AST

Théorie des variétés minimales et applications - Séminaire Palaiseau, octobre 1983-juin 1984 [Pages préliminaires]

Astérisque, tome 154-155 (1987), p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__154-155__1_0>

154-155 ASTÉRISQUE

1987

THÉORIE DES VARIÉTÉS MINIMALES ET APPLICATIONS

(Minimal Submanifolds)

Séminaire Palaiseau, octobre 1983 - juin 1984

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

THÉORIE DES VARIÉTÉS MINIMALES ET APPLICATIONS

Ce volume regroupe les notes d'un séminaire qui s'est tenu d'Octobre 1983 à Juin 1984 au Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique à Palaiseau sous la direction de H. Blaine Lawson Jr. L'objectif de ce séminaire était de présenter des développements divers et récents de la théorie des variétés minimales, tout en commençant par une approche assez élémentaire du sujet. Ainsi, dans ces notes, les Exposés n° I, II, III, IV, XIV, (correspondant à au moins une douzaine d'exposés oraux) peuvent être considérés comme introductifs à la théorie elle-même ou à certains de ses aspects.

Les surfaces minimales tirent leur nom du fait que leur aire ne fait que croître par une petite perturbation suffisamment localisée. Leur théorie a une longue histoire qui, grâce notamment à la représentation de Weierstrass des hypersurfaces minimales de l'espace euclidien à trois dimensions (voir Exposé n° I), la lie à la théorie des fonctions d'une variable complexe. Si cette dernière théorie n'a plus aujourd'hui le rôle central qu'elle avait en mathématiques au début du siècle même dans sa version plus géomérique, l'étude des surfaces de Riemann, cette relation privilégiée existe toujours et est encore la source de résultats intéressants et profonds. Elle utilise de façon essentielle l'application définie par C.F. Gauss qui, à un point d'une surface, associe le vecteur normal à la surface en ce point. Une autre source de motivations pour l'étude des surfaces minimales est venue, au cours du siècle dernier, des travaux du physicien belge Plateau qui a montré que les films de savon s'appuyant sur un fil métallique prenait la forme d'une surface minimale. Le problème mathématique posé par l'existence d'une telle surface pour tout contour est resté un défi jusqu'à ce qu'en 1931 indépendamment John Douglas et Tibor Rado le résolvent dans sa généralité (voir Exposé n° II).

Cependant, depuis le siècle dernier, la théorie des variétés minimales s'est amplement développée pour elle-même autant dans ses aspects analytiques, notamment dans le cadre de la théorie de la mesure géométrique (voir Exposés n° IV et XIV), que géométriques, prenant sa part dans l'évolution des centres d'intérêt des géomètres vers les problèmes globaux, par exemple par l'intermédiaire du théorème dû à

Joseph Bernstein (voir Exposé n°V). Ce théorème établit que toute surface minimale de l'espace euclidien à trois dimensions qui est un graphe défini sur un plan entier est nécessairement un plan. En montrant en 1968 que la généralisation de ce théorème aux dimensions supérieures, connue sous le nom de problème de Bernstein, avait d'autres solutions que les solutions attendues dès que la dimension de l'espace ambiant est 8, Enrico Bombieri, Ennio De Giorgi et Enrico Giusti n'ont pas du tout mis un point final à cette histoire, car ce problème a des généralisations qui, toutes, ont d'intéressantes interprétations géométriques. Les diverses solutions données à ce problème mettent d'ailleurs en évidence les interactions très fortes qui existent entre la géométrie et l'analyse de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non-linéaires.

Les Exposés n° IV et XIV proposent une introduction aussi peu technique qu'il est possible à la théorie de la mesure géométrique. Cette théorie a apporté des contributions très importantes à l'étude de la régularité des solutions de l'équation des sous-variétés minimales. Elle permet aussi d'étudier d'autres problèmes variationnels dont les intégrands sont moins réguliers, comme ceux qui interviennent en métallurgie (voir Exposé n°XV).

Comme l'équation exprimant la minimalité d'une sous-variété est d'origine variationnelle, il n'est pas surprenant que les solutions stables, correspondant à des minima locaux, aient des propriétés particulières. De plus, grâce notamment aux diverses variantes du théorème de Sacks-Uhlenbeck (voir Exposé n°XII), la théorie des variétés minimales est devenue, en particulier entre les mains de S.T. Yau et de ses collaborateurs, un outil très pénétrant pour analyser la géométrie des variétés riemanniennes notamment de dimension 3, d'une façon assez analogue à celle dont les géodésiques ont été utilisées lors des débuts de la géométrie riemannienne globale.

On dispose aujourd'hui de nombreux nouveaux exemples globaux de sous-variétés minimales parmi lesquels certains entretiennent des liaisons particulières avec les applications holomorphes par le biais de constructions "twistorielles" (dont Roger Penrose a montré tout le parti que l'on pouvait tirer pour l'étude de questions physiques). Ces constructions se révèlent spécialement efficaces pour la construction des immersions minimales de surfaces dans les variétés homogènes, notamment les sphères et le plan projectif complexe d'après une construction introduite par Eugène Calabi (cf. Exposés n°VII, VIII, IX, X). Les immersions minimales dans les sphères présentent aussi un intérêt géométrique particulier qui est discuté dans l'Exposé n° XIII.

Au-delà de la bibliographie particulière de chaque exposé, les références générales suivantes peuvent être utiles au lecteur :

R. OSSERMAN, A survey of minimal surfaces Van Nostrand (1969).

H.B. LAWSON Jr, Introduction to real and complex minimal submanifolds, Séminaire de Mathématiques Supérieures, Presses de l'Université de Montréal (197?).

H.B. LAWSON Jr, Lectures on minimal submanifolds, Publish or Perish (1980).

Telles qu'elles se présentent, ces notes de séminaire devraient être accessibles à toute personne ayant des connaissances de base en géométrie différentielle et en analyse des équations aux dérivées partielles. La diversité des développements proposés devraient les rendre attractives à des spécialistes de diverses disciplines, y compris non mathématiques. De ce point de vue, les auteurs regrettent de ne pas avoir pu disposer au moment du séminaire des splendides illustrations graphiques qui permettent aujourd'hui de "voir" des surfaces minimales, et quelquefois ainsi de mieux les comprendre.

Les organisateurs sont particulièrement reconnaissants à tous les conférenciers pour leur contribution au succès du séminaire, aux participants pour leur assiduité... et leur patience dans l'attente de la diffusion des notes que les conférenciers ont élaborées avec tant de soin.

Sans le soutien financier d'une Action Thématique Programmée du C.N.R.S., il n'aurait pas été possible d'avoir la présence à ce séminaire de plusieurs parmi les meilleurs spécialistes du sujet. Sans le soutien logistique du personnel du Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, notamment celui de Claudine Harmide et de Marie-Jo Lécuyer, ces notes n'auraient pas existés. Qu'ils en soient ici remerciés !

Palaiseau, le 30 Juin 1986

Jean-Pierre BOURGUIGNON
H. Blaine LAWSON Jr
Christophe MARGERIN

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉS DES EXPOSÉS

Exposé n° I

C. MARGERIN, Définitions, Généralités, surfaces minimales dans $\mathbb{R}^n$ et S^n .

Cet exposé passe en revue les définitions, les résultats et les exemples les plus classiques de la théorie des surfaces minimales. A propos des surfaces minimales de l'espace euclidien, on y traite la représentation de Weierstrass et une classification des surfaces minimales isométriques (§2). Le paragraphe 3 est consacré aux surfaces minimales des sphères rondes ; on donne un procédé pour immerger minimalement et isométriquement tout espace homogène dans une sphère ronde. On développe le cas de S^3 pour établir en particulier que toute surface orientable compacte s'immerge minimalement dans S^3 mais que ceci est faux pour $\mathbb{RP}^2$.
On termine par des critères de minimalité pour les orbites d'un groupe d'isométries et pour le cas des sous-variétés complexes d'une variété kählérienne.

Exposé n° II

A.J. TROMBA, A proof of Douglas' theorem on the existence of disc like-minimal surfaces spanning Jordan contours on R^n .

On trouvera dans cet exposé un aperçu historique du problème de Plateau ainsi qu'une démonstration complète dont l'originalité réside dans une preuve directe et élémentaire que tout minimum de la fonctionnelle de Dirichlet est conforme.

Exposé n° III

H.B. LAWSON et J.P. BOURGUIGNON, Formules de variations de l'aire et applications.

Où l'on trouve, comme corollaire de la formule de la variation première pour l'aire, un théorème de monotomie et en relation avec la formule de la variation seconde une étude développée de la géométrie de la seconde forme fondamentale - avec en particulier le système elliptique de J. Simons, les estimées a priori de Simon -Schoen-Yau et la démonstration de la conjecture de Bernstein dans $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \leqslant 5$, qui en découle.

Exposé n° IV

W. K. ALLARD, Notes on the theory of varifolds.

On introduit ici la notion de "Varifold", une généralisation naturelle des sous-variétés de $\mathbb{R}^N$ du point de vue de la théorie de la mesure... et du calcul variationnel. On définit la variation première d'un tel objet et on établit une formule de quasi-monotonie pour la "masse" - qui devient une formule de monotonie pour les varifolds extrèmales (i.e. dont la variation première est nulle) et coincide avec celle exposée précédemment si la varifold est une sous-variété lisse. De ceci et du lemme de Besicovitch on déduit une inégalité isopérimétrique.
L'auteur présente ensuite un schéma de démonstration des deux résultats fondamentaux de la théorie de la régularité pour les varifolds:
- le théorème de "rectifiabilité" (cf.VIII) selon lequel, sous des hypothèses très faibles, une varifold s'écrit comme une combinaison linéaire positive (infinie) de variétés C^1 (convergence en mesure);
- le théorème de "régularité" (cf.IX) qui donne par exemple une estimation höldérienne de la variation du plan tangent d'une "bonne" varifold.

Exposé n° V

D. B. O'SHEA, The Bernstein-Osserman-Xavier theorems.

Cet exposé fait le point sur la conjecture de Nirenberg, une généralisation du théorème de Bernstein d'après laquelle l'ensemble des normales orientées à une surface minimale simplement connexe non plane de $\mathbb{R}^3$ est dense dans S^2. Il présente une démonstration d'un résultat plus général due à R. Osserman et S.S. Chern, ainsi que l'étonnant théorème de F. Xavier selon lequel l'image de l'application de Gauss d'une surface minimale complète non plane de $\mathbb{R}^3$ "rate" au plus 6 points de S^2.

Exposé n° VI

M. L. MICHELSOHN, Surfaces minimales dans les sphères.

Il est classique et élémentaire que toute application holomorphe φ d'une surface de Riemann Σ dans une variété kählérienne X est minimale et que, π étant une submersion riemannienne de X dans une variété Y, $\pi \circ \varphi$ est minimale dés que φ est horizontale pour π . On présente ici une construction réciproque, due à E. Calabi, dans le cas où $\Sigma = S^2$, $Y = S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, à savoir la construction d'une submersion riemannienne d'une sous-variété X de $\mathbb{P}^N$ sur S^{n-1} et d'un relèvement horizontal holomorphe de φ . On déduit de ceci que l'image d'une immersion minimale de S^2 dans S^{n-1} est soit incluse dans un équateur, soit d'aire "quantifiée", appartenant à $\{ 4\pi k,\ k \geqslant \binom{m+1}{2} \}$(Calabi-Barbosa).

Exposé n° VII

H.B. LAWSON, La classification des 2-sphères minimales dans l'espace projectif complexe.

Où l'on donne une construction en termes holomorphes des applications minimales de la sphère S^2 dans les sphères euclidiennes et dans les espaces projectifs complexes. Elle s'appuie sur la considération de sous-espaces isotropes osculateurs à l'application étudiée généralisant la classique représentation de Weierstrass.

Exposé n° VIII

P. GAUDUCHON, Les immersions super-minimales d'une surface compacte dans une variété riemannienne orientée de dimension 4.

Dans cet exposé on donne une interprétation twistorielle de certaines immersions minimales d'une surface orientée dans une variété de dimension 4 comme applications holomorphes horizontales de la surface dans l'un des espaces des twisteurs de cette variété. En spécialisant au cas de la sphère de Riemann, on obtient une description de ses immersions minimales respectivement dans S^4 et dans $\mathbb{C}P^2$ comme courbes holomorphes horizontales respectivement dans $\mathbb{C}P^3$ et dans la variété des drapeaux de $\mathbb{C}^3$.

Exposé n° IX

P. GAUDUCHON, La correspondance de Bryant.

Dans le prolongement de l'exposé VIII, on décrit une correspondance due à R. Bryant entre les espaces des twisteurs de S^4 et $\mathbb{C}P^2$. Grâce à cette construction de nature géométrique qui repose sur des identifications appropriées, il est possible de déduire d'applications minimales d'une surface de Riemann Σ arbitraire dans $\mathbb{C}P^2$ des applications minimales de Σ dans S^4, résolvant ainsi un problème classique de la théorie des surfaces de Riemann.

Exposé n° X

H.B. LAWSON, Sous-variétés associatives et courbes holomorphes dans S^6.

Où l'on présente la géométrie de certaines sous-variétés minimisantes de $\mathbb{R}^7$ et $\mathbb{R}^8$ liées aux octaves de Cayley. Ces sous-variétés donnent naissance à des immersions minimales de surfaces de Riemann compactes comme courbes pseudo-holomorphes de S^6 mises en évidence par R. Bryant.

Exposé n° XI

B. CHARLET, Le problème de Bernstein sphérique.

On sait (cf. Exposé I) que tout plongement minimal de S^2 dans S^3 est totalement géodésique. Dans cet exposé, on construit une infinité de plongements minimaux de S^{n-1} dans S^n, $n = 4,5,6$ ou 7, non totalement géodésiques et donc contre-exemples au problème de Bernstein sphérique. On y développe les idées proposées par W.Y. Hsiang : chercher des plongements minimaux de S^{n-1} dans S^n invariants sous l'action d'un groupe de cohomogénéité 2 par la résolution d'une équation différentielle ordinaire sur l'espace des orbites.

Exposé n° XII

J.P. BOURGUIGNON, Sphères minimales d'après J. Sacks et K. Uhlenbeck.

Dans cet exposé est donné un aperçu des résultats dus à J. Sacks, K. Uhlenbeck (et aussi à L. Lemaire, R. Schoen, S.T. Yau et M. Struwe) sur l'existence de 2-sphères minimales dans une classe d'homotopie d'applications de S^2 dans une variété riemannienne générale. Dans cette situation apparaît le phénomène de perte de compacité dans un problème du calcul des variations invariant conforme par concentration d'une solution au voisinage d'un point (phénomène dit des "bulles de savon"). Ces résultats ont permis de transformer les surfaces minimales en un puissant outil d'investigation géométrique.

Exposé n° XIII

A. EL SOUFI, Immersions minimales sphériques : restrictions sur la courbure et la codimension.

Où l'on étudie notamment l'ensemble des variétés admettant une immersion minimale dans une sphère de rayon 1. Cette étude peut être précisée si l'on contrôle des invariants riemanniens comme une borne inférieure de la courbure scalaire et un majorant du diamètre (on obtient ainsi une borne supérieure de la dimension de la sphère où l'immersion est pleine) et dans le cas de la métrique standard sur la sphère.

Exposé n° XIV

F. ALMGREN, Basic techniques of geometric measure theory.

On trouvera dans ce chapitre bon nombre des définitions fondamentales de la théorie de la mesure géométrique, accompagnées d'exemples et de motivations. On y donne quelques propriétés élémentaires et le développement d'une théorie de la déformation incluant une inégalité isopérimétrique et l'existence d'isomorphismes entre les groupes d'homologie (et d'homotopie) de certains espaces de courants et les groupes d'homologie singulière des espaces sous-jacents.
Dans une deuxième partie on montre comment on peut utiliser les applications multivaluées pour représenter certaines surfaces généralisées. Le résultat principal est donné dans le théorème d'approximation (2.11).
Dans une dernière partie l'auteur expose la démonstration d'un théorème de compacité pour des courants (réels) de taille bornée.

Exposé n° XV

J.E. TAYLOR, Some crystalline variational techniques and results.

Dans le cas où la densité d'énergie superficielle est isotrope, l'état d'équilibre d'une interface est modélisé par une surface minimale. Lorsque la densité d'énergie dépend de l'orientation (structure cristalline des métaux par exemple) l'auteur développe ici quelques outils permettant d'analyser la structure des singularités présentées par un extremum. On introduit l'ensemble de Wulff (configuration à l'équilibre), le concept de n-diagramme et celui de "cycle marqué" pour énoncer un certain nombre de relations entre la structure du n-diagramme associé à une densité d'énergie et celle des cônes minimisants.
On considère aussi le cas ou il y a interaction avec un champ de gravité et on termine par une borne a priori de la compacité combinatoire d'une surface minimisante.

Exposé n° XVI

R.L. BRYANT, Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space.

Dans cet exposé sont étudiées les surfaces à courbure moyenne 1 dans l'espace hyperbolique de dimension 3. A l'image des surfaces minimales dans $\mathbb{R}^3$, elles admettent une représentation de Weierstrass. En considérant l'application de Gauss pour de telles surfaces beaucoup des résultats de "régularité" connus pour les surfaces minimales peuvent être étendus à celles d'entre elles qui sont complètes et ont une courbure totale finie dans H^3.