H. BLAINE LAWSON
JEAN-PIERRE BOURGUIGNON

Formules de variations de l'aire et applications

Astérisque, tome 154-155 (1987), p. 51-71
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__154-155__51_0>

EXPOSÉ n° III

FORMULES DE VARIATIONS DE L'AIRE ET APPLICATIONS

H. Blaine LAWSON et Jean-Pierre BOURGUIGNON

I. LA VARIATION PREMIÈRE.

Soit $\overline{M}$ une variété riemannienne dans laquelle nous considérons une réunion M de sous-variétés de classe C^1 de dimension n munies de la métrique induite. Nous supposons M de volume fini. Soit V un champ de vecteurs sur $\overline{M}$ à support compact dont le flot est noté $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

Nous nous intéressons à la fonction $t \mapsto v(t) = \mathrm{vol}(\varphi_t(M))$ dont les variations successives sont notées

$$\delta^k v(V) = \frac{d^k}{dt^k} \mathrm{vol}(\varphi_t(M))_{|t=0} .$$

Il est commode de voir le volume $v(M)$ comme $\int_M |\vec{M}_x|\, d\mathcal{H}^n(x)$ où $\vec{M}$ désigne le champ de n-vecteurs unitaire tangent de M (si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormée au point x , on peut prendre $\vec{M}_x = (e_1,\dots,e_n)$) et $d\mathcal{H}^n$ la mesure de Hausdorff n-dimensionnelle. (Aux points où M est régulière, cette mesure coïncide avec la mesure riemannienne).

Pour évaluer $\delta^k v$, il est nécessaire de calculer, pour un élément ξ de la grassmannienne $G_n\overline{M}$ des n-plans de $\overline{M}$, $\frac{d^k}{dt^k} \|\varphi_t \xi\|_{|t=0}$ où $\varphi_t \xi$ désigne le n-plan image de ξ par le difféomorphisme φ_t .

THÉORÈME 1. - *La variation première du volume de la sous-variété* M *dans la direction d'un champ de vecteurs* V *est donnée par*

$$\delta^1 v(V) = \int_M (\mathcal{A}^V \vec{M}, \vec{M})\, d\mathcal{H}$$

où $\mathcal{A}^V \vec{M} = \sum_{j=1}^{n} e_1 \wedge \dots \wedge \overline{\nabla}^M_{e_j} V \wedge \dots \wedge e_n$.

Preuve : Nous avons

$$\frac{d}{dt}\,\|\varphi_t\xi\|_{|t=\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{|\varphi_t\xi|}\,\frac{d}{dt}\,(\varphi_t\xi,\varphi_t\xi)\right)_{|t=\tau}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{|\varphi_\tau\xi|}\,\frac{d}{dt}\,\varphi_t^*(g)\,(\xi,\xi)_{|t=\tau}\ .$$

Par suite pour $t=0$ pour lequel $\varphi_o = \mathrm{Id}$ et $\|\xi\| = 1$,

$$\frac{d}{dt}\,|\varphi_t\xi|_{|t=0} = \mathcal{L}_V g(\xi,\xi)\ .$$

On introduit la dérivation covariante de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ de $\overline{M}$.

Comme, pour tous champs de vecteurs X et Y , on a la formule $\mathcal{L}_X Y = \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X$, il est possible d'établir que

$$\mathcal{L}_V = \overline{\nabla}_V - \mathcal{A}^V$$

(où $\mathcal{A}^V$ est un champ de tenseurs de type (1,1))

pour l'action sur les champs de tenseurs obtenue par extension comme dérivation du produit tensoriel qui commute aux contractions.

Par suite, en se souvenant de ce que $\overline{\nabla}g = 0$,

$$\frac{d}{dt}\,\langle\varphi_t\xi\,,\,\varphi_t\xi\rangle = \left[(\overline{\nabla}_V - \mathcal{A}^V)g\right](\xi,\xi)$$

$$= -\,(\mathcal{A}^V g)(\xi,\xi)$$

$$= 2(\mathcal{A}^V\xi,\xi)\ .$$

∎

COROLLAIRE 2. - <u>Si</u> M <u>est une variété compacte à bord</u>, <u>alors</u>

$$\delta^1 v(V) = -\int_M \langle V,H\rangle + \int_{\partial M} \langle V,\nu\rangle$$

<u>où</u> H <u>désigne la courbure moyenne de</u> M <u>et</u> ν <u>la normale extérieure à</u> ∂M <u>dans</u> M .

Preuve : Dans la formule donnant $\mathcal{U}^V(M)$, on sépare V en sa partie normale et sa partie tangentielle.

On trouve alors, si (e_i) est une base orthonormée de T_xM et donc $\vec{M}_x = e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$

$$< \mathcal{U}^V \vec{M}, \vec{M} > = \sum_{j=1}^{n} < \overline{\nabla}_{e_j} (V^T), e_j > + \sum_{j=1}^{n} < \overline{\nabla}_{e_j} (V^N), e_j > \ .$$

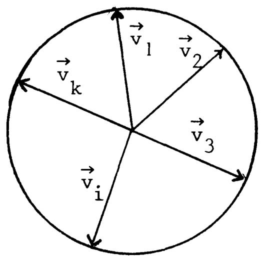
Le premier terme s'identifie à la divergence pour la métrique induite sur M du champ de vecteurs V^T. Le second terme, lui, est précisément (avec la convention que nous avons prise) l'opposé de la trace de la seconde forme fondamentale dans la direction normale V^N. ■

II. APPLICATIONS. THÉORÈME DE MONOTONIE.

Nous commençons par une application qui met en évidence le rôle du bord et de la non-compacité.

Soit M un ensemble de rayons issus de l'origine dans $\overline{M}$ que nous prenons comme étant le disque ouvert de rayon 1 centré à l'origine. Nous notons $\vec{v}_i$ les vecteurs directeurs unitaires de ces rayons.

La formule de la variation première ne comporte qu'une contribution du centre



qui est $\sum_{i=1}^{k} \vec{v}_i$ (il n'y a pas de contribution du bord du disque, car nous l'avons pris ouvert), d'où la condition de minimalité

$$\sum_{i=1}^{k} \vec{v}_i = \vec{0} \ .$$

La deuxième application est un théorème de monotonie.

THÉORÈME 3. - Soit M une réunion de sous-variétés de dimension n de classe au moins C^1 de la boule B_1 de rayon 1 telle que $\delta^1 v_M = 0$. Alors la fonction $r \mapsto r^{-n} \operatorname{vol}(M \cap B_r)$ est croissante.

Preuve : La preuve s'appuie sur la formule de la variation première appliquée à un champ de vecteurs adapté à la situation, i.e. radial.

Soit $V(x) = \varphi(|x|)x$ où la fonction φ est supposée C^1. Comme, pour un vecteur w,

$$\mathfrak{A}^V(w) = \overline{\nabla}_w V = \varphi'(|x|)\,\frac{(w,x)}{|x|} + \varphi(|x|)w \ ,$$

si $\xi = e_1\wedge\ldots\wedge e_n$ pour une base orthonormée (e_i), alors

$$\langle \mathfrak{A}^V(\xi),\xi\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle \mathfrak{A}^V e_j, e_j\rangle$$

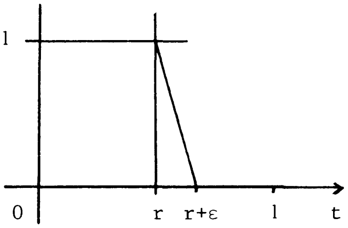
$$= \varphi'(|x|)\,\frac{|x^\xi|}{|x|} + n\,\varphi(|x|) \quad ,$$

où x^ξ désigne la projection orthogonale de x sur ξ.

D'après la stationarité de M, pour toute fonction φ à support compact dans $[0,1[$,

$$0 = \int_M \{\varphi'(|x|)\,\frac{|x^T|^2}{|x|} + n\,\varphi(|x|)\}\,d\mathcal{H}^n \quad .$$

Si nous prenons pour φ une fonction C^1 décroissante qui approche la fonction linéaire par morceaux dont le graphe est donné ci-dessous,



nous obtenons

$$n\int_M \varphi(|x|) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{M_{r+\varepsilon}-M_r} \frac{|x^T|^2}{|x|}\,d\mathcal{H}^n$$

$$\leqslant \frac{r+\varepsilon}{\varepsilon}\int_{M_{r+\varepsilon}-M_\varepsilon} \frac{|x^T|^2}{|x|}\,d\mathcal{H}^n$$

$$\leqslant \frac{r+\varepsilon}{\varepsilon}\,(v(r+\varepsilon)-v(r)) \ .$$

En passant à la limite sur ε, comme v est à variation bornée, nous trouvons

$$nv(r) \leqslant r\, v'(2) \;,$$

d'où

$$\frac{n}{r} \leqslant \frac{v'(2)}{v(2)}$$

et donc par intégration des dérivées logarithmiques le résultat cherché. ■

Remarque : Dans le cas classique, la preuve du théorème de monotonie se fait en considérant $\frac{1}{2}\Delta|x|^2$ (où x désigne le vecteur de position). On trouve

$$n \text{ vol} = \int_{\partial M} \langle \nu , x \rangle \;.$$

Les deux formalismes sont souvent reliés par une intégration par parties.

III. LA VARIATION SECONDE.

THÉORÈME 4. - *Si* $\delta^1 v_M = 0$, *alors*

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathrm{vol}(\varphi_t M)\Big|_{t=0} = \int_M \{ \| \mathcal{A}^V \vec{M} \|^2 + \langle \left[\mathcal{A}^V \circ \mathcal{A}^V - (\mathcal{A}^V)^2 \right] \vec{M}, \vec{M} \rangle$$

$$+ \langle (R_{V,\cdot}\, V)\vec{M},\vec{M}\rangle - \langle \mathcal{A}^V \vec{M},\vec{M}\rangle^2 \} \, d\mathcal{H}^n \quad .$$

Preuve : Il faut calculer

$$\frac{d^2}{dt^2} v(\varphi_t M)\Big|_{t=0} = \int_M \frac{1}{2} \{ (\mathcal{L}_V^2 g)(\vec{M},\vec{M}) - \frac{1}{2}(\mathcal{L}_V g(\vec{M},\vec{M}))^2 \} \, d\mathcal{H}^n \quad .$$

Or

$$\mathcal{L}_V^2 g(\xi,\xi) = \{ (\overline{\nabla}_V - \mathcal{A}^V) \circ (\overline{\nabla}_V - \mathcal{A}^V) g \} (\xi,\xi)$$

$$= -\{ (\overline{\nabla}_V - \mathcal{A}^V)(\mathcal{A}^V g) \} (\xi,\xi)$$

$$- -\left(\left[\overline{\nabla}_V , \mathcal{A}^V \right] g \right) (\xi,\xi) + (\mathcal{A}^V \circ \mathcal{A}^V g)(\xi,\xi) \quad .$$

Nous avons donc

$$\frac{d^2}{dt^2} v(\varphi_t M)\Big|_{t=0} = \int_M \frac{1}{2}\{2g\left([\overline{\nabla}_V, \mathcal{A}^V]\vec{M},\vec{M}\right) - 2(\mathcal{A}^V g)(\mathcal{A}^V\vec{M},\vec{M}) - 2<\mathcal{A}^V\vec{M},\vec{M}>\}\, d\mathcal{H}$$

$$= \int_M \{<[\overline{\nabla}_V, \mathcal{A}^V]\vec{M},\vec{M}> + <\mathcal{A}^V\circ\mathcal{A}^V\vec{M},\vec{M}> + \|\mathcal{A}^V\vec{M}\|^2 - <\mathcal{A}^V\vec{M},\vec{M}>^2\}\, d\mathcal{H} \quad .$$

Evaluons le commutateur $\left[\overline{\nabla}_V, \mathcal{A}^V\right]$,

$$[\overline{\nabla}_V, \mathcal{A}^V]W = \overline{\nabla}_V\ \mathcal{A}^V(W) - \mathcal{A}^V\ \overline{\nabla}_V W$$

$$= \overline{\nabla}_V\ \overline{\nabla}_W V - \overline{\nabla}_{\overline{\nabla}_V W} V \ ,$$

soit, en ajoutant et en retranchant $\overline{\nabla}_W\overline{\nabla}_V V - \overline{\nabla}_{\overline{\nabla}_W V} V$,

$$[\overline{\nabla}_V, \mathcal{A}^V]W = \overline{R}_{V,W}V + \mathcal{A}^{\overline{\nabla}_V V} W - (\mathcal{A}^V)^2\ W$$

à cause de la définition-même de la courbure.

La sous-variété M étant supposée minimale, le terme $\mathcal{A}^{\overline{\nabla}_V V}$ ne donne aucune contribution, d'où la formule annoncée. ∎

Le cas classique est celui où M est une sous-variété sans bord et où le champ de vecteurs de variation est à support compact et normal à M . Un certain nombre de termes de la formule de la variation seconde peuvent alors se réinterpréter. Ainsi, M étant minimale, $\mathcal{A}^V\vec{M}$ se réduit à $\sum_{j=1}^{n} e_1\wedge\ldots\wedge(\overline{\nabla}_{e_j} V)^N\wedge\ldots\wedge e_n$, de telle sorte que

$$\|\mathcal{A}^V\vec{M}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|(\overline{\nabla}_{e_j} V)^N\|^2 \quad ,$$

ceci fait apparaître la connexion notée ∇^N du fibré normal pour laquelle nous avons donc

$$\|\mathcal{A}^V M\|^2 = \|\nabla^N V\|^2 \quad .$$

De même le terme $<(\mathcal{A}^V\circ\mathcal{A}^V - (\mathcal{A}^V)^2)\vec{M},\vec{M}>$ peut se réinterpréter. Nous avons en effet

$$(\mathcal{A}^V \circ \mathcal{A}^V - (\mathcal{A}^V)^2)\vec{M} = \sum_{i\neq j} e_1\wedge\ldots\wedge(\mathcal{A}^V e_i)\wedge\ldots\wedge(\mathcal{A}^V e_j)\wedge\ldots\wedge e_n ,$$

d'où

$$\begin{aligned}<(\mathcal{A}^V \circ \mathcal{A}^V - (\mathcal{A}^V)^2)\vec{M},\vec{M}> &= \sum_{i\neq j} <\mathcal{A}^V(e_i)\wedge\mathcal{A}^V(e_j), e_i\wedge e_j> \\ &= \sum_{i,j}\{<B_{e_i,e_i},V><B_{e_j,e_j},V> - <V,B_{e_i,e_j}>^2\} \\ &= -\sum_{i,j} <V,B_{e_i,e_j}>^2 \quad \text{(car } M \text{ est minimale)} \\ &= -<\mathcal{B}^2_V , V>\end{aligned}$$

(puisque $<\mathcal{B}^2(V),W> = \sum_{i,j} <V,B_{e_i,e_j}><B_{e_i,e_j},W>$) .

Il sera commode de définir un opérateur $\overline{\mathcal{R}}$ associé à la courbure en posant par définition

$$\overline{\mathcal{R}}(V) = \sum_{j=1}^{n} \overline{R}_{e_j,V}\, e_j$$

(cet opérateur est quelquefois appelé l'opérateur de Jacobi, à cause de son rôle dans l'équation des champs de Jacobi). Grâce à cette définition nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}<(R_{V,.}V)\vec{M},\vec{M}> &= \sum_{j=1}^{n} <\overline{R}_{e_j,V}\, e_j, V> \\ &= <\overline{\mathcal{R}}(V),V> .\end{aligned}$$

En regroupant ces remarques nous obtenons

COROLLAIRE 5. - Dans le cas "classique",

$$\frac{d^2}{dt^2}\operatorname{vol}(\varphi_t M)\Big|_{t=0} = \int_M \{\|\nabla^N V\|^2 - <\mathcal{B}^2(V),V> + <\overline{\mathcal{R}}(V),V>\}\, d\mathcal{H}^n .$$

Remarque. L'hypothèse que V soit normal à M en tout point est en fait inutile. En effet, si $\mathcal{V} = V+V_1$ est un champ de vecteurs défini au voisinage de M dont la partie normale est V et la partie tangentielle V_1 , alors, si $(\psi_t)_{t\in I}$ désigne le flot de $\mathcal{V}$ et φ_t^1 celui de V_1 , $\frac{d^2}{dt^2}\operatorname{vol}(\varphi_t M)_{|t=0} = \frac{d^2}{dt^2}\operatorname{vol}(\psi_t M)_{|t=0}$

parce que le flot ψ_t est approximé au deuxième ordre près par $\varphi_t \circ \varphi_t^1$ (et $\operatorname{vol}(\varphi_t \circ \varphi_t^1 M) = \operatorname{vol}(\varphi_t M)$). La sous-variété M étant minimale, le développement au deuxième ordre de ψ_t n'intervient pas pour évaluer la variation seconde du volume.

IV. QUELQUES RAPPELS DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE.

On rappelle que sur une sous-variété M d'une variété riemannienne $\overline{M}$, la courbure R est reliée à la courbure $\overline{R}$ de $\overline{M}$ et à la seconde forme fondamentale B par l'équation de Gauss : pour tous vecteurs tangents U,V,W,Z à M

$$<\overline{R}_{U,V}\, W,Z> - <R_{U,V}\, W,Z> = <B_{U,W}\, ,\, B_{V,Z}> - <B_{U,Z}\, ,\, B_{V,W}>$$

(Remarquer que si tous les produits scalaires s'expriment tous de façon unique grâce à la métrique $<,>$ de $\overline{M}$, le produit scalaire du deuxième terme de gauche est celui induit sur M , alors que les deux termes de droite ne font intervenir que le produit scalaire induit sur le fibré normal).

Si on suppose M minimale, un certain nombre de propriétés peuvent être déduites de l'équation de Gauss, par exemple :

PROPOSITION 6. - Si M est une sous-variété minimale de dimension n d'une variété riemannienne $(\overline{M},<,>)$, alors

i) $$\sum_{j=1}^{n} <\overline{R}_{e_j,V}\, e_j,W> + <\operatorname{Ric}^M(V),W> = -\sum_{i=1}^{n} <B_{e_i,V}\, ,\, B_{e_i,W}>$$

ii) $$\sum_{j,k=1}^{n} <\overline{R}_{e_j,e_k}\, e_j,e_k> + \operatorname{Scal}^M = -\|B\|^2 .$$

COROLLAIRE 7. - Toute sous-variété minimale M d'une variété $\overline{M}$ à courbure sectionnelle constante c vérifie

$$\operatorname{Ric}^M \leqslant (n-1)\, c$$

et

$$\operatorname{Scal}^M = n(n-1)\, c - \|B\|^2 .$$

Ce corollaire implique en particulier que toute immersion minimale d'une surface compacte de genre 1 dans un tore plat $\overline{T}^n = \overline{\mathbb{R}}^n/\Lambda$ est totalement géodésique et la métrique induite est plate, elle aussi.

V. SOUS-VARIÉTÉS MINIMALES STABLES

DÉFINITION 8. - Une sous-variété minimale M d'une variété riemannienne $\overline{M}$ est dite stable si la variation seconde de l'aire est non-négative pour toute variation à support compact.

Un cas typique de sous-variété minimale stable est fourni par les variétés qui sont d'aire absolument minimisante dans leur classe d'homologie.

Pour une telle sous-variété, l'opérateur $L = \nabla^*\nabla + \overline{\mathcal{R}} - \mathcal{B}^2$ est donc non négatif lorsqu'il agit sur l'espace $C_0^\infty(M,NM)$ des sections à support compact du fibré normal.

Le cas particulier des sous-variétés minimales de codimension 1 à fibré normal trivial mérite une attention particulière. Dans ce cas il est en effet possible d'identifier les champs de vecteurs normaux aux fonctions sur M en associant $V = f\nu$ à f (ici ν est un des deux champs normaux unitaires). L'opérateur L prend alors la forme plus simple $L = \Delta - \overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu) - \|B\|^2$ où Δ est l'opérateur de Laplace-Beltrami agissant sur les fonctions.

PROPOSITION 9. - Dans une variété riemannienne à courbure de Ricci positive, il n'existe aucune hypersurface minimale stable à fibré normal trivial.

Preuve : Sur les fonctions constantes, L est négatif et la sous-variété minimale ne peut être stable. ∎

Remarques : i) D'après le théorème de Myers, le groupe fondamental d'une variété à courbure de Ricci positive est fini. Ici, grâce à la dualité de Poincaré et à un théorème de représentation de toute classe de $(\overline{n}-1)$-homologie par une hypersurface d'aire minimisante, on retrouve le fait que $H^1(\overline{M}) = 0$.

ii) Les hyperplans projectifs (linéaires) $\mathbb{R}P^n$ dans $\mathbb{R}P^{n+1}$ sont stables. Ils ne prennent pourtant pas le théorème en défaut car, soit $\mathbb{R}P^n$, soit $\mathbb{R}P^{n+1}$

n'est pas orientable, ce qui empêche le fibré normal d'être trivial.

Dans le cas où $\overline{M}$ est de dimension 3 et M une surface, R. Schoen et S.T. Yau ont fait une remarque simple mais dont les conséquences sont très importantes. Ils notent que l'opérateur L peut s'écrire

$$L = \Delta - \frac{1}{2}\,(\overline{\mathrm{Scal}} - \mathrm{Scal} + \|B\|^2)$$

car

$$\mathrm{Scal}^{\overline{M}} = -2\sum_{j=1}^{2} \langle \overline{R}_{e_j,\nu}e_j,\nu\rangle - \sum_{i,j} \langle \overline{R}_{e_i,e_j}e_i,e_j\rangle$$

$$= 2\,\overline{\mathrm{Ric}}\,(\nu,\nu) + \mathrm{Scal}^M + \|B\|^2$$

grâce à l'équation de Gauss, et par suite

$$-\langle \overline{\mathrm{Ric}}(\nu),\nu\rangle - \|B\|^2 = -\frac{1}{2}\,(\overline{\mathrm{Scal}} - \mathrm{Scal} + \|B\|^2) \quad .$$

COROLLAIRE 10. - <u>Toute surface orientée compacte sans bord qui est minimale et stable dans une variété de dimension 3 à courbure scalaire positive est une sphère.</u>

<u>Preuve</u> : Pour toute fonction f C^∞ , nous avons

$$\int_M \{|df|^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Scal}\ f^2\} \geq \int_M \frac{1}{2}\,(\overline{\mathrm{Scal}} + \|B\|^2)f^2 \geq 0 \quad .$$

Par suite, en prenant $f \equiv 1$,

$$\int_M \mathrm{Scal} \geq 0 \quad .$$

Par le théorème de Gauss-Bonnet, $\chi(M) \geq 0$ et M est soit une sphère, soit un tore. Si M est un tore, alors elle est totalement géodésique et la métrique induite est plate. Comme l'intégrale de droite est positive, ce cas est exclu. ∎

VI. <u>LES ÉQUATIONS DE SIMONS</u>.

Ces équations établissent que la seconde forme fondamentale d'une sous-variété, dès qu'elle est à trace nulle, satisfait un système elliptique que l'on déduit de l'équation de Codazzi-Mainardi.

Rappelons en effet que la seconde forme fondamentale B d'une sous-variété

M d'une variété $\overline{M}$ vérifie pour tous vecteurs tangents U,V,W à M la relation

$$(11) \qquad (\nabla_U B)_{V,W} - (\nabla_V B)_{U,W} = (\overline{R}_{U,V}\, W)^N \ .$$

On peut noter que le membre de gauche n'est autre que la différentielle extérieure de B vue comme 1-forme sur M à valeurs dans le fibré des homomorphismes du fibré tangent dans le fibré normal muni de la connexion normale.

Si M est minimale, en prenant la trace de (11) sur les vecteurs U et W, nous obtenons

$$(12) \qquad -\sum_{j=1}^{n} (\nabla_{e_j} B)_{e_j,V} = \sum_{j=1}^{n} (\overline{R}_{e_j,V}\, e_j)^N \ .$$

Les équations (11) et (12) font intervenir les deux opérateurs fondamentaux d^∇ et δ^∇ du faux complexe de deRham des formes à valeurs dans le fibré $T^*M \otimes NM$ (A noter en effet qu'en général $d^\nabla \circ d^\nabla \neq 0$, mais le symbole principal de cet opérateur est d'ordre zéro et s'identifie à la courbure du fibré $T^*M \otimes NM$.

Il est à noter que les membres de droite des équations (11) et (12) ne dépendent que de la métrique de $\overline{M}$ et de la décomposition $T\overline{M} = TM \oplus NM$ le long de M. Il suit donc que, <u>lorsque</u> M <u>est minimale</u>, <u>sa seconde forme fondamentale</u> satisfait au système elliptique, dit de Simons (cf. [3]),

$$\begin{cases} d^\nabla B = \overline{\rho} \\ \delta^\nabla B = \overline{\rho}' \end{cases}$$

où $\overline{\rho}$ est la 2-forme sur M à valeurs dans $T^*M \otimes NM$ $\overline{\rho}_{U,V}\, W = (\overline{R}_{U,V}\, W)^N$ et où $\overline{\rho}'$ est la section du fibré $T^*M \otimes NM$ définie par $\overline{\rho}'(V) = \sum_{i=1}^{n} (\overline{R}_{e_i,V}\, e_i)^N$.

On peut noter l'analogie que le système de Simons a avec le système de Yang et Mills pour la courbure d'une connexion qui est critique pour la norme L^2 de sa courbure (cf. [1]). Dans ces deux systèmes, la première équation est universelle et ne contient aucune information sur le caractère critique du champ considéré.

D'après J. Simons, il est naturel de former le laplacien $\Delta^\nabla = d^\nabla\delta^\nabla + \delta^\nabla d^\nabla$ associé à ce système elliptique. Nous obtenons

$$(13) \qquad \Delta^\nabla B = \rho_o$$

où nous avons posé $\rho_o = d^\nabla \bar{\rho}' + \delta^\nabla \rho$. On peut remarquer que, sur une variété $\bar{M}$ à courbure sectionnelle constante c , alors $\bar{\rho} \equiv 0$ et par suite, $\bar{\rho}' \equiv 0$ et $\rho_o \equiv 0$, d'où :

COROLLAIRE 14. - <u>La seconde forme fondamentale d'une sous-variété minimale</u> M <u>d'un espace à courbure sectionnelle constante est une section harmonique du fibré</u> $T^*M \otimes NM$.

On peut noter que ρ_o n'est pas nul pour les espaces symétriques non à courbure sectionnelle constante, et qu'il contient en général la dérivée de la courbure de $\bar{M}$. On a en fait

$$\|\rho_o\| \leqslant a \{\|\bar{\nabla} \bar{R}\| + \|\bar{R}\| \, \|B\|\}$$

pour une constante universelle a .

J. Simons a exploité l'équation (13) grâce à la technique de Bochner. On a en effet

PROPOSITION 15. - <u>Le laplacien de Hodge-de Rham des 1-formes à valeurs dans</u> $T^*M \otimes NM$ <u>satisfait à l'identité suivante</u>

$$\Delta^\nabla \mathcal{B} = \nabla^*\nabla \mathcal{B} + \mathcal{R}(\mathcal{B})$$

<u>où</u>

$$\mathcal{R}(\mathcal{B}) = \sum_{j=1}^{n} (R_{e_j, V} \mathcal{B})_{e_j} \quad .$$

<u>Preuve</u> : On se place en un point x de M et on fait le calcul en utilisant un champ de vecteurs V tel que $(\nabla V)(x) = 0$ et une base locale (e_i) vérifiant aussi $(\nabla e_j)(x) = 0$.

Nous avons

$$(\delta^\nabla d^\nabla \mathcal{B})_V = - \sum_{j=1}^{n} \nabla_{e_j} (d^\nabla \mathcal{B})_{e_j}$$

$$= - \sum_{j=1}^{n} \nabla_{e_j} [(d^\nabla \mathcal{B})_{e_j, V}] - (d^\nabla \mathcal{B})_{\nabla_{e_j} e_j, V} - (d^\nabla \mathcal{B})_{e_j, \nabla_{e_j} V}$$

$$= - \sum_{j=1}^{n} \nabla_{e_j} [(d^\nabla \mathcal{B})_{e_j, V}]$$

$$= - \sum_{j=1}^{n} \nabla_{e_j} [(\nabla_{e_j} \mathcal{B})_V - (\nabla_V \mathcal{B})_{e_j}]$$

$$= - \sum_{j=1}^{n} [(\nabla_{e_j} \nabla_{e_j} \mathcal{B})_B - (\nabla_{e_j} \nabla_V \mathcal{B})_{e_j}]$$

$$= - \sum_{j=1}^{n} [(\nabla^2_{e_j,e_j} \mathcal{B})_V - (\nabla^2_{e_j,V} \mathcal{B})_{e_j}]$$

$$= (\nabla^*\nabla \mathcal{B})_V + \sum_{j=1}^{n} (\nabla^2_{e_j,V} \mathcal{B})_{e_j} \quad .$$

Par ailleurs

$$(d^\nabla \delta^\nabla \mathcal{B})_V = \nabla_V(\delta \mathcal{B})$$

$$= -\nabla_V \left(\sum_{j=1}^{n} (\nabla_{e_j} \mathcal{B}) e_j \right)$$

$$= - \sum_{j=1}^{n} (\nabla^2_{V,e_j} \mathcal{B}) e_j \quad .$$

En rapprochant ces deux termes, on fait apparaître le terme en courbure annoncé. ∎

Il est utile d'aller plus loin et d'exprimer l'opérateur $\mathcal{R}$ en termes de $\overline{\mathcal{R}}$ et de B . Cela conduit à des calculs assez complexes, mais qui peuvent tout de même être exploités dans des cas intéressants géométriquement comme nous l'expliquons plus loin. Nous donnons pour mémoire la formule générale, avant d'en tirer les conséquences dans des cas particuliers.

THÉORÈME 16. - <u>La seconde forme fondamentale</u> B <u>d'une sous-variété minimale satisfait au système elliptique</u>

$$\nabla^*\nabla B + \overline{\mathcal{R}}\, B - \widetilde{B} \circ B - B \circ \underset{\sim}{B} = \rho_o$$

<u>où</u> $\widetilde{B}$ <u>est l'endomorphisme du fibré</u> NM <u>défini pour</u> $\nu \in NM$ <u>par</u>

$\widetilde{B}(\nu) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \nu, B_{e_i,e_j} \rangle B_{e_i,e_j}$ <u>et où</u> $\underset{\sim}{B}$ <u>est l'endomorphisme du fibré</u> S^2T^*M

<u>défini pour</u> $V, W \in TM$ <u>par</u>

$$\underset{\sim}{B}(B\circ W) = 2\sum_{i,j=1}^{n} \langle B_{V,e_i}, B_{W,e_j}\rangle e_i\otimes e_j$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \{\langle B_{e_i,e_j}, B_{e_i,W}\rangle e_j\otimes V + \langle B_{e_i,e_j}, B_{e_i,V}\rangle e_j\otimes W\} .$$

Nous considérons maintenant le cas où $\overline{M}$ est à courbure constante c . Il est facile de voir qu'alors $(\mathcal{R}B)_{V,W} = n\,c\,B_{V,W}$, de telle sorte que pour une hypersurface, le système (16) prend la forme

$$\nabla^*\nabla B = (-nc + \|B\|^2)B$$

car

$$\widetilde{B} = \|B\|^2\ \mathrm{Id} \quad \text{et} \quad B\circ \underset{\sim}{B} = 0 .$$

COROLLAIRE 17. - <u>Soit</u> M <u>une sous-variété compacte sans bord minimale de la sphère</u> S^{n+1} . <u>Si</u> $\|B\|^2 \leqslant n$, <u>alors</u> M <u>est soit une sphère</u> S^{n-1} <u>plongée de façon totalement géodésique comme un équateur, soit isométrique à un produit de sphères</u> $S^p\times S^q$ $(p+q=n)$ <u>de rayons</u> $\sqrt{\frac{p}{n}}$ <u>et</u> $\sqrt{\frac{q}{n}}$ <u>plongées de telle sorte que</u> $\|B\|^2 \equiv n$ <u>et</u> $\nabla B = 0$.

La discussion du cas d'égalité est due à S.S. Chern, M. doCarmo et S. Kobayashi (cf. [2]).

VII. <u>ESTIMÉE A PRIORI DE SCHOEN - SIMON - YAU</u>.

Cette estimée a priori donnée dans [4] utilise de façon essentielle l'approche de Jim Simons décrite dans la section précédente. Elle s'applique aux hypersurfaces minimales stables.

THÉORÈME 18 (cf. [4]). - <u>Soit</u> b <u>la seconde forme fondamentale d'une hypersurface minimale stable</u> M <u>dans une variété riemannienne</u> $\overline{M}$ <u>dont la courbure est contrôlée par des constantes</u> k_1 , k_2 <u>et</u> c <u>au sens suivant</u> :

i) $k_2 \leqslant \overline{K} \leqslant k_1$, <u>où</u> $\overline{K}$ <u>désigne la courbure sectionnelle de</u> $\overline{M}$;

ii) $\|\overline{\nabla}\ \overline{R}\| \leqslant c$.

<u>Pour tout</u> $p \in [4, 4+\sqrt{\frac{8}{n}}[$, <u>il existe une constante</u> β (<u>dépendant de</u> p) <u>telle que</u>

$$\int_M f^p\, |b|^p \leq \beta \int_M \{|\nabla f|^p + C^p\, f^p\}$$

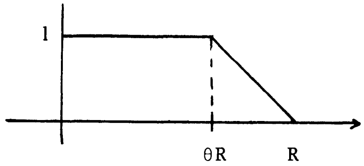
<u>où</u> $$C^2 = (c^{2/3} + k_1 - k_2 + \max\{-k_2, 0\}) \ .$$

a) <u>Conséquences de l'estimée de Schoen-Simon-Yau</u>

Avant de donner les principales étapes de la preuve du théorème, nous donnons quelques conséquences spectaculaires.

La première conduit à une estimée uniforme de la seconde forme fondamentale. Pour cela, on introduit sur M une exhaustion lipschitzienne propre sous la forme d'une fonction $\rho : M \to \mathbb{R}^+$ telle que $|\nabla\rho| \leq 1$ (par exemple ρ peut être la distance dans M ou, si l'injection de M dans $\overline{M}$ est propre, la distance dans $\overline{M}$ à un compact K).

Posons $M_R = \{x | x \in M, \rho(x) \leq R\}$. On a bien sûr $M = \bigcup_R M_R$. On considère $f_{R,\theta} = \varphi_{R,\theta} \circ \rho$ pour $0 < \theta < 1$ et $0 < R < \infty$, où la fonction $\varphi_{R,\theta}$ a pour graphe



En appliquant l'estimée a priori à $f_{R,\theta}$, on obtient

$$\int_{M_{\theta R}} |b|^p \leq \beta \int_{M_R} \frac{1}{(1-\theta)^p\, R^p}\, v_g + C^p \int_{M_R} v_g$$

$$\leq \frac{1}{R^p} \left\{ \frac{\beta}{(1-\theta)^p} + C^p\, R^p \right\} \operatorname{vol} M_R \ .$$

Si $\overline{M}$ est un espace à courbure non-négative, alors $C = 0$, et l'estimée devient

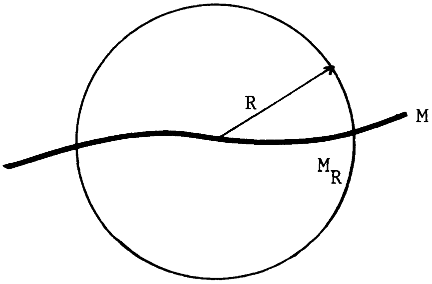
$$\int_{M_{\theta R}} |b|^p \leqslant \frac{\beta}{(1-\theta)^p} \; \frac{\mathrm{vol}\ M_R}{R^p} \; .$$

THÉORÈME 19 (cf. [4]). - Soit $\overline{M}$ un espace à courbure constante $\geqslant 0$. Si M est une hypersurface minimale stable telle que pour un p dans $[\,0, 4 + \sqrt{\frac{8}{n}}\,[$

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\mathrm{vol}\ M_R}{R^p} = 0 \; ,$$

alors M est totalement géodésique.

Exemple. - Si dans $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1}$, on prend une sous-variété M plongée et minimisante et pour fonction d'exhaustion $\rho(x) = |x|$,



alors $\mathrm{vol}\ M_R \leqslant \frac{1}{2}\ \mathrm{vol}\ S^n_R = c_n\ R^n$

d'où pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\mathrm{vol}(M_R)}{R^{n+\varepsilon}} \to 0$$

dès que $n \leqslant 5$, et le théorème suivant

THÉORÈME 20 (cf. [4]). - Une hypersurface proprement plongée dans $\mathbb{R}^{n+1}$ qui est minimisante est totalement géodésique si $n \leqslant 5$.

Cas particuliers : i) Si M est un graphe défini sur tout $\mathbb{R}^n$, on obtient ainsi une solution de la conjecture de Bernstein pour $n \leqslant 5$;

ii) si $\overline{M}$ est simplement connexe à courbure non positive et $n \geqslant 5$ et si

$$R^2(c^{2/3} + |\overline{K}|) + \frac{\mathrm{vol}\ M_R}{R^n} \leqslant \beta_o \; ,$$

alors

$$\sup_{M_{\theta R}} |b| \leqslant \frac{e}{R}$$

pour tout θ , $0 < \theta < 1$, où e est une constante ne dépendant que de β_o , θ et n .

iii) Si de plus M est minimisante dans $B_{R_o}(x_o)$, alors pour $n \leqslant 5$

$$|b|(x_o) \leqslant \frac{e}{R_o}$$

où e est une constante absolue.

b) La preuve de l'estimée de Schoen-Simon-Yau

On présente maintenant les principales étapes de la preuve du Théorème 18. Le point de départ en est l'équation de Simons pour la seconde forme fondamentale de l'hypersurface supposée minimale

$$\nabla^*\nabla b = |b|^2 b - \overline{\mathcal{R}}(b) + \rho_o$$

PROPOSITION 21 (cf. [ ]). - Si la courbure de $\overline{M}$ est contrôlée par des constantes c , k_1 et k_2 , alors

$$|\langle\overline{\mathcal{R}}(b) + \rho_o , b\rangle| \leqslant 2c\ |b| + n(k_1 - 2k_2)\ |b|^2 .$$

La preuve de cette proposition est longue et technique mais facile. ■

La seconde étape consiste à utiliser l'équation elliptique de Simons pour établir une estimée sous-elliptique de $|b|$.

On considère

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \nabla^*\nabla\ |b|^2 &= \langle\nabla^*\nabla b , b\rangle - |\nabla b|^2 \\ &= |b|^4 + \langle -\overline{\mathcal{R}}(b) + \rho_o , b\rangle - |\nabla b|^2 \\ &\leqslant |b|^4 + 2c\ |b| + n(k_1 - 2k_2)\ |b|^2 - |\nabla b|^2 \end{aligned}$$

On remarque que

$$\frac{1}{2} \nabla^*\nabla\ |b|^2 = |b|\ \nabla^*\nabla |b| - |\nabla |b||^2 .$$

Par suite

$$|b|\ \nabla^*\nabla|b| - |b|^4 \leqslant 2c|b| + n(k_1-2k_2)\ |b|^2 + |\nabla|b||^2 - |\nabla b|^2 .$$

Une version de l'inégalité de Kato reliant la norme de la dérivée covariante d'un champ de tenseurs à celle du gradient de la norme donnée par Schoen-Simon-Yau s'énonce ainsi.

PROPOSITION 22 (cf. [4]). - Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$|d|b||^2 - |\nabla b|^2 \leqslant \frac{n(n-1)}{2\,\varepsilon}\ (k_1-k_2)^2 - \frac{2}{(1+\varepsilon)n}\ |d|b||^2 .$$

La troisième étape utilise le fait que l'hypersurface est stable. Pour toute fonction f sur M à support compact, nous avons

$$\int_M \{f\nabla f - f^2\ (\mathrm{Ric}_{\nu,\nu} + |b|^2)\}\ v_g \geqslant 0 ,$$

d'où

$$\int_M \{f\Delta f - (nk_2 + |b|^2)f^2\}\ v_g \geqslant 0 ,$$

soit encore

$$\int_M |df|^2\ v_g \geqslant \int_M (nk_2 + |b|^2)f^2\ v_g .$$

On utilise alors le degré de liberté que représente f pour le remplacer par $f|b|^\alpha$ pour $\alpha \geqslant 1$. On obtient ainsi

$$\int_M (nk_2|b|^{2\alpha} + |b|^{2\alpha+2})f^2\ v_g \leqslant \int_M \{\alpha^2|b|^{2\alpha-2}\ |d|b||^2 + |b|^{2\alpha}\ |df|^2 + $$
$$+ 2\alpha|b|^{2\alpha-1}\ f\langle d|b|,df\rangle\}v_g .$$

On intègre alors la relation déduite de la Proposition contre $f^2\ |b|^{2\alpha-2}$

$$-\int_M |b|^{2\alpha+2} f^2 v_g \leqslant \int_M \{-(2\alpha-1)|b|^{2\alpha-2} |\nabla|b||^2 + 2c|b|^{2\alpha-1} + n(k_1-2k_2)|b|^{2\alpha} +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2\varepsilon} (k_1-k_2)^2 |b|^{2\alpha-2}\} f^2 v_g - 2\int_M f|b|^{2\alpha-1} <df,d|b|> v_g$$

$$- \left[\frac{2}{(1+\varepsilon)n} + (2\alpha-1)\right] \int_M |b|^{2\alpha-2} |\nabla|b||^2 f^2 v_g$$

On peut alors éliminer les termes en $|b|^{2\alpha+2}$ en ajoutant les deux équations. On obtient

$$\left[\frac{2}{(1+\varepsilon)n} - (\alpha-1)^2\right] \int_M |b|^{2\alpha-2} |d|b||^2 f^2 v_g + 2(1-\alpha) \int_M f|b|^{2\alpha-1} <df,d|b|>$$

$$\leqslant \int_M |b|^{2\alpha} |df|^2 v_g + \text{termes en courbures.}$$

Maintenant on majore le terme rectangle $2(\alpha-1)|f|\ |b|^{-1}\ |<df\,,d|b|>|$ par $\varepsilon(\alpha-1)^2 f^2 |b|^{-2}|d|b||^2 + \frac{1}{\varepsilon} |df|^2$. Nous avons donc

$$\left[\frac{2}{(1+\varepsilon)n} - (\alpha-1)^2(1+\varepsilon)\right] \int_M |b|^{2\alpha-2} |d|b||^2 f^2 v_g \leqslant (1+\tfrac{1}{\varepsilon}) \int_M |b|^{2\alpha} |df|^2 v_g +$$

$$+ \int_M \{2c\,|b|^{2\alpha-1} + n(k_1-3k_2)\,|b|^{2\alpha} + \frac{n(n-1)}{2\varepsilon} (k_1-k_2)\,|b|^{2\alpha-2}\} f^2 v_g .$$

On pose alors $p = 2\alpha+2$, de telle sorte que $p-4 = 2\alpha-2$ que l'on veut positif.

Par ailleurs il est nécessaire de trouver un $\varepsilon > 0$ tel que $\frac{2}{(1+\varepsilon)n} - (\alpha-1)^2 (1+\varepsilon) > 0$, soit avec la relation précédente entre α et p

$$\frac{8}{n} < (p-4)^2 \quad \text{et} \quad p < 4 + \sqrt{\frac{8}{n}} .$$

L'équation précédente se réécrit donc pour $p \in [4\,, 4 + \sqrt{\frac{8}{n}}[$,

$$\int_M |b|^{p-4} |d|b||^2 f^2 \leqslant \beta_1 \int_M \{|b|^{p-2} |df|^2 + (k_1-3k_2)\,|b|^{p-2} f^2 +$$

$$+ c\,|b|^{p-3} f^2 + (k_1-k_2)^2\,|b|^{p-4} f^2\} v_g$$

où β_1 dépend de n et p.

En revenant à l'inégalité de stabilité, on a aussi

$$\int_M |b|^p f^2 v_g \leqslant \int_M \{\alpha^2 |b|^{p-4} |d|b||^2 + |b|^{p-2} |df|^2 + 2\alpha|b|^{p-3} f <d|b|,df>\} v_g$$

$$- n k_2 \int_M |b|^{p-2} f^2 v_g .$$

On majore à nouveau le terme rectangle

$$<|b|^{\frac{p}{2}-2} f\, d|b| , |b|^{\frac{p}{2}-1} df> \leqslant \frac{1}{2} |b|^{p-4} f^2 |d|b||^2 + \frac{1}{2} |b|^{p-2} |df|^2 .$$

En recombinant avec l'estimée précédente, on obtient

$$\int |b|^p f^2 v_g \leqslant \beta_1 \int_M \{|b|^{p-2} |df|^2 + c|b|^{p-3} f^2 + (k_1-k_2)^2 |b|^{p-4} f^2 +$$

$$+ \max(k_1-3k_2, -nk_2, 0) |b|^{p-2} f^2\} v_g .$$

Il reste seulement à majorer les termes par des estimations non-linéaires standards pour tout $\varepsilon > 0$

$$c|b|^{p-3} \leqslant \varepsilon|b|^p + \beta_2(\varepsilon) c^{p/3}$$

$$|b|^{p-2} |df|^2 = f^2(|b|^{p-2} \frac{|df|^2}{f^2})$$

$$\leqslant \varepsilon |b|^p f^2 + \beta_3(\varepsilon) \frac{|df|^p}{f^{p-2}}$$

$$t|b|^{p-2} \leqslant \varepsilon|b|^p + \beta_4(\varepsilon) \mu^{p/2}$$

$$(k_1-k_2)^2 |b|^{p-4} \leqslant \varepsilon|b|^p + \beta_5(\varepsilon) (k_1-k_2)^{p/2}$$

On obtient finalement

$$(1-\tilde{\beta}\varepsilon) \int_M |b|^p f^2 \leqslant \beta_6(\varepsilon) \int_{f\neq 0} \{\frac{|df|^p}{f^{p-2}} + \Big[c^{p/3} + (k_1-k_2)^{p/2} +$$

$$+ \max(k_1-2k_2 , -nk_2 , 0)^{p/2}\Big] f^2\} v_g$$

qui donne l'estimée annoncée si on prend

$$\varepsilon = (2\tilde{\beta})^{-1} \quad \text{et} \quad f = F^{p/2} .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.P. BOURGUIGNON, H.B. LAWSON, Stability and isolation phenomena for Yang-Mills fields, Commun. Math. Phys. 79 (1981), 189-230.

[2] S.S. CHERN, M. doCARMO, S. KOBAYASHI, On minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length, in Functional Analysis and related fields, Springer, New York, (1970), 59-75.

[3] J. SIMONS, Minimal varieties in Riemannian manifolds, Ann. Math. 88 (1968), 62-105.

[4] R. SCHOEN, L. SIMON, S.T. YAU, Curvature estimates for minimal hypersurfaces, Acta Math.134 (1975), 275-288.

H.B. LAWSON
Department of Mathematics
S.U.N.Y.
Stony Brook N.Y. 11794
(U.S.A.)

J.P. BOURGUIGNON
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 PALAISEAU Cedex
(France)