/p)^{-\frac{p}{2}} \ .$$

Comme le membre de droite tend vers l'infini avec $p$ , on conclut que (iii) donne bien une condition nécessaire pour que la borne soit finie. Il en est de même pour la condition (ii) qui se déduit, de manière analogue, des exemples donnés par les appendices A.3 et A.4 et de l'appendice A.1 qui assure leur appartenance à $\mathcal{M}_{h^*}$ . Nous avons ainsi prouvé que toutes les conditions données par le théorème 5.3 sont nécessaires pour que les bornes correspondantes soient non triviales. Le fait que ces conditions soient suffisantes résultera du théorème 5.4. En effet, nous avons vu ci-dessus que nous pouvions remplacer $h^*(\beta)$ par $C_1.\beta^{1-r}$ . Dans ce cas, les bornes données par le théorème de comparaison 5.4 sont non triviales dès que $r$ satisfait aux hypothèses de 5.3, comme le prouve le calcul de ces bornes effectué dans les appendices A.3 et A.4. ■

**B. Construction des espaces extrémaux pour les inégalités analytiques : variétés de révolution profilées sur la fonction $h^*$.**

A partir de la donnée de $h^*$ nous allons construire une famille d'espaces de révolution $(M^*, g_\varepsilon)$ qui nous serviront d'espaces de comparaison. Le comportement asymptotique (lorsque $\varepsilon$

tend vers zéro) de ces variétés riemanniennes et de leur spectre fournit une construction des éléments du bord dans une compactification de l'ensemble des variétés de révolution de diamètre majoré et de courbure de Ricci minorée telle que le spectre passe à la limite (proposition 6.1 et appendice A.2). Nous démontrerons par la suite :

– que le rapport entre la fonction isopérimétrique de ces espaces et $h^*$ tend uniformément vers 1 lorsque $\varepsilon$ tend vers zéro (appendice A.1);

– qu'une borne uniforme (sur $\mathcal{M}_{h^*}$) de chacune des fonctionnelles considérée est donnée par la valeur de la fonctionnelle correspondante sur $(M^*, g_\varepsilon)$ (Théorème 5.4);

– qu'en modifiant légèrement $(M^*, g_\varepsilon)$, on obtient une famille d'éléments de $\mathcal{M}_{h^*}$ qui, par passage à la limite réalise l'extremum de la fonctionnelle sur $\mathcal{M}_{h^*}$.

Notons $S$ la fonction de $[0, \frac{1}{2}]$ dans $[0, L[$ définie par

$$S(\beta) = \int_\beta^{1/2} \frac{1}{h^*(x)} dx \ ,$$

où $L = \int_0^{1/2} \frac{1}{h^*(x)} dx$ est éventuellement infini. Notons $A$ la fonction réciproque de $S$. Considérons la variété $M^* = ]-L, L[\times S^{n-1}$ que nous munissons de la famille de métriques

$$g_\varepsilon = (ds)^2 + \varepsilon^2 . h^*[A(|s|)]^{\frac{2}{n-1}} . g_{S^{n-1}} \ .$$

Si $L$ est finie, nous compactifions $M^*$ par adjonction de deux "pôles" $x_0$ et $x_1$ (la métrique $g_\varepsilon$ sera donc généralement singulière aux pôles). Etant donné la fibration canonique $\rho : M^* = ]-L, L[\times S^{n-1} \to ]-L, L[$, nous appellerons "*domaines de révolution*" les domaines de la forme $\rho^{-1}(]-L, s])$ [lorsque $M^*$ est compacte, ce sont les boules géodésiques centrées sur le pôle $x_0$]. On remarquera que tout domaine de révolution $\Omega^*$ vérifie, pour toute métrique $g_\varepsilon$,

$$\frac{\mathrm{Vol}_{g_\varepsilon}(\partial\Omega^*)}{\mathrm{Vol}_{g_\varepsilon}(M^*)} = h^*\left(\frac{\mathrm{Vol}_{g_\varepsilon}(\Omega^*)}{\mathrm{Vol}_{g_\varepsilon}(M^*)}\right)$$

et que les métriques $g_\varepsilon$ que nous venons de construire sont les seules métriques de révolution sur $M^*$ qui vérifient cette propriété. C'est pourquoi les variétés $(M^*, g_\varepsilon)$ seront appelées *variétés de révolution $n$-dimensionnelles profilées sur la fonction $h^*$ et $h^*$ sera appelé le profil des variétés de révolution $(M^*, g_\varepsilon)$*.

Remarquons également que, si le comportement asymptotique de $h^*$ est en $\beta^{1-r}$, la dimension isopérimétrique de $(M^*, g_\varepsilon)$ au voisinage des pôles, au sens

$$\left.\begin{matrix}\text{dimension isopérimétrique}\\ \text{au voisinage de } x_0\end{matrix}\right\} = \inf\left\{m : 0 < \lim_{r\to 0}\left[\frac{\mathrm{Vol}\,\partial B(r)}{\mathrm{Vol}\,B(r)^{1-\frac{1}{m}}}\right]\right\} ,$$

est égale à $\frac{1}{r}$. Le théorème 5.3 peut donc se relire de la manière suivante : *l'existence de bornes non triviales sur $\mathcal{M}_{h^*}$ pour les invariants considérés ne dépend que de la dimension isopérimétrique des espaces modèles*. L'importance de cette dimension isopérimétrique dans les estimations et le fait que la dimension de $M^*$ en tant que variété n'intervient pas sont illustrés par les exemples traités dans les appendices A.3, A.4 et A.5.

## C. Le théorème de comparaison

5.4. THÉORÈME [B–G 1] pour (i) et (iii), généralisation de [GT 4] pour (ii) et (iv)). — *Soit $h^*$ une fonction dont le comportement asymptotique est en $\beta^{1-r}$ $(r \in \mathbf{R}^+)$. Notons $(M^*, g_\varepsilon)$ une* *famille de variétés de révolution, de dimension quelconque, profilée sur $h^*$ à la manière de 5.B. Pour toute variété riemannienne $(M,g)$ dont la fonction isopérimétrique est minorée par $h^*$ , on a, pour tout $\varepsilon$ positif,*

*(i)* $\lambda_1(M,g) \geqslant \lambda_1^D(M^*_-, g_\varepsilon) = \lim_{\delta\to 0} \lambda_1(M^*, g_\delta)$ , *où* $M^*_-$ *est le demi-espace* $\rho^{-1}(]-L,0])$ .

*(ii) Pour tout domaine $\Omega$ inclus dans $M$ , l'infimum de son spectre (pour le problème de Dirichlet) vérifie* $\lambda_1^D(\Omega,g) \geqslant \lambda_1^D(\Omega^*, g_\varepsilon)$ , *où $\Omega^*$ est le domaine de révolution de $(M^*, g_\varepsilon)$ qui vérifie* $\frac{\mathrm{Vol}(\Omega^*)}{\mathrm{Vol}(M^*)} = \frac{\mathrm{Vol}(\Omega)}{\mathrm{Vol}(M)}$ .

*(iii) Pour tout* $(t,x) \in \mathbf{R}^+ \times M$ , *on a*

$$\mathrm{Vol}(M,g)\cdot k_{(M,g)}(t,x,x) \leqslant \mathrm{Vol}(M^*, g_\varepsilon) k_{(M^*,g_\varepsilon)}(t,x_0,x_0) .$$

*(iv)* $\lambda_{2,q}(M,g) \geqslant \lim_{\delta\to 0} \lambda_{2,q}(M^*, g_\delta)$ .

*Remarques.* —

a) En fait, comme le prouve l'appendice A.2, les seconds membres des inégalités du théorème 5.4 ne dépendent pas de $\varepsilon$ ni de la dimension de $M^*$ .

b) Une fois établi le théorème 5.4, le problème sera de trouver les hypothèses géométriques optimales qui délimitent un ensemble de variétés dont la fonction isopérimétrique $h_M$ admet un minorant uniforme $h^*$ (calculable en fonction des hypothèses faites) dont le comportement asymptotique soit en $\beta^{1-r}$ pour un $r$ strictement positif (resp. $r \geqslant 0$) . En effet, dans le cas contraire, le théorème 5.4 (iii) et (iv) [resp. 5.4 (i) et (ii)] ne donne, d'après le théorème 5.3, que des résultats vides. Ce programme sera réalisé dans la section 6.

c) La démonstration des points (i) et (ii) a son origine lointaine dans l'inégalité de Faber-Krahn ([FR], [KN1–2]) qui s'appliquait à des domaines de $\mathbf{R}^n$ . Plus récemment, la démonstration en avait été généralisée aux variétés de courbure de Ricci supérieure à celle de la sphère par P. Bérard et D. Meyer ([B–M]) via une inégalité isopérimétrique de M. Gromov ([GV 2]), et aux variétés à courbure de Ricci minorée par une constante de signe quelconque par l'auteur ([GT 2,3,4]) via une inégalité isopérimétrique comparant la variété au "double disque" de l'appendice A.3 ([GT 4]). La démonstration du point (iii) a son origine dans des travaux de E. Talenti ([TA]) repris par C. Bandle ([BA]), qui s'appliquaient aux domaines de $\mathbf{R}^n$ . La démonstration originale de (iii) ([B–G1]) fut ensuite reprise dans différents travaux des mêmes auteurs ([B–B–G], [B–G 2] et [BE 2]). Une nouvelle démonstration de (iii), donnée par G. Besson dans l'appendice de [BE 2], a l'originalité de présenter ce résultat comme une comparaison entre le laplacien de la variété et l'opérateur $-h^*\cdot\frac{\partial^2}{\partial^2\beta} - 2h^{*'}\cdot h^*\cdot\frac{\partial}{\partial\beta}$ sur $L^2([0,1])$ .

Le théorème 5.4 découlera ici du théorème 5.6.

### D. Optimalité du théorème de comparaison

La fonction $h^*$ est supposée avoir un comportement asymptotique en $\beta^{1-r}$ $(r \in \mathbf{R}^+)$ . Nous supposerons de plus qu'elle est croissante, de classe $C^2$ sur $]0,\frac{1}{2}]$ et vérifie $h^*(\beta_1) + h^*(\beta_2) \geqslant h^*(\beta_1+\beta_2)$ pour tous les $\beta_1, \beta_2$ positifs tels que $\beta_1+\beta_2 \in ]0,\frac{1}{2}]$ .

5.5. THÉORÈME. — *Pour toute fonction $h^*$ vérifiant ces hypothèses, pour chacune des fonctionnelles analytiques riemanniennes estimées dans le théorème 5.4, la borne que donne ce théorème est en fait l'extremum de la fonctionnelle considérée sur l'ensemble $\mathcal{M}_{h^*}$ des variétés riemanniennes dont la fonction isopérimétrique admet $h^*$ pour minorant.*

*Remarque.* — Le calcul explicite des bornes inférieure (resp. supérieure) sur $\mathcal{M}_{h^*}$ des invariants considérés, lorsque $h^*(\beta)$ est de la forme $C.\beta^{1-r}$ , $(r \geqslant 0)$ est effectué dans les appendices A.3 et A.4.

Dans ce théorème, les bornes ne sont généralement pas atteintes pour une variété riemannienne régulière, mais plutôt pour un espace-limite dans un complété de l'ensemble des variétés de révolution appartenant à $\mathcal{M}_{h^*}$ (*i.e.* l'espace obtenu comme limite, lorsque $\varepsilon$ tend vers zéro, des variétés $(M^*, g_\varepsilon)$ décrites en 5.B). Cette complétion est décrite dans la proposition 6.1.

*Preuve de 5.5.* — Une fois établi le théorème 5.4, ce qui manque pour démontrer 5.5, c'est de savoir que $(M^*, g_\varepsilon)$ appartient à $\mathcal{M}_{h^*}$ . En effet, l'inégalité $\frac{\mathrm{Vol}\,\partial\Omega}{\mathrm{Vol}\,M} \geqslant h^*\left(\frac{\mathrm{Vol}\,\Omega}{\mathrm{Vol}\,M^*}\right)$ n'est vraie que pour des domaines de révolution et est généralement fausse pour un domaine $\Omega$ quelconque. Par contre, nous démontrons dans l'appendice A.1 que, pour des domaines quelconques, la fonction isopérimétrique $h_{(M,g_\varepsilon)}$ des surfaces $(M^*, g_\varepsilon)$ profilées sur $h^*$ vérifie $h_{(M,g_\varepsilon)} \geqslant (1 - B\sqrt{\varepsilon}).h^*$ . Il suffit donc de remplacer la métrique $g_\varepsilon$ par $\tilde{g}_\varepsilon = (1 - B\sqrt{\varepsilon})^2.g_\varepsilon$ pour obtenir un élément $(M^*, \tilde{g}_\varepsilon)$ de $\mathcal{M}_{h^*}$ . Si l'on remplace la métrique $g_\varepsilon$ par $\tilde{g}_\varepsilon$ dans le second membre du théorème 5.4, on ne modifie pas la limite de celui-ci lorsque $\varepsilon$ tend vers zéro. Ceci achève la preuve du théorème 5.5. ∎

## E. Comparaison avec un modèle de dimension 1

L'équivalence entre l'inégalité isopérimétrique de l'espace euclidien et l'inégalité de Sobolev associée au plongement de $H_1^1$ dans $L^{\frac{n}{n-1}}$ est un résultat classique d'Analyse. Celui-ci a été généralisé aux variétés par E. Bombieri ([BI]) qui a démontré que la donnée de $\lambda_{1,\frac{n}{n-1}}$ est équivalente (à un facteur $2^{1/n}$ près) à la donnée de la constante isopérimétrique $Is(M,g,n) = \mathrm{Inf}_{\beta\in]0,\frac{1}{2}]}\left(\frac{h_M(\beta)}{\beta^{1-\frac{1}{n}}}\right)$ . L'énoncé suivant généralise cette équivalence entre donnée d'une inégalité isopérimétrique et donnée des invariants spectraux ou des constantes de Sobolev.

5.6. Proposition (Traduction de 5.4). — *Soit $h^*$ une fonction dont le comportement asymptotique est en $\beta^{1-r}$ $(r \in \mathbf{R}^+)$ . Alors, pour toute variété $(M,g)$ qui satisfait à l'inégalité isopérimétrique $h_M \geqslant h^*$ , on a*

*(i)* $\lambda_1(M,g) \geqslant \mathrm{Inf}_{u\in C_0^\infty(]0,\frac{1}{2}[)} \dfrac{\int_0^{1/2} |u'(\beta)|^2.h^*(\beta)^2 d\beta}{\int_0^{1/2} u(\beta)^2 d\beta}$ .

*(ii) Pour tout domaine $\Omega \subset M$ ,*

$$\lambda_1^D(\Omega,g) \geqslant \mathrm{Inf}_{u\in C_0^\infty(]0,\frac{\mathrm{Vol}\,\Omega}{\mathrm{Vol}\,M}[)} \frac{\int_0^{\frac{\mathrm{Vol}\,\Omega}{\mathrm{Vol}\,M}} |u'(\beta)|^2.h^*(\beta)^2 d\beta}{\int_0^{\frac{\mathrm{Vol}\,\Omega}{\mathrm{Vol}\,M}} u(\beta)^2 d\beta} .$$

*(iii) Pour tous les $(t,x) \in \mathbf{R}^+ \times M$ ,*

$$\mathrm{Vol}(M,g).k_M(t,x,x) \leqslant \int_0^1 \left[\frac{\partial u}{\partial \beta}\left(\frac{t}{2},\beta\right)\right]^2 d\beta ,$$

*où $u$ est la solution de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} - h^*(\beta)^2.\frac{\partial^2 u}{\partial^2 \beta} = 0$ , de donnée initiale $u(0,\bullet) = 1$ , qui vérifie les conditions limites $u(t,0) = 0$ et $u(t,1) = 1$ .*

*(iv)* $\lambda_{m,q}(M,g) \geqslant \mathrm{Inf}_{u\in C^\infty([0,1])} \left[\dfrac{\int_0^1 |u'(\beta)|^m h^*(\beta)^m d\beta)^{\frac{1}{m}}}{\mathrm{Inf}_{a\in\mathbf{R}}(\int_0^1 |u(\beta)-a|^q.d\beta)^{\frac{1}{q}}}\right]$ .

*(v) Pour tout* $i \in \mathbf{N}$ , $\lambda_i(M,g) \geqslant C(h^*).i^{2r}$ .

*L'optimalité du théorème 5.5 vaut aussi pour les inégalités ci-dessus.*

## F. Preuves des théorèmes 5.4 et 5.6

Les propriétés des variétés de révolution établies dans l'appendice A.2 prouvent que le théorème 5.4 est une conséquence du théorème 5.6, c'est donc ce dernier que nous allons démontrer. La preuve suivra grosso-modo la démarche de [B–G 1]. Nous adopterons dans toute la suite la notation $V = \mathrm{Vol}(M,g)$ .

*a) La symétrisation du problème. —*

5.7. LEMME. — *Soit f une fonction* $C^\infty$ *de* $M$ *dans* $\mathbf{R}$ . *Posons* $a(\mu) = \frac{1}{V}\mathrm{Vol}\{f > \mu\}$ *et* $\Phi(f) = \widetilde{f}$ *la fonction de* $[0,1]$ *dans* $\mathbf{R}$ *définie par*

$$\widetilde{f}(\beta) = \mathrm{Inf}\{\mu : a(\mu) < \beta\}$$

*Alors a est strictement décroissante et*

*(a) pour toute valeur régulière* $\mu$ *de* $f$ , *on a*

$$\widetilde{f} \circ a(\mu) = \mu$$

$$V.a'(\mu) = V.\widetilde{f}'[a(\mu)]^{-1} = -\int_{\{f=\mu\}} \frac{1}{|df|_g} dv_{n-1} \ .$$

*(b) pour toute fonction* $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$\int_M u \circ f.dv_g = V.\int_0^1 u \circ \widetilde{f}(\beta).d\beta \ .$$

*(c) pour tout* $q$ ,

$$\int_M |df|_g^q.dv_g \geqslant V.\int_0^1 |\widetilde{f}'(\beta)|^q.h_M(\beta)^q d\beta \ ,$$

*(où* $h_M$ *est la fonction isopérimétrique de* $(M,g)$*).*

*(d)* $\int_{\{f>\widetilde{f}(\beta)\}} \Delta f.dv_g \geqslant -h_M^2(\beta).\frac{d^2}{d\beta^2}\left[\int_{\{f>\widetilde{f}(\beta)\}} f.dv_g\right] \geqslant 0$ .

*Signification de ce lemme. —* L'application $f \mapsto \widetilde{f}$ est une application de $L^2(M,dv_g)$ dans $L^2([0,1])$ appelée dans la littérature symétrisation (voir par exemple [TA] ou [BA]), cette application conserve les normes $L^p$ des fonctions et permet une comparaison entre la forme quadratique $Q(f) = \int_M |df|_g^2.dv_g$ et la forme quadratique $Q_{h^*}(u) = \int_0^1 |u'(\beta)|^2.h^*(\beta)^2.d\beta$ ainsi qu'une comparaison (au niveau des intégrales) entre l'opérateur laplacien de $(M,g)$ et l'opérateur $L = -h^{*2}.\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - 2h^{*'}.h^*.\frac{\partial}{\partial\beta}$ de $L^2([0,1])$ .

*Preuve du Lemme. —* La propriété (a) se déduit immédiatement de la formule de la coaire (*cf.* par exemple [B–G–M]) qui s'énonce : pour toute fonction $f \in C^\infty$ , on a

$$\int_M u.dv_g = \int_{\inf(f)}^{\sup(f)} \left[\int_{\{f=\mu\}} \frac{u}{|df|_g} dv_{n-1}\right] d\mu \ ,$$

où $dv_{n-1}$ est la mesure $(n-1)$-dimensionnelle induite sur $\{f=\mu\}$ par $dv_g$ . Remplaçant $u$ par $\Phi \circ f$ , utilisant (a) et le changement de variable $\mu \mapsto a(\mu)$ , on obtient (b). L'inégalité de Hölder donne, pour toute valeur régulière $\mu$ ,

$$\int_{\{f=\mu\}} |df|^{q-1}.dv_{n-1} \geqslant L(\mu)^q \left( \int_{\{f=\mu\}} \frac{1}{|df|}.dv_{n-1} \right)^{1-q} ,$$

où $L(\mu)$ désigne le volume $(n-1)$-dimensionnel de $\{f=\mu\}$ . La propriété (a) et la définition 5.1 de la fonction isopérimétrique donnent

$$\int_{\{f=\mu\}} |df|^{q-1}.dv_{n-1} \geqslant V.h^q[a(\mu)].|\widetilde{f}'[a(\mu)]|^{q-1} . \tag{5.1}$$

Or, la formule de la coaire, appliquée à la fonction $u=|df|^q$ , donne, d'après (a) et (5.1) :

$$\begin{aligned}\int_M |df|^q &= \int_{\inf(f)}^{\sup(f)} \int_{\{f=\mu\}} |df|^{q-1} dv_{n-1}.d\mu \\ &\geqslant V. \int_{\inf(f)}^{\sup(f)} h^q[a(\mu)].|\widetilde{f}'[a(\mu)]|^q a'(\mu).d\mu ,\end{aligned}$$

ce qui prouve (c). Notons $D_\mu$ l'ensemble $\{f>\mu\}$ . La formule de Green et (5.1) donnent pour toute valeur $\mu$ régulière,

$$\int_{D_\mu} \Delta f.dv_g = \int_{\partial D_\mu} |df|.dv_{n-1} \geqslant -V.h^2[a(\mu)].\widetilde{f}'[a(\mu)] \geqslant 0 .$$

Une démonstration identique à celle de (b) donne

$$\int_{D_\mu} f.dv_g = V \int_0^{a(\mu)} \widetilde{f}(\beta).d\beta .$$

On déduit (d) des deux dernières équations. ∎

*Preuve des inégalités (i), (ii) et (iv) du théorème 5.6.* — L'inégalité (iv) se déduit immédiatement des propriétés (b) et (c) du Lemme 5.7. L'inégalité (ii) s'en déduit également en utilisant le principe du min-max et en remarquant que, si $f$ s'annule sur le bord de $\Omega$ , alors $\widetilde{f}\left(\frac{\mathrm{Vol}\,\Omega}{\mathrm{Vol}\,M}\right)=0$ . L'inégalité (i) se déduit de (ii) en remarquant qu'un au moins des deux domaines $\{f>0\}$ et $\{f<0\}$ est de volume inférieur ou égal à $V/2$ . ∎

*b) Où réside la difficulté de prouver (iii) et (v)?.* — Comme l'application $\Phi : f \mapsto \widetilde{f}$ de $L^2(M,dv_g)$ dans $L^2([0,1])$ vérifie $||f||^2_{L^2} = V.||\Phi(f)||^2_{L^2}$ et $Q(f) \geqslant V.Q_{h^*}[\Phi(f)]$ on est tenté de lui appliquer le principe de comparaison utilisé dans la section 4 (Lemme 4.1) et d'en déduire que le spectre de $Q$ est minoré par celui de $Q_{h^*}$ . Or ceci est faux dès la seconde valeur propre. Pour les variétés de révolution profilées sur $h^*$ c'est même l'inverse qui est vrai. En effet, nous démontrons dans l'appendice A.2 que le spectre de $Q_{h^*}$ correspond seulement à celui de la restriction $Q^0$ de $Q$ au sous-espace $K_0$ de $H_1(M,g)$ dont les éléments sont les fonctions invariantes par les rotations autour de l'axe. On a donc $\mu_i(Q_{h^*}) = \mu_i(Q^0) \geqslant \mu_i(Q)$ . Ainsi, pour la sphère $S^2$ , on a

$$\mu_2(Q_{h^*}) = \mu_2(Q^0) = 6 ,$$

alors que $\mu_2(Q)=2$ . La raison pour laquelle le lemme 4.1 ne s'applique pas est que $\Phi$ n'est pas une application linéaire et que l'image de $H_1(M,g)$ par $\Phi$ est un cône dont il faut contrôler qu'il ne dégénère pas trop pour en tirer un principe de comparaison.

*c) Fin de la preuve du théorème 5.6.* —

*Preuve de 5.6 (iii).* — Notons $v$ la solution de l'équation de la chaleur de donnée initiale $\delta_{x_0}$ (où $x_0$ est un point fixé de $M$). Notons $\tilde{v}$ l'image par $\Phi$ de $v$ (*cf.* lemme 5.7) et posons

$$D(t,\beta) = \{x \in M : v(t,x) > \tilde{v}(t,\beta)\}$$
$$\tilde{u}(t,\beta) = V. \int_0^\beta \tilde{v}(t,s)ds \ .$$

Appliquons la propriété (b) du lemme 5.7 (en y remplaçant $u$ par $\chi_{]\tilde{v}(t,\beta),+\infty[}$) , puis la propriété (d), nous obtenons successivement

(5.2)
$$\tilde{u}(t,\beta) = \int_{D(t,\beta)} v(t,y).dv_g(y) \ ,$$

$$0 \leqslant -h_M^2(\beta)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\left[\int_{D(t,\beta)} v(t,y).dv_g(y)\right] \leqslant \int_{D(t,\beta)} \Delta v.dv_g \leqslant \int_{D(t,\beta)} -\frac{\partial v}{\partial t}.dv_g \ .$$

Le dernier membre est égal à $-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}$ d'après [BA] lemme 4.23. Nous en déduisons

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} - h_M^2(\beta).\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\beta^2} \leqslant 0 \ .$$

L'égalité (5.2) implique par ailleurs que

$$\tilde{u}(0,\beta) = \delta_{x_0}(\chi_{D(t,\beta)}) = 1 \ ,$$
$$\tilde{u}(t,0) \leqslant \sup[v(t,\bullet)].\,\mathrm{Vol}[D(t,0)] = 0$$
$$\tilde{u}(t,1) = \int_M v(t,y).dv_g(y) = 1 \ .$$

Le principe du maximum et l'hypothèse $h_M \geqslant h^*$ impliquent que $\tilde{u}$ est majoré par la solution $u$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - h^*(\beta)^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} = 0 \\ u(t,0) = 0 \ , \quad u(t,1) = 1 \ , \quad u(0,\bullet) = 1 \ , \end{cases}$$

à condition que celle-ci existe et soit unique, ce qui est démontré dans l'appendice A.2. Nous avons donc démontré pour tout $(a,t)$

$$\int_0^a \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\beta}(t,\beta)d\beta \leqslant \int_0^a \frac{\partial u}{\partial\beta}(t,\beta)d\beta \ .$$

La convexité de $t \mapsto t^2$ et la deuxième formule de la moyenne impliquent la même inégalité sur les intégrales des carrés des dérivées. Nous achevons la preuve en utilisant la loi de semi-groupe et le lemme 5.7 (b) qui donnent

$$\mathrm{Vol}(M,g).k_{(M,g)}(t,x_0,x_0) = V.\int_M v\left(\frac{t}{2},y\right)^2.dv_g(y) = \int_0^1 \left[\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\beta}\left(\frac{t}{2},\beta\right)\right]^2.d\beta \ .$$

∎

*Preuve de 5.6 (v).* — Les valeurs propres $\lambda_i$ du laplacien de $(M,g)$ vérifient

$$\Sigma e^{-\lambda_i t} = \text{ Trace } e^{-t\Delta} = \int_M k_M(t,x,x).dv_g(x) \ .$$

D'après le théorème 5.4 (iii), cette dernière quantité est majorée par

$$\mathrm{Vol}(M, g_\varepsilon) k_{g_\varepsilon}(t, x_0, x_0) \leqslant C(h^*).t^{-p/2}$$

(voir aussi les calculs des $k_{g_\varepsilon}$ donnés en appendice A). Posons $t = \frac{1}{\lambda_k}$ , nous obtenons

$$\frac{1}{e}.k \leqslant \Sigma e^{-\lambda_i/\lambda_k} \leqslant C(h^*)\lambda_k^{p/2} ,$$

ce qui achève la preuve. ∎

## 6. Etablissement d'inégalités isopérimétriques sur les variétés

En 1919, Paul Lévy ([LE]) démontra que la fonction isopérimétrique de toute hypersurface convexe $M$ de $\mathbf{R}^{n+1}$ , de courbure supérieure à celle de la sphère, est minorée par celle de $(S^n, \mathrm{can})$ . Ce résultat a été généralisé par M. Gromov ([GV 2]) aux variétés riemanniennes $(M, g)$ dont la courbure de Ricci est plus grande que celle de la sphère canonique. Parallèlement, C.B. Croke ([CR 1]) a donné un minorant de la fonction isopérimétrique de toutes les variétés dont la courbure de Ricci et le volume sont minorés et le diamètre majoré. Dans [GT 2–4], le même type de résultat a été obtenu sans hypothèse sur le volume, *i.e.* si on se donne un minorant $K$ (éventuellement négatif) de la courbure de Ricci et un majorant $D$ du diamètre, il existe un nombre $R(K, D)$ tel que la fonction isopérimétrique du double du disque de rayon $R(K, D)$ (*cf.* l'appendice A.3) minore celle de $(M, g)$ [théorème 6.15]. Dans [B–B–G], le même type de résultat a été démontré en prenant pour espace de comparaison une sphère de rayon $R'(K, D)$ (une nouvelle preuve en est donnée dans le théorème 6.16).

Nous allons, dans la suite, établir un certain nombre d'inégalités isopérimétriques et en déduire des estimations du spectre, du noyau de l'opérateur de la chaleur et des constantes qui interviennent dans les inégalités de Sobolev. Au-delà du résultat, les préoccupations suivantes soutendront le choix que nous ferons des hypothèses : toute hypothèse géométrique délimite, dans l'ensemble de toutes les variétés riemanniennes $(M, g)$ un sous-ensemble $\mathcal{R}$ .

- Quelles sont les hypothèses nécessaires pour que les variétés riemanniennes appartenant à l'ensemble $\mathcal{R}$ qu'elles délimitent vérifient toutes une même inégalité isopérimétrique et pour que cette inégalité induise une majoration (resp. une minoration) non triviale du noyau de l'opérateur de la chaleur (resp. de chaque valeur propre du spectre? (*cf.* la section 6.A).

- Quelles sont les hypothèses suffisantes pour obtenir le même type de résultat? Voir les théorèmes 6.11, 6.13, 6.14, 6.15, 6.16, 6.17, 6.18 et la discussion autour des théorèmes 6.9 et 6.10. L'idéal est bien entendu de ne retenir comme hypothèses suffisantes que celles qui se sont avérées nécessaires dans la section 6.A.

- En déduire des inégalités isopérimétrique et spectrales qui soient optimales quantitativement [*i.e.* l'égalité est atteinte pour une des variétés appartenant à la classe $\mathcal{R}$ considérée, voir les théorèmes 6.12, 6.13, 6.14, 6.15 et 6.16 (i)] ou qualitativement (théorèmes 6.17 et 6.18).

### A. Discussion sur les hypothèses retenues.

*a) Nécessité d'une borne sur le diamètre.* — L'énoncé suivant montre que, pour que toutes les variétés d'un ensemble $\mathcal{R}$ de variétés riemanniennes vérifient une même inégalité isopérimétrique et pour que cette inégalité induise une majoration (resp. une minoration) non triviale du noyau de l'opérateur de la chaleur (resp. de chaque valeur propre) *il est nécessaire que les diamètres des variétés de $\mathcal{R}$ admettent une borne supérieure finie.*

6.0. PROPOSITION. — *Etant donné une fonction $h^*$ qui vérifie les hypothèses de la définition 5.2 (i), notons $D$* (resp. $\Lambda_i$ , resp. $k_t$) *la borne supérieure (resp. inférieure, resp. supérieure) des fonctionnelles*

$$(M,g) \mapsto \operatorname{diam}(M,g)\ ,\quad (M,g) \mapsto \lambda_i(M,g)\ ,$$

*et*

$$(M,g) \mapsto \operatorname{Vol}(M,g).\operatorname{Sup}_{x\in M} k_{(M,g)}(t,x,x)$$

*sur l'ensemble des variétés riemanniennes $(M,g)$ qui vérifient l'inégalité isopérimétrique $h_{(M,g)} \geqslant h^*$ . Pour que $k_t < +\infty$ (resp pour que $\lim_{i\to\infty} \Lambda_i = +\infty$) il est nécessaire que $D$ soit fini, et on a alors $D \leqslant 2\int_0^{1/2} h^*(\beta)^{-1}d\beta = \operatorname{diam}(M^*, g_\varepsilon)$ pour toute variété de révolution $(M^*, g_\varepsilon)$ profilée sur $h^*$ (cf. la section 5.B). Cette condition est également suffisante lorsque $h^*$ vérifie de plus l'hypothèse de sous-additivité : $h^*(\beta_1+\beta_2) \leqslant h^*(\beta_1) + h^*(\beta_2)$ pour tous les $\beta_1, \beta_2$ tels que $\beta_1+\beta_2 \leqslant 1/2$ .*

*Preuve.* — Prolongeons $h^*$ à l'intervalle $]0,1[$ en posant $h^*(1-\beta) = h^*(\beta)$ . Considérons n'importe quelle variété riemannienne $(M,g)$ qui vérifie $h_{(M,g)} \geqslant h^*$ . Etant donné deux points $x$ et $y$ de $M$ tels que $d(x,y) = \operatorname{diam}(M,g)$ , notons $B_r$ la boule de centre $x$ et de rayon $r$ et posons $A(r) = \frac{\operatorname{Vol}(B_r)}{\operatorname{Vol}(M)}$ . Reprenons les notations de 1.B en appelant $S^{n-1}$ la sphère unitaire de l'espace tangent $T_xM$ , $t(X)$ la distance de coupure dans la direction du vecteur $X \in S^{n-1}$ , $\Phi$ la carte normale et $a$ la densité de la mesure $\Phi^*dv_g$ par rapport à $dt \cdot dX$ . Posons $\Omega_r = \{X \in S^{n-1} : t(X) \geqslant r\}$ . La décroissance de la famille $\Omega_r$ implique que

$$A(r) - A(r-h) \geqslant \frac{1}{\operatorname{Vol}(M)} \int_{\Omega_r} \int_{r-h}^{r} a(t,X)dt \cdot dX\ ,$$

donc que

$$\liminf_{h\to 0_+} \frac{A(r)-A(r-h)}{h} \geqslant \frac{\operatorname{Vol}(\partial B_r)}{\operatorname{Vol}(M)}\ .$$

En faisant le changement de variable $\beta = A(r)$ , nous en déduisons :

$$\operatorname{diam}(M,g) = \int_0^{\operatorname{diam}(M,g)} \frac{\operatorname{Vol}(\partial B_r)}{\operatorname{Vol}(\partial B_r)} dr \leqslant \int_0^1 \frac{d\beta}{h^*(\beta)}\ .$$

Comme $h^*(\beta) \sim$ Cte $\times\ \beta^{1-r}$ quand $\beta$ tend vers zéro, $D$ est fini dès que $r > 0$ donc (d'après le théorème 5.3) dès que $k_t < +\infty$ ou dès que $\lim_{i\to\infty} \Lambda_i = +\infty$ . Réciproquement, sous l'hypothèse de sous-additivité de $h^*$ , l'appendice A.1 prouve que les surfaces de révolution $(M^*, g_\varepsilon)$ profilées sur $h^*$ vérifient l'inégalité isopérimétrique $h_{(M^*,\tilde{g}_\varepsilon)} \geqslant h^*$ , au prix d'une perturbation asymptotiquement nulle de la métrique du type $\tilde{g}_\varepsilon = (1 - B\varepsilon)^2.g_\varepsilon$ . Or, nous avons vu dans la section 5.B que le diamètre de $(M^*, g_\varepsilon)$ vaut $2L = 2\int_0^{1/2} h^*(\beta)^{-1}.d\beta$ . Ceci implique que $D = \operatorname{diam}(M^*, g_\varepsilon) = 2\int_0^{1/2} h^*(\beta)^{-1}d\beta$ , ce qui achève la preuve. ∎

*b) Autre hypothèse pouvant remplacer celle sur le diamètre.* — L'hypothèse "diamètre borné" sera remplacée par l'hypothèse "constante isopérimétrique de Cheeger minorée" (définie au théorème 6.9) qui donne des résultats quantitativement meilleurs, car optimaux (théorèmes 6.11, 6.12, 6.13 et 6.15). On remarquera cependant que les hypothèses de ces théorèmes impliquent implicitement que le diamètre est borné (*cf.* le théorème 6.11 (ii)) et que, lorsqu'elles sont vérifiées, elles sont qualitativement (mais pas quantitativement !) équivalentes aux hypothèses "diamètre majoré et courbure de Ricci minorée" d'après le théorème 6.14.

*c) Nécessité d'une hypothèse sur la courbure de Ricci.* — Le contre-exemple de l'appendice A.6 montre que, même si le diamètre et le volume d'une suite de variétés riemanniennes $(M, g_k)$ est supposé constant, il est possible que $\lambda_i(M, g_k)$ tende vers zéro lorsque $k$ tend vers l'infini. Sur ce contre-exemple, ceci n'est possible que parce que la variété comporte des rétrécissements où certaines de ses courbures sont très négatives. La nécessité d'une hypothèse sur la courbure est prouvée par la remarque suivante :

LEMME. — *Considérons l'ensemble des variétés d'Einstein de dimension paire fixée dont le diamètre est majoré par une constante $D$ . Pour que la fonctionnelle $(M, g) \mapsto \lambda_i(M, g)$ admette sur cet ensemble un minorant non trivial, il est nécessaire que l'ensemble des valeurs possibles de la courbure de Ricci soit minoré.*

*Preuve.* — Considérons d'abord le cas de dimension 2. Considérons un entier $\gamma$ tel que $2\gamma - 3 \geqslant i$ . Un résultat classique de géométrie hyperbolique (fondé sur le corollaire 4.2 et une estimation de la première valeur propre du problème de Dirichlet sur chacun des pantalons hyperboliques) assure l'existence d'une surface $H$ de genre $\gamma$ , de deux constantes positives $\alpha$ et $\beta$ et d'une suite de métriques $g_n$ de courbure $-1$ sur $H$ qui vérifient $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(H, g_n) = +\infty$ , $\lambda_i(H, g_n) \leqslant \alpha . e^{-\beta . \operatorname{diam}(H, g_n)}$ (voir par exemple [BU2]). Posons $d_n = \operatorname{diam}(H, g_n)$ . Alors la métrique $\tilde{g}_n = \frac{1}{d_n^2} g_n$ est de courbure constante et de diamètre borné, bien qu'on ait $\lim_{n\to\infty} \lambda_i(H, \tilde{g}_n) = 0$ . Le lecteur construira les contre-exemples de dimension supérieure en considérant les produits riemanniens de $(H, \tilde{g}_n)$ par elle-même. ∎

*d) Rôle joué par la double hypothèse "diamètre majoré et courbure de Ricci minorée", compactification de l'ensemble des spectres des variétés de révolution qui vérifient cette double hypothèse.* — Sur la variété $M^* = ]0,1[\times S^{n-1}$ , on appelle *métrique de révolution compacte* toute métrique de la forme $g = (L.ds)^2 + b(s)^2.g_{S^{n-1}}$ , où $L$ est une constante finie et où $b$ est une fonction de classe $C^1$ sur $[0, 1]$ telle que $b(0) = b(1) = 0$ (*i.e.* par adjonction de deux pôles $x_0$ et $x_1$ , la variété riemannienne $(M^*, g)$ est compacte, une telle métrique est éventuellement singulière en $x_0$ et $x_1$ .

On définit une distance entre métriques de révolution $g_1$ et $g_2$ , où $g_i = (L_i ds)^2 + b_i(s)^2.g_{S^{n-1}}$ , en posant

$$d(g_1, g_2) = |L_1 - L_2| + ||b_1 - b_2||_{C^{0,\alpha}} + \left\| \frac{b_1}{\left(\int_0^1 b_1(s)^{n-1} ds\right)^{\frac{1}{n-1}}} - \frac{b_2}{\left(\int_0^1 b_2(s)^{n-1} ds\right)^{\frac{1}{n-1}}} \right\|_{L^{n-1}} .$$

*Notons* $\mathcal{R}_{K,D}$ l'ensemble des métriques de révolution compactes sur $M^*$ dont la courbure de Ricci est minorée par $(n-1)K$ dans les directions radiales et le diamètre majoré par $D$ .

On construit le complété de $\mathcal{R}_{K,D}$ en considérant les classes de suites de Cauchy de métriques pour la distance $d$ . Nous avons vu dans la section 5 que, parmi ces suites, certaines jouent un rôle extrémal dans les inégalités isopérimétriques et analytiques, ce sont les "*écrasements*" qui se construisent ainsi : à chaque métrique $g = (Lds)^2 + b(s)^2.g_{S^{n-1}}$ , on associe la suite $g_{1/n} = (Lds)^2 + \frac{1}{n^2}.b(s)^2.g_{S^{n-1}}$ .

6.1. PROPOSITION. — *Le complété de $\mathcal{R}_{K,D}$ pour la distance $d$ est compact. Son bord est formé de toutes les classes d'écrasements de métriques $g \in \mathcal{R}_{K,D}$ . Pour chaque $i \in \mathbf{N}$ , l'application $g \mapsto \lambda_i(g)$ est uniformément continue. En particulier lorsque $g_n$ tend vers un point du bord, $\lambda_i(g_n)$ tend vers la ième valeur propre du spectre–limite d'un écrasement (dont le calcul est* *effectué dans l'appendice A.2 en fonction du profil isopérimétrique).*

Des préoccupations similaires à celles de ce résultat sont présentes dans [CR–GV] et dans [FA1 et 2], ces derniers résultats s'appliquant à toutes les variétés régulières de diamètre borné, mais supposant la courbure sectionnelle minorée et majorée.

*Preuve.* — Nous allons démontrer que toute suite $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge (au sens $C^{0,\alpha}$) vers une métrique $g$ ou qui est asymptotiquement équivalente à un écrasement. En multipliant la métrique par une constante ad hoc, nous pouvons supposer que Ricci $\geqslant -(n-1)$ . Posons $g_k = (L_k ds)^2 + b_k(s)^2.g_{S^{n-1}}$ . D'après la formule (1.8), la courbure de Ricci vaut $-\frac{n-1}{L_k^2}\cdot\frac{b_k''}{b_k}$ en tout point différent des pôles. Par ailleurs, le développement limité de la mesure au voisinage des pôles (*cf.* l'interprétation géométrique des définitions 1.3) montre que, si la courbure de Ricci est supposée partout minorée par $-(n-1)$ , alors $0 \leqslant b_k'(0) \leqslant L_k$ (car le point-cônique éventuel ne peut avoir pour courbure $-\infty$). Un raisonnement identique donne $-L_k \leqslant b_k'(1) \leqslant 0$ . Notons $D$ la borne supérieure du diamètre. Le principe de Sturm-Liouville, appliqué à l'inéquation $b_k'' \leqslant D^2.b_k$ , implique que $b_k(s)$ est bornée par $\frac{1}{D}b_k'(0).\operatorname{sh}(D.s)$ , donc que $b_k''$ est bornée supérieurement par une constante $A$ . Posons $f_k(s) = b_k(s) + \frac{A}{2}s(1-s)$ . Le fait que $f_k'' \leqslant 0$ implique que $f_k'(1) \leqslant f_k'(s) \leqslant f_k'(0)$ . La compacité du plongement de $C^1$ dans $C^{o,\alpha}$ implique que les suites $f_k$ et $b_k$ admettent des sous-suites $f_p$ et $b_p$ convergentes au sens $C^{o,\alpha}$ vers des fonctions $f$ et $b$ et que $L_k$ admet une sous-suite correspondante de limite notée $L$ . Le principe de Sturm-Liouville donne

$$b_p(s_0+s) \leqslant b_p(s_0).\operatorname{ch}(Ds) + \frac{1}{D}.b_p'(s_0)\operatorname{sh}(Ds)\ .$$

Lorsque $s_0 \in ]0,1[$ est tel que $\lim_{p\to\infty} b_p(s_0) = 0$ , la positivité de $b_p$ implique que $\lim_{p\to\infty} b_p'(s_0) = 0$ et que $b = \lim b_p$ est partout nulle. L'alternative est donc la suivante : ou bien $b$ est partout non nulle sur $]0,1[$ et alors $g_p$ converge vers la métrique $g = (L.ds)^2 + b(s)^2.g_{S^{n-1}}$ , et le spectre de $g_p$ tend vers le spectre de $g$ d'après le lemme 3.1, ou bien $b$ est partout nulle sur $[0,1]$ . Dans ce dernier cas, posons $B_p = b_p\left(\int_0^1 b_p(s)^{n-1}ds\right)^{-\frac{1}{n-1}}$ . On a alors $B_p'' \leqslant D^2.B_p$ . Par un argument du type Sturm-Liouville (analogue à celui qui intervient dans la preuve du théorème 1.6 (i)), nous montrons que $\frac{B_p(s)}{\operatorname{sh}(D.s)}$ est décroissante et donc que

$$\int_0^1 \left(\frac{B_p(s)}{B_p(s_0)}\right)^{n-1} ds \geqslant \left[\int_0^{s_0}\left(\frac{\operatorname{sh} Ds}{\operatorname{sh} Ds_0}\right)^{n-1} ds + \int_{s_0}^1 \left(\frac{\operatorname{sh} D(1-s)}{\operatorname{sh} D(1-s_0)}\right)^{n-1} ds\right]\ .$$

Nous en déduisons que la norme $L^\infty$ de $B_p$ est uniformément majorée par une constante $A$ . Comme précédemment, on pose $f_p(s) = B_p(s) + A.D^2.s(1-s)/2$ . De la concavité de $f_p$ on déduit que, pour tout $s \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ ,

$$\frac{1}{\varepsilon}[f_p(1) - f_p(1-\varepsilon)] \leqslant f_p'(1-\varepsilon) \leqslant f_p'(s) \leqslant f_p'(\varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}[f_p(\varepsilon) - f_p(0)]\ .$$

Par conséquent une sous-suite de $B_p$ converge uniformément vers une fonction $B$ sur $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ . Comme de plus $B_p$ est bornée sur $[0,\varepsilon] \cup [1-\varepsilon, 1]$ , une sous-suite de $B_p$ converge vers $B$ en norme $L^{n-1}$ . Ceci implique que les métriques $g_p$ correspondantes vérifient $d(g_p, g_{1/p}) \to 0$ , où $g_{1/p}$ est la suite d'écrasements donnée par

$$g_{1/p} = (L.ds)^2 + \frac{1}{p^2}B(s)^2.g_{S^{n-1}}\ .$$

Le fait que l'hypothèse de minoration de la courbure de Ricci continue à être vérifiée à la limite résulte du fait que l'inégalité

$$B_p(x+h) + B_p(x-h) - 2B_p(x) \leqslant h^2.\sup_{t\in[x-h,x+h]} B_p(t)$$

passe à la limite.

*Convergence des spectres lorsque $b_p$ tend vers zéro* : la démonstration de l'appendice A.2 prouve que, dans ce cas, $\lambda_i(M^*, g_p)$ est équivalente (lorsque $p \to \infty$) à la $i$ème valeur propre de la forme quadratique $Q_{B_p} : u \mapsto L_p^{-2} \int_0^1 u'(s)^2 . B_p(s)^{n-1} ds$ , de domaine inclus dans $L^2([0,1], B_p(s)^{n-1} ds)$ . Notons $\mathcal{E}_p$ la somme directe des espaces propres du laplacien de la métrique $g_p$ correspondant à des valeurs propres plus petites qu'un $\lambda$ donné. Il résulte de [GT5] (preuve du théorème 1.1), appliqué à la formule de Bochner (1.6), que toute fonction $u \in \mathcal{E}_p$ vérifie

$$\begin{aligned} \|du\|_{L^\infty(g_p)} &\leqslant C(K,D)(1+\lambda)^{n/4} \|du\|_{L^2(g_p)} \\ &\leqslant C(K,D)(1+\lambda)^{\frac{n+2}{4}} \|u\|_{L^2(g_p)} . \end{aligned}$$

En appliquant le principe du min-max on en déduit que

$$\lambda_i(Q_{B_p}) \leqslant \lambda_i(Q_B) + C(K,D)(1+\lambda)^{\frac{n+2}{2}} \|B_p - B\|_{L^{n-1}} .$$

La même inégalité étant vraie quand on intervertit $Q_B$ et $Q_{B_p}$ , $\lambda_i(Q_{B_p})$ tend vers $\lambda_i(Q_B)$ qui est explicité dans l'appendice A.2. ∎

**B. La fonction isopérimétrique pour elle-même.**

*a) Continuité.* —

6.2. LEMME. — *La fonction isopérimétrique de toute variété riemannienne compacte est continue.*

*Preuve.* — La preuve découle, de manière évidente quoique non explicitée, de démonstrations faites dans [GT2], [BR], [GT4], [B–P] et [GT6]. Le fait que $h_M(\beta)$ tende vers zéro lorsque $\beta$ tend vers zéro se déduit immédiatement du fait que $h_M\left[\frac{\mathrm{Vol}\, B(x,\varepsilon)}{\mathrm{Vol}\, M}\right] \leqslant \frac{\mathrm{Vol}\, \partial B(x,\varepsilon)}{\mathrm{Vol}\, M}$ . Quitte à faire subir une homothétie à la métrique, on peut supposer que $\mathrm{Vol}(M) = 1$ dans la suite de la démonstration. La variété étant fixée (donc de courbure bornée), le théorème de comparaison de Rauch implique l'existence d'une constante positive $\alpha$ telle que, pour tout $x$ de $M$ et tout $\varepsilon \leqslant \alpha$ ,

$$\frac{3}{4}.\varepsilon^n \mathrm{Vol}(B^n) < \mathrm{Vol}\, B(x,\varepsilon) < \frac{5}{4}.\varepsilon^n . \mathrm{Vol}(B^n)$$

$$\frac{3}{4}.\varepsilon^{n-1} \mathrm{Vol}(S^{n-1}) < \mathrm{Vol}\, \partial B(x,\varepsilon) < \frac{5}{4}.\varepsilon^{n-1} . \mathrm{Vol}(S^{n-1}) .$$

Par ailleurs, pour chaque $\varepsilon$ et tout domaine $\Omega$ , le théorème de Fubini donne l'égalité "classique" :

$$\int_M \mathrm{Vol}[B(x,\varepsilon) \cap \Omega].dx = \int_\Omega \mathrm{Vol}[B(y,\varepsilon)].dy ,$$

d'où l'existence d'un point $x$ de $M$ tel que

$$\mathrm{Vol}[B(x,\varepsilon) \cap \Omega] \geqslant \frac{3}{4}\varepsilon^n . \mathrm{Vol}(B^n) . \frac{\mathrm{Vol}(\Omega)}{\mathrm{Vol}(M)} .$$

Considérons deux nombres $\beta$ et $\beta'$ tels que $0 < \beta < \beta' < 1$ . Notons $\varepsilon$ le nombre réel positif défini par $\frac{3}{4}.\varepsilon^n . \mathrm{Vol}(B^n).\beta' = \beta' - \beta$ . Pour tout $\eta > 0$ , il existe un domaine $\Omega$ tel que $\mathrm{Vol}(\Omega) = \beta'$ et $\mathrm{Vol}\, \partial\Omega < h_M(\beta') + \eta$ . L'argument précédent assure l'existence d'un point $x$ et d'un nombre $\varepsilon'$ inférieur à $\varepsilon$ tels que $\mathrm{Vol}[\Omega \setminus B(x,\varepsilon')] = \beta$ . Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} h_M(\beta) &< h_M(\beta') + \eta + \mathrm{Vol}[\partial B(x,\varepsilon')] \\ &\leqslant h_M(\beta') + C_n \left(\frac{\beta' - \beta}{\beta'}\right)^{\frac{n-1}{n}} , \end{aligned}$$

la deuxième inégalité étant obtenue par passage à la limite et en appliquant le théorème de Rauch (*cf.* supra). En changeant $\beta$ et $\beta'$ en $(1-\beta)$ et $(1-\beta')$ , et en utilisant la symétrie de $h_M$ , nous obtenons de même

$$h_M(\beta') \leqslant h_M(\beta) + C_n\left(\frac{\beta'-\beta}{1-\beta}\right)^{(n-1)/n} ,$$

ce qui achève la démonstration de la continuité de $h_M$ . ∎

*b) Comportement de la fonction isopérimétrique au voisinage de zéro.* —

6.3. Théorème (P. Bérard, D. Meyer [B–M]). — *Soit $(M,g)$ une variété riemannienne donnée. Il existe une fonction $\varepsilon_{(M,g)}(x)$ , qui tend vers zéro avec $x$ , telle que tout domaine $\Omega$ inclus dans $(M,g)$ vérifie*

$$\frac{\mathrm{Vol}\,\partial\Omega}{(\mathrm{Vol}\,\Omega)^{1-1/n}} \geqslant (1-\varepsilon_{(M,g)}[\mathrm{Vol}(\Omega)])\frac{\mathrm{Vol}\,S^{n-1}}{(\mathrm{Vol}\,B^n)^{1-\frac{1}{n}}} .$$

Cette inégalité optimale ne découle pas trivialement du fait que la métrique est asymptotiquement euclidienne (*cf.* 1.A.a) car les domaines de petit volume et de diamètre non petit sont admis.

Sur une variété *fixée*, on a donc toujours

$$h_M(\beta) \sim \frac{\mathrm{Vol}\,S^{n-1}}{(\mathrm{Vol}\,B^n)^{1-\frac{1}{n}}}.(\mathrm{Vol}\,M)^{-\frac{1}{n}}.\beta^{1-\frac{1}{n}} .$$

Ceci ne prouve évidemment pas que la borne inférieure $h^*$ des fonctions isopérimétriques d'une famille infinie de variétés ait aussi un comportement asymptotique en $\beta^{1-\frac{1}{n}}$ (un contre-exemple est donné par l'appendice A.5). Un tel résultat (sous des hypothèses géométriques ad hoc) sera donné par le théorème 6.15.

*c) Propriétés de la dérivée de $h_M$.* — La dérivabilité presque partout de la fonction $h_M$ est établie dans [B-P]. Le lemme suivant répond à des préoccupations différentes.

6.4. Lemme. — *Sur toute variété riemannienne compacte $(M,g)$ :*

*(i) pour tout $\beta \in ]0,\frac{1}{2}]$ , il existe une hypersurface $H$ qui a la propriété de régularité 1.5, qui partage la variété en deux domaines de volumes respectifs $\beta.\mathrm{Vol}(M,g)$ et $(1-\beta).\mathrm{Vol}(M,g)$ et qui vérifie*

$$\frac{\mathrm{Vol}(H)}{\mathrm{Vol}(M)} = h_M(\beta) .$$

*(ii) La courbure moyenne $\eta$ de cette hypersurface (en tous les points réguliers) est une constante minorée par $\frac{1}{n-1}.\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\frac{[h_M(\beta+\varepsilon)-h_M(\beta)]}{\varepsilon}$ .*

*(iii) Si $h^*$ et $\Phi$ sont des fonctions de classe $C^1$ définies respectivement sur $]0,\frac{1}{2}]$ et $\mathbf{R}$ , si $\Phi$ est croissante et si $\Phi\circ h_M - \Phi\circ h^*$ atteint un minimum local en un point $\beta$ de $]0,\frac{1}{2}[$ , alors ce point est un point régulier de $h_M$ et la courbure moyenne $\eta$ de l'hypersurface minimisante $H$ qui réalise $h_M(\beta)$ vérifie*

$$(n-1)\eta = h'_M(\beta) = h^{*\prime}(\beta).\frac{\Phi'[h^*(\beta)]}{\Phi'[h_M(\beta)]} .$$

*Preuve.* — La partie (i) est une remarque de M. Gromov ([GV2]) sur un résultat de F. Almgren prouvant l'existence et la régularité de courants minimaux de volume interne donné (voir aussi [MI], [BU1] et [B-P]). Une rédaction complète de cet argument serait cependant souhaitable.

Preuve de (ii) et (iii) : soit $u$ une fonction $C^\infty$ quelconque, définie sur $H$ , dont le support est inclus dans l'ensemble des points réguliers de $H$ (ceux-ci forment un ouvert dense). Considérons la variation $V_t(x) = V(t,x) = \Phi(t.u(x),x)$ , où $\Phi$ est la carte normale à $H$ définie en 1.B.b. L'hypersurface $H_t = V_t(H)$ partage $M$ en deux domaines $\Omega_t$ et $M \setminus \Omega_t$ de volumes respectifs $\beta(t).\mathrm{Vol}(M,g)$ et $(1-\beta(t)).\mathrm{Vol}(M,g)$ . (noter que la variation laisse fixes les points singuliers de $H$ , donc que $H_t$ a le même type de régularité que $H = H_0$). La formule de variation première des volumes donne, au point $t = 0$ ,

$$(6.1) \qquad \frac{d}{dt}(\mathrm{Vol}\,\Omega_t) = \int_H u.dv_g\ , \quad \frac{d}{dt}(\mathrm{Vol}\,H_t) = (n-1)\int_H \eta(x)u(x)dv_g(x)\ .$$

La propriété minimisante de $H$ implique que $\eta$ est constante (prendre $u$ d'intégrale nulle). Lorsque $u$ est d'intégrale non nulle, la fonction $t \mapsto \beta(t)$ et sa réciproque sont dérivables au voisinage de zéro. Nous déduisons (ii) du fait que

$$\limsup_{t\to 0} \frac{h_M[\beta(t)] - h_M(\beta)}{\beta(t)-\beta} \leqslant \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{Vol}(H_t) - \mathrm{Vol}(H)}{\mathrm{Vol}(\Omega_t) - \mathrm{Vol}\,\Omega} = (n-1).\eta$$

Le même raisonnement, appliqué à la fonction $\Phi \circ h_M - \Phi \circ h^*$ , donne, en tout minimum local de cette fonction,

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant [\Phi \circ h_M - \Phi \circ h^*][\beta(t)] - [\Phi \circ h_M - \Phi \circ h^*](\beta) \\ &\leqslant \Phi\Big(\frac{\mathrm{Vol}\,H_t}{\mathrm{Vol}\,M}\Big) - \Phi\Big(\frac{\mathrm{Vol}\,H}{\mathrm{Vol}\,M}\Big) + \Phi \circ h^*\Big(\frac{\mathrm{Vol}\,\Omega}{\mathrm{Vol}\,M}\Big) - \Phi \circ h^*\Big(\frac{\mathrm{Vol}\,\Omega_t}{\mathrm{Vol}\,M}\Big)\ . \end{aligned}$$

De la formule (6.1), on déduit ensuite

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant [\Phi \circ h_M - \Phi \circ h^*][\beta(t)] - [\Phi \circ h_M - \Phi \circ h^*](\beta) \\ &\leqslant \frac{1}{\mathrm{Vol}\,M}\Big(\int_H u.dv_g\Big)\big(\Phi' \circ h_M(\beta).(n-1)\eta - \Phi' \circ h^*(\beta).h^{*\prime}(\beta)\big)t + \mathrm{o}(t) \leqslant \mathrm{o}[\beta(t)-\beta]\ . \end{aligned}$$

La dernière inégalité s'obtient en remarquant que $t$ et $\beta(t)$ peuvent prendre les deux signes et sont du même ordre de grandeur dès que $\int_H u.dv_g \neq 0$ , ceci prouve (iii). ∎

*d) Comparaison de la croissance de la fonction isopérimétrique d'une variété à courbure de Ricci minorée avec celle d'une variété à courbure constante. Nombre de composantes connexes des domaines de bord minimal.* — Nous systématisons ici une démarche entamée dans [GT2–4]. Considérons un élément quelconque $(K,R,\varepsilon)$ de $\mathbf{R}\times]0,+\infty[\times]0,1[$ et notons $s_K$ la fonction définie en (1.9). Nous appellerons "trompette" la boule $B^n(R)$ , de rayon $R$ , munie de la métrique qui, en coordonnées polaires

$$\begin{cases} ]0,R] \times S^{n-1} \longrightarrow B^n(R) \\ \qquad (t,x) \mapsto t.x\ , \end{cases}$$

s'écrit

$$g_\varepsilon = (dt)^2 + \varepsilon^2.s_K(t)^2.g_{S^{n-1}}\ .$$

Lorsque $\varepsilon = 1$ , nous obtenons ainsi la boule de rayon $R$ et de courbure constante $K$ . Nous noterons $M_{K,R,\varepsilon}$ la variété riemannienne (appelée "modèle" par la suite) obtenue en recollant sur leur bord deux exemplaires de la "trompette" (*cf.* 2.E.a). Les espaces $M_{K,R,\varepsilon}$ sont les espaces de révolution de dimension $n$ profilés sur la fonction

$$h_{K,R}(\beta) = \frac{1}{\omega}\mathrm{Is}(\omega.\beta)\ ,$$

où $\mathrm{Is}(\int_0^x s_K(t)^{n-1}dt) = s_K(x)^{n-1}$ et où $\omega = 2\int_0^R s_K(t)^{n-1}dt$ .

6.5. PROPOSITION. — *La fonction isopérimétrique $h_M$ de toute variété riemannienne compacte $(M, g)$ dont la courbure de Ricci est minorée par la constante (de signe quelconque) $(n-1)K$ vérifie la propriété suivante : pour tout $(\beta, R) \in ]0, \frac{1}{2}] \times \mathbf{R}^+$ , si $h_M(\beta) \geqslant h_{K,R}(\beta)$ , alors $h_M \geqslant h_{K,R}$ sur tout l'intervalle $]0, \beta]$ . En particulier, pour établir l'inégalité isopérimétrique $h_M \geqslant h_{K,R}$ , il suffit de vérifier que $h_M(\frac{1}{2})$ est plus grand que $h_{K,R}(\frac{1}{2})$ .*

*Preuve de la proposition 6.5.* — Si la proposition est fausse, il existe un couple de valeurs $(\beta, R) \in ]0, \frac{1}{2}] \times \mathbf{R}^+$ et un nombre $\beta' \in ]0, \beta[$ tels que $h_M(\beta) \geqslant h_{K,R}(\beta)$ et $h_M(\beta') < h_{K,R}(\beta')$ . Ceci (avec la continuité de $h_M$) implique l'existence d'un nombre $\beta_0 \in ]\beta', \beta[$ tel que

$$h_M(\beta_0) < h_{K,R}(\beta_0) \text{ et } \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(h_M(\beta_0 + \varepsilon) - h_M(\beta_0)) \geqslant h'_{K,R}(\beta_0) .$$

Notons $H$ l'hypersurface qui réalise $h_M(\beta_0)$ et qui divise $M$ en deux domaines $\Omega$ et $M \setminus \Omega$ de volumes respectifs $\beta_0 . \mathrm{Vol}(M)$ et $(1 - \beta_0) . \mathrm{Vol}(M)$ . De même, notons $\Omega^*$ le domaine de révolution (voir la définition en 5.B) qui partage $M_{K,R,\varepsilon}$ en deux domaines de volumes respectifs $\beta_0 \mathrm{Vol}\, M_{K,R,\varepsilon}$ et $(1 - \beta_0) . \mathrm{Vol}\, M_{K,R,\varepsilon}$ . Si $\eta$ (resp. $\eta^*$) désigne la courbure moyenne de $\partial\Omega$ (resp. de $\partial\Omega^*$) pour l'orientation extérieure de la normale, on déduit du choix de $\beta_0$ et du lemme 6.4 (i) et (ii) que

$$\frac{\mathrm{Vol}(H)}{\mathrm{Vol}(\Omega)} < \frac{\mathrm{Vol}(\partial\Omega^*)}{\mathrm{Vol}(\Omega^*)} \text{ et } \eta \geqslant \eta^* .$$

Par le théorème 1.6 (ii), en posant $u_+ = \sup(u, 0)$ , nous en déduisons

$$\int_0^{+\infty} [c_K(t) - \eta s_K(t)]_+^{n-1} dt > \int_0^{+\infty} [c_K(t) - \eta^* s_K(t)]_+^{n-1} dt ,$$

ce qui est en contradiction avec le fait que $\eta \geqslant \eta^*$ . ■

De la proposition 6.5 découlent les corollaires suivants :

6.6. COROLLAIRE. — *Sur toute variété riemannienne compacte dont la courbure de Ricci est positive ou nulle,*

*(i) $\frac{h_M(\beta)}{\beta^{1-\frac{1}{n}}}$ décroît sur $]0, \frac{1}{2}]$ . Son minimum est réalisé par une hypersurface qui partage la variété en deux domaines de même volume. De plus, $h_M^{\frac{n}{n-1}}(\beta_1) + h_M^{\frac{n}{n-1}}(\beta_2) \geqslant h_M^{\frac{n}{n-1}}(\beta_1 + \beta_2)$ pour tous les $\beta_1, \beta_2$ tels que $\beta_1 + \beta_2 \leqslant 1/2$ .*

*(ii) Pour tout $\beta \in ]0, \frac{1}{2}]$ , tout domaine $\Omega$ qui réalise $h_M(\beta)$ (i.e. tel que $\frac{\mathrm{Vol}\,\Omega}{\mathrm{Vol}\, M} = \beta$ et $\frac{\mathrm{Vol}\,\partial\Omega}{\mathrm{Vol}\, M} = h_M(\beta)$) a une seule composante connexe. De plus, si nous notons $W_\beta^0$ l'ensemble des domaines connexes à bord régulier dont le volume interne vaut $\beta . \mathrm{Vol}(M, g)$ ,*

$$h_M(\beta) = \mathrm{Inf}_{\Omega \in W_\beta^0} \left[\frac{\mathrm{Vol}\,\partial\Omega}{\mathrm{Vol}(M, g)}\right] .$$

*Preuve du corollaire 6.6.* — Comme $h_{0,R}(\beta) = \frac{n}{2^{1/n} R} \beta^{1-\frac{1}{n}}$ d'après l'appendice A.3 (i), la proposition 6.5 implique que, si $\beta < \beta_0$ , alors $\frac{h_M(\beta)}{h_M(\beta_0)} \geqslant \frac{\beta^{1-\frac{1}{n}}}{\beta_0^{1-1/n}}$ . Ceci implique (i). Dès que $\beta_1$ et $\beta_2$ sont strictement positifs, on obtient donc $h_M(\beta_1) + h_M(\beta_2) > h_M(\beta_1 + \beta_2)$ , ce qui prouve que tout domaine minimisant a au plus une composante connexe. Si $\Omega_n$ est une suite de domaines à bord régulieur, de volume relatif $\beta$ , tels que $\frac{\mathrm{Vol}\,\partial\Omega_n}{\mathrm{Vol}\, M}$ tende vers $h_M(\beta)$ , alors les volumes de toutes les composantes connexes de $\Omega_n$ , sauf une, tendent vers zéro. En ne conservant que la composante connexe dont le volume ne tend pas vers zéro, et en modifiant légèrement son bord, on obtient une nouvelle suite $\Omega'_n$ telle que

$$\frac{\mathrm{Vol}\,\Omega_n}{\mathrm{Vol}\, M} = \beta \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{Vol}\,\partial\Omega_n}{\mathrm{Vol}\, M} \longrightarrow h_M(\beta) .$$ ■

6.7. — *Sur toute variété riemannienne compacte dont la courbure de Ricci est minorée par* $(n-1)K$ *, pour tout* $\beta_0$ *tel que* $h_M(\beta_0)^2 > -(n-1)^2 K.\beta_0^2$ *la fonction* $\beta \mapsto \frac{h_M(\beta)}{\beta}$ *est strictement décroissante sur l'intervalle* $]0, \beta_0[$ .

*Preuve du corollaire 6.7.* — D'après le corollaire 6.6, il suffit de faire la démonstration lorsque $K$ est négatif. Montrons d'abord que $\beta \mapsto \frac{\mathrm{Is}(\beta)}{\beta}$ est décroissante. Ceci découle de la décroissance de $x \mapsto \frac{(\operatorname{sh} x)^{n-1}}{\int_0^x \operatorname{sh} t^{n-1} dt}$ , dont la dérivée est négative si et seulement si

$$(n-1)\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\int_0^x (\operatorname{sh} t)^{n-1} < (\operatorname{sh} x)^{n-1} .$$

Cette dernière inégalité se démontre en majorant $\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ par $\frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t}$ . Comme $\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{Is}(x)}{x} = (n-1)\sqrt{|K|}$ l'existence d'un nombre fini $R$ tel que $h_{K,R}(\beta_0) = h_M(\beta_0)$ découle de l'hypothèse $h_M(\beta_0) > (n-1)\sqrt{|K|}\beta_0$ . De la proposition 6.5 et de la décroissance de $\beta \mapsto \frac{\mathrm{Is}(\beta)}{\beta}$ , on déduit

$$\frac{h_M(\beta)}{h_M(\beta_0)} \geqslant \frac{h_{K,R}(\beta)}{h_{K,R}(\beta_0)} > \frac{\beta}{\beta_0} . \qquad \blacksquare$$

6.8. Corollaire. — *Pour tous les* $(K, D) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$ *, il existe une constante positive* $\beta(K, D)$ *telle que, pour toute variété riemannienne compacte* $(M, g)$ *dont la courbure de Ricci est minorée par* $(n-1)K$ *et le diamètre majoré par* $D$ ,

*(i)* $\frac{h_M(\beta)}{\beta}$ *décroît strictement sur l'intervalle* $]0, \beta(K, D)]$ .

*(ii) Pour tout* $\beta \in ]0, \beta(K, D)]$ *, tout domaine qui réalise* $h_M(\beta)$ *n'a qu'une seule composante connexe.*

*(iii) Si* $W_\beta^0$ *est l'ensemble des domaines à bord régulier, de volume interne* $\beta.\mathrm{Vol}(M, g)$ *, dont le nombre de composantes connexes n'excède pas* $1 + 2.\beta(K, D)^{-1}$ *, alors, pour tout* $\beta \in ]0, \frac{1}{2}]$ ,

$$h_M(\beta) = \mathrm{Inf}_{\Omega \in W_\beta^0} \left[\frac{\mathrm{Vol}\,\partial\Omega}{\mathrm{Vol}(M, g)}\right] .$$

*Preuve du corollaire 6.8.* — Le théorème 6.15 implique en particulier l'existence d'un nombre $\gamma(K, D)$ tel que $\frac{h_M(\beta)}{\beta^{1-\frac{1}{n}}} \geqslant \gamma(K, D)$ , donc l'existence d'un nombre $\beta(K, D)$ tel que $\frac{h_M[\beta(K,D)]}{\beta(K,D)} > (n-1)\sqrt{|K|}$ . Le corollaire 6.7 implique (i). Les points (ii) et (iii) se déduisent de (i) selon le même schéma que celui de la preuve du corollaire 6.6. ■

**C. Inégalités isopérimétriques optimales sous les hypothèses "courbure de Ricci et constante isopérimétrique de Cheeger minorées".**

Pour toute variété riemannienne $(M, g)$ , on définit la "constante isopérimétrique de Cheeger" $H(M, g)$ par

$$H(M, g) = \mathrm{Inf}_{\Omega \subset M} \frac{\mathrm{Vol}\,\partial\Omega}{\mathrm{Min}(\mathrm{Vol}\,\Omega, \mathrm{Vol}\,M \setminus \Omega)} = \mathrm{Inf}_{\beta \in ]0, \frac{1}{2}]} \frac{h_M(\beta)}{\beta} .$$

Le lien avec le spectre est établi par le

6.9. Théorème (J. Cheeger [CHE]). — *Pour toute variété riemannienne sans bord* $(M, g)$ ,

$$\lambda_1(M, g) \geqslant \frac{1}{4} H(M, g)^2 .$$

*Nouvelle preuve.* — La donnée de la constante isopérimétrique de Cheeger est équivalente à l'inégalité isopérimétrique

$$h_M(\beta) \geqslant H(M,g).\beta \ .$$

D'après l'appendice A.4 (iii), le bas du spectre des variétés de révolutions $(M^*, g_\varepsilon)$ profilées sur la fonction $h^*(\beta) = H(M,g).\beta$ est égal à $\frac{1}{4}H(M,g)^2$ lorsque $\varepsilon$ est suffisamment petit. Le théorème 6.9 se déduit donc du théorème 5.4 (i). ∎

Remarquons que *la seule donnée de la constante isopérimétrique de Cheeger n'est pas suffisante pour minorer les autres valeurs propres ni le noyau de l'opérateur de la chaleur*, comme le prouve la

6.10. Proposition. — *Pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, pour tout $t \in \mathbf{R}^+$ et tout nombre positif $\delta$, on a*

$$\operatorname{Inf}\{\lambda_i(M,g) : (M,g) \textit{ telles que } H(M,g) \geqslant \delta\} = \frac{\delta^2}{4}$$

$$\operatorname{Sup}\{\operatorname{Vol}(M,g).k_{(M,g)}(t,x,x) : (M,g) \textit{ vérifiant } H(M,g) \geqslant \delta \text{ et } x \in M\} = +\infty \ .$$

*Preuve.* — La propriété $H(M,g) \geqslant \delta$ étant équivalente à l'inégalité isopérimétrique $h_M(\beta) \geqslant \delta.\beta$ , la seconde égalité découle du théorème 5.3. La première égalité découle d'un contre-exemple, donné par P. Buser dans [BU2], qui peut se relire de la manière suivante : l'appendice A.1 (i) assure l'existence d'un nombre $B$ tel que la famille des variétés de révolution $(M^*, g_\varepsilon)$ profilées sur la fonction $h^*(\beta) = \delta(1 - B\varepsilon)^{-1} \cdot \beta$ vérifie $H(M^*, g_\varepsilon) \geqslant \delta$ . L'appendice A.4 (iii) assure que $\frac{\delta^2}{4(1-B\varepsilon)^2}$ est un point d'accumulation du spectre de $(M^*, g_\varepsilon)$ . ∎

Pour améliorer l'inégalité de Cheeger, d'une part en l'étendant aux autres valeurs propres, d'autre part en améliorant quantitativement l'estimée de la première valeur propre, il est donc nécessaire de faire une seconde hypothèse sur la géométrie de la variété. Celle que nous ferons ici porte sur la courbure de Ricci.

A tout couple $(K,H) \in \mathbf{R}\times]0,+\infty[$ tel que $(n-1)^2K > -H^2$ , nous associons *la plus petite solution positive $R = R(K,H)$ de l'équation* $\frac{s_K(R)^{n-1}}{\int_0^R s_K(t)^{n-1}dt} = H$ (l'hypothèse $(n-1)^2K > -H^2$ assure l'existence d'une telle solution). *Nous notons* $B(K,H)$ (resp. $B_r$) la boule géodésique de rayon $R(K,H)$ (resp. de rayon $r$) dans l'espace simplement connexe de courbure constante $K$ . Nous *définissons la fonction* $h^*_{K,H}$ , de $]0,\frac{1}{2}]$ dans $\mathbf{R}^+$ en posant, pour tout $r \in ]0, R(K,H)]$ ,

$$h^*_{K,H}\left(\frac{\operatorname{Vol} B_r}{2\cdot \operatorname{Vol} B(K,H)}\right) = \left(\frac{\operatorname{Vol} \partial B_r}{2\cdot \operatorname{Vol} B(K,H)}\right) .$$

Rappelons que $k^N_{B(K,H)}$ et $k^D_{B(K,H)}$ désignent les solutions fondamentales de l'équation de la chaleur sur la boule $B(K,H)$ , soumises aux conditions de Neumann et de Dirichlet sur le bord et que $\lambda_1^D[B(K,H)]$ désigne la première valeur propre du spectre de cette boule pour le problème de Dirichlet.

6.11. Théorème. — *Soit $(M,g)$ une variété riemannienne $C^\infty$ , compacte, sans bord, de dimension $n$ , qui vérifie Ricci$(M,g) > -\frac{1}{n-1}H(M,g)^2$ . Posons $K = \operatorname{Min}_X \frac{\operatorname{Ric}(X,X)}{(n-1)|X|^2}$ et $H = H(M,g)$ . Alors :*

*(i)*

$$\operatorname{diam}(M,g) \leqslant 2.R(K,H)$$

$$h_{(M,g)} \geqslant h^*_{K,H} \ ,$$

$$\lambda_1(M,g) \geqslant \lambda_1^D[B(K,H)] \ ,$$

*pour tout* $(t,x) \in \mathbf{R}^+ \times M$ ,

$$\mathrm{Vol}(M,g).k_{(M,g)}(t,x,x) \leqslant \mathrm{Vol}\, B(K,H)\left[k^N_{B(K,H)}(t,x_0,x_0) + k^D_{B(K,H)}(t,x_0,x_0)\right] ,$$

*(ii)* $\lambda_i(M,g) \geqslant \Gamma(K,H).i^{2/n}$ *pour tout* $i \in \mathbf{N}^*$ , *où* $\Gamma(K,H)$ *est une constante qui ne dépend que de* $K$ *et* $H$ .

*(iii) Posons* $a(K,H) = \left(\frac{H(S^n,\mathrm{can})}{H(M,g)}.s_K[R(K,H)]^{n-1}\right)^{1/n}$ . *Alors la fonction isopérimétrique de* $(M,g)$ *est minorée par celle de la sphère de rayon* $a(K,H)$ , *ce qui entraîne :*

$$\lambda_1(M,g) \geqslant \frac{n}{a(K,H)^2}$$

$$\mathrm{Vol}(M,g).K_{(M,g)}(t,x,x) \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i^*.a(K,H)^{-2}.t}$$

*où les* $\lambda_i^*$ *sont les valeurs propres du spectre de la sphère* $(S^n,\mathrm{can})$ .

*(iv) La constante de Cheeger* $H(M,g)$ *est réalisée par une hypersurface qui partage* $(M,g)$ *en deux domaines de même volume.*

*Remarques.* —

(1) En ce qui concerne la première valeur propre du spectre, l'hypothèse faite sur la courbure donne bien un minorant plus grand que celui de J. Cheeger (théorème 6.9) puisque $h_{K,H}(\beta) > H(M,g).\beta$ en vertu de la décroissance de la fonction $\frac{h_{K,H}(\beta)}{\beta}$ (*cf.* la preuve du corollaire 6.7).

(2) La valeur $R(K,H)$ introduite dans ce théorème a une signification naturelle : c'est le maximum du diamètre de toutes les variétés qui vérifient simultanément $H(M,g) \geqslant H$ et $\mathrm{Ric} \geqslant (n-1)K$ (*cf.* la proposition 6.12).

(3) Le principal intérêt de la formulation des inégalités (ii) réside dans leur optimalité pour chacune des valeurs de $K$ et de $H$ . Plus précisément, on a la

6.12. PROPOSITION (optimalité du théorème précédent). — *Pour tous les* $(K,\delta) \in \mathbf{R}\times]0,+\infty[$ *qui vérifient les deux hypothèses* $\delta^2 > -(n-1)^2K$ *et* $\delta^2 \geqslant K.H(S^n,\mathrm{can})^2$ , *pour chacun des invariants estimés dans le théorème 6.11 (i), la borne que donne, en fonction de* $\delta$ *et* $K$ , *ce théorème est en fait l'extremum de l'invariant considéré sur l'ensemble des variétés riemanniennes* $(M,g)$ *qui vérifient simultanément* $\mathrm{Ric}(M,g) \geqslant (n-1)K$ *et* $H(M,g) \geqslant \delta$ . *Les variétés asymptotiquement extrémales (lorsque* $\varepsilon$ *tend vers zéro) sont les modèles* $M_{K,R,\varepsilon}$ *(définis en 6.B.d), où* $R = R(K,\delta)$ .

*Remarque.* — La seconde hypothèse $\delta^2 \geqslant K.H(S^n,\mathrm{can})^2$ n'est pas restrictive puisque, d'après le théorème 6.14, toute variété riemannienne $(M,g)$ vérifie $H(M,g)^2 \geqslant K.H(S^n,\mathrm{can})^2$ .

Un cas particulier intéressant est celui où la courbure de Ricci est positive ou nulle. Dans ce cas, on a les inégalités optimales suivantes

6.13. COROLLAIRE (*cf.* [GT4]). — *Sur toute variété riemannienne* $C^\infty$ , *compacte, sans bord, de dimension* $n$ , *dont la courbure de Ricci est non négative, on a*

$$h_{(M,g)}(\beta) \geqslant 2^{-1/n}.H(M,g).\beta^{1-\frac{1}{n}} ,$$

$$\lambda_1(M,g) \geqslant \frac{\lambda_1^D(B^n)}{n^2}.H(M,g)^2 > \frac{1}{4}H(M,g)^2 ,$$

$$\lambda_i(M,g) \geqslant C(n).H(M,g)^2.i^{2/n} .$$

*Dans les deux premières inégalités, l'égalité est (asymptotiquement) atteinte, lorsque $\varepsilon$ tend vers zéro, pour les modèles $M_{0,n/H,\varepsilon}$ qui sont obtenus en prenant les doubles de cônes euclidiens dont la génératrice a pour longueur $\frac{n}{H(M,g)}$ et dont l'angle au sommet tend vers zéro avec $\varepsilon$ .*

*Preuve du théorème 6.11.* —

*Preuve de (i) et (ii).* Par construction, la fonction $h^*_{K,H}$ est la fonction $h_{K,R}$ de la proposition 6.5. Comme $h_{K,R}(1/2) = h^*_{K,H}(1/2) = H(M,g)/2 \leqslant h_{(M,g)}(1/2)$ , la proposition 6.5 implique que $h_{(M,g)} \geqslant h^*_{K,H}$ . Les trois autres inégalités se déduisent des théorèmes 5.4 et 5.6 et aussi, en ce qui concerne le noyau de l'opérateur de la chaleur, de la proposition 2.8 (iii). Le fait que le diamètre de $(M,g)$ soit majoré par $2.R(K,H)$ découle de la proposition 6.0.

*Preuve de (iii).* Notons $h_{S^n(a)}$ la fonction isopérimétrique de la sphère de rayon $a = a(K,H)$ . Les définitions de $a(K,H)$ et de $R(K,H)$ (*cf.* (i)) impliquent que $\mathrm{Vol}\, S^n(a) = 2.\mathrm{Vol}\, B(K,H)$ . Du lemme 6.3, on déduit que la limite de $\frac{h^*_{K,H}}{h_{S^n(a)}}(\beta)$ , lorsque $\beta$ tend vers zéro, vaut 1. Comme par ailleurs, $h_{(M,g)} \geqslant h^*_{K,H}$ d'après (ii), il suffit de montrer que la fonction $\frac{h_{K,H}}{h_{S^n(a)}}$ est croissante pour prouver (iii). Pour cela, posons $y = h^{*\frac{n}{n-1}}_{K,H}$ et $\overline{y} = h^{\frac{n}{n-1}}_{S^n(a)}$ . Un calcul, mené dans l'appendice A.0, montre que

$$y''.y^{\frac{n-2}{n}} = -nK \ , \quad \overline{y}''.\overline{y}^{\frac{n-2}{n}} = -\frac{n}{a^2} \ ,$$

ce qui implique que $y''.\overline{y} - \overline{y}''y \geqslant 0$ (cette inégalité, évidente lorsque $K \leqslant 0$ , se déduit du fait que $\frac{H}{\sqrt{K}} \geqslant H(S^n, \mathrm{can})$ lorsque $K > 0$ d'après le théorème 6.14, puisque la proposition 6.5 implique alors que $h_{S^n} \leqslant h^*_{1,\frac{H}{\sqrt{K}}} = K^{-\frac{1}{2}} h^*_{K,H}$). Par intégration, on obtient $y'.\overline{y} - \overline{y}'.y \geqslant 0$ , ce qui démontre la croissance de $\frac{y}{\overline{y}}$ et achève la preuve de l'inégalité isopérimétrique $h_{(M,g)} \geqslant h_{S^n(a)}$ . Les deux autres inégalités de (iii) se déduisent du théorème 5.4.

*Preuve de (iv).* — C'est une conséquence immédiate du corollaire 6.7.

*Preuve de la proposition 6.12.* — Pour démontrer cette proposition, il suffit (d'après le théorème 6.11. (ii)) de démontrer que les modèles $M_{K,R,\varepsilon}$ de rayon $R(K,\delta)$ vérifient asymptotiquement les deux hypothèses, c'est-à-dire que leur courbure de Ricci est minorée par $(n-1)K$ et que leur constante isopérimétrique de Cheeger est minorée par $\delta(1-\eta(\varepsilon))$ , où $\eta(\varepsilon)$ tend vers zéro avec $\varepsilon$ . Remarquons que ces modèles sont les variétés de révolution $M^* = ]-R,+R[\times S^{n-1}$ munies de la métrique $g = (ds)^2 + \varepsilon^2.b(s)^2.g_{S^{n-1}}$ , où $R = R(K,\delta)$ et où $b(s) = s_K(R-|s|)$ . Comme $R(K,\delta)^2.K \leqslant \pi^2/4$ , on a $-\frac{b''}{b} \geqslant K$ (cette propriété étant également vraie au sens des distributions en zéro). Dès que $\varepsilon \leqslant 1$ , on a par ailleurs $\frac{1}{\varepsilon^2 b^2} - \left(\frac{b'}{b}\right)^2 \geqslant K$ . Les équations de Jacobi (*cf.* (1.5)) et de Gauss-Codazzi impliquent donc que la courbure de Ricci de $(M^*, g_\varepsilon)$ est minorée par $(n-1)K$ . L'appendice A.1 (i) implique que, pour $\varepsilon$ suffisamment petit,

$$4.h_{(M^*,g_\varepsilon)}(1/2)^2 \geqslant [1-\eta(\varepsilon)]^2.\delta^2 > -(n-1)^2 K \ .$$

Il découle alors du corollaire 6.7 que

$$H(M^*, g_\varepsilon) = 2h_{(M^*,g_\varepsilon)}(1/2) \geqslant (1-\eta(\varepsilon)).\delta \ . \qquad \blacksquare$$

*Preuve du corollaire 6.13.* — Appliquer le théorème 6.11 (i) et (ii) en remarquant que, lorsque $K = 0$ , $B(K,H)$ est la boule euclidienne de rayon $\frac{n}{H}$ . ■

**D. Inégalités isopérimétriques sous hypothèses "Courbure de Ricci minorée et diamètre majoré".**

*a) Relations optimales entre constante isopérimétrique de Cheeger et diamètre.* —

6.14. THÉORÈME (d'après [GT2–4]). — *Sur l'ensemble des variétés* $(M^n, g)$ *qui vérifient* Ricci$\geqslant (n-1)K$ *et* $\operatorname{diam}(M,g) = D$ *, la fonctionnelle* $(M,g) \mapsto H(M,g)$ *admet pour maximum* $\frac{s_K(D/2)^{n-1}}{\int_0^{D/2} s_K(t)^{n-1}dt}$ *et pour minorant* $\left(\int_0^{D/2} c_K(t)^{n-1}dt\right)^{-1}$ *. Ce minorant est aussi le minimum de la fonctionnelle lorsque* $K \leqslant 0$ *ou lorsque* $K = \frac{\pi^2}{D^2}$ .

*Preuve.* — Si la majoration est relativement triviale (appliquer l'inégalité de Bishop, *cf.* le théorème 1.6 (i)), il est moins trivial de démontrer que ce majorant est en fait la borne supérieure de $H(M,g)$ . L'ensemble découle du fait que $\frac{D}{2} \leqslant R(K,H)$ et du fait que l'égalité est (asymptotiquement) atteinte pour le modèle $M_{K,D/2,\varepsilon}$ (*cf.* Proposition 6.11 (i) et Proposition 6.12).
*Preuve de la minoration.* — D'après le lemme 6.3, la fonction $\frac{h_M(\beta)}{\beta}$ tend vers l'infini lorsque $\beta$ tend vers zéro. La continuité de la fonction isopérimétrique (lemme 6.2) et le lemme 6.4 (i) impliquent l'existence d'une hypersurface $H$ , de courbure moyenne constante $\eta$ , qui partage $M$ en deux domaines $\Omega$ et $M \setminus \Omega$ , qui vérifie la propriété de régularité 1.5 et qui réalise $H(M,g)$ *i.e.*

$$\frac{\operatorname{Vol} H}{\operatorname{Inf}(\operatorname{Vol}\Omega, \operatorname{Vol} M \setminus \Omega)} = H(M,g) .$$

En appliquant l'inégalité de Heintze et Karcher (Proposition 1.6 (ii)), nous en déduisons

$$H(M,g) \geqslant \operatorname{Inf}\left[\int_0^\rho J_\eta(t)dt, \int_0^{D-\rho} J_\eta(-t)dt\right]^{-1} ,$$

où $J_\eta(t) = \sup[c_K(t) - \eta s_K(t)), 0]^{n-1}$ et où $\rho = \sup_{x\in\Omega} d(x, \partial\Omega)$ . En changeant au besoin $\Omega$ en $M \setminus \Omega$ , nous supposerons que $\eta \geqslant 0$ . La minoration sera alors une conséquence immédiate du

LEMME. — *Si* $a, b$ *et* $\eta$ *sont des nombres réels positifs, alors*

$$\operatorname{Min}\left[\int_0^a J_\eta(t)dt, \int_0^b J_\eta(-t)dt\right] \leqslant \int_0^{\frac{a+b}{2}} J_0(t)dt .$$

*Preuve du lemme.* — Supposons les variables $a$ et $b$ liées par la relation $a + b = D$ . Comme les deux intégrales situées dans le membre de gauche sont alors respectivement croissante et décroissante par rapport à $a$ , le membre de gauche prend sa valeur maximale lorsque

$$\int_0^a J_\eta(t)dt = \int_0^{D-a} J_\eta(-t)dt . \tag{6.2}$$

Notons $a = a(\eta)$ et $b = b(\eta)$ les valeurs de $a$ et de $(D-a)$ telles que (6.2) soit vérifiée. En remplaçant au besoin $a$ par une valeur plus petite (et en diminuant $D$ d'autant), nous pouvons supposer que $c_K(t) - \eta s_K(t)$ est positif ou nul pour tout $t \in [-b, a]$ et donc que $J_\eta(t) = (c_K(t) - \eta s_K(t))^{n-1}$ .
En dérivant (6.2) par rapport à $\eta$ , nous obtenons :

$$a'(\eta) = \frac{n-1}{J_\eta(a) + J_\eta(-b)}\left[\int_0^a \varphi(t).J_\eta(t)dt - \int_0^b \varphi(-t).J_\eta(-t)dt\right] \tag{6.3}$$

où $\varphi(t) = \frac{s_K(t)}{c_K(t)-\eta s_K(t)}$ . Posons

$$H(\eta) = \int_0^{a(\eta)} J_\eta(t)dt + \int_0^{b(\eta)} J_\eta(-t)dt \ .$$

Un calcul direct donne, en dérivant $H$ et en appliquant (6.3),

$$\frac{1}{2(n-1)} H'(\eta)[J_\eta(a) + J_\eta(-b)] = -J_\eta(a) \int_0^b \varphi(-t).J_\eta(-t)dt - J_\eta(-b) \int_0^a \varphi(t).J_\eta(t)dt \ .$$

Remarquons que $0 \leqslant -\varphi(-t) \leqslant \varphi(t)$ et que $J_\eta(a) \leqslant J_\eta(-b)$ , nous en déduisons l'existence d'une grandeur positive $C$ telle que

$$H'(\eta).C \leqslant \int_0^b \varphi(t)J_\eta(-t)dt - \int_0^a \varphi(t)J_\eta(t)dt \ .$$

Remarquons que $b \leqslant a$ d'après (6.2), que $J_\eta(t) \leqslant J_\eta(-t)$ et que $\varphi$ est croissante sur $[0, a[$ , nous obtenons

$$H'(\eta).C \leqslant \varphi(b)\Big(\int_0^b J_\eta(-t)dt - \int_0^a J_\eta(t)dt\Big) = 0 \ .$$

Par conséquent $H(\eta)$ atteint sont maximum en $\eta = 0$ . On achève la preuve du lemme en appliquant (6.2). ∎

*Optimalité de la minoration et fin de la preuve du théorème 6.14.* — Considérons l'inégalité $H(M,g) \geqslant \big(\int_0^{D/2} c_K(t)^{n-1}dt\big)^{-1}$ que nous venons d'établir. Si $K = \frac{\pi^2}{D^2}$ , l'égalité est atteinte pour la sphère $S^n$ de rayon $\frac{D}{\pi}$ . Lorsque $K$ est négatif ou nul, considérons une variété $N$ de dimension $(n-1)$ , munie d'une métrique $g_0$ de courbure de Ricci positive ou nulle. Considérons le cylindre $]-\frac{D}{2}, \frac{D}{2}[\times N$ , muni de la famille de métriques $g_\varepsilon = (ds)^2 + \varepsilon^2.ch(\sqrt{|K|}s)^2.g_0$ . Notons $M$ la variété obtenue en recollant sur leurs bords deux exemplaires de ce cylindre. Des calculs directs (fondés sur les équations de Jacobi et de Gauss-Codazzi) donnent

$$\mathrm{Ric}(g_\varepsilon) \geqslant (n-1)K \ , \ \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{diam}(g_\varepsilon) = D \ .$$

La première inégalité s'entend au sens des distributions, mais il est aussi possible de lisser les métriques $g_\varepsilon$ en des métriques $C^\infty$ qui continuent de vérifier les deux propriétés ci-dessus. Les variétés $(M, g_\varepsilon)$ ainsi construites vérifient toutes

$$H(M,g) \leqslant \frac{1}{\int_0^{D/2} ch(\sqrt{|K|}s)^{n-1}ds} \ ,$$

ce qui achève de prouver le théorème 6.14. ∎

*b) Comparaison entre fonction isopérimétrique d'une variété riemannienne et fonction isopérimétrique euclidienne.* —

D'après l'appendice A.3, le profil d'un double-cône euclidien dont la génératrice est de longueur égale à 1 est égal au profil du double $B^n \sharp B^n$ d'une boule euclidienne unitaire, *i.e.*

$$h^*_{B^n \sharp B^n} = n.2^{-\frac{1}{n}}\beta^{1-\frac{1}{n}} \quad (\textit{cf.}\ \text{Appendice A.3})$$

Pour établir une comparaison et pouvoir obtenir des estimations explicites des invariants spectraux via le théorème 5.4 et les calculs de l'appendice A.3, il suffit donc de savoir minorer le rapport $\frac{h_{(M,g)}(\beta)}{\beta^{1-\frac{1}{n}}}$ , ce qui est le but du

6.15. THÉORÈME (*cf.* [GT2–4]). — *Pour toute variété riemannienne $(M, g)$ , on a* *(i) si Ricci$(M,g) \geqslant 0$ , alors*

$$\frac{h_{(M,g)}(\beta)}{\beta^{1-\frac{1}{n}}} \geqslant 2^{-\frac{1}{n}} H(M,g) \geqslant \frac{2^{1-\frac{1}{n}}}{\operatorname{diam}(M,g)}$$

*(ii) si Ricci$(M,g) \geqslant -(n-1)$ , alors*

$$\frac{h_{(M,g)}(\beta)}{\beta^{1-\frac{1}{n}}} \geqslant H(M,g)^{1-\frac{1}{n}} \left( \int_0^{\operatorname{diam}(M,g)} \left( \operatorname{ch} t + \frac{H(M,g)}{n} \operatorname{sh} t \right)^{n-1} dt \right)^{-\frac{1}{n}} \geqslant \gamma[\operatorname{diam}(M,g)] ,$$

*où $\gamma$ est la fonction décroissante définie par*

$$\gamma(D) = \left( \int_0^D \left[ \operatorname{ch} t \left( \int_0^{D/2} (\operatorname{ch} t)^{n-1} dt \right) + \frac{\operatorname{sh} t}{n} \right]^{n-1} dt \right)^{-\frac{1}{n}}$$

*Remarques.* — Dans (i) et (ii), la minoration de $\frac{h_{(M,g)}(\beta)}{\beta^{1-\frac{1}{n}}}$ en fonction de $H(M,g)$ est *optimale*, (*cf.* [GT4], section 1.2), l'égalité étant (asymptotiquement) atteinte pour les variétés décrites dans la fin de la preuve du théorème 6.14.

*Preuve.* — Considérons la fonction $F(\beta) = \frac{h_{(M,g)}(\beta)}{\beta^{1-\frac{1}{n}}}$ . Lorsque la courbure de Ricci est positive ou nulle, cette fonction atteint toujours son minimum pour $\beta = \frac{1}{2}$ d'après le corollaire 6.6 (i), ce qui prouve la première inégalité de (i), la seconde découlant immédiatement du théorème 6.14.

Lorsque Ricci$(M,g) \geqslant -(n-1)$ , ou bien $F$ atteint son minimum en $\beta = 0$ (resp. en $\beta = \frac{1}{2}$) , ou bien $F$ atteint son minimum en un point $\beta \in ]0, \frac{1}{2}[$ . Dans ce dernier cas, le lemme 6.4 (iii) assure l'existence d'un domaine $\Omega$ , de volume relatif $\beta$ , dont le bord est de courbure moyenne constante $\eta = \frac{1}{n} \frac{\operatorname{Vol} \partial\Omega}{\operatorname{Vol} \Omega}$ , tel que $F(\beta) = \frac{\operatorname{Vol} \partial\Omega}{(\operatorname{Vol} \Omega)^{1-\frac{1}{n}} (\operatorname{Vol} M)^{\frac{1}{n}}}$ . Le fait que $\frac{\operatorname{Vol} \partial\Omega}{\operatorname{Vol} \Omega} \geqslant H(M,g)$ et le théorème de Heintze et Karcher (théorème 1.6 (ii)) donnent alors

$$\frac{\operatorname{Vol} \partial\Omega}{(\operatorname{Vol} \Omega)^{1-\frac{1}{n}} (\operatorname{Vol} M)^{\frac{1}{n}}} \geqslant \frac{H(M,g)^{1-\frac{1}{n}}}{\left( \int_0^D (\operatorname{ch} t + \frac{H(M,g)}{n} \operatorname{sh} t)^{n-1} dt \right)^{\frac{1}{n}}} .$$

Pour démontrer (ii), il suffit de constater que le membre de droite de l'inégalité ci-dessus est plus petit que $F(\frac{1}{2})$ et que $\lim_{\beta \to 0} F(\beta)$ . Ceci découle du fait que $F(\frac{1}{2}) \geqslant 2^{-\frac{1}{n}} H(M,g)$ et du théorème 6.14 en ce qui concerne $F(\frac{1}{2})$ . En ce qui concerne $\lim_{\beta \to 0} F(\beta)$ , ceci découle du fait que, en utilisant le lemme 6.3 et le théorème de Bishop 1.6 (i),

$$\lim_{\beta \to 0} F(\beta) = n^{1-\frac{1}{n}} \left( \frac{\operatorname{Vol} S^{n-1}}{\operatorname{Vol} M} \right)^{\frac{1}{n}} \geqslant n^{1-\frac{1}{n}} \left( \int_0^D (\operatorname{sh} t)^{n-1} dt \right)^{-\frac{1}{n}}$$

Ceci prouve la première inégalité de (ii). La minoration par $\gamma(D)$ s'obtient en appliquant le théorème 6.14. ∎

*c) Comparaison entre fonction isopérimétrique d'une variété riemannienne et fonction isopérimétrique de la sphère.* —

6.16. THÉORÈME (amélioration quantitative de [B–B–G]). — *Considérons toutes les variétés riemanniennes $(M,g)$ dont le diamètre est majoré par une constante $D$*

*(i) Si Ricci$(M,g) \geqslant$ Ricci$(S^n, \mathrm{can})$ , alors*

$$\frac{h_{(M,g)}(\beta)}{h_{(S^n,\mathrm{can})}(\beta)} \geqslant \left( \frac{\int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n-1} dt}{\int_0^{D/2} (\cos t)^{n-1} dt} \right)^{1/n} .$$

*(ii) Si Ricci$(M,g) \geqslant 0$ , alors*

$$\frac{h_{(M,g)}(\beta)}{h_{(S^n,\mathrm{can})}(\beta)} \geqslant \frac{2}{n} \cdot \Big( \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n-1} dt \Big)^{1/n} \cdot \frac{1}{D} .$$

*(iii) Si Ricci$(M,g) \geqslant -(n-1)$ , alors*

$$\frac{h_{(M,g)}(\beta)}{h_{(S^n,\mathrm{can})}(\beta)} \geqslant \operatorname{Inf} \left[ \frac{\int_0^\pi (\sin t)^{n-1} dt}{\int_0^D (\operatorname{ch} 2t)^{\frac{n-1}{2}} dt}, \left( \frac{\int_0^\pi (\sin t)^{n-1} dt}{\int_0^D (\operatorname{ch} 2t)^{\frac{n-1}{2}} dt} \right)^{1/n} \right] .$$

*Remarque.* — Ici, seule l'inégalité (i) est optimale : lorsque $D = \pi$ l'égalité est atteinte lorsque $(M,g) = (S^n, \mathrm{can})$). L'inégalité (i) contient l'inégalité isopérimétrique de M. Gromov ([GV2]) ainsi qu'une amélioration (non quantifiée) qui en fut ensuite donnée par C.B. Croke ([CR2]).

*Nouvelle preuve.* — Les inégalités (i) et (ii) découlent, par un calcul direct du théorème 6.11 (iii) et de la minoration de la constante de Cheeger donnée par le théorème 6.14. La démonstration de (iii) que nous allons donner maintenant permet également de redémontrer (i) et (ii) : posons $h_0 = h_{(S^n,\mathrm{can})}$ et $h_M = h_{(M,g)}$ et prolongeons les fonctions $h_M$ et $h_0$ à tout l'intervalle $]0,1[$ de manière à ce qu'elles soient invariantes par la symétrie $\beta \mapsto 1-\beta$ . Le lemme 6.4 (iii) s'étend trivialement à ce cadre et, si le rapport $\frac{h_M}{h_0}$ atteint son minimum en un point $\beta_0 \in ]0,1[$ , alors $h_M$ est dérivable en ce point et $h'_M(\beta_0) = \frac{h_M}{h_0}(\beta_0).h'_0(\beta_0)$ . D'après le lemme 6.4, il existe une hypersurface $H$ qui réalise $h_M(\beta_0)$ , de courbure moyenne $\eta = \frac{1}{n-1} h'_M(\beta_0)$ , qui partage $M$ en deux domaines $\Omega$ et $M \setminus \Omega$ de volumes relatifs $\beta_0$ et $1-\beta_0$ . L'inégalité de Heintze et Karcher (Théorème 1.6 (ii)) implique, lorsque le diamètre est majoré par $D$ et la courbure de Ricci minorée par $(n-1)K$ , que

$$1 \leqslant \frac{h_M(\beta_0)}{h_0(\beta_0)} \int_{-\rho}^{D-\rho} \langle V(t), W \rangle_+^{n-1} dt , \tag{6.4}$$

où $\rho = \sup_{x\in\Omega} d(x,\partial\Omega)$ , où $V(t)$ est le vecteur $(c_K(t), s_K(t)) \in \mathbf{R}^2$ et $W$ le vecteur $(h_0(\beta_0)^{\frac{1}{n-1}}, \eta.h_0(\beta_0)^{\frac{1}{n-1}}) \in \mathbf{R}^2$ . Posons $\omega = \int_0^\pi (\sin t)^{n-1} dt$ . On a

$$h_0\Big(\frac{1}{\omega}\int_0^r (\sin t)^{n-1} dt\Big) = \frac{1}{\omega}(\sin r)^{n-1} .$$

Nous en déduisons que

$$\Big[ \big(\frac{1}{n-1} h'_0(\beta)\big)^2 + 1 \Big] [h_0(\beta).\omega]^{\frac{2}{n-1}} = 1 .$$

Le calcul de $\eta$ en fonction de $h'_0(\beta_0)$ donné plus haut permet d'en déduire que

$$||W||^{n-1} \leqslant \frac{1}{\omega} \sup \Big[ 1, \big(\frac{h_M}{h_0}(\beta_0)\big)^{n-1} \Big] .$$

En remplaçant dans (6.4), nous obtenons

$$\omega \leqslant \sup \Big[ \frac{h_M}{h_0}(\beta_0), \big(\frac{h_M}{h_0}(\beta_0)\big)^n \Big] \int_{-\rho}^{D-\rho} ||V(t)||^{n-1} dt .$$

Un calcul direct donne alors le résultat annoncé lorsque $\frac{h_M}{h_0}$ atteint son minimum sur $]0,1[$ . Si au contraire, le minimum est atteint au bord, le lemme 6.3 et le théorème de Bishop (théorème 1.6 (i)) donnent

$$\frac{h_M}{h_0} \geqslant \lim_{\beta\to 0} \frac{h_M(\beta)}{h_0(\beta)} = \frac{\operatorname{Vol} S^n}{\operatorname{Vol} M} \geqslant \frac{\omega}{\int_0^D s_K(t)^{n-1} dt} ,$$

ce qui implique également (iii). ∎

**E. L'hypothèse $L^\infty$ faite sur la partie négative de la courbure de Ricci peut être remplacée par une hypothèse intégrale.**

Pour tout point $x \in M$ , posons $r(x) = \mathrm{Inf}_{X \in T_x M, ||X||=1} \frac{\mathrm{Ric}(X,X)}{n-1}$ .

6.17. THÉORÈME. — *Soient $\alpha$ et $D$ deux constantes positives. Soit $p$ n'importe quel élément de $]n,+\infty]$ . Toute variété riemannienne $(M^n, g)$ dont le diamètre est majorée par $D$ et dont la courbure de Ricci obéit à l'inéquation*

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}\, M} \int_M \big( -1 - \frac{r}{\alpha^2} \big)_+^{p/2} \cdot dv_g \leqslant \frac{1}{2} \big( e^{B(p)\alpha D} - 1 \big)^{-1}$$

*vérifie*

*(i)* $h_{(M,g)}(\beta) \geqslant \frac{p\gamma(\alpha,D)}{2^{1/p}} \cdot \beta^{1-\frac{1}{p}}$ .

*(ii) Pour tout $i \in \mathbf{N}$ ,*

$$\lambda_i(M,g) \geqslant C_i(p)^2 . \gamma(\alpha, D)^2 . i^{2/p} .$$

*(iii) Pour tout domaine $\Omega \subset M$ dont le volume est inférieur à* $\frac{1}{2}\mathrm{Vol}(M)$ ,

$$\lambda_1^D(\Omega, g) \geqslant C_1(p)^2 \gamma(\alpha, D)^2 . \big( \frac{\mathrm{Vol}\, M}{2\,\mathrm{Vol}\,\Omega} \big)^{2/p} .$$

*(iv) Pour tous les $(x,y,t) \in M \times M \times \mathbf{R}^+$ ,*

$$\mathrm{Vol}(M,g).k_{(M,g)}(t,x,y) \leqslant \mathrm{Vol}(M^*, g_\varepsilon) k_{(M^*,g_\varepsilon)}(\gamma(\alpha,D)^2 t, x_0, x_0)$$

*où $(M^*, g_\varepsilon)$ est le "double cône" de dimension isopérimétrique $p$ , de rayon $L = 1$ et de pôle $x_0$ (cf. l'Appendice A.3) et où $B(p), \gamma(\alpha, D)$ et $C_i(p)$ sont des constantes universelles.*

La démonstration de ce théorème, la valeur des constantes impliquées ainsi que quelques applications sont données en [GT6].

*Motivations du théorème 6.17.* — Cet énoncé marque un progrès qualitatif par rapport aux théorèmes 6.15 et 6.16. Les hypothèses nous permettent en effet de considérer certains espaces singuliers sur lesquels il est admis que la courbure de Ricci puisse atteindre la valeur $-\infty$ . Dans les opérations de chirurgie riemannienne par exemple (*i.e.* construction de nouvelles variétés en découpant des variétés qui satisfont aux hypothèses et en les recollant entre elles), il est rare de pouvoir continuer à contrôler la norme $L^\infty$ de la partie négative de la courbure de Ricci, tandis qu'un contrôle de ses normes $L^{\frac{p}{2}}$ est plus accessible (*cf.* l'appendice de [GT6]). Il y a cependant une limite aux chirurgies qui sont possibles de manière à conserver un contrôle de la fonction isopérimétrique et/ou du spectre, limite que les *hypothèses du théorème 6.17 situent de manière optimale* (au moins sur le plan qualitatif). En effet, l'hypothèse faite sur la courbure de Ricci dans le théorème 6.17 peut s'exprimer : "la partie de la courbure de Ricci qui est inférieure à une constante préfixée $-\alpha^2$ est suffisamment petite en moyenne $L^{\frac{p}{2}}$ pour au moins un $p > n$". Les contre-exemples (construits par chirurgies successives) de l'appendice de [GT6] prouvent *qu'on ne peut affaiblir ces hypothèses* soit en remplaçant "$p > n$" par "$p \geqslant n$", soit en remplaçant "petite" par "bornée", soit en remplaçant la "moyenne $L^{p/2}$" par la "norme $L^{p/2}$". Enfin, les inégalités isopérimétriques des théorèmes 6.15 et 6.17 induisent des théorèmes de finitude topologique (*cf.* [GT2 et 5] et [GT6] sections 4 et 5). Les hypothèses $L^{p/2}$ (où $p = n+\varepsilon$) du théorème 6.17 donnent à ces estimations une formulation plus proche de celle donnée par les formules de Gauss-Bonnet et Chern-Weil, où une classe (plus restreinte) d'invariants topologiques est estimée à l'aide de normes $L^{n/2}$ de la courbure.

**F. Minoration du rapport entre $i^{\text{ème}}$ et $1^{\text{ère}}$ valeurs propres.**

6.18. THÉORÈME. — *Pour tout $n \in \mathbf{N} \setminus \{0,1\}$ , il existe une constante universelle $C(n)$ telle que toute variété riemannienne $(M,g)$ compacte, sans bord, de dimension $n$ , vérifie :*

*(i) $\frac{\lambda_i(M,g)}{\lambda_1(M,g)} \geqslant C(n).i^{2/n}$ dès que sa courbure de Ricci est positive ou nulle ou, plus généralement, dès que sa courbure de Ricci est minorée par $-(\frac{n-1}{n^2})H(M,g)^2$ , où $H(M,g)$ est la constante isopérimétrique de Cheeger.*

*(ii) $\frac{\lambda_i(M,g)}{\lambda_1(M,g)} \geqslant C(n)\big(e^{(n-1)D\sqrt{|K|}} - 1\big)^{-1}.i^{2/n}$ lorsque sa courbure de Ricci est minorée par $(n-1)K$ (où $K < 0$) et son diamètre majoré par $D$ .*

*Remarques.* — Ce théorème fournit un pendant au résultat de Payne qui majore $\frac{\lambda_2^D(\Omega)}{\lambda_1^D(\Omega)}$ pour tous les domaines plans $\Omega$ .

– L'hypothèse "$\frac{\text{Ricci}}{H(M,g)^2} \geqslant -\frac{n-1}{n^2}$" faite dans la partie (i) du théorème est justifiée par le fait que, sur le "double cusp" (*cf.* Appendice A.4) qui vérifie $\frac{\text{Ricci}}{H(M,g)^2} \geqslant -\frac{1}{n-1}$ , on a $\frac{\lambda_i(M,g)}{\lambda_1(M,g)} = 1$ (où les $\lambda_i$ désignent alors les valeurs du spectre de la forme quadratique associée au laplacien). Le fait que le "double cusp" n'est pas compact n'invalide pas ce contre-exemple, car on peut en faire une approximation par une suite de variétés de révolution compactes $(M^*, g_p)$ , dont le diamètre tend vers l'infini, telles que $\frac{\lambda_i(M,g_p)}{\lambda_1(M,g_p)}$ tende vers 1 quand $p$ tend vers l'infini.

– Ce contre-exemple explique aussi pourquoi on a besoin d'une hypothèse supplémentaire sur le diamètre dans la partie (ii) du théorème.

*Preuve de (i).* — Sous les hypothèses de (i), un résultat de P. Buser ([BU1]) implique que $\lambda_1(M,g) \leqslant 12.H(M,g)^2$ . Lorsque la courbure de Ricci est positive ou nulle le théorème découle donc du théorème 6.13. Lorsque la courbure de Ricci vérifie Ric$\geqslant -(n-1)K \geqslant -\frac{n-1}{n^2}H(M,g)^2$ , le théorème 6.11 (iii) implique que

$$\lambda_i(M,g) \geqslant A(n) \cdot \frac{\left(\int_0^R s_K(t)^{n-1}dt\right)^{\frac{2n-2}{n}}}{s_K(R)^{2n-2}} \cdot H(M,g)^2 i^{2/n} ,$$

où $R$ est défini comme solution de l'équation :

$$\frac{s_K(R)^{n-1}}{\int_0^R s_K(t)^{n-1}dt} = H(M,g) .$$

Notons $\alpha(n)$ la solution de l'équation

$$\frac{\text{sh}(\alpha(n))^{n-1}}{\int_0^\alpha \text{sh}(t)^{n-1}dt} = n ,$$

la décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{(\text{sh}\, x)^{n-1}}{\int_0^x (\text{sh}\, t)^{n-1}dt}$ (preuve du corollaire 6.7) et le fait que $H(M,g) \geqslant n\sqrt{|K|}$ assurent que $R\sqrt{|K|} \leqslant \alpha(n)$ . Par ailleurs, la croissance de la fonction $x \mapsto \frac{(\text{sh}\, x)^n}{\int_0^x (\text{sh}\, t)^{n-1}dt}$ et le théorème de P. Buser déjà cité donnent

$$\lambda_i(M,g) \geqslant A'(n)\frac{\left(\int_0^{\alpha(n)} \text{sh}\, t^{n-1}dt\right)^{\frac{2n-2}{n}}}{\text{sh}(\alpha(n))^{2n-2}} \cdot \lambda_1(M,g) \cdot i^{2/n} ,$$

ce qui achève la preuve de (i).

*Preuve de (ii).* — Nous pouvons supposer que $K$ est négatif et que $H(M,g) < n\sqrt{|K|}$ , les autes cas étant couverts par (i). Le théorème 6.15 (ii) implique alors que

$$\frac{h_M(\beta)}{\beta^{1-\frac{1}{n}}} \geqslant \left[(n-1)\sqrt{|K|}\right]^{1/n}.H(M,g)^{1-\frac{1}{n}}\left[e^{(n-1)\sqrt{|K|}.D} - 1\right]^{-\frac{1}{n}} .$$

Le théorème 5.6 (v), les calculs effectués dans la preuve de celui-ci et dans l'appendice A.3 (iv) donnent alors, par comparaison avec un double-cône euclidien,

$$\lambda_i(M,g) \geqslant B(n)\left(e^{(n-1)\sqrt{|K|}.D} - 1\right)^{-\frac{2}{n}}.H(M,g)^{2-\frac{2}{n}}.|K|^{1/n}.i^{2/n} . \tag{6.5}$$

Le théorème de P. Buser [BU1] donne, sous les hypothèses de (ii), $\lambda_1(M,g) \leqslant 2(n-1)\sqrt{|K|}.H(M,g) + 10.H(M,g)^2$ . En appliquant ce théorème, l'inégalité (6.5), la minoration du théorème 6.14 et en se souvenant du fait que $H(M,g) < n\sqrt{|K|}$ , nous achevons la démonstration du théorème 6.18. ■

## Appendice A

## Espaces de révolution

Un *espace de révolution* sera pour nous un cylindre $M^* = ]-L,L[\times S^{n-1}$ , muni d'une métrique qui, au point de coordonnées $(s,x)$ , s'écrit

$$g = (ds)^2 + b(s)^2.g_{S^{n-1}} ,$$

où $b$ est une fonction positive et paire sur $]-L,L[$ , $C^1$ par morceaux et tendant vers zéro lorsque $s$ tend vers $\pm L$ . $M^*$ est compactifiable par adjonction de deux points $x_0$ et $x_1$ appelés pôles. La régularité de la métrique en ces points n'est vérifiée que si $b(s-L) \sim s$ quand $s$ tend vers zéro (d'après (1.4)) et si $L$ est fini. Nous *noterons $\rho$ la fibration canonique* $]-L,L[\times S^{n-1} \to ]-L,L[$ . *Le demi-espace $M^*_-$* est l'ensemble $\rho^{-1}(]-L,0])$ . Plus généralement, le *domaine de révolution $\Omega_r$* est l'ensemble $\rho^{-1}(]-L,r])$ . Le *profil isopérimétrique $h^*$* est la fonction de $]0,\frac{1}{2}]$ dans $\mathbf{R}^+_*$ définie par

$$h^*\left(\frac{\operatorname{Vol}\Omega_r}{\operatorname{Vol}M^*}\right) = \frac{\operatorname{Vol}\partial\Omega_r}{\operatorname{Vol}M^*} .$$

**A.0.** *La courbure de Ricci de $(M^*,g_\varepsilon)$ , calculée en un point quelconque de $\rho^{-1}(s)$ et pour le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial s} =$ grad $\rho$ , est égale à l'expression $-\left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{d^2}{d\beta^2}\left(h^{*\frac{n}{n-1}}\right).h^{*\frac{n-2}{n-1}}$ , calculée au point $\beta(s) = \dfrac{\int_{-L}^{s} b(t)^{n-1}ds}{\int_{-L}^{L} b(s)^{n-1}ds} = \dfrac{\operatorname{Vol}_{g_\varepsilon}\left[\rho^{-1}(]-L,s[)\right]}{\operatorname{Vol}_{g_\varepsilon}(M^*)}$ .*

*Preuve.* — En traçant la formule (1.5), nous obtenons $\operatorname{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial s}\right) = -(n-1)\frac{b''}{b}$ . Le résultat se démontre par un simple changement de variable $s \mapsto \beta(s)$ . ■

**A.1.** *Soit $h^*$ une fonction croissante, définie sur $]0,\frac{1}{2}]$ , vérifiant les hypothèses de la définition 5.2. Supposons que $h^*$ vérifie de plus la propriété de sous-additivité : pour tous les $\beta_1,\beta_2$ tels que $\beta_1,\beta_2$ et $\beta_1+\beta_2 \in ]0,\frac{1}{2}]$ , $h^*(\beta_1)+h^*(\beta_2) \geqslant h^*(\beta_1+\beta_2)$ . Notons $(M^*,g_\varepsilon)$ la famille de variétés de révolution de dimension $n$ profilées sur $h^*$ (cf. définition en 5.B). Alors la fonction isopérimétrique vraie $h_{(M^*,g_\varepsilon)}$ de $(M^*,g_\varepsilon)$ (cf. définition 5.1) vérifie :*

*(i) $h_{(M^*,g_\varepsilon)}$ converge uniformément vers $h^*$ lorsque $\varepsilon$ tend vers zéro.*

*(ii) Si $n=2$ ou si $\frac{h^*(\beta)}{\beta}$ est borné, alors $(1-B\varepsilon)h^* \leqslant h_{(M^*,g_\varepsilon)} \leqslant h^*$ , où $B$ est une constante ne dépendant que de $h^*$ .*

*Preuve.* — En multipliant au besoin $b$ par une constante, nous supposerons que

$$\int_{-L}^{L} b(s)^{n-1}ds = 1 .$$

Fixons $\beta \in ]0, \frac{1}{2}]$ . Notons $\Omega_\varepsilon$ une famille de domaines à bord régulier vérifiant

$$\frac{\mathrm{Vol}_{g_\varepsilon}(\Omega_\varepsilon)}{\mathrm{Vol}_{g_\varepsilon}(M^*)} = \beta \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{Vol}_{g_\varepsilon}(\partial\Omega_\varepsilon)}{\mathrm{Vol}_{g_\varepsilon}(M^*)} = h_\varepsilon(\beta)(1 + 0(\varepsilon)) \ ,$$

où $h_\varepsilon$ désigne la vraie fonction isopérimétrique de la variété $(M^*, g_\varepsilon)$ . Notons $I_\varepsilon^+$(resp. $I_\varepsilon^-$, resp. $I_\varepsilon$) l'ensemble des points $s \in ]-L, L[$ tels que $f(s) = \frac{\mathrm{Vol}_{g_1}(\Omega_\varepsilon \cap \rho^{-1}(s))}{\mathrm{Vol}_{g_1}(\rho^{-1}(s))}$ soit supérieur à $\varepsilon$ (resp. inférieur à $(1-\varepsilon)$ , resp. compris entre $\varepsilon$ et $1-\varepsilon$). L'inégalité isopérimétrique sur la sphère $S^{n-1}$ implique que

$$(*) \qquad \mathrm{Vol}_{g_\varepsilon}(\partial\Omega_\varepsilon \cap \rho^{-1}(s)) \geqslant A.\mathrm{Inf}\left[\mathrm{Vol}_{g_\varepsilon}(\Omega_\varepsilon \cap \rho^{-1}(s)), \mathrm{Vol}_{g_\varepsilon}[(M\setminus\Omega_\varepsilon) \cap \rho^{-1}(s)]\right]^{\frac{n-2}{n-1}} .$$

En intégrant cette inégalité sur les ensembles $I_\varepsilon^+ \setminus I_\varepsilon$ , $I_\varepsilon^- \setminus I_\varepsilon$ et $I_\varepsilon$ , nous en déduisons que les volumes (pour la métrique $g_1$) des ensembles $\Omega_\varepsilon \cap \rho^{-1}(I_\varepsilon^- \setminus I_\varepsilon)$ , $(M \setminus \Omega_\varepsilon) \cap \rho^{-1}(I_\varepsilon^+ \setminus I_\varepsilon)$ et $\rho^{-1}(I_\varepsilon)$ sont respectivement majorés par $C.\varepsilon^{\frac{n}{n-1}}$ , $C.\varepsilon^{\frac{n}{n-1}}$ et $C.\varepsilon^{\frac{1}{n-1}}$ multipliés par $h^*(\beta)$ .

Parmi les composantes connexes de $I_\varepsilon$ , nous ne retenons que les intervalles $]s_i, t_i[$ $(i \in J)$ tels que $f(]s_i, t_i[) = ]\varepsilon, 1-\varepsilon[$ . Notons $J_-$(resp. $J_+$) l'ensemble des $i \in J$ tels que $s_i \leqslant 0$(resp. $s_i > 0$). Posons

$$s_- = \mathrm{Sup}\{s_i : i \in J_-\} \text{ (en particulier } s_- = -L \text{ si } J_- = \emptyset) \ ,$$

$$t_+ = \mathrm{Inf}\{t_i : i \in J_+\} \text{ (en particulier } t_+ = L \text{ si } J_+ = \emptyset) \ .$$

L'intervalle $]s_-, t_+[$ étant entièrement inclus dans un des deux ensembles $I_\varepsilon^+$ ou $I_\varepsilon^-$ , nous avons

$$\beta(t_+) - \beta(s_-) \leqslant (1-\beta) + C \cdot \varepsilon^{\frac{1}{n-1}} h_\varepsilon(\beta) \ ,$$

où $\beta(s) = \int_{-L}^{s} b(t)^{n-1} dt$ . La croissance de $h^*$ implique que l'application $\varphi_i : (s, x) \mapsto x$ de $\rho^{-1}([s_i, t_i])$ sur $S^{n-1}$ diminue les distances dès que les espaces de départ et d'arrivée sont munis des métriques $g_\varepsilon$ et $\widetilde{g}_\varepsilon = \varepsilon^2 \cdot \mathrm{Inf}[b(s_i), b(t_i)]^2 \cdot g_{S^{n-1}}$ . D'autre part, par définition de $I_\varepsilon$ , l'ensemble des $x$ tels que $\varphi_i^{-1}(x)$ rencontre à la fois $\Omega_\varepsilon$ et $M \setminus \Omega_\varepsilon$ a une mesure au moins égale à $(1-2\varepsilon) \cdot \mathrm{Vol}_{\widetilde{g}_\varepsilon} S^{n-1}$ . Ces deux constatations impliquent que

$$[1 + 0(\varepsilon)] h_\varepsilon(\beta) \geqslant \sum_i (1-2\varepsilon) \cdot \mathrm{Inf}(h^*[\beta(t_i)], h^*[\beta(s_i)])$$

$$[1 + 0(\varepsilon)] h_\varepsilon(\beta) \geqslant h^*[\beta(s_-) \pm C' \cdot \varepsilon^{\frac{1}{n-1}} h^*(\beta)] + h^*[\beta(t_+) \pm C' \cdot \varepsilon^{\frac{1}{n-1}} h^*(\beta)] \ .$$

La propriété de sous-additivité de $h^*$ et sa croissance impliquent que $h^*(\beta_1) + h^*(\beta_2) \geqslant h^*(|\beta_2 - \beta_1|)$ , d'où

$$[1 + 0(\varepsilon)] \cdot h_\varepsilon(\beta) \geqslant h^*[\beta(t_+) - \beta(s_-) \pm 2C' \varepsilon^{\frac{1}{n-1}} h^*(\beta)]$$

$$\geqslant h^*[\beta - 3C' \cdot \varepsilon^{\frac{1}{n-1}} h^*(\beta)] \ .$$

La propriété (i) découle de l'uniforme continuité de $h^*$ .

*Preuve de (ii).* — Lorsque $h^*(\beta) \leqslant C \cdot \beta$ , l'inégalité ci-dessus donne

$$[1 + 0(\varepsilon)] \frac{h^*[\beta(1 - C'' \cdot \varepsilon^{\frac{1}{n-1}})]}{h^*(\beta)} \leqslant \frac{h_\varepsilon(\beta)}{h^*(\beta)} \leqslant 1 \ .$$

La propriété (ii) découle, dans ce cas, des propriétés asymptotiques de $h^*$ (définition 5.2 (i)). En dimension 2, posons $I_\varepsilon = f^{-1}(]0, 1[)$ . En intégrant l'inégalité $(*)$ nous obtenons

$$(**) \qquad \mathrm{Mesure}(I_\varepsilon) \leqslant C \cdot \varepsilon \cdot h_\varepsilon(\beta) \ .$$

Par le difféomorphisme canonique de $S^1 \times ]-L, L[$ sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ , chaque composante connexe (notée $L_\varepsilon^i$) du bord de $\Omega_\varepsilon$ s'envoie sur une courbe fermée dont l'intérieur est noté $A_\varepsilon^i$ . Notons $J$ l'ensemble des $i$ tels que $A_\varepsilon^i$ ne contienne pas 0. La courbure de la métrique $g_\varepsilon$ étant uniformément majorée en dehors des pôles en vertu de l'appendice A.0 et du comportement asymptotique de $h^*$ (définition 5.2 (i)) qui implique que $h^*(\beta) \leqslant C \cdot \beta^{1/2}$ , on peut appliquer l'inégalité de Fiala (voir par exemple [ON]) qui donne

$$\mathrm{Vol}_{g_\varepsilon}(L_\varepsilon^i)^2 \geqslant 4\pi \,\mathrm{Vol}_{g_\varepsilon}(A_\varepsilon^i)[1 + C_1 \cdot \mathrm{Vol}_{g_\varepsilon}(A_\varepsilon^i)] \ .$$

En sommant, nous obtenons

$$\sum_{i \in J} \mathrm{Vol}_{g_\varepsilon}(A_\varepsilon^i)(1 + C_2 \cdot \varepsilon) \leqslant h_\varepsilon(\beta)^2 \cdot \mathrm{Vol}(M^*, g_\varepsilon)^2 \ .$$

En ajoutant (ou en retranchant) les $A_\varepsilon^i$ à $\Omega_\varepsilon$ de manière à supprimer les $L_\varepsilon^i$ du bord de $\Omega_\varepsilon$ , on diminue le volume de $\partial\Omega_\varepsilon$ en changeant $\beta$ en $(1 \pm C \cdot \varepsilon) \cdot \beta$ . C'est pourquoi nous supposerons désormais que toutes les composantes connexes de $\partial\Omega_\varepsilon$ sont des courbes qui entourent le pôle, chacune de ces courbes étant située dans une couronne $\rho^{-1}(]s_i, t_i[)$ où $]s_i, t_i[ \subset I_\varepsilon$ et $i \in K$ . La formule des accroissements finis et $(**)$ donnent

$$\sum_{i \in K} |h^*[\beta(t_i)] - h^*[\beta(s_i)]| \leqslant \mathrm{Sup}_s |h^* h^{*\prime}(s)| \cdot \sum_{i \in K} |t_i - s_i| \leqslant C \cdot \varepsilon \cdot h^*(\beta) \ .$$

La croissance de $h^*$ implique alors que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{Vol}_{g_\varepsilon}(\partial\Omega_\varepsilon)}{\mathrm{Vol}_{g_\varepsilon}(M^*)} &\geqslant \sum_{i \in K} \mathrm{Inf}(h^*[\beta(s_i)], h^*[\beta(t_i)]) \\ &\geqslant \sum_{i \in K} \mathrm{Sup}(h^*[\beta(s_i)], h^*[\beta(t_i)]) - C \cdot \varepsilon \cdot h^*(\beta) \ .\end{aligned}$$

La propriété de sous-additivité de $h^*$ et sa croissance impliquant que $h^*(\beta_1) + h^*(\beta_2) \geqslant h^*(|\beta_2 - \beta_1|)$ , nous obtenons :

$$h_\varepsilon(\beta)(1 + 0(\varepsilon)) \geqslant h^*(\beta) - C \cdot \varepsilon \cdot h^*(\beta) \ ,$$

ce qui achève la preuve de (ii). ∎

**A.2.** Si $h^*$ est une fonction qui vérifie les hypothèses de la définition 5.2 (i), considérons d'une part la forme quadratique $Q_{h^*}(u) = \int_0^1 u'(\beta)^2 h^*(\beta)^2 d\beta$ définie sur le sous-domaine $C_0^\infty(]0,1[)$ dense dans $L^2([0,1])$ . D'autre part, considérons la famille de variétés de révolution $n$-dimensionnelles $(M^*, g_\varepsilon)$ profilées sur $h^*$ et la forme quadratique $Q_\varepsilon$ canoniquement associée au laplacien de $g_\varepsilon$ . Notons $K_0$ l'ensemble des fonctions sur $M^* = ]-L, L[ \times S^{n-1}$ qui ne dépendent que de la première composante et $Q_\varepsilon^0$ la restriction de $Q_\varepsilon$ à $K_0$ .

PROPRIÉTÉS. — *En reprenant les notations de la définition 5.2, on a, si* $r \geqslant 0$ .

*(i)* $\mu_1(Q_{h^*}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_1(M^*, g_\varepsilon) = \lambda_1^D(M_-^*)$

*(ii) Spectre*$(Q_{h^*})$ = *Spectre*$(Q_\varepsilon^0) = \lim_{\varepsilon \to 0}$ *Spectre*$(Q_\varepsilon)$ . *En particulier le spectre de* $Q_\varepsilon^0$ *ne dépend ni de* $\varepsilon$ *ni de* $n$ .

*(iii) Pour tout domaine de révolution* $\Omega^*$ , *posons* $\beta = \frac{\mathrm{Vol}_{g_\varepsilon}(\Omega^*)}{\mathrm{Vol}_{g_\varepsilon}(M^*)}$ *($\beta$ est indépendant de $\varepsilon$). On a*

$$\lambda_1^D(\Omega^*, g_\varepsilon) = \mathrm{Inf}\left\{ \frac{\int_0^\beta |u'(s)|^2 . h^*(s)^2 ds}{\int_0^\beta u(s)^2 . ds} : u \in C_0^\infty(]0, \beta[) \right\} \ .$$

*(iv) Si $r > 0$ , l'équation de la chaleur admet une solution unique de donnée initiale $\delta_{x_0}$ sur $(M^*, g_\varepsilon)$ . Celle-ci vérifie*

$$\mathrm{Vol}(M^*, g_\varepsilon).k_{(M^*,g_\varepsilon)}(t, x_0, x_0) = \int_0^1 \left[\frac{\partial u}{\partial \beta}(\frac{t}{2}, \beta)\right]^2 d\beta \ ,$$

*où $u$ est l'unique solution de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} - h^{*2}(\beta)\frac{\partial^2 u}{\partial^2 \beta} = 0$ , de donnée initiale $u(0, \bullet) = 1$ , qui vérifie les conditions aux limites $u(t, 0) = 0$ et $u(t, 1) = 1$ pour tout $t > 0$ .*

*(v) Si $r \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$ , alors*

$$\lambda_{2,q}(M^*, g_\varepsilon) = \mathrm{Inf}\left\{\frac{\left(\int_0^1 |u'(\beta)|^2.h^*(\beta)^2 d\beta\right)^{1/2}}{\mathrm{Inf}_{a\in\mathbf{R}}\left(\int_0^1 |u(\beta) - a|^q.d\beta\right)^{1/q}} : u \in C^\infty([0, 1])\right\} \ .$$

*Preuve de (ii).* — Considérons la fibration canonique $\rho\ :\ M^* \to ]-L, L[$ (*cf.* A.1) et décomposons l'espace de Sobolev $H_1(M^*, g_\varepsilon)$ en deux sous-espaces supplémentaires $K_0$ et $K_\infty$ formés respectivement des fonctions constantes sur chaque fibre et d'intégrale nulle sur chaque fibre. Un calcul direct montre que ces deux sous-espaces sont simultanément $L^2$ et $Q_\varepsilon$-orthogonaux. Le spectre de $Q_\varepsilon$ est donc la réunion des spectre de ses restrictions à $K_0$ et à $K_\infty$ . Le premier de ces deux spectres est celui de la forme quadratique $u \mapsto \int_{-L}^L u'(s)^2 b(s)^{n-1}.ds$ , de domaine $C_0^\infty(]-L, L[) \subset L^2(]-L, L[, b(s)^{n-1}ds)$ . En faisant le changement de variable $\beta(s) = \frac{\int_{-L}^s b(t)^{n-1}dt}{\int_{-L}^L b(t)^{n-1}dt}$ , on démontre que ce premier spectre est aussi celui de $Q_{h^*}$ . Par ailleurs, toute fonction $f \in K_\infty$ vérifie, sur chaque fibre,

$$\int_{\rho^{-1}(s)} |df|^2_{g_\varepsilon}.dv_{g_\varepsilon} \geqslant \frac{\lambda_1(S^{n-1})}{\varepsilon^2.b(s)^2}\int_{\rho^{-1}(s)} f^2.dv_{g_\varepsilon} \ .$$

En intégrant sur $]-L, L[$ , on en déduit que le bas du spectre de la restriction de $Q_\varepsilon$ à $K_\infty$ est minoré par $\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\lambda_1(S^{n-1})}{\sup_s[b(s)]^2}$ , qui tend vers l'infini. Ceci implique que $\mu_i(Q_{h^*}) = \mu_i(Q_\varepsilon)$ pour $\varepsilon$ assez petit.

*Preuve de (v).* — On procède de manière identique en décomposant $f$ en ses composantes $f_0$ et $f_\infty$ sur $K_0$ et $K_\infty$ . On démontre de même que, par rapport à la métrique $g_\varepsilon$ ,

$$\frac{\|df_\infty\|_{L^2}}{\mathrm{Vol}(M^*)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.\mathrm{Inf}_a\|f_\infty - a\|_{L^q}} \geqslant \frac{C}{\varepsilon.\sup(b)} \ .$$

Ceci prouve que, lorsque $\varepsilon$ est petit, l'étude peut être restreinte aux fonctions de $K_0$ . Le même changement de variable $s \mapsto \beta(s)$ que précédemment donne (v).

*Preuve de (iii).* — Le premier espace propre de $(\Omega^*, g_\varepsilon)$ (pour le problème de Dirichlet) étant de dimension 1, ses fonctions sont invariantes par les isométries de $g_\varepsilon$ , donc appartiennent à $K_0$ . Le même changement de variable $s \mapsto \beta(s)$ que précédemment démontre que $\lambda_1^D(\Omega^*, g_\varepsilon)$ est égale à la première valeur propre de la restriction de $Q_{h^*}$ aux fonctions qui s'annulent en $\beta$ .

*Preuve de (i).* — La première égalité se déduit de (ii). Le corollaire 4.2 implique que $\lambda_1(M^*, g_\varepsilon) \leqslant \lambda_1^D(M^*_-)$ . Soit $f$ n'importe quelle fonction d'intégrale nulle, appartenant à $K_0$ A un changement de signe près, on peut supposer qu'une des composantes connexes de l'ensemble $\{f \geqslant 0\}$ est incluse dans un des deux demi-espaces $M^*_-$ ou $M^*_+$ , ce qui donne $\mu_1(Q^0_\varepsilon) = \lambda_1^D(\{f \geqslant 0\}) \geqslant \lambda_1^D(M^*_-)$ . On achève de prouver (i) en appliquant de nouveau (ii).

*Preuve de (iv).* — Si $r > 0$, alors $\int_{1/2}^{0} \frac{1}{h^*(x)}dx < +\infty$ et les variétés $(M^*, g_\varepsilon)$ sont compactes. La proposition 2.8 (iii) assure que la singularité de $g_\varepsilon$ à l'équateur ne pose pas de problème pour l'existence et l'unicité de la solution fondamentale de l'équation de la chaleur. Le seul problème peut venir des singularités de $g_\varepsilon$ aux pôles. Posons $r = \frac{1}{p} > 0$. D'après la proposition 2.8 (iii) et l'écriture du laplacien en coordonnées polaires autour de $x_0$, il suffit de prouver l'existence des solutions $v(t,s)$ de l'équation $-\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - (n-1)\frac{b'}{b}(s) \cdot \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial v}{\partial t} = 0$, vérifiant les conditions aux limites $\frac{\partial v}{\partial s}(t,-L) = 0$ et $v(t,0) = 0$(resp. $\frac{\partial v}{\partial s}(t,0) = 0$). L'hypothèse de la définition 5.2 (i) assure que $(n-1)\cdot\frac{b'}{b}(s) = h^{*'}[\beta(s)] \sim \frac{p-1}{s+L}$, donc qu'il suffit de savoir résoudre l'équation ci-dessus lorsque $\frac{b'}{b}(s) = \frac{p-1}{s+L}$, ce que nous faisons en A.3 à l'aide de fonctions de Bessel. Notons encore $v(t,s)$ la solution de l'équation de la chaleur de donnée initiale $\delta_{x_0}$ sur $(M^*, g_\varepsilon)$ (écrite en coordonnées polaires, cette solution est invariante par les isométries de $g_\varepsilon$, donc appartient à $K_0$). Faisant une fois de plus le changement de variable $s \mapsto \beta(s)$, nous définissons $\tilde{v}$ par $\tilde{v}(t,\beta(s)) = \mathrm{Vol}(M^*, g_\varepsilon)v(t,s)$. Cette fonction vérifie l'équation

$$-h^*(\beta)^2 \cdot \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \beta^2} - 2h^{*'}(\beta)h^*(\beta) \cdot \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \beta} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = 0 .$$

Posons $u(t,\beta) = \int_0^\beta \tilde{v}(t,x)dx$, on obtient une solution de l'équation

$$-h^*(\beta)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

qui vérifie $u(0,\beta) = 1$, $u(t,0) = 0$ et $u(t,1) = 1$. L'unicité de cette solution vient du fait que $u(t,\beta) - \beta$ est l'unique solution, située dans $L^2([0,1], \frac{1}{h^*(\beta)^2}d\beta)$, de l'équation de la chaleur associée à l'opérateur auto-adjoint $L = -h^*(\beta)^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial^2 \beta}$ dont la donnée initiale soit la fonction $\beta \mapsto 1 - \beta$. On conclut en utilisant la loi de semi-groupe : $k_{g_\varepsilon}(t, x_0, x_0) = \int_{M^*} k_{g_\varepsilon}\left(\frac{t}{2}, x_0, y\right)^2 dv_{g_\varepsilon}(y)$ et en remarquant que, en vertu du changement de variable effectué,

$$\mathrm{Vol}(M^*, g_\varepsilon)^{p-1} \int_{M^*} k(t, x_0, y)^p dv_{g_\varepsilon} = \int_0^1 \tilde{v}(t,\beta)^p . d\beta . \qquad \blacksquare$$

**A.3. Le double-cône de dimension isopérimétrique** $p$.

Nous appellerons ainsi la variété $M^* = ]-L, L[ \times S^{n-1}$, munie de la métrique

$$g_\varepsilon = (ds)^2 + \varepsilon^2(L - |s|)^{2(\frac{p-1}{n-1})} . g_{S^{n-1}}$$

où $p \geqslant n$), que l'on compactifie en ajoutant les deux pôles $x_0$ et $x_1$. Cette variété peut aussi être obtenue par recollement de 2 demi-espaces $M_+^*$ et $M_-^*$. Lorsque $p = n$, la variété est obtenue par recollement de deux cônes euclidiens. Cette constatation justifie l'appellation "double-cône" et explique la ressemblance entre le spectre de cette variété et celui d'une boule euclidienne.

PROPRIÉTÉS. —

*(i) Les double-cônes $(M^*, g_\varepsilon)$ sont les variétés de révolution profilées sur la fonction*

$$h^*(\beta) = \frac{p}{2^{1/p}L}\beta^{1-\frac{1}{p}} .$$

*La dimension isopérimétrique au voisinage du pôle est égale à $p$.*

*(ii) Le spectre de $(M^*, g_\varepsilon)$ tend, lorsque $\varepsilon$ tend vers zéro, vers la suite*

$$0 = \frac{p_0^2}{L^2} < \frac{j_1^2}{L^2} < \frac{p_1^2}{L^2} < \cdots < \frac{j_k^2}{L^2} < \frac{p_k^2}{L^2} < \cdots ,$$

*où $j_k$ et $p_k$ sont respectivement les kièmes zéros positifs des fonctions de Bessel $J_{\frac{p-2}{2}}$ et $J'_{\frac{p-2}{2}}$ , où $J_l(x) = \Gamma(l+1)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(x/2)^{2k}}{k!\Gamma(k+l+1)}$ .*

*(iii) La première valeur propre, pour le problème de Dirichlet, du domaine $\Omega_s^* = \{(t,x) \in M^* : t \leqslant s\}$ est égale à $\frac{j_1^2}{(s+L)^2}$ .*

*(iv) Le noyau de l'opérateur de la chaleur vérifie, au pôle $x_0$ et en tout instant $t$ ,*

$$\mathrm{Vol}(M^*, g_\varepsilon)k_{(M^*,g_\varepsilon)}(t, x_0, x_0) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{-p_k^2 \frac{t}{L^2}} + \beta_k e^{-j_k^2 \frac{t}{L^2}} ,$$

$$\mathrm{Vol}(M^*, g_\varepsilon)k_{(M^*,g_\varepsilon)}(t, x_0, x_0) \geqslant C.L^p.(4\pi t)^{-p/2} ,$$

*où*

$$\alpha_k = \frac{1}{2^{p-3}.p.\Gamma(\frac{p}{2})^2} \cdot \frac{j_k^{p-2}}{J^2_{p/2}(j_k)} ,$$

$$\beta_k = \frac{1}{2^{p-3}.p.\Gamma(\frac{p}{2})^2} \cdot \frac{p_k^{p-2}}{J^2_{\frac{p-2}{2}}(p_k)} ,$$

*et où*

$$C = \frac{2}{p} \cdot \frac{2\pi^{p/2}}{\Gamma(p/2)} .$$

*(v) L'espace de Sobolev $H_1^2(M^*, g_\varepsilon)$ est inclus dans $L^q(M^*, dv_{g_\varepsilon})$ ssi $\frac{1}{p} \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$ . Dans le cas limite $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$ , on a*

$$\frac{K(p)}{L} \leqslant \lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_{2,q}(M^*, g_\varepsilon) \leqslant 2^{\frac{1}{p}} \frac{K(p)}{L}$$

*où*

$$K(p) = \frac{p^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}}{2^{2/p}}(p-2)^{1/2}\left(\frac{\Gamma(\frac{p}{2})^2}{\Gamma(p)}\right)^{1/p} .$$

*Remarque.* — L'énoncé ci-dessus montre bien que la dimension $n$ de $M^*$ en tant que variété ne joue aucun rôle dans le comportement asymptotique du spectre du noyau de l'opérateur de la chaleur au pôle et dans les inégalités de Sobolev et que c'est la dimension isopérimétrique qui apparaît dans les estimées.

*Preuve.* — (i) se déduit immédiatement de la définition de $h^*$ . Comme $(M^*, g_\varepsilon)$ est le double du demi-espace $M^*_-$ (au sens donné à ce mot en 2.E.a), la proposition 2.8 implique que son spectre est la réunion des deux spectres des problèmes de Neumann et de Dirichlet sur $M^*_-$ . Lorsque $\varepsilon$ tend vers zéro, la seule partie de ces spectres qui subsiste est, d'après la preuve de A.2, celle qui correspond aux fonctions situées dans $K_0$ , c'est-à-dire du type $u(s,x) = f(s+L)$ . Trouver les fonctions propres $u$ et les valeurs propres correspondantes $\lambda$ équivaut (en écrivant le laplacien en coordonnées polaires autour de $x_0$) à trouver toutes les fonctions $f$ et les scalaires $\lambda$ tels que l'équation

$$f''(s) + \frac{p-1}{s} f'(s) + \lambda f(s) = 0 , \quad f'(0) = 0 ,$$

ait une solution $f$ qui vérifie également $f(L) = 0$ (resp $f'(L) = 0$) quand il s'agit du problème de Dirichlet (resp. de Neumann). Les fonctions propres sont de la forme $u_k(s,x) = f_k(s) =$

$\beta_k . J_{\frac{p-2}{2}}(s\sqrt{\lambda_k})$ (resp. $u_k(s,x) = f_k(s) = \alpha_k J_{\frac{p-2}{2}}(s\sqrt{\lambda_k})$) . La condition au bord implique donc que $L\sqrt{\lambda_k}$ doit être choisi dans la liste des zéros de $J_{\frac{p-2}{2}}$ (resp. $J'_{\frac{p-2}{2}}$) . Les propriétés classiques des fonctions de Bessel permettent de démontrer que les $u_k$ ainsi construits engendrent un sous-espace dense de $K_0$ , nous en déduisons (ii) et (iii). On déduit (iv) du fait que, d'après la proposition 2.8,

$$k_{(M^*,g_\varepsilon)}(t,x_0,x_0) = \frac{1}{2}k_N(t,x_0,x_0) + \frac{1}{2}k_D(t,x_0,x_0) \ ,$$

où $k_D$ (resp. $k_N$) est le noyau de l'opérateur de la chaleur du demi-espace $M^*_-$ pour le problème de Dirichlet (resp. de Neumann). On calcule $k_D$ (resp. $k_N$) par la formule classique (*cf.* 2.D)

$$\mathrm{Vol}(M^*_-, g_\varepsilon).k_{D(\text{resp. } N)}(t,x_0,x_0) = \sum_k e^{-\lambda_k t} u_k(x_0)^2$$

où les $u_k$ sont normalisés de sorte que

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(M^*_-, g_\varepsilon)} \int_{M^*_-} u_k^2 . dv_{g_\varepsilon} = 1 \ .$$

Remarquons que cette condition fixe le choix des coefficients $\alpha_k$ et $\beta_k$ (dont le calcul donné ici en (iv) dérive des propriétés classiques des fonctions de Bessel, *cf.* [B–G1] et [A–S]). Ceci démontre la première partie de (iv). Considérons maintenant la fonction $u$ définie sur $\mathbf{R}^+ \times M^*$ par $u(t,y) = (4\pi t)^{-p/2} e^{-\frac{d^2(x_0,y)}{4t}}$ et posons $\rho(\bullet) = d(x_0,\bullet)$ . En tout point régulier de $\rho$ , on a (d'après (1.7)) $\Delta\rho = -(n-1)\frac{b'}{b} \geqslant -\frac{p-1}{\rho}$ . Comme $\rho$ est de classe $C^1$ sur l'équateur (*cf.* 2.E.a), l'ensemble de ses points singuliers se réduit à $\{x_0, x_1\}$ et est de mesure $(n-1)$-dimensionnelle nulle. Comme $u$ est de gradient borné, la formule de Green s'applique et donne, pour toute fonction positive $C^\infty$ $\varphi$ ,

$$\int_{M^*} \varphi.(\Delta u + \frac{\partial u}{\partial t}) dv_{g_\varepsilon} \leqslant \int_{M^* \setminus \{x_0,x_1\}} \varphi.\Big( -\frac{\partial^2 u}{\partial^2 \rho} - \frac{p-1}{\rho}.\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial t}\Big) = 0 \ .$$

Par ailleurs, par définition de la mesure $dv_{g_\varepsilon}$ , nous avons

$$\lim_{t\to 0_+} u(t,\bullet).dv_{g_\varepsilon} = \frac{p}{2L^p}\frac{\Gamma(p/2)}{2\pi^{p/2}}.\mathrm{Vol}(M^*, g_\varepsilon).\delta_{x_0} \ .$$

Le principe du maximum permet alors de comparer $k_{(M^*,g_\varepsilon)}$ et $u$ et achève la preuve de (iv). ∎

*Preuve de (v).* — On applique A.2,(v) avec le changement de variable $\beta \to s(\beta) = 2^{1/p}.L.\beta^{1/p}$ . Dans un premier temps, choisissons $a$ égal à $u(\frac{1}{2})$ , ceci donne, lorsque $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$ ,

$$\frac{2^{1/p}.L}{p^{1/p}}.\lambda_{2,q}(M^*, g_\varepsilon) \geqslant \operatorname*{Inf}_{\substack{u \ t.q \\ u(L)=0}} \frac{\left(\int_0^L |u'(s)|^2 s^{p-1} ds\right)^{1/2}}{\left(\int_0^L |u(s)|^q s^{p-1} ds\right)^{1/q}} \ .$$

Le second membre se calcule grâce au lemme de Bliss (*cf.* [AU], proposition 2.18, p. 42) et est égal à $[p(p-2)]^{1/2}\left[\frac{\Gamma(p/2)^2}{2\Gamma(p)}\right]^{1/p}$ . Reprenons la même démarche, mais utilisons cette fois le fait que $\frac{2^{1/p}L}{p}.h^*(\beta)$ est inférieur à $\beta^{1-\frac{1}{p}}$ et à $(1-\beta)^{1-\frac{1}{p}}$ , nous obtenons, en faisant $u_1(s) = u[\beta(s)]$ et $u_2(s) = u[1-\beta(s)]$ ,

$$\frac{2^{2/p}L^2}{p^{2/p}}.\lambda_{2,q}(M^*, g_\varepsilon)^2 \leqslant$$

$$\inf_{u_1 u_2} \sup_{R\in[0,2L]} \frac{\int_0^R u_1'(s)^2 s^{p-1} ds + \int_0^{2L-R} u_2'(s)^2 s^{p-1} ds}{\left(\int_0^R |u_1(s) - u_1(R)|^q s^{p-1} ds + \int_0^{2L-R} |u_2(s) - u_2(R)|^q s^{p-1} ds\right)^{2/q}} \ .$$

On conclut en utilisant l'inégalité

$$(a+b)^{2/q} \geqslant 2^{\frac{2}{q}-1}\left(a^{\frac{2}{q}}+b^{\frac{2}{q}}\right) .$$

Si au contraire $\frac{1}{p}<\frac{1}{2}-\frac{1}{q}$ , alors la fonction $f(x)=d(x_0,x)^{-\frac{2}{q}}$ est de norme $H_1$ finie tandis que la norme de $(f-a)$ est toujours infinie, ce qui achève la preuve. ∎

**A.4. Les "double-cusps".**

Nous appellerons ainsi la variété $M^*=]-\infty,+\infty[\times S^{n-1}$ , munie des métriques

$$g_\varepsilon=(ds)^2+\varepsilon^2.e^{-2\delta.|s|}.g_{S^{n-1}} ,$$

où $\delta$ est une constante positive arbitraire.

Cette variété peut aussi être obtenue par recollement de deux cylindres hyperboliques infinis ou "cusps".

PROPRIÉTÉS. —

*(i) Les "double-cusps" sont les variétés de révolution $n$-dimensionnelles profilées sur la fonction $h^*(\beta)=(n-1).\delta.\beta$ . En dimension $n=2$ , leur fonction isopérimétrique $h_\varepsilon$ (cf. définition 5.1) vérifie*

$$(1-B\sqrt{\varepsilon})h^* \leqslant h_\varepsilon \leqslant h^* .$$

*En particulier, leur dimension isopérimétrique au voisinage des pôles vaut $+\infty$ .*

*(ii) Le spectre du demi-espace $M^*_-$ , pour le problème de Dirichlet, est égal à $]\frac{(n-1)^2}{4}\delta^2,+\infty[$ .*

*(iii) Le spectre de $(M^*,g_\varepsilon)$ est égal à $\{0\}\cup]\frac{(n-1)^2\delta^2}{4},+\infty[$ lorsque $\varepsilon$ est assez petit.*

*Preuve.* — La démonstration de (i) est semblable à celle de A.1. Le fait que $M^*_-$ soit égal à $]\frac{(n-1)^2\delta^2}{4},+\infty[$ lorsque $\dim(M^*)=2$ est un résultat classique de théorie spectrale sur les variétés hyperboliques. Ce résultat s'étend facilement au cas de dimension quelconque puisqu'il ressort, de la décomposition $H_1=K_0+K_\infty$ de A.2, que la partie du spectre correspondant aux fonctions situées dans $K_0$ est insensible à la dimension et ne dépend que de $h^*$ . Ceci prouve (ii). On en déduit également (iii), car toute fonction $f$ de $M^*$ dans $\mathbf{R}$ qui appartient à $K_0$ et est orthogonale aux fonctions constantes a son quotient de Rayleigh minoré par $\mu_1^D(\{x : f(x)\geqslant 0\})$ . A un changement de signe près, l'ensemble $\{f\geqslant 0\}$ est inclus dans un des deux demi-espaces, donc le bas de son spectre est minoré par $\frac{(n-1)^2\delta^2}{4}$ . On conclut en utilisant la proposition 2.8 (i). ∎

**A.5. Une suite de variétés $(M^*,g_\varepsilon)$ vérifiant $h_M(\beta)\geqslant C.\beta^{1+\alpha}$ $(\alpha>0)$ et telles que $\lim_{n\to\infty}\lambda_k(M^*,g_n)=0$.**

Considérons le cylindre $C_n=[0,n^\alpha]\times S^1\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right)$ , muni de la métrique produit, où $S^q(R)$ désigne la sphère de dimension $q$ et de rayon $R$ . Nous obtenons $(M^*,g_n)$ en recollant une hémisphère de $S^2\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right)$ et une sphère $S^2(1)$ (de laquelle on a préalablement excisé une boule géodésique de rayon $\frac{1}{n^{1+\alpha}}$) aux deux bouts du cylindre. Pour tout domaine $\Omega$ de $M$ , on a

$$\frac{\operatorname{Vol}\partial\Omega}{\operatorname{Min}(\operatorname{Vol}\Omega,\operatorname{Vol}M\setminus\Omega)^{1+\alpha}}\geqslant C>0 .$$

Par ailleurs les fonctions $u_k$ , définies sur $C_n$ par $u_k(s,\theta)=\sin[\frac{k\pi s}{n^\alpha}]$ ont leur quotient de Rayleigh majoré par $(\frac{k\pi}{n^\alpha})^2$ . On achève la preuve par le principe du min-max (théorème 2.5). ∎

**A.6. Une suite de variétés de révolution $(M^*,g_k)$ dont chaque valeur propre du spectre tend vers zéro, bien que volume et diamètre restent à peu près constants (exemple faisant partie du folklore).**

Découpons $[-1,1]$ en $(4k+1)$ intervalles égaux notés $I_0,\ldots,I_{4k}$ . Considérons une fonction paire $b_k$ de $[-1,1]$ dans $[0,4]$ , égale à $\frac{1}{k^3}$ sur les intervalles d'indice impair et d'intégrale égale à $\frac{1}{k}$ sur les intervalles d'indice pair, telle que $b_k(-1) = b_k(1) = 0$ . Définissons la métrique $g_k$ sur $M^* = [-1,1] \times S^{n-1}$ par $g_k = (ds)^2 + b_k(s)^{\frac{2}{n-1}}.g_{S^{n-1}}$ . Notons $\varphi_j$ la fonction continue, affine sur chacun des intervalles $I_l$ , qui vaut 1 sur $I_{2j}$ et zéro sur les $I_{2q}$ pour tout $q \neq j$ . Les fonctions $u_j$ , définies sur $M^*$ par l'égalité $u_j(s,x) = \varphi_j(s)$ , sont de supports disjoints et vérifient $\frac{\int_M |\nabla u_j|^2.dv_{g_k}}{\int_M u_j^2.dv_{g_u}} \leqslant \frac{5}{k}$ . Le principe du min-max (*cf.* le théorème 2.5) implique que $\lim_{k\to\infty} \lambda_i(M^*, g_k) = 0$ . ∎

## Bibliographie


[AN] ALMGREN F. — *Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems*, Mem. Am. Math. Soc. **165** (vol. 4), 1976.

[A–S] ABRAMOWITZ M., STEGUN I. — *Handbook of mathematical functions*, Dover, 1965.

[AT] AZENCOTT R. — *Behaviour of diffusion semi-groups at infinity*, Bull. Soc. Math. France , **102** (1974), 193–240.

[AU] AUBIN T. — *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, J. Differential Geom., **11** (1976), 573–598.

[BA] BANDLE C. — *Isoperimetric inequalities and applications*, Monographs and Studies in Maths, Pitman, 1980.

[B–B–G] BÉRARD P., BESSON G., GALLOT S. — *Sur une inégalité isopérimétrique qui généralise celle de Paul Lévy-Gromov*, Invent. Math., **80** (1985), 295–308.

[B–C] BISHOP R., CRITTENDEN R. — *Geometry of Manifolds*, Acad. Press, New-York, 1964.

[BE1] BÉRARD P. — *Spectres et groupes cristallographiques I, Domaines Euclidiens*, Invent. Math., **58** (1980), 179–199.

[BE2] BÉRARD P. — *Spectral Geometry : Direct and Inverse Problems*, Lecture Notes in Math. Springer **1207**, 1986.

[B–G1] BÉRARD P., GALLOT S. — *Inégalités isopérimétriques pour l'équation de la chaleur et application à l'estimation de quelques invariants*, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, exposé XV, Ecole Polytechnique Palaiseau, 1984.

[B–G2] BÉRARD P., GALLOT S. — *Notes d'un cours à l'Ec. Norm. Sup. Paris (non publié)*,1985.

[B–G–M] BERGER M., GAUDUCHON P., MAZET E. — *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lecture Notes in Math. Springer **194**, 1971.

[BI] BOMBIERI E. — *Theory of minimal surfaces and a counter-example to Bernstein conjecture in High Dimension*, Lecture Notes, Courant Institut, 1970.

[B–M] BÉRARD P., MEYER D. — *Inégalités isopérimétriques et applications*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **15** (1982), 513–542.

[B–P] BAVARD C., PANSU P. — *Sur le volume minimal de* $\mathbf{R}^2$, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **19** (1986), 479–490.

[BR] BERGER M. — *Cours à l'Université d'Osaka (rédigé par T. Tsujishita)*, Public. of the Department of Math. of Osaka University, Toyonaka (in japanese), nov.1981.

[BU1] BUSER P. — *A note on the isoperimetric constant*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **15** (1982), 213–230.

[BU2] BUSER P. — *On Cheeger's Inequality* $\lambda_1 \geqslant h^2/4$ *, in Geometry of the Laplace Operator*, Proc. Symposia in Pure Math, **36** (1980), 29–77.

[CH] CHENG S.Y. — *Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications*, Math. Z, **143** (1975), 289–297.

[CHE] CHEEGER J. — *A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian, Problems in Analysis*, A Symposium in Honor of Salomon Bochner, Robert C. Gunning editor, Princeton Univ. Press 195–199, 1970.

[C–G] COLIN DE VERDIÈRE Y., GALLOT S. — *non publié*,.

[CL] CHAVEL I. — *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Pure Appl. Math., 1984.

[CR1] CROKE C.B. — *Some isoperimetric inequalities and eigenvalues estimates*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **13** (1980), 419–435.

[CR2] CROKE C.B. — *An eigenvalues pinching theorem*, Invent. Math., **68** (1982), 253–256.

[CR–GV] CHEEGER J., GROMOV M. — *Collapsing Riemannian Manifolds while keeping their curvature bounded* ,preprint.

[DK] DODZIUK J. — *Maximum principle for Parabolic inequalities and the heat flow on open manifolds*, Indiana Univ. Math. J, **32** (1983), 703–716.

[FA1] FUKAYA K. — *Collapsing Riemannian manifolds and eigenvalues of the Laplace operator*, Inv. Math., **87** (1987), 517–547.

[FA2] FUKAYA K. — *A boundary of the set of Riemannian manifolds with bounded curvature and diameter*, Preprint, 1986.

[FR] FABER G. — *Beweis dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundtongibt*, Sitzungsber. Bayer. Akad. der Wiss. Math.-Phys., Munich, 169–172, 1923.

[FS] FRIEDRICHS K.O. — *Differential forms on Riemannian manifolds*, Comm. in pure and applied Math, vol. VIII (1955), 551–590.

[GE] GAGE M. — *Upper Bounds for the First Eigenvalue of the Laplace-Beltrami Operator*, Indiana Univ. Math. J., **29** (1980), 897–912.

[G–H–L] GALLOT S., HULIN D., LAFONTAINE J. — *Riemannian Geometry*, Universitext, Springer, 1987.

[G–M] GALLOT S., MEYER D. — *D'un résultat hilbertien à un principe de comparaison entre spectres. Applications*, Prépublication Institut Fourier, n° 82, Grenoble, 1987.

[GT1] GALLOT S. — *Variétés dont le spectre ressemble à celui d'une sphère*, Astérisque , **80**, 1980.

[GT2] GALLOT S. — *Inégalités isopérimétriques sur les variétés compactes sans bord*, Preprint Univ. Savoie, exposé par M. Berger dans [BR], Juin1981.

[GT3] GALLOT S. — *A Sobolev inequality and some geometric applications, Spectra of Riemannian Manifolds (actes du colloque de Kyoto 1981)*, Kaigai Publ., 45–55, 1983.

[GT4] GALLOT S. — *Inégalités isopérimétriques, courbure de Ricci et invariants géométriques I*, C. R. Acad. Sci. Sér. I Math., **296** (1983), 333–335.

[GT5] GALLOT S. — *Inégalités isopérimétriques, courbure de Ricci et invariants géométriques II*, C. R. Acad. Sci. Sér. I Math., **296** (1983), 365–368.

[GT6] GALLOT S. — *Isoperimetric inequalities based on integral norms of Ricci curvature*, Colloque en l'honneur de Paul Lévy (Ecole Polytechnique, juin 1987), to appear in Astérisque.

[GV1] GROMOV M. — (rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu); *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Textes Math. n° 1, 1981.

[GV2] GROMOV M. — *Paul Levy's isoperimetric inequality*, Preprint I.H.E.S., 1980.

[GV3] GROMOV M. — *Curvature, diameter and Betti number*, Comment. Math. Helv., **56** (1981), 179–197.

[H–K] HEINTZE E., KARCHER H. — *A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **11** (1978), 451–470.

[KN1] KRAHN E. — *Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft der Kreise*, Math. Ann., **94** (1924), 97–100.

[KN2] KRAHN E. — *Über Minimaleigenschaften der Kugel in drei und mehr dimensionen*, Acta Comm. Univ. Tartu (Dorpat), **A9** (1926), 1–44.

[LE] LÉVY P. — *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris, 1951.

[LI] LI P. — *On the Sobolev Constant and the p-spectrum of a compact Riemannian Manifold*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **13** (1981), 451–457.

[L–Y] LI P., YAU S.T. — *Estimates of eigenvalues of a compact riemannian manifold*, Proc. Sympos. Pure Math., **36** (1980), 205–209.

[ME] MEYER D. — *Un lemme de géométrie hilbertienne et des applications à la géométrie riemannienne*, C. R. Acad. Sci. Sér. I Math., **295** (1982), 467–469.

[MI] MASSARI U. — *Esistenza e Regolaritá delle Ipersuperfici di Curvatura Media Assegnata in* $\mathbf{R}^n$, Arch. Rat. Mech. Anal., **55** (1974), 357–382.

[M–F] MORSE P., FESHBACH. — *Methods of theoritical Physics*, Mc Graw-Hill, 1953.

[MO] MOSER J. — *On the volume element on a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc., **120** (1965), 286–294.

[M–S] MC KEAN H.P., SINGER I.M. — *Curvature and the Eigenvalues of the Laplacian*, J. Differential Geom., **1** (1967), 43–69.

[ON] OSSERMAN R. — *The Isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc., **84** (1978), 1183–1238.

[PE] PAYNE L.E. — *Isoperimetric inequalities and their applications*, SIAM Rev., vol. 9, **3** (1967), 453–488.

[P–S] POLYA G., SZEGO G. — *Isoperimetric inequalities in Mathematical Physics*, Ann. of Math. Stud. **77**, 1953.

[R–S] REED M., SIMON B. — *Methods of Modern Mathematical Physics, vol. I à IV*, Acad. Press, 1978.

[SP] SPIVAK M. — *A comprehensive introduction to differential geometry*, Publish or Perish Inc., (5 volumes).

[TA] TALENTI G. — *Elliptic equations and rearrangements*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **3** (1976), 697–718.

[WL] WEYL H. — *Der Asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte Linearer partieller Differentialgleichungen*, Math. Ann., **71** (1912), 441–469.

Sylvestre GALLOT
Université de Savoie
B.P. 1104
73011 CHAMBÉRY
et L.A. CNRS n°188