

# *Astérisque*

R. ROUSSARIE

## **Déformations génériques des cusps**

*Astérisque*, tome 150-151 (1987), p. 151-184

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1987\\_\\_150-151\\_\\_151\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__150-151__151_0)

© Société mathématique de France, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## DÉFORMATIONS GÉNÉRIQUES DES CUSPS

R. ROUSSARIE

### 0. INTRODUCTION.

Soit  $\omega_\lambda$  une famille locale de formes sur  $\mathbb{R}^2$  (paramétrée par  $\lambda \in \mathbb{R}^k$  pour un certain  $k$ ). La famille est localisée en  $(0,0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^k$ . On dit aussi que  $\omega_\lambda$  est une déformation du germe  $\omega_0$ .

DÉFINITION : La famille  $\omega_\lambda$  ne possède localement pas plus de  $\ell$  cycles s'il existe un représentant de la famille sur un voisinage  $A \times B$  de  $(0,0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^k$  tel que pour  $\forall \lambda \in B$ , la forme  $\omega_\lambda$  ne possède pas plus de  $\ell$  cycles isolés sur  $A$ . (Dans les familles considérées dans la suite, les cycles sont toujours isolés).

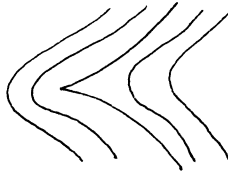
Un célèbre résultat de finitude, démontré par Bautin [B] dit qu'une famille locale de champs quadratiques ne possède localement pas plus de 3 cycles isolés. Dans un "contexte générique", une formulation (faible) du théorème de Takens sur les bifurcations de Hopf généralisées est la suivante : toute déformation générique à  $k$  paramètres ( $k \geq 1$ ) d'une forme elliptique ( $j^1_{\omega_0}(0) \sim xdx + ydy$ ) ne possède localement pas plus de  $k$  cycles  $\{T_1\}$ .

Nous voulons obtenir ici un résultat analogue à celui de Takens, pour les déformations génériques des formes "du type cusp" :

DÉFINITION : Un cusp est un germe de forme en  $0 \in \mathbb{R}^2$ , dont le 2-jet est différentiablement équivalent à :

$$j^2_{\omega}(0) \sim ydy - x^2dx + \beta xydx \quad , \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Tous les cusps sont topologiquement équivalents.



Les cusps forment une singularité de codimension 2 (sous-variété de l'espace des germes, invariante par l'équivalence différentiable), de l'espace des germes de formes nulles en 0. Nous noterons  $\Sigma_C^2$  cette singularité (définie dans l'espace des 2-jets). Bogdanov a montré que toute déformation générique à 2 paramètres de cusp ne possède localement pas plus de 1 cycle  $[B_1]$ ,  $[B_2]$ ,  $[I]$ . Récemment, F. Dumortier J. Sotomayor et moi-même avons montré que toute déformation générique de cusp à 3 paramètres ne possède localement pas plus de 2 cycles,  $[DRS]$ . Je veux montrer ici, plus généralement que :

THÉORÈME : Génériquement, toute déformation de cusp à  $k$  paramètres ( $k \geq 2$ ), ne possède localement pas plus de  $[\frac{3k}{2}]$  cycles ( $[n]$  désigne la partie entière de  $n$ ).

REMARQUE : Je conjecture qu'une déformation générique de cusp, à  $k$  paramètres, ne possède localement pas plus de  $k-1$  cycles.

Ce résultat, généralisant ceux obtenus pour  $k=2,3$ , serait vraisemblablement équivalent à la stabilité des familles génériques, au sens faible introduit par Takens dans  $[T_1]$ . Pour l'instant, je ne vois

pas comment établir un tel résultat car il est clair que la méthode utilisée ici est insuffisante pour obtenir la borne optimale (Voir remarque à la fin de la partie I).

On explicite la généricité invoquée dans le théorème de la manière suivante : soit  $V_0$ , l'espace des germes de formes singulières en  $0 \in \mathbb{R}^2$  ( $\omega(0)=0$ ). Soit  $\Sigma_C^2 \subset V_0$  la singularité des cusps définie plus haut. Il existe une filtration :

$$V_0 \rightarrow V_0^\infty \supset \Sigma_C^2 \supset \dots \supset \Sigma_C^k \supset \Sigma_C^{k+1} \supset \dots$$

( $V_0^\infty$  : espace des  $\infty$ -jets de formes singulières), par des ensembles semi-algébriques réels. Chaque  $\Sigma_C^k$  est de codimension  $k$  dans  $V_0$  et est défini dans l'espace des  $(K(k)+1)$ -jets avec  $K(k) = \frac{3(k-1)}{2}$ .

La généricité de la déformation  $\omega_\lambda$  est la transversalité de l'application  $(m, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^k \rightarrow j^\infty \omega_\lambda(m) \in V_0^\infty$  (espace des  $\infty$ -jets en  $0$ , de formes quelconques, nulles ou non) à la filtration des  $\Sigma_C^k$ . Cela revient à dire :  $\exists \ell, 2 \leq \ell \leq k$ , tel que  $j^{K(\ell)+1} \omega_0(0) \in \Sigma_C^\ell \setminus \Sigma_C^{\ell-1}$  et que l'application  $(m, \lambda) \rightarrow j^{K(\ell)+1} \omega_\lambda(m)$  est transverse en  $(0,0)$  à  $\Sigma_C^\ell$ . On montre alors que la famille  $\omega_\lambda$  ne possède localement pas plus de  $[\frac{3\ell}{2}]$  cycles, tous isolés.

Organisation de l'article.

Soit  $\omega = \sum_{i=1}^{\ell-1} v_i \tilde{\omega}_i \pm \tilde{\omega}_\ell$ , où  $\tilde{\omega}_i = x^{K(i)} y dx$ ,  $K(i) = [\frac{3(i-1)}{2}]$  et

$v = (v_1, \dots, v_{\ell-1}) \in \mathbb{R}^\ell$ . Soit également la fonction  $H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + x - \frac{x^3}{3}$ .

On note  $\Gamma_b$ , pour  $b \in [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$  le cycle de  $H$  contenu dans  $\{H=b\}$ .

Dans les parties II à IV on ramènera la démonstration du théorème au calcul du nombre de cycle d'une  $\lambda$ -perturbation compacte de  $dH$ . Cette perturbation s'écrit :

$\omega_\lambda = dH - v\omega + o(v)$  où  $\lambda = (v, \tilde{\lambda})$  est le paramètre total ( $v \in \mathbb{R}$  est

proche de 0,  $\tilde{\lambda}$  appartient à un espace euclidien de dimension quelconque et intervient dans le terme  $o(v)$ .

Le nombre de cycle de la famille  $\omega_\lambda$  est étudié dans la partie I. On montre tout d'abord que le nombre de zéros de l'intégrale elliptique  $I_\omega(b) = \int_{\Gamma_b} \omega$  est inférieur à  $\left[ \frac{3\ell-2}{2} \right] - 2s$  où  $s$  est la multiplicité de  $I_\omega$  au point singulier  $b = \frac{2}{3}$ . L'estimation obtenue est plus précise que l'estimation obtenue par Petrov [P] pour les formes algébriques quelconques, mais est établie par des méthodes analogues. On établit également quelques propriétés élémentaires du  $H_\mu$ -module des formes algébriques ( $H_\mu = \frac{1}{2} y^2 - \mu x - \frac{x^3}{3}$ ).

Ces propriétés (notion de formes majeures et mineures, réduction des formes mineures : proposition 2) ne sont pas explicites dans [P]. Elles sont indispensables à la suite de l'article.

On montre ensuite que le nombre de cycle de  $\omega_\lambda$ , pouvant apparaître au voisinage du cycle singulier  $\Gamma_{2/3}$ , est borné par  $2s+1$ . Cette estimation, complètement indépendante du travail de Petrov, est basée sur une étude de l'auteur [R]. La conséquence de cette étude utile ici est rappelée dans le théorème 10.

Il suit de ces deux estimations que le nombre total de cycles isolés de  $\omega_\lambda$ , pour toute perturbation compacte, est inférieur à  $\left[ \frac{3\ell}{2} \right]$ . (Un énoncé précis est donné dans le théorème 12).

Dans la partie II, nous définirons la filtration  $(\Sigma_C^k)_k$ , par :

$$\Sigma_C^k = \{ \omega | j^{K(k-1)+1} \omega(0) \sim ydy - x^2 dx \}$$

On démontrera que  $\Sigma_C^k$  est de codimension  $k$  dans  $V_0$ .

On a :  $\Sigma_{C^+}^k \cup \Sigma_{C^-}^k = \Sigma_C^k \setminus \Sigma_C^{k+1}$  avec :  $\Sigma_{C^\pm}^k = \{ \omega | j^{K(k)+1} \omega(0) \sim ydy - x^2 dx \pm \tilde{\omega}_k \}$

Dans la partie III, on établira la forme normale suivante pour les familles  $\omega_\lambda$  telles que  $j^{K(\ell)+1} \omega_0(0) \in \Sigma_{C^\pm}^\ell = \Sigma_C^\ell \setminus \Sigma_C^{\ell+1}$  et  $j^{K(\ell)+1} \omega_\lambda$  transverse à  $\Sigma_C^\ell$  :

$$\omega_\lambda \sim ydy - (x^2 + \mu)dx + \alpha(y, H_\mu) - \sum_{i=1}^{\ell-1} v_i \tilde{\omega}_i \pm \tilde{\omega}_\ell + \sum_{j>K(\lambda)}^N \gamma_j(\lambda) \omega_j + Q(x, y, \lambda) y^2 dx$$

où  $\alpha$  est une forme dépendant de  $y$  et  $H_\mu$ , d'ordre assez élevé,

$\tilde{\omega}_i = x^{K(i)} y dx$  et  $Q = O((|m| + |\bar{\lambda}|)^N)$   $N$  grand,  $\bar{\lambda} = (\mu, v_1)$  et

$\lambda = (\mu, v_1, \dots, v_{\ell-1}, \lambda_{\ell+1}, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ .

On trouvera la formulation précise de cette forme normale à la fin de la partie III.

Dans la partie IV, on démontrera le théorème énoncé plus haut.

Précisément, en partant de la forme normale établie dans la partie III, on montre par récurrence que la famille se ramène à l'écriture étudiée dans la partie I.

J'ai eu l'idée de cette étude lors d'un séjour à l'IMPA de Rio de Janeiro en aout-septembre 1985. Je remercie cet institut pour son hospitalité.

PARTIE I. PERTURBATIONS DE LA FORME FERMÉE  $dH$ .

Pour  $\forall \mu \in \mathbb{R}$ , on pose  $P_\mu = -\frac{1}{3} x^3 - \mu x$  et  $H_\mu = \frac{1}{2} y^2 + P_\mu(x)$ . Soit  $\Omega_\mu$ , l'espace des 1-formes polynomiales de  $\mathbb{R}^2$ , modulo la relation d'équivalence :  $\omega \sim \omega' \Leftrightarrow \omega - \omega' = df + gdH_\mu$  où  $f, g$  sont des polynomes.  $\Omega_\mu$  est un  $\mathbb{R}[t]$ -module pour la loi :  $P \cdot [\omega] = [P(H_\mu) \cdot \omega]$ ,  $P \in \mathbb{R}[t]$ ,  $[\omega] =$  classe de  $\omega$ . Notons  $\omega_i = x^i y dx$ .

PROPOSITION 1 : (Récurrence sur les  $\omega_i$ ).

$$(2k+5) \omega_k \sim -6(k-2) H_\mu \omega_{k-3} - 3\mu(2k-1) \omega_{k-2} \quad \text{pour } k \geq 3 \text{ et } \omega_2 \sim -\mu \omega_0.$$

DÉMONSTRATION : Pour  $k \geq 3$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} y^3 x^{k-3} dx &= H_\mu y x^{k-3} dx - P_\mu y x^{k-3} dx \\ &= H_\mu y x^{k-3} dx + \frac{1}{3} \omega_k + \mu \omega_{k-2}. \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \omega_k = -3\mu \omega_{k-2} - 3H_\mu \omega_{k-3} + 3/2 y^3 x^{k-3} dx \quad (1)$$

$$\text{Maintenant : } y^3 x^{k-3} dx \sim -\frac{3}{k-2} x^{k-2} y^2 dx$$

$$\text{et } y dy = dH_\mu + (x^2 + \mu) dx \Rightarrow x^{k-2} y^2 dx \sim \omega_k + \mu \omega_{k-2} \quad (2)$$

En substituant (2) dans (1) on obtient la formule cherchée.

$$\begin{aligned} \text{Pour } k=2 : \omega_2 &= x^2 y dx, \quad dH_\mu = y dy + (x^2 + \mu) dx \\ y dH_\mu &= y^2 dy + \omega_2 + \mu \omega_0. \text{ D'où } \omega_2 \sim -\mu \omega_0. \end{aligned}$$

Il suit assez facilement de la proposition que  $\Omega_\mu$  est engendré par  $[\omega_0]$  et  $[\omega_1]$  en tant que  $\mathbb{R}[t]$ -module. Nous allons donner quelques précisions utiles sur les  $\omega_i$ .

DÉFINITIONS :  $\omega_i$  est dite forme majeure si  $i \neq 3\ell + 2$ ,  $\ell \geq 0$ , et forme mineure sinon ( $\omega_2, \omega_5, \dots$ ). Nous numérotions les formes majeures par degré croissant :  $\tilde{\omega}_1 = \omega_0$ ,  $\tilde{\omega}_2 = \omega_1$ ,  $\tilde{\omega}_3 = \omega_3, \dots$  et plus généralement  $\tilde{\omega}_k = \omega_{K(k)}$  avec  $K(k) = \lfloor \frac{3k-3}{2} \rfloor$ .

Le poids d'une forme polynomiale en  $\mu, x, y$  est obtenue en attribuant le poids 3 à  $y$ , 2 à  $x$  et 4 à  $\mu$ . (Poids  $(\mu^a y^b x^c dx) = 4a+3b+2c+2$  et Poids  $(\mu^a y^b x^c dy) = 4a+3b+2c+3$ ). Par exemple poids  $(\omega_i) = 3+2i+2$ . Cette notion de poids entre dans la description précise de la forme normale (N) établie dans la partie III, et est utilisée dans la partie IV.

REMARQUE : Dans les calculs de la proposition 1 (et dans tous les calculs ultérieurs que nous ferons dans la suite de cette partie), le poids est préservé. Ainsi, la formule de la proposition s'écrit :

$(2k+5)\omega_k = -6(k-2)H_\mu\omega_{k-3} - 3\mu(2k-1)\omega_{k-2} + df_k + g_k dH_\mu$  où tous les monomes ont un poids égal à  $3+2(k+1)$ , le poids de  $\omega_k$ . ( $f_k, g_k$  sont des polynomes en  $x, y, \mu$  ; les différentielles sont prises uniquement en  $dx, dy$ ).

PROPOSITION 2 : Chaque forme mineure  $\omega_i$  est équivalente dans  $\Omega_\mu$  à une combinaison linéaire de formes majeures de degré strictement plus petit, à coefficient des polynomes en  $\mu$ ,  $\mu$ -divisibles. Plus précisément :

$$\omega_i = \sum_{0 \leq K(j) \leq i} A_{ij}(\mu) \tilde{\omega}_j + \bar{\omega}_i(y, H_\mu)$$

où les  $A_{ij}(\mu)$  sont des polynomes en  $\mu$ ,  $\mu$ -divisibles, et  $\bar{\omega}_i$  est une forme en  $y$  et  $H_\mu$  :  $\bar{\omega}_i(y, H_\mu) = \Phi_\mu^*(\tilde{\omega}_i)$  où  $\Phi_\mu$  est l'application  $\Phi_\mu(x, y) = (H_\mu, y)$  et  $\tilde{\omega}_i$  est une forme quelconque. (Evidemment la formule ci-dessus est homogène, de poids égal à celui de  $\omega_i$ ).

DÉMONSTRATION

On a  $i = 3\ell+2$  pour un certain  $\ell \geq 0$ . De  $H_\mu = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x^3 - \mu x$ , on tire :  $y(\frac{x^3}{3} + \mu x)^\ell (x^2 + \mu) dx = y(\frac{1}{2}y^2 - H_\mu) (y dy - dH_\mu)$ .

Le terme de droite est bien de la forme  $\bar{\omega}_i(y, H_\mu)$ . Celui de gauche admet un développement :  $(\frac{1}{3})^\ell \omega_{3\ell+2} + \sum_{j < 3\ell+2} \alpha_j(\mu) \omega_j$ , où les  $\alpha_j(\mu)$  sont des polynomes en  $\mu$ ,  $\mu$ -divisibles. Le résultat suit par récurrence sur les  $\omega_j$  mineurs.

PROPOSITION 3 : Pour tout  $k \geq 1$ , les  $k$  premières formes majeures  $\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_k$ , ont leur classe  $\mathbb{R}$ -indépendantes dans  $\Omega_{-1}$ .



DÉMONSTRATION.

Posons  $H_{-1} = H$ . L'équivalence  $\sim$  est celle de  $\Omega_{-1}$ .

De la formule de récurrence de la proposition 1, on tire :

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_3 &= \omega_3 \sim * H\omega_0 + + \omega_1 \\ \tilde{\omega}_4 &= \omega_4 \sim * H\omega_1 + + \omega_0 \quad (\text{Compte rendu de } \omega_2 \sim \omega_0).\end{aligned}$$

où les  $*$  désignent des coefficients rationnels,  $\neq 0$ .

Par récurrence :

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{2\ell+1} &\sim * H^\ell \omega_0 \pmod{\{\omega_0, \dots, H^{\ell-1} \omega_0, \omega_1, \dots, H^{\ell-1} \omega_1\}} \\ \tilde{\omega}_{2\ell+2} &\sim * H^\ell \omega_1 \pmod{\{\omega_0, \dots, H^{\ell-1} \omega_0, \omega_1, \dots, H^{\ell-1} \omega_1\}}.\end{aligned}$$

On passe donc du système  $\{\omega_0, H\omega_0, \dots, H^\ell \omega_0, \omega_1, \dots, H^\ell \omega_1\}$  au système  $\{\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \dots, \tilde{\omega}_{2\ell+1}, \tilde{\omega}_{2\ell+2}\}$  par une transformation linéaire, triangulaire inversible. Pour montrer l'indépendance de  $\{\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_{2\ell+2}\}$ , il suffit de montrer celle de  $\{\omega_0, \dots, H^\ell \omega_1\}$ . Supposons donc qu'il existe une relation linéaire non triviale entre  $\omega_0, \dots, H^\ell \omega_1$ . Cela équivaut à dire qu'il existe 2 polynomes  $Q_0, Q_1$  de degré  $\ell$ , non tous 2 nuls, tels que  $Q_0(H)\omega_0 + Q_1(H)\omega_1 \sim 0$ . Mais le module  $\Omega_{-1}$  est engendré librement sur  $\mathbb{R}[t]$  par  $[\omega_0]$  et  $[\omega_1]$  et l'équivalence à 0 ci-dessus, est impossible (cf. [P]). La démonstration de l'indépendance de  $\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_{2\ell+1}$  se fait de la même manière.

DÉFINITION : Soit  $\Gamma_b$ , la composante compacte de  $\{H=b\}$  pour  $b \in [-2/3, 2/3]$  ( $H=H_{-1}$  ;  $\Gamma_{2/3}$  est un cercle singulier). A tout forme polynomiale  $\omega$  en  $x, y$  on associe l'intégrale :

$$I_\omega(b) = \int_{\Gamma_b} \omega. \text{ Posons } I_i(b) = \int_{\Gamma_b} \omega_i.$$

REMARQUE :  $\omega \sim 0 \Leftrightarrow I_\omega \equiv 0$ . Ce résultat est évident dans le sens  $\Rightarrow$ .

Inversement, soit  $\omega$  telle que  $I_\omega \equiv 0$ . Décomposons  $\omega$  sur  $\omega_0, \omega_1$  :

$\omega \sim Q_0(H)\omega_0 + Q_1(H)\omega_1$ . Ceci implique :  $I_\omega = Q_0 \cdot I_0 + Q_1 \cdot I_1$  et donc si

$I_\omega \equiv 0 \Rightarrow \frac{I_1}{I_0}(b) \equiv -\frac{Q_0(b)}{Q_1(b)}$ . Mais la fonction  $I_1/I_0$  n'est pas rationnelle.

(Elle admet un développement logarithmique en  $b=2/3$ ). Donc  $Q_0 \equiv Q_1 \equiv 0$  et

$\omega \sim 0$ . (C'est ce même raisonnement qui prouve que  $\Omega_{-1}$  est libre sur

$[\omega], [\omega_1]$ ).

Il suit de cette remarque et de la proposition 3, le résultat suivant :

COROLLAIRE 4 : Soit  $\omega = \sum_{i=1}^{\ell-1} v_i \tilde{\omega}_i \pm \tilde{\omega}_\ell$  où  $v = (v_1, \dots, v_{\ell-1})$  est un paramètre. Alors pour  $\forall v, I_\omega(b) \neq 0$ .

Comme la fonction  $I_\omega$  n'est pas identique à zéro et qu'elle est analytique sur l'intervalle  $[-2/3, 2/3[$ , elle n'admet que des zéros isolés sur cet intervalle. En fait, ce nombre est fini et peut être estimé en fonction de la décomposition de  $\omega$  sur  $\omega_0, \omega_1$ . Nous allons reprendre l'argument de Petrov [P], pour démontrer le résultat suivant :

THÉOREME 5 : Soit  $H = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{3} x^3 + x$  et  $\omega$  une forme algébrique telle que  $\omega \sim Q_0(H)\omega_0 + Q_1(H)\omega_1$  où  $Q_0, Q_1$  sont des polynomes. Soit  $S$  le plus grand commun diviseur de  $Q_0, Q_1$  et  $s$  l'ordre de  $2/3$  comme racine de  $S$  :  $S = (b-2/3)^{s\bar{S}}$  avec  $\bar{S}(2/3) \neq 0$ . Alors, le nombre des zéros de  $I_\omega$  sur l'intervalle  $[-2/3, 2/3[$ , comptés avec leur multiplicité est inférieur ou égal à :

$$\deg Q_1 + \text{Sup}\{2 \deg Q_0, 2 \deg Q_1, \deg Q_0 + \deg Q_1 + 1\} - 3 \deg S + \deg \bar{S} + 3$$

DÉMONSTRATION :

On pose  $P(b) = -\frac{I_1}{I_0}(b)$  ; la fonction  $P(b)$  vérifie l'équation de Riccati :

$$(9b^2-4) \frac{dP}{db} = 7 P^2 + 3 bP - 5 \quad (R)$$

Comme  $\omega \sim Q_0(H)\omega_0 + Q_1(H)\omega_1$ , on a :  $I_\omega(b) = Q_0(b)I_0 + Q_1(b)I_1$ .

Posons  $Q_0 = \bar{Q}_0 S$  et  $Q_1 = \bar{Q}_1 S$  où  $\bar{Q}_0, \bar{Q}_1$  n'ont pas de zéros communs.

$I_\omega = S(\bar{Q}_0 I_0 + \bar{Q}_1 I_1)$ . Maintenant :

$$\begin{aligned} \#(\text{zéros de } I_\omega, \text{c.a.m}) &= \#(\text{zéros de } \bar{S} \text{ c.a.m}) + \\ &\quad \#(\text{zéros de } \frac{I_1}{I_0} + \frac{Q_0}{Q_1}, \text{c.a.m.}) + 2 \quad (1) \end{aligned}$$

(c.a.m. = comptés avec leur multiplicité; il s'agit des zéros sur

$[-2/3, 2/3[$  ;  $I_0$  possède un zéro d'ordre 2 en  $b = -\frac{2}{3}$ ).

$$\text{Posons : } \frac{I_1}{I_0} + \frac{\bar{Q}_0}{\bar{Q}_1} = -\left(P - \frac{\bar{Q}_0}{\bar{Q}_1}\right) = -g.$$

LEMME 6 : La fonction  $g$  vérifie l'équation de Riccati suivante :

$$\bar{Q}_1^2 \cdot (9b^2-4)g' = D_2 g^2 + D_1 g + D_0 \quad (R_g)$$

où les  $D_i$  sont des polynomes en  $b$ , avec :

$$\text{deg } D_0 \leq \text{Sup}\{2 \text{ deg } \bar{Q}_0, 2 \text{ deg } \bar{Q}_1, \text{ deg } \bar{Q}_0 + \text{ deg } \bar{Q}_1 + 1\}.$$

DÉMONSTRATION :

$$g' = P' - \frac{\bar{Q}_0' \bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 \cdot \bar{Q}_1'}{\bar{Q}_1^2}, \quad g = P - \frac{\bar{Q}_0}{\bar{Q}_1}$$

En substituant ces expressions dans (R), on obtient :

$$(9b^2-4)\bar{Q}_1^2 g' = \bar{Q}_1^2 g^2 + (14 \bar{Q}_0 + 3 b \bar{Q}_1)\bar{Q}_1 g + D_0$$

$$\text{avec } D_0 = (\bar{Q}_1' \bar{Q}_0 - \bar{Q}_1 \bar{Q}_0') (9b^2-4) + 7\bar{Q}_0^2 + 3b\bar{Q}_0 \bar{Q}_1 - 5\bar{Q}_1^2.$$

D'où le résultat.

La fonction  $g$ , sur  $[-2/3, 2/3[$ , admet un pôle en chaque zéro de  $\bar{Q}_1$ .

LEMME 7 : Soit  $I$  un intervalle entre 2 pôles consécutifs de  $g$  sur  $[-2/3, 2/3[$ . Soient  $\alpha, \beta \in$  intérieur  $(I)$ , 2 zéros consécutifs de  $g$ . Alors, il existe un zéro de  $D_0$  sur  $[\alpha, \beta]$ .

Démonstration :

On peut par exemple supposer que  $g(t) > 0$  pour  $t \in ]\alpha, \beta[$ . Alors  $g'(\alpha) \geq 0$  et  $g'(\beta) \geq 0$ . Comme  $g(\alpha) = 0$ ,  $D_0(\alpha)$  est du signe de  $g'(\alpha)$ , soit  $D_0(\alpha) \geq 0$  (cf. l'équation  $(R_g)$ ). De même  $D_0(\beta) \leq 0$ . D'où le résultat.

LEMME 8 : Soit  $\alpha$  un zéro de  $g$  d'ordre  $k \geq 2$ . Alors  $\alpha$  est un zéro de  $D_0$  d'ordre au moins  $k-1$ .

DÉMONSTRATION :

Considérez l'équation  $(R_g)$ .

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du théorème 5. Supposons tout d'abord que tous les zéros de  $g$  sur  $[-2/3, 2/3[$  soient simples. Alors, entre 2 zéros consécutifs de  $g$ , on trouve un zéro de  $Q_1$  ou bien un zéro de  $D_0$ . On a donc :

$$\#(\text{zéros de } g) \leq \#(\text{zéros de } D_0) + \#(\text{zéros de } \bar{Q}_1) + 1,$$

$$\text{soit : } \#(\text{zéros de } g) \leq \deg(\bar{Q}_1) + \text{Sup}\{2\deg\bar{Q}_0, 2\deg\bar{Q}_1, \deg\bar{Q}_0 + \deg\bar{Q}_1 + 1\} + 1 \quad (2)$$

Comme  $\deg \bar{Q}_0 = \deg Q_0 - \deg S$  et  $\deg \bar{Q}_1 = \deg Q_1 - \deg S$ , le résultat cherché suit des formules (1) et (2).

Lorsque  $g$  possède des zéros multiples, on peut remplacer chaque zéro d'ordre  $k$  par  $k$  zéros simples très proches, en intercalant entre eux des zéros de  $D_0$  (grâce au lemme 8). On se retrouve alors dans la

situation précédente.

Nous allons appliquer le théorème 5 à la forme  $\omega = \sum_{i=1}^{\ell-1} v_i \tilde{\omega}_i \pm \tilde{\omega}_\ell$ .

Nous avons déjà vu que :

$$\tilde{\omega}_{2\ell+1} \sim Q_0 \omega_0 + Q_1 \omega_1 \quad \text{avec } \deg Q_0 = \ell \quad \text{et } \deg Q_1 = \ell - 1$$

$$\tilde{\omega}_{2\ell+2} \sim Q_0 \omega_0 + Q_1 \omega_1 \quad \text{avec } \deg Q_0 = \ell \quad \text{et } \deg Q_1 = \ell.$$

Cela peut s'écrire en une seule formule :

$$\tilde{\omega}_k \sim Q_0 \omega_0 + Q_1 \omega_1 \quad \text{avec } \deg Q_0 = \left[ \frac{k-1}{2} \right] \quad \text{et } \deg Q_1 = \left[ \frac{k}{2} \right] - 1.$$

Alors, pour la forme  $\omega$  ci-dessus, on a :

$$\omega \sim Q_0 \omega_0 + Q_1 \omega_1 \quad \text{avec } \deg Q_0 = \left[ \frac{\ell-1}{2} \right] \quad \text{et } \deg Q_1 = \left[ \frac{\ell}{2} \right] - 1.$$

Pour la forme  $\omega$ ,  $\deg Q_0 \geq \deg Q_1$ , le terme :  $\deg Q_1 + \text{Sup}\{2\deg Q_0, 2\deg Q_1, \deg Q_0 + \deg Q_1 + 1\} + 1$  est égal à  $2\deg Q_1 + \deg Q_0 + 2 =$

$$2\left[\frac{\ell}{2}\right] + \left[\frac{\ell-1}{2}\right] = \left[\frac{3\ell-2}{2}\right].$$

On obtient finalement le résultat suivant, conséquence du théorème 5 et du corollaire 4 :

**THÉORÈME 9** : Soit  $\ell \geq 2$  et  $\omega = \sum_{i=1}^{\ell-1} v_i \tilde{\omega}_i \pm \tilde{\omega}_\ell$  où  $v = (v_1, \dots, v_{\ell-1}) \in \mathbb{R}^{\ell-1}$ .

Alors pour  $\forall v \in \mathbb{R}^{\ell-1}$ , l'intégrale  $I_\omega$  est non dégénérée (non identique à zéro) et le nombre de ses zéros dans l'intervalle  $[-2/3, 2/3[$ , comptés avec leur multiplicité, est inférieur ou égal à

$$\left[\frac{3\ell+2}{2}\right] - 3 \deg S + \deg \bar{S}. \quad (\text{En particulier ce nombre est majoré uniformément par } \left[\frac{3\ell+2}{2}\right]).$$

Posons  $H = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{3} x^3 + x$ . Dans la suite nous allons ramener la démonstration du théorème de l'introduction au calcul du nombre de cycles d'une forme particulière, perturbation de la forme exacte  $dH$ . Précisément, on aura une forme :

$$\omega_\lambda = dH - v \left[ \sum_{i=1}^{\ell-1} v_i \tilde{\omega}_i \pm \tilde{\omega}_\ell \right] + o(v)$$

où  $v$  est un petit paramètre et où  $o(v)$  désigne une forme  $\mathcal{C}^\infty$  dépendant de  $v$ ,  $v = (v_1, \dots, v_{\ell-1})$  et d'un autre paramètre  $\tilde{\lambda}$  éventuel. On désigne par  $\lambda$ , le paramètre total :  $\lambda = (v, \tilde{\lambda})$ .

Soit  $K_v$  un compact arbitraire dans l'espace du paramètre  $v$ ,  $K_{\tilde{\lambda}}$ , un compact arbitraire dans celui de  $\tilde{\lambda}$  et  $A$  un compact arbitraire dans  $\mathbb{R}^2(x, y)$ . On veut déterminer une borne supérieure pour le nombre de cycles de  $\omega_\lambda$  dans  $A$ , lorsque  $(v, \tilde{\lambda}) \in K_v \times K_{\tilde{\lambda}}$  et que  $v$  est assez petit.

A un changement de coordonnées dépendant des paramètres près, on peut supposer que les seuls points singuliers de  $\omega_\lambda$  dans  $A$  sont les points  $e(-1, 0)$  et  $s(1, 0)$ . D'autre part, quitte à prendre  $v$  assez petit, il suffit de considérer pour  $A$  un voisinage compact arbitraire du disque singulier  $D = \{H \leq 2/3\}$ . Tous les cycles éventuels de  $\omega_\lambda$  coupent le segment  $[s, e]$ , segment que l'on supposera paramétré par les valeurs  $b$  de la fonction  $H$  ( $-2/3$  correspondant à  $e$  et  $2/3$  à  $s$ ).

Pour une famille telle  $\omega_\lambda$ , il est très facile d'obtenir un développement de l'application retour  $P$  du champ dual de  $\omega_\lambda$ ,  $X_\lambda$  sur le segment  $[s, e] \approx [-2/3, 2/3]$  :

$P(b) = b + v I_\omega + o(v)$  où  $I_\omega$  est l'intégrale associée comme plus haut à  $\omega = \sum_{i=1}^{\ell-1} v_i \tilde{\omega}_i + \tilde{\omega}_\ell$  (cf. [A.L.G.M.] ).

Fixons une valeur quelconque  $\alpha \in ]-2/3, 2/3[$

L'intégrale  $I_\omega$  est analytique sur  $[-2/3, \alpha]$  et l'application  $P(b)$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur ce même intervalle. Il en suit immédiatement, que si

$(v_0, \tilde{\lambda}_0) \in K_v \times K_{\tilde{\lambda}}$ , il existe un voisinage  $\mathcal{U}_1(v_0, \tilde{\lambda}_0)$  de ce point  $(v_0, \tilde{\lambda}_0)$  dans l'espace des paramètres  $(v, \tilde{\lambda})$  et une valeur  $V > 0$  telle que le nombre de cycles de  $\omega_\lambda$  coupant  $]-2/3, \alpha]$  (c'est-à-dire le nombre de zéros de  $P(b) - b$  sur  $]-2/3, \alpha]$ ) est majorée par le nombre de zéros de l'intégrale  $I_\omega$  moins 2, pour tout  $\lambda \in ]0, V] \times v_1(v_0, \tilde{\lambda}_0)$  pour tout  $\lambda$ . Ce majorant local est, d'après le théorème 9, égal

à  $[\frac{3\ell-2}{2}] - 3\deg S + \deg \bar{S} \leq [\frac{3\ell-2}{2}] - 3s$ . (Où les polynomes  $S, \bar{S}$  sont définis plus haut)

Nous devons maintenant nous préoccuper du nombre de cycles pouvant apparaître au voisinage de la connexion  $\Gamma_{2/3}$ . La difficulté ici est que  $I_\omega$  n'est pas analytique en  $b = -\frac{2}{3}$  et que  $P(b)$  n'est pas différentiable en cette valeur limite. La détermination du nombre de cycles pouvant apparaître par perturbation de la connexion de selle  $\Gamma_{2/3}$  demande une étude directe que je me propose de présenter dans un autre article [R]. Le résultat est que le nombre de cycles en question est déterminé par le développement de  $I_\omega$  en  $b = +\frac{2}{3}$ .

THÉORÈME 10 [R] : Supposons que, par rapport à la variable  $\bar{b} = b - 2/3$  la fonction intégrale  $I_\omega$ , pour une valeur fixée  $v_0$ , admette le développement :  $I_\omega(\bar{b}) = a_\sigma \bar{b}^\sigma + b_\sigma \bar{b}^{\sigma+1} \text{Log } \bar{b} + o(\bar{b}^{\sigma+1})$  avec  $a_\sigma$  ou  $b_\sigma \neq 0$ . Alors, il existe  $\alpha \in [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}[$ , un voisinage  $\mathcal{U}_2(v_0, \tilde{\lambda}_0)$  de  $(v_0, \tilde{\lambda}_0)$  dans  $K_v \times K_\lambda$  et un  $v > 0$  tel que  $\omega_\lambda$  n'ait pas plus de  $2\sigma + 1$  cycles coupant  $[\alpha, 2/3]$  pour tout  $\lambda \in ]0, v] \times \mathcal{U}_2(v_0, \tilde{\lambda}_0)$ .

Maintenant, il est facile de voir que le nombre  $\sigma$  dépend de la décomposition de  $\omega$  par rapport à  $\omega_0, \omega_1$ . Soit comme plus haut,  $\omega \sim Q_0(H)\omega_0 + Q_1(H)\omega_1$  et  $S$  le plus grand commun diviseur de  $Q_0, Q_1$ . Soit  $s$  la multiplicité de  $2/3$  comme racine de  $S$ . Alors :

PROPOSITION 11 : L'ordre  $\sigma$  du développement de  $I_\omega(b)$ , intervenant dans le théorème 10, est égal à la multiplicité  $s$  :

$$I_\omega(\bar{b}) = a_s \bar{b}^s + b_s \bar{b}^{s+1} \text{Log } \bar{b} + o(\bar{b}^{s+1})$$

avec  $a_s$  ou  $b_s \neq 0$ .

DÉMONSTRATION :

Tout d'abord, en utilisant par exemple l'équation de Riccati (R), il est facile de vérifier que les 2 intégrales  $I_0$  et  $I_1$  admettent

en  $\frac{2}{3}$  les développements suivants :

$$I_0(\bar{b}) = \alpha_0 + \alpha_1 \bar{b} \text{ Log } \bar{b} + o(\bar{b})$$

$$I_1(\bar{b}) = \beta_0 + \beta_1 \bar{b} \text{ Log } \bar{b} + o(\bar{b})$$

$$\text{avec } \frac{\beta_0}{\alpha_0} = \frac{-5}{7} \text{ et } \frac{\alpha_1}{\beta_1} = 1 \quad (1)$$

Ecrivons aussi que :

$$s(\bar{b}) = s_0 \bar{b}^s + o(\bar{b}^{s+1}) \text{ avec } s_0 \neq 0$$

$$\text{et si, } Q_0 = s \cdot \bar{Q}_0, \quad Q_1 = s \cdot \bar{Q}_1,$$

$$\bar{Q}_0 = \gamma_0 + \gamma_1 \bar{b} + o(\bar{b}^2)$$

$$\bar{Q}_1 = \delta_0 + \delta_1 \bar{b} + o(\bar{b}^2)$$

Ces développements permettent d'écrire :

$$\bar{Q}_0 I_0 + \bar{Q}_1 I_1 = (\alpha_0 \delta_0 + \beta_0 \delta_0) + (\alpha_1 \gamma_0 + \beta_1 \delta_0) \bar{b} \text{ Log } \bar{b} + o(\bar{b})$$

et donc :

$$I_\omega(\bar{b}) = s(\bar{Q}_0 I_0 + \bar{Q}_1 I_1) = (\alpha_0 \gamma_0 + \beta_0 \delta_0) \bar{b}^s + (\alpha_1 \gamma_0 + \beta_1 \delta_0) \bar{b}^{s+1} \text{ Log } \bar{b} + o(\bar{b}^{s+1})$$

Les coefficients  $a_s, b_s$  ont pour expression :

$$\begin{cases} a_s = \alpha_0 \gamma_0 + \beta_0 \delta_0 \\ b_s = \alpha_1 \gamma_0 + \beta_1 \delta_0 \end{cases} \quad (2)$$

Les formules (1) montrent que si  $a_s = b_s = 0$  alors  $\gamma_0 = \delta_0 = 0$ . Ceci est impossible puisque les polynomes  $\bar{Q}_0$  et  $\bar{Q}_1$  sont premiers entre eux.

La multiplicité  $s$  est égale à  $\text{deg } S - \text{deg } \bar{S}$ . De ce qui précède il résulte que pour  $\forall (v_0, \tilde{\lambda}_0) \in K_v \times K_\lambda$ , il existe un voisinage  $\tilde{V}(v_0, \tilde{\lambda}_0)$  de cette valeur dans  $K_v \times K_\lambda$  et un  $V > 0$  tels que pour tout  $\lambda \in ]0, V] \times \tilde{V}(v_0, \tilde{\lambda}_0)$  la forme  $\omega_\lambda$  ne possède, dans  $A$ , pas plus que  $[\frac{3\ell-2}{2}] - 3 \text{ deg } S + \text{deg } \bar{S} + 2s + 1$  soit, pas plus que :  $[\frac{3\ell-2}{2}] - 3s + 2s + 1 = [\frac{3\ell}{2}] - s$  cycles. Ce dernier nombre est majoré uniformément par  $[\frac{3\ell}{2}]$ .



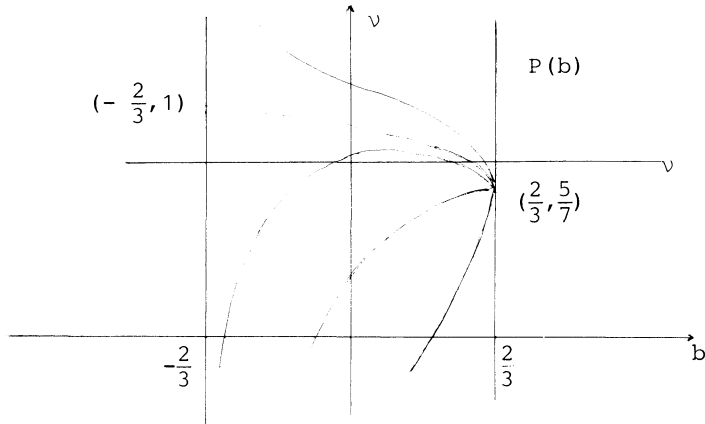
En extrayant un sous-recouvrement fini du recouvrement des  $U(v_0, \tilde{\lambda}_0)$ , on obtient finalement le théorème suivant :

THÉORÈME 12 : Soit  $\omega_\lambda = dH + v \left[ \sum_{i=1}^{\ell-1} v_i \tilde{\omega}_i \pm \tilde{\omega}_\ell \right] + o(v)$

une forme comme plus haut, avec  $v \in \mathbb{R}$  et  $(v, \tilde{\lambda}) \in K_v \times K_{\tilde{\lambda}}$  où  $K_v$  et  $K_{\tilde{\lambda}}$  sont des compacts des espaces des paramètres  $v$  et  $\tilde{\lambda}$  respectivement.

$\omega_\lambda$  est  $C^\infty$  par rapport à  $(x, y)$  et  $\lambda = (v, \tilde{\lambda})$ . Soit  $A$  un compact fixé dans l'espace  $\mathbb{R}^2$  de la variable  $(x, y)$ . Alors il existe un  $V > 0$  tel que la forme  $\omega_\lambda$  ne possède pas plus de  $\lceil \frac{3\ell}{2} \rceil$  cycles dans  $A$ , par tout  $\lambda$  dans  $]0, V[ \times K_v \times K_{\tilde{\lambda}}$ .

REMARQUE : Comme je l'ai dit dans l'introduction, je pense que la borne du nombre de cycles dans le théorème précédent doit être égal à  $\ell-1$ . Dans le cas  $\ell=2$ , la fonction  $P(b)$  étant monotone (Bogdanov [ $B_2$ ]), ce nombre de cycle est égal à 1. En fait, le théorème 9 fournit une borne égale à 2, pour le nombre de zéros de l'intégrale  $I_\omega$  sur  $[-2/3, 2/3]$ . La raison est la suivante : le théorème 9 donne, dans le cas  $\ell=2$ , une borne du nombre de zéros de  $u(b)-v$ , valable pour toutes les solutions  $u(b)$  de l'équation (R). Or, pour certaines solutions cette borne est effectivement égale à 2. La solution  $P(b)$  sépare justement les solutions monotones des solutions non monotones.



Graphes des solutions de l'équation (R)

PARTIE II. FILTRATION DE  $\Sigma_C^2$  (RÉDUCTION NORMALE DES CUSPS).

Rappelons que parmi les formes  $\omega_i = y x^i dx$ ,  $i \geq 0$ , on distingue les formes majeures (pour  $i \neq 3\ell + 2$ ,  $\ell \geq 0$ ) et les formes mineures (les autres) On numérote les formes majeures  $\tilde{\omega}_1 = \omega_0, \tilde{\omega}_2 = \omega_1, \dots, \tilde{\omega}_\ell = \omega_{K(\ell)}$  avec  $K(\ell) = \lfloor \frac{3\ell-3}{2} \rfloor$  ( $\tilde{\omega}_\ell$  est donc de degré  $K(\ell)+1$ ).

DÉFINITION :  $\Sigma_C^2 = \{\omega \in V_O \mid j^2 \omega(0) \sim ydy - x^2 dx + \beta xy dx\}$  pour un certain  $\beta$ , et pour  $k \geq 3$  :

$$\Sigma_C^k = \{\omega \in V_O \mid j^{K(k-1)+1} \omega(0) \sim ydy - x^2 dx\}$$

On a évidemment :  $\Sigma_C^2 \supset \dots \supset \Sigma_C^k \supset \Sigma_C^{k+1} \supset \dots$

$\Sigma_C^2$  est un ouvert de l'orbite de  $ydy$  dans les 1-jets. C'est donc une sous-variété de codimension 2 ;  $\Sigma_C^k$ , pour  $k \geq 3$ , est l'orbite de  $ydy - x^2 dx$  dans les  $(K(k-1)+1)$ -jets ; c'est donc aussi une sous-variété (On parle ici d'orbites pour l'action d'équivalence différentiable).

PROPOSITION 1 :  $\text{cod } \Sigma_C^k = k$  (codimension dans  $V_O$ ).

La démonstration de ce résultat va occuper pratiquement tout le reste de cette partie. Elle va faire usage de la notion de forme normale. Je rappelle cette notion dans le cas qui nous intéresse ici ( $j^1 \omega(0) \sim ydy$ ).

LEMME 2 (Takens [ $T_2$ ]) : Soit  $\omega_1 = ydy$ . Désignons par  $\Omega_k$  l'espace vectoriel des formes polynomiales homogènes de degré  $k$ ,  $N_k$ , le sous espace de  $\Omega_k$  engendré par  $x^k dx$  et  $x^{k-1} y dx$  et  $W_k$  l'espace vectoriel des champs de vecteurs polynomiaux homogènes de degré  $k$ . Alors, il existe des applications linéaires  $A_k, B_k$  :

$A_k : \Omega_k \rightarrow W_k$  et  $B_k : \Omega_k \rightarrow N_k$  telles que, pour  $\forall R_k \in \Omega_k$  et  $\omega_i \in N_i$ ,

$i = 2, \dots, k-1$ , si :

$$j^k_\omega(0) = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{k-1} + R_k.$$

Alors  $\frac{1}{\det(g)} \cdot j^k g_{\star\omega}(0) = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{k-1} + B_k(R_k)$

où  $g(m) = m + A_k(R_k)$ .

Soit  $G$  le groupe formé des couples  $g = (f, \varphi)$  où  $f$  est un germe de fonction non nulle en  $0$ , et  $\varphi$ , un germe de difféomorphisme en  $0$ , avec  $\text{signe } f = \text{signe } \det(\varphi)$  ;  $G$  est le groupe qui opère dans l'équivalence différentiable des formes par :

$$g_{\star\omega} = f \cdot \varphi_{\star\omega} \quad (\text{définition de l'équivalence différentiable}).$$

Les  $L$ -jets d'éléments de  $G$ , forment le groupe  $G^L$  opérant par équivalence différentiable sur l'espace  $V^L_0$  des  $L$ -jets de formes singulières. Par récurrence, le lemme 2 permet d'obtenir le résultat suivant, de mise de  $\omega \in \Sigma^2_C$ , sous forme normale :

LEMME 3 : Soit  $\omega \in \Sigma^2_C$ . Alors il existe  $g_\omega \in G^L$ , dépendant polynomialement de  $j^L_\omega(0)$  tel que :

$$j^L(g_{\omega\star\omega})(0) = ydy - x^2dx + \sum_{i=2}^{L-1} \alpha_i(\omega) x^{i+1}dx + \sum_{j=1}^{L-1} \beta_j(\omega) x^j y dx.$$

Les coefficients  $\alpha_i(\omega)$ ,  $\beta_j(\omega)$  dépendent polynomialement de  $j^L_\omega(0)$ .

On poursuit la réduction en éliminant les termes  $x^{i+1}dx$  :

LEMME 4 : Soit  $\omega \in \Sigma^2_C$  avec  $j^L_\omega(0) = ydy - x^2dx + \sum_{i=2}^{L-1} \alpha_i x^{i+1}dx + \sum_{j=1}^{L-1} \beta_j x^j y dx$ .

Alors, il existe  $g_\omega \in G^L$ , dépendant polynomialement de  $j^L_\omega(0)$  tel que :

$$j^L(g_{\omega\star\omega})(0) = ydy - x^2dx + \sum_{i=1}^{L-1} \beta'_i x^i y dx$$

où les  $\beta'_i(\omega)$  dépendent polynomialement de  $j^L_\omega(0)$  (c'est à dire des  $\alpha_i, \beta_j$ ).

DÉMONSTRATION :

Il existe une série formelle  $X(x) = x + \dots$  telle que :

$$\frac{X^3}{3} = \frac{x^3}{3} - \sum_{i=2}^{L-1} \frac{\alpha_i}{i+1} x^{i+2}.$$

La série inverse  $x(X)$  possède des coefficients dépendant polynomialement des  $\alpha_i$ . Soit  $g_\omega = (j^L x(X), y)$  (on identifie  $g_\omega$  avec  $(1, g_\omega) \in G^L$ ).

Alors  $j^L g_{\omega*} [-x^2 dx + \sum_{i=2}^{L-1} \alpha_i x^{i+1} dx] = -x^2 dx$

$j^L g_{\omega*} [\sum_{i=1}^{L-1} \beta_i x^i y dx] = \sum_{i=1}^{L-1} \beta_i x^i y dx$ , avec des  $\beta_i$  polynomiaux par rapport aux  $\alpha_i$ .

Revenons maintenant à l'étude des  $\omega \in \Sigma_C^k$ . On a :

LEMME 5 : Soit  $\omega \in \Sigma_C^k$  avec  $k \geq 3$  et soit  $L = K(k) + 1$ . Supposons que  $\omega$  soit sous la forme normale :

$$j^L \omega(0) = y dy - x^2 dx + \sum_{i=1}^{L-1} \beta_i x^i y dx.$$

Alors il existe  $g_\omega \in G^L$ , dépendant polynomialement de  $j^L \omega(0)$ , tel que :

$$j^L (g_{\omega*} \omega)(0) = y dy - x^2 dx + \beta(j^L \omega) \tilde{\omega}_k$$

où  $\beta$  dépend polynomialement de  $j^L \omega(0)$  et tel que, si :

$$j^L \omega(0) = y dy - x^2 dx + \beta \tilde{\omega}_k \text{ alors } \beta(j^L \omega(0)) = \beta.$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 5 :

Elle suit par récurrence du lemme suivant :

LEMME 6 : Soit  $\omega \in \Sigma_C^k$ . Supposons que pour un  $i$ ,  $2 \leq i \leq L-2$ ,  $j^i \omega = y dy - x^2 dx$  et que  $\omega$  soit sous la forme normale du lemme 4. Alors il existe  $g_\omega \in G^{i+1}$ , dépendant polynomialement du  $(i+1)$ -jet de  $\omega$  ( $j^{i+1} \omega(0) = y dy - x^2 dx + \beta x^i y dx$ ;  $g_\omega$  dépend polynomialement de  $\beta$ ), tel que :

$j^{i+1}(g_{\omega,*}\omega)(0) = ydy - x^2dx$  et tel que  $g_{\omega} = \text{Id}$  si  $j^{i+1}\omega(0) = ydy - x^2dx$ .

Montrons tout d'abord comment le lemme 5 suit du lemme 6.

On applique le lemme 6 par récurrence à partir de  $i=2$ . Le  $g_{\omega}$  cherché dans le lemme 5 sera composition d'éléments  $g_i \in G_i$ ,  $i \leq L$  dont les coefficients sont polynomiaux par rapport à  $\omega$ . Si  $\omega$  est déjà de la forme  $ydy - x^2dx$  à l'ordre  $L-1$ , les différents  $g_i$  sont tous égaux à l'identité, ainsi que leur composé.

DÉMONSTRATION DU LEMME 6 :

On distingue deux cas :

a) L'indice  $i+1$  est majeur. Dans ce cas, le coefficient  $\beta_{i+1} = 0$ . En effet, par définition, on sait que  $\omega \sim ydy - x^2dx$  à l'ordre  $K(k-1)+1 \geq i+1$  (puisque  $i+1$ , supposé plus petit que  $K(k)+1$ , est un indice majeur de la forme  $K(j)+1$  avec  $j \leq k-1$ ). Maintenant les 2 formes:  $ydy - x^2dx$  et  $ydy - x^2dx + \beta_{i+1}y x^i dy$  sont différentiablement équivalentes à l'ordre  $i+1$ .

Cela implique que  $\beta_{i+1} = 0$ . En effet, si  $\beta_{i+1} \neq 0$ , on considère l'holonomie des 2-formes, dans  $\mathbb{T}^2$  (holonomie autour de la fibre singulière). Cette holonomie diffère d'une forme à l'autre à l'ordre  $i+1$ . Cette remarque est équivalente au fait que  $\Sigma_C^{k+1} \not\subset \Sigma_C^k$ . Si  $i+1$  est un indice majeur, on prendra  $g_{\omega} = \text{Id}$ .

b) L'indice  $i+1$  est mineur.  $j^{i+1}\omega(0) = ydy - x^2dx + \beta x^{i+1}y dx$ . Avec  $i+1 = 3\ell+2$  pour un certain  $\ell > 0$ . Posons  $H_0 = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x^3$  comme dans la partie I. On a :

$$x^{i+1}y dx = x^{3\ell+2}y dx = 3^{\ell} (y^2/2 - H_0)^{\ell} (ydy - dH_0)$$

et donc :  $j^{i+1}\omega(0) = dH_0 + 3^{\ell} \beta y (y^2/2 - H_0)^{\ell} (ydy - dH_0)$ .

Soit  $\phi_0(x, y) = (H_0, y)$ . On a :

$$j^{i+1}\omega(0) = \phi_{0,*}(dX + \beta \bar{\omega}(X, Y))$$

où  $\omega$  est une forme polynomiale en  $X, Y$ .

Maintenant, remarquons que la forme  $\bar{\omega}$  est singulière en 0. Il existe donc  $g_\beta = (f_\beta, \varphi_\beta) \in G^{i+1}$ , dépendant polynomialement de  $\beta$ , tel que :

$$dX + \beta \bar{\omega}(X, Y) = f_\beta \cdot \varphi_{\beta*}(dX).$$

(Appliquer le théorème de Frobenius).

$$\text{Posons } F_\beta = f_\beta \circ \phi_0 \text{ et } \Phi_\beta = X \circ \varphi_\beta \circ \phi_0.$$

Alors, on a :  $j^{i+1}\omega(0) = F_\beta d\Phi_\beta$  et donc :  $j^{i+1}\omega(0) \sim d\Phi_\beta$ .

Maintenant ,  $\Phi_\beta = H_0 + S_\beta$  avec :

$$S_\beta = \alpha_1 Y^3 + \alpha_2 Y H_0^2 + \dots (+ \dots : \text{termes de degré } \geq 4).$$

Il est facile de déduire de cette expansion de  $S_\beta$ , que  $\Phi_\beta$  est conjugué à  $H_0$  par actions de difféomorphismes à la source et au but : il existe  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $\psi(0) = 0$  et  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  avec  $G(0) = 0$  tels que  $\Phi_\beta = \psi \circ H_0 \circ G$  et donc  $d\Phi_\beta = d\psi(H_0 G) \cdot G_* (dH)$ .

Ce qui implique que  $d\Phi_\beta$  est différentiablement équivalent à  $dH_0$ .

Evidemment, toutes les équivalences différentiables trouvées dépendent polynomialement de  $\beta$ , au niveau du  $(i+1)$ -jet. Ceci achève la démonstration du lemme 6.

Nous allons maintenant passer à la démonstration de la proposition 1. Nous avons déjà indiqué que le résultat est aisé si  $k=2$ . Nous allons établir le résultat général par récurrence sur  $k$ . Supposons donc le résultat établi pour un certain  $k \geq 2$  : nous savons donc que  $\Sigma_C^k$  est une sous variété de codimension  $k$  dans  $V_O^{K(k-1)+1}$  et donc dans tous les espaces de jets d'ordre supérieur. En particulier  $\Sigma_C^k$  est sous-variété de codimension  $k$  dans  $V_O^{K(k)+1}$  et nous avons :

$$\Sigma_C^{k+1} \subset \Sigma_C^k \subset V_O^{K(k)+1}.$$

Il suffit de montrer que  $\Sigma_C^{k+1}$  est de codimension 1 dans  $\Sigma_C^k$ .

Par définition :  $\Sigma_C^{k+1} = \{\omega \mid j^{K(k)+1}\omega(0) \sim ydy - x^2 dx\}$ .

D'autre part, il suit du lemme 5 que :

$$\Sigma_C^k = \{\omega \mid \exists \beta \in \mathbb{R} : j^{K(k)+1}\omega(0) \sim ydy - x^2 dx + \beta \tilde{\omega}_k\}.$$

Désignons par D la droite :  $D = \{ydy - x^2dx + \beta\tilde{\omega}_k \mid \beta \in \mathbb{R}\}$   $\Sigma_C^k$  est le saturé de D et  $\Sigma_C^{k+1}$  le saturé de  $\{ydy - x^2dx\}$  pour l'équivalence différentiable. La proposition 1 suit de la :

PROPOSITION 7 : Il existe une application polynomiale  $\pi : \Sigma_C^k \rightarrow \mathbb{R}$  (restriction d'une fonction polynomiale de  $V_O^{K(k)+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ) telle que :

- a) Pour  $\forall \omega \in \Sigma_C^k : \omega \sim ydy - x^2dx + \pi(\omega)\tilde{\omega}_k$  (à l'ordre  $K(k)+1$ )
- b) Pour  $\forall \omega \in D : \omega = ydy - x^2dx + \pi(\omega)\tilde{\omega}_k$  (à l'ordre  $K(k)+1$ )

Montrons comment la proposition 7 implique la proposition 1.  
 La proposition 7 implique que  $\Sigma_C^{k+1} = \{\omega \in \Sigma_C^k \mid \pi(\omega) = 0\}$ .  
 Maintenant, le p<sup>t</sup> b) signifie que  $\pi|_D$  est un isomorphisme de D sur  $\mathbb{R}$ .  
 Donc l'équation  $\{\pi = 0\}$  est de rang 1 en restriction à  $\Sigma_C^k$ , au point  $\omega_0 = ydy - x^2dx$  et  $\Sigma_C^{k+1}$  est une sous variété de codimension 1 de  $\Sigma_C^k$ .

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 7 :

Identifions  $\Sigma_C^2$  avec sa contre image dans  $V_O^{K(k)+1}$ . (On considère donc que  $\Sigma_C^2 \subset V_O^{K(k)+1}$ ). Les lemmes 3 et 4 fournissent une application polynomiale  $\Sigma_C^2 \rightarrow \Sigma_C^2$  envoyant  $\omega \in \Sigma_C^2$  sur une forme normale :

$$ydy - x^2dx + \sum_{i=0}^{L-1} \beta_i x^i y dx. (L=K(k)+1)$$

Le lemme 5 fournit une réduction polynomiale à un élément de D, lorsque  $\omega \in \Sigma_C^k \subset V_O^{K(k)+1}$ . En composant ces applications polynomiales, on obtient l'application  $\pi : \Sigma_C^k \rightarrow \mathbb{R}$ . Lorsque  $\omega \in D$ , les différentes réductions utilisées sont égales à l'identité et laissent donc  $\omega$  invariante (ce qui implique le point b).

DÉFINITION. Pour  $\forall k \geq 2$ , nous désignerons par  $N_k \subset V_O^{K(k-1)+1}$  l'espace vectoriel des formes d'écriture :

$$j^{K(k-1)+1}_{\omega(0)} = ydy - x^2dx + \sum_{i=1}^{K(k-1)} \alpha_i y x^i dx$$

$N_k$  est l'espace des formes normales, de dimension  $K(k-1)$  ;  $N_k \subset \Sigma_C^2$ .

Proposition 8 :

$$N_k \cap \Sigma_C^k = \{ \omega \in N_k \mid \alpha_i = 0 \text{ pour } \forall i \text{ majeur, } 2 \leq i \leq K(k-1) \}$$

(C'est à dire  $\alpha_i = 0$  pour  $i = K(2), \dots, K(k-1)$ ).

REMARQUE : Il suit de la proposition 8 que pour  $\forall \omega \in N_k \cap \Sigma_C^k$ , le  $(k-2)$ -plan des coefficients  $\alpha_i$ ,  $i$  majeur, est transversal à  $\Sigma_C^k$  dans  $\Sigma_C^2$ .

DÉMONSTRATION : Dans la démonstration du lemme 6, on a montré en fait que si  $\omega \in N_k \cap \Sigma_C^k$ , alors  $\alpha_i = 0$  pour  $\forall i$  majeur,  $i \leq K(k-1)$ . En effet, supposons que l'un des  $\alpha_i$ ,  $i$  majeur, soit différent de 0. Soit  $i$ , le premier de tels indices :

$$j^{i+1} \omega(0) = ydy - x^2 dx + \sum_{\substack{j < i \\ j \text{ mineur}}} \alpha_j x^j y dx + \alpha_i x^i y dx, \text{ avec } \alpha_i \neq 0.$$

La démonstration du point b du lemme 6, montre que :

$$ydy - x^2 dx + \sum_{j < i} \alpha_j x^j y dx = F d\phi \text{ avec } F = 1 + \dots, \phi = H_0 + \dots$$

où le développement de  $\phi$  est comme dans la démonstration du lemme 6.

$$j^{i+1} \omega(0) \sim j^{i+1} \left( \frac{\omega}{F} \right) = d\phi + \alpha_i x^i y dx.$$

Comme  $d\phi = F' \cdot G'_* (dH_0)$  avec  $F' = 1 + \dots$  et  $G' = \text{Id} + \dots$

$j^{i+1} \omega(0) \sim dH_0 + \alpha_i x^i y dx$ . On peut donc éliminer tous les coefficients mineurs  $j < i$  sans modifier  $\alpha_i \neq 0$ . Mais on a vu (point a dans la démonstration du lemme 6) que cela implique :  $\omega \notin \Sigma_C^k$ , contrairement à l'hypothèse.

Inversement, supposons que  $j^{K(k-1)+1} \omega(0) = dH_0 + \sum_{\substack{j \leq K(k-1) \\ j \text{ mineur}}} \alpha_j x^j y dx$ .

L'argument utilisé ci-dessus montre que :

$$j^{K(k-1)+1} \omega(0) \sim dH_0 \text{ et donc que } \omega \in \Sigma_C^k.$$



PARTIE III. FORME NORMALE DES DÉFORMATIONS GÉNÉRIQUES.

On considère une déformation  $\omega_\lambda$  de  $\omega_0 \in \Sigma_{\mathbb{C}^\pm}^\ell$ , avec  $\lambda \in \mathbb{R}^k$  ( $2 \leq \ell \leq k$ ), telle que  $j^{K(\ell-1)+1} \omega_\lambda(m)$  soit transverse à  $\Sigma_{\mathbb{C}}^\ell \subset V^{K(\ell-1)+1}(V^{K(\ell-1)+1}$ : espace des  $(K(\ell-1)+1)$ -jets de formes en  $0 \in \mathbb{R}^2$ );  $\omega_\lambda$  est une déformation générique au sens défini dans l'introduction.

Comme  $\Sigma_{\mathbb{C}}^2 \supset \Sigma_{\mathbb{C}}^\ell$ , la famille  $\omega_\lambda$  est également transverse à  $\Sigma_{\mathbb{C}}^2$ . Le théorème des fonctions implicites permet de trouver un changement de coordonnées tel que, pour tout  $(\lambda_3, \dots, \lambda_k)$  :

$$j^2 \omega_{(0,0,\lambda_3, \dots, \lambda_k)}(0) \in \Sigma_{\mathbb{C}}^2$$

et tel que l'application  $(\lambda_1, \lambda_2, m) \rightarrow j^2 \omega_\lambda(m)$  soit transverse à  $\Sigma_{\mathbb{C}}^2$  (1).

On va appliquer à la famille locale  $\omega_\lambda$ , la théorie des formes normales de familles (développée dans l'article de Takens [T<sub>2</sub>]). En fait, on applique la théorie aux 2 paramètres  $(\lambda_1, \lambda_2)$ , les autres :  $(\lambda_3, \dots, \lambda_k)$  jouant un rôle muet. On obtient la forme normale suivante :

$$\omega_\lambda \sim ydy - \sum_{i=0}^N \alpha_i(\lambda) x^i dx - \sum_{i=0}^{N-1} \beta_i(\lambda) x^i y dx + O((|m| + |\bar{\lambda}|)^{N+1}) \quad (2)$$

où  $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$  ;  $|m|$ ,  $|\bar{\lambda}|$  étant des normes de  $m, \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^2$ ,

$N$  : un entier grand, non spécifié, mais  $\gg K(\ell)+1$ .

On applique maintenant le lemme 5 de la partie II, puis à nouveau la théorie de Takens aux termes d'ordre compris entre  $K(\ell)+1$  et  $N$  pour réaliser la condition :

$$j^{K(\ell)+1} \omega_0(0) = ydy - x^2 dx \pm \tilde{\omega}_\ell$$

Soit  $\alpha_i(0) = 0$  pour  $0 \leq i \leq K(\ell)+1$ ,  $i \neq 2$  et  $\alpha_2(0) = -1$

$$\beta_i(0) = 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq K(\ell-1), \beta_{K(\ell)}(\lambda) = \pm 1$$

l'hypothèse (1) se traduisant par :  $\alpha_0(0, \bar{\lambda}) \equiv \alpha_1(0, \bar{\lambda}) \equiv \beta_0(0, \bar{\lambda}) \equiv 0$

où  $\bar{\lambda} = (\lambda_3, \dots, \lambda_k)$ .

$$\text{On posera dans la suite } F(\lambda, x) = \sum_{i=0}^N \alpha_i(\lambda) x^i \text{ et } G(\lambda, x) = \sum_{i=0}^{N-1} \beta_i(\lambda) x^i y$$

Nous allons maintenant entreprendre une série de réductions de l'écriture (2) ; chacune des ces réductions sera une équivalence différentiable de la famille.

Première réduction :

Le reste  $O((|m| + |\bar{\lambda}|)^{N+1})$  se décompose en  $Q_1 dy - Q_2 dx$  avec  $Q_1, Q_2 = O((|m| + |\bar{\lambda}|)^{N+1})$ . Une conjugaison de la forme :  $Y=y+P$ , avec  $P = O((|m| + |\bar{\lambda}|)^{N+1})$  transforme l'écriture (2) en

$$YdY - (F + YG)dX + Q'_2 dX.$$

où  $Q'_2 = O((|M| + |\bar{\lambda}|)^N)$  avec  $M = (X, Y)$

On revient aux coordonnées  $(x, y)$  et on remplace  $N$  par  $N+1$  pour obtenir :

$$\omega_\lambda \sim ydy - (F+YG)dx + Q'_2 dx, \text{ avec } Q'_2 = O((|m| + |\bar{\lambda}|)^{N+1}) \quad \left. \vphantom{\omega_\lambda} \right\} (4)$$

et les propriétés (2), (3).

Deuxième réduction :

On décompose  $Q'_2 = \tilde{F}(\lambda, x) + y\tilde{G}(\lambda, x) + y^2\tilde{Q}(\lambda, x, y)$  avec  $\tilde{F}, \tilde{G}, \tilde{Q} = O((|m| + |\bar{\lambda}|)^{N-1})$ .

En remplaçant à nouveau  $N-1$  par  $N+1$ ,  $F+\tilde{F}$  par  $F$ , etc... on obtient :

$$ydy \sim (F+YG)dx + QY^2 dx \text{ où } F, G, Q \text{ vérifient toujours (2), (3)}. \quad (5).$$

Troisième réduction :

Développons  $F$  :  $F = \alpha_0(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}) + \alpha_1(\bar{\lambda}, \bar{\lambda})x + \alpha_2(\bar{\lambda}, \bar{\lambda})x^2 + \dots$

Avec  $\alpha_0, \alpha_1 = O(\bar{\lambda})$  et  $\alpha_2(0, \bar{\lambda}) \neq 0$ .

La théorie du pli (déformation universelle de  $f(x) = x^2 + \dots$ ) implique l'existence d'une famille paramétrée de difféomorphismes :

$$(X, Y) = (x + O(x^2) + O(\bar{\lambda}), y) \text{ amenant } Fdx \text{ sur } (X^{3+\mu(\lambda)})dX \text{ (où } \mu(\lambda)$$

est une fonction  $\mathcal{C}^\infty$ ) et la forme  $\omega_\lambda$  sur :

$$YdY - (X^{2+\mu(\lambda)})dX - YG'dX + Q'Y^2dX.$$

Les fonctions  $G'(\lambda, X)$  et  $Q'(\lambda, X, Y)$  vérifient encore les propriétés de la formule (5). En particulier  $Q' = O((|m| + |\bar{\lambda}|)^{N+1})$  et  $\mu, \beta_0 = O(\bar{\lambda})$ .

En revenant aux coordonnées  $(x, y)$ , on a :

$$\omega_\lambda \sim ydy - (x^2 + \mu(\lambda))dx - yGdx + QY^2dx \text{ avec les propriétés de (5)} \quad (6).$$

Quatrième réduction :

$$\text{Développons } G(\lambda, x) = \beta_0(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}) + \beta_1(\bar{\lambda}, \bar{\lambda})x + \dots$$

La transversalité de  $\omega_\lambda$  à  $\Sigma_C^2$  se traduit par : l'application

$(\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (\mu, \beta_0)$  est de rang 2 pour tout  $(\lambda_3, \dots, \lambda_k)$ . On peut donc changer les paramètres  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k)$  par  $\mu, \nu_1 = \beta_0, \lambda_3, \dots, \lambda_k$ . Alors,

$$\omega_\lambda \sim ydy - (x^2 + \mu)dx - \nu_1 y dx - \sum_{i=1}^{N-1} \beta_i(\lambda) y x^i dx + y^2 Q dx \quad (7)$$

avec  $\lambda = (\mu, \nu_1, \lambda_3, \dots, \lambda_k)$  et les propriétés de (6).

Remarquez que  $\mu, \beta_0 = O(\bar{\lambda})$  avec  $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \Rightarrow$  la fonction  $Q$  du (7) est encore  $O((|m| + |\bar{\lambda}|)^{N+1})$  avec maintenant  $\bar{\lambda} = (\mu, \nu_1)$ .

Cinquième réduction :

Nous allons maintenant utiliser la transversalité de la famille à  $\Sigma_C^\ell$ . Comme  $j^2 \omega_{(0,0,\lambda_3,\dots,\lambda_k)}(0) \in \Sigma_C^2$ , l'application :

$$(m, (\lambda_3, \dots, \lambda_k)) \rightarrow j^{K(\ell-1)+1} \omega_{(0,0,\lambda_3,\dots,\lambda_k)}(m) \text{ est transverse à } \Sigma_C^\ell$$

dans  $\Sigma_C^2$ . Revenons à l'écriture (7). La proposition 8 de la partie II, permet de traduire la transversalité à  $\Sigma_C^\ell$  par :

$$\begin{aligned} \text{l'application } (\lambda_3, \dots, \lambda_k) \rightarrow (\beta_i)_i \quad & i \text{ majeur, } 1 \leq i \leq K(\ell-1) \\ & (i = K(2), \dots, K(\ell-1)) \end{aligned}$$

est de rang  $\ell-2$  (maximum).

Cela nous permet de choisir comme paramètres  $\mu, \nu_1, \nu_i = \beta_{K(i)}$

$2 \leq i \leq \ell-1$  et  $\lambda_{\ell+1}, \dots, \lambda_k$ .

(Après un difféomorphisme des paramètres  $(\lambda_3, \dots, \lambda_k)$  de façon à assurer

$$\text{la condition : } \frac{D(\nu_2 \dots \nu_{\ell-1})}{D(\lambda_3, \dots, \lambda_\ell)}(0) \neq 0).$$

Posons  $\lambda = (\mu, \nu, \tilde{\lambda})$  avec  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{\ell-1})$ ,  $\tilde{\lambda} = (\lambda_{\ell+1}, \dots, \lambda_k)$  et toujours  $\bar{\lambda} = (\mu, \nu_1)$ . On a maintenant :

$$\omega_\lambda \sim ydy - (x^2 + \mu)dx - \sum_{i=1}^{\ell-1} \nu_i \tilde{\omega}_i \pm \tilde{\omega}^\ell + \sum_{\substack{j \leq K(\ell) \\ j \text{ mineur}}} \beta_j(\lambda) x^j y dx + \sum_{j > K(\ell)} \gamma_j(\lambda) \omega_j + Q y^2 dx \quad (8)$$

où  $Q = O((|m| + |\bar{\lambda}|)^{N+1})$  avec  $\bar{\lambda} = (\mu, \nu_1)$ .

Sixième et dernière réduction.

On va utiliser la proposition 2 de la partie I pour transformer le terme  $\sum \beta_j(\lambda) x^j y dx$ . On a vu que chaque forme mineure  $\omega_j$  s'écrit :

$$\omega_j = \sum_{0 \leq K(i) < j} A_{ji}(\mu) \tilde{\omega}_i + \bar{\omega}_j(H_\mu, y) \text{ avec } A_{ji}(\mu) = O(\mu).$$

et  $\bar{\omega}_j$  une forme fonction de  $H_\mu, y$ .

On obtient :  $\sum \beta_j(\lambda) x^j y dx = \sum_{1 \leq i \leq \ell-1} \nu_i^! \tilde{\omega}_i + \alpha(y, H_\mu)$  avec des  $\nu_i^!(\lambda) = O(\mu)$ .

La forme  $\omega_\lambda$  de (8) s'écrit donc :

$$\omega_\lambda = ydy - (x^2 + \mu)dx + \alpha(y, H_\mu) - \sum_{i=1}^{\ell-1} (\nu_i + \nu_i^!) \tilde{\omega}_i \pm \tilde{\omega}^\ell + \sum_{j > K(\ell)} \gamma_j(\lambda) \omega_j + Q y^2 dx.$$

Remarquez que  $\alpha(y, H_\mu)$  est une combinaison de formes polynomiales en  $\mu, x, y$  de poids compris entre 9 et poids  $(\omega_{(K(\ell)-1)})$  (Voir définition de la partie I). Comme les  $\nu_i^!(\lambda) = O(\mu)$ , l'application

$(\mu, \nu_1 \dots \nu_{\ell-1}) \rightarrow (\mu, \nu_1 + \nu_1^!, \dots, \nu_{\ell-1} + \nu_{\ell-1}^!)$  est de rang maximum en 0. On peut remplacer les paramètres  $\mu, \nu_1, \dots, \nu_{\ell-1}$  par  $\mu, \nu_1 + \nu_1^!, \dots, \nu_{\ell-1} + \nu_{\ell-1}^!$ . Remarquez que la fonction  $Q$  est encore  $O((|m| + |\bar{\lambda}|)^{N+1})$  avec maintenant  $\bar{\lambda} = (\mu, \nu_1 + \nu_1^!)$ .

Pour finir, on remplace  $\nu_1 + \nu_1^!, \dots$  par  $\nu_1, \dots$ . Résumons, pour conclure les propriétés de la forme normale (N) à laquelle nous avons abouti Toute famille générique  $\omega_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}^k$  est équivalente à la forme normale

(N) suivante :

$$ydy - (x^2 + \mu)dx + \alpha(y, H_\mu) - \sum_{i=1}^{\ell-1} v_i \tilde{\omega}_i \pm \tilde{\omega}_\ell + \sum_{j>K(\ell)}^N \gamma_j(\lambda) \omega_j + Q(x, y, \lambda) y^2 dx$$

où  $\lambda = (\mu, \nu, \tilde{\lambda})$   $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{\ell-1})$  ,  $\tilde{\lambda} = (\lambda_{\ell+1}, \dots, \lambda_k)$  ,

$\alpha(y, H_\mu)$  est une forme en  $y, H_\mu$  , combinaison de formes polynomiales en  $y, x, \mu$  de poids compris entre 9 et poids  $(\omega_{(K(\ell)-1)})$  , les  $\gamma_j(\lambda)$  et les coefficients entrant dans  $\alpha$  sont des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\lambda$  et  $Q(\lambda, x, y) = O((|m| + |\tilde{\lambda}|)^{N+1})$  avec  $\tilde{\lambda} = (\mu, \nu_1)$ .

PARTIE IV : DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

Il faut montrer qu'une famille  $\omega_\lambda$  d'écriture (N) obtenue dans la partie III, ne possède localement pas plus de  $\lfloor \frac{3\ell}{2} \rfloor$  cycles. Pour les besoins de la récurrence, on va prouver un énoncé plus fort.

THÉORÈME 1 : ( $\ell \geq 1$ ).

$$\left. \begin{aligned} \text{Soit } \omega_{\lambda, u} &= ydy - (x^2 + \mu)dx + u^\varepsilon \alpha(y, H_\mu) \\ &- u \left[ \sum_{i=1}^{\ell-1} v_i \tilde{\omega}_i \pm \tilde{\omega}_\ell + \sum_{j>K(\ell)}^N \gamma_j(\lambda) \omega_j + Q(x, y) y^2 dx \right] \end{aligned} \right\} (N_u)$$

une famille locale de formes ;  $\lambda = (\mu, \nu_1, \dots, \nu_{\ell-1}, \lambda_{\ell+1}, \dots, \lambda_k)$  et  $\alpha, \gamma_j, Q$  sont comme dans (N). On suppose de plus que  $u > 0$  et  $\varepsilon > 0$ . (Pour  $\ell=1$ , la sommation sur les  $\tilde{\omega}_i$  est absente).

Alors pour  $\forall C \subset \mathbb{R}^{k-\ell}$ , ensemble compact dans  $\mathbb{R}^{k-\ell}$  espace des paramètres  $(\lambda_{\ell+1}, \dots, \lambda_k)$ , et tout  $U > 0$ ,  $\exists$  des voisinages  $A \subset \mathbb{R}^2$  et  $B \subset \mathbb{R}^\ell$ , voisinages de  $0 \in \mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^\ell$ , tels que la forme  $\omega_{\lambda, u}$  n'ait pas plus de  $\lfloor \frac{3\ell}{2} \rfloor$  cycles dans  $A$  pour  $\forall u, 0 < u \leq U$  et  $\lambda \in B \times C$ .

Pour étudier la forme  $(N_u)$  nous faisons l'éclatement :

$$x = t^2 \bar{x} \text{ , } y = t^3 \bar{y} \text{ , } \mu = t^4 \bar{\mu} \text{ , } v_i = t^{2(K(\ell) - K(i))} \bar{v}_i \text{ , } \lambda_j = \bar{\lambda}_j \text{ .}$$

Alors :

$$\bar{\omega} = \frac{1}{t^6} \omega = \bar{y}d\bar{y} - (\bar{x}^2 + \bar{\mu})d\bar{x} + t^3 u^\varepsilon \bar{\alpha}(\bar{y}, \bar{H}_{\bar{\mu}}) - ut^{2K(\ell)-1} \left[ \sum_{i=1}^{\ell-1} \bar{v}_i \tilde{\omega}_i \pm \tilde{\omega}_\ell + o(t^2) \left( \sum_{j>K(\ell)} \bar{y}_j \omega_j + \bar{Q}\bar{y}^2 d\bar{x} \right) \right] \quad (E)$$

où  $\bar{H}_{\bar{\mu}} = \frac{1}{2} \bar{y}^2 - (\bar{\mu}\bar{x} + \frac{\bar{x}^3}{3})$ ,  $\bar{\alpha} = t^{-9} \alpha(t^2 \bar{y}, t^2 \bar{x})$ ,  $\bar{Q} = t^{-2K(\ell)+1} Q(t^2 \bar{x}, t^3 \bar{y})$   
etc...

On va chercher le voisinage B de  $0 \in \mathbb{R}^\ell$  comme réunion de cônes autour des différents axes  $O_\mu, O_{v_1}, \dots$ .

Fixons C, U arbitraires, comme dans l'énoncé. On peut trouver des voisinages A, B tels que pour  $\forall \lambda \in B \cap \{\mu \geq 0\} = B_+$  la forme  $\omega_\lambda$  n'ait aucune singularité et donc aucun cycle dans A. Il nous reste à recouvrir le complémentaire de  $B_+$  (dans un voisinage de 0) par une réunion de cônes. On définit ces cônes de la façon suivante :

- 1)  $C_\mu = \{\bar{\mu} = -1, (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{\ell-1}) \in K_\mu \text{ compact arbitraire de } \mathbb{R}^{\ell-1} \text{ et } t \in ]0, T_\mu] \text{ où } T_\mu \text{ est assez petit}\}$
- 2)  $C_{v_{\ell-1}} = \{\bar{v}_{\ell-1} = \pm 1, (\bar{\mu}, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{\ell-2}) \in F_{v_{\ell-1}} \text{ voisinage compact de } 0 \in \mathbb{R}^{\ell-1} \text{ assez petit, } t \in ]0, T_{v_{\ell-1}}], T_{v_{\ell-1}} \text{ assez petit}\}$
- 3)  $C_{v_{\ell-2}} = \{\bar{v}_{\ell-2} = \pm 1, \bar{v}_{\ell-1} \in K_{v_{\ell-2}} \text{ compact arbitraire, } (\bar{\mu}, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{\ell-3}) \in F_{v_{\ell-2}} \text{ voisinage de } 0 \text{ assez petit, } t \in ]0, T_{v_{\ell-2}}], T_{v_{\ell-2}} \text{ assez petit}\}$
- $\ell-i+1) C_{v_i} = \{\bar{v}_i = \pm 1, (\bar{v}_{i+1}, \dots, \bar{v}_{\ell-1}) \in K_{v_i} \text{ compact arbitraire, } (\bar{\mu}, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{i-1}) \in F_{v_i} \text{ voisinage de } 0 \text{ assez petit, } t \in ]0, T_{v_i}], T_{v_i} \text{ assez petit}\}$

etc, jusqu'à :

ℓ)  $C_{v_1} = \{\bar{v}_1 = \pm 1, (\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{\ell-1}) \in K_{v_1}$  compact arbitraire et  $\mu \in F_{v_1}$  voisinage de 0 assez petit,  $t \in ]0, T_{v_1}]$ ,  $T_{v_1}$  assez petit $\}$ .

On peut choisir  $K_{v_{\ell-1}}, \dots, K_{v_1}$  et  $K_\mu$  pour que la réunion :  $B = C_{v_{\ell-1}} \cup \dots \cup C_{v_1} \cup C_\mu \cup B^+$  soit un voisinage de 0 (moins de point zéro ; pour  $(\mu, v_1, \dots, v_{\ell-1}) = 0$ ,  $\omega_\lambda$  est un cusp). Il suffit donc d'établir le résultat de finitude pour  $(\mu, v_1, \dots, v_{\ell-1})$  dans chacun des cônes, pour une donnée  $C, U$  arbitraire, comme dans l'énoncé du théorème 1, et  $(x, y) \in A$ , voisinage assez petit de  $0 \in \mathbb{R}^2$ .

Etude dans l'un des cônes  $C_v$ .

Le résultat suit par récurrence sur  $\ell$ , à partir de  $\ell=1$ . En effet, pour  $\ell \geq 2$  et  $v_i = \pm 1$  (cas du cône  $C_{v_i}$ ) l'écriture (E) est du type  $(N_u)$  pour  $\ell$  remplacé par  $i$ ,  $(\mu, v_1, \dots, v_{\ell-1})$  remplacé par  $(\bar{\mu}, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{i-1})$ ,  $\tilde{\lambda}$  remplacé par  $(\bar{v}_{i+1}, \dots, \bar{v}_{\ell-1}, \tilde{\lambda}, t, u)$ ,  $u$  par  $ut^{2K(\ell)-1}$ ,  $\varepsilon$  par un  $\delta > 0$  choisi tel que  $(2K(\ell)-1) \cdot \delta < 3$  et  $\delta < \varepsilon$ ,  $\alpha(y, H_\mu)$  par  $u^{\varepsilon-\delta} t^{3-\delta(2K(\ell)-1)} \cdot \bar{\alpha}(\bar{y}, \bar{H}_\mu)$  et  $(x, y)$  remplacé par  $(\bar{x}, \bar{y})$ . (Noter que  $2K(\ell)-1 > 0$  si  $\ell \geq 2$ ). La possibilité d'avoir  $K_{v_i}$  arbitraire vient du fait que l'on peut choisir  $(\bar{v}_{i+1}, \dots, \bar{v}_{\ell-1}, \tilde{\lambda})$  dans un compact arbitraire.

Etude dans le cône  $C_\mu$  ( $\ell \geq 2$ ) :

On pose  $\bar{\mu} = -1$  ; avec  $\bar{H}_{-1} = \bar{H} = \frac{1}{2} \bar{y}^2 - \frac{\bar{x}^3}{3} + \bar{x}$ ,  $\bar{\omega}$  s'écrit  $\bar{\omega} = d\bar{H} + u^{\varepsilon} t^3 \bar{\alpha}(\bar{y}, \bar{H}) - ut^{\varepsilon_1} \left( \sum_{i=1}^{\ell-1} \bar{v}_i \tilde{\omega}_i \pm \tilde{\omega}_\ell + O(t) \right)$  avec  $\varepsilon_1 = 2K(\ell) - 1$

La forme  $\bar{\alpha}$  et le terme  $O(t)$  dépendent de tous les paramètres.

Posons  $v = ut^{\varepsilon_1}$ .

Alors  $u^{\varepsilon} t^3 = v^{\delta} \phi(u, t)$  pour un certain  $\delta > 0$ , (choisi tel que  $\delta < \varepsilon$  et  $\delta \varepsilon_1 < 3$ ) ;  $\phi$  est une fonction continue de  $u, t$ .

La famille  $\bar{\omega}$  s'écrit :

$$\bar{\omega}_v = d\bar{H} + v^\delta \alpha_1(\bar{Y}, \bar{H}) - v \left( \sum_{i=1}^{\ell-1} \bar{v}_i \tilde{\omega}_i \pm \tilde{\omega}_\ell + O(v) \right) \text{ avec } \alpha_1 = \Psi(u, t) \bar{\alpha}.$$

Maintenant, si  $U > 0$  est fixé,  $v \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow 0$  et que  $u \in ]0, U]$ , et  $v > 0$  si  $t$  et  $u > 0$ . Aussi le terme  $vO(t) = o(v)$ . Le résultat, dans le cône  $C_\mu$  suit de la :

PROPOSITION 2 : Soit la famille (pour  $\ell \geq 2$ ) :

$$\bar{\omega} = \bar{y}d\bar{y} - (\bar{x}^2 - 1)d\bar{x} + v^\delta \alpha_1(\bar{H}, \bar{Y}) - v \left[ \sum_{i=1}^{\ell-1} v_i \tilde{\omega}_i \pm \tilde{\omega}_\ell \right] + o(v) \quad (1)$$

dépendant des paramètres  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{\ell-1}, v$ , et éventuellement d'un autre paramètre de dimension finie  $\tilde{\lambda}$ , intervenant dans  $\alpha_1$  et le terme  $o(v)$ . Alors si  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{\ell-1}, v, \tilde{\lambda})$  appartient à un compact fixé, la forme  $\bar{\omega}$  ne possède pas plus de  $\lfloor \frac{3\ell}{2} \rfloor$  cycles dès que  $v > 0$  est assez petit.

DÉMONSTRATION :

Nous allons montrer que la famille (1) est différenciablement équivalente à une famille :

$$d\bar{H} - v \left[ \sum_{i=1}^{\ell-1} \bar{v}_i \tilde{\omega}_i \pm \tilde{\omega}_\ell \right] + o(v) \quad (2)$$

(où  $o(v)$  dépend de  $\bar{x}, \bar{y}$  et de tous les paramètres).

La proposition 2 suit alors du théorème 12 de la partie I.

Montrons que la famille (1) de l'énoncé se réduit à la forme (2)  $d\bar{H} + v^\delta \alpha_1(\bar{Y}, \bar{H}) = \phi_* [dX + v^\delta \alpha_1(X, Y)]$  avec  $\phi(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{H}, \bar{Y})$

Remarquons que si  $v$  est assez petit, tous les cycles éventuels de  $\bar{\omega}$  seront dans un voisinage arbitraire du disque singulier  $\{H \leq 2/3\}$ . On peut donc se limiter à  $(x, y) \in L$ , voisinage compact de ce disque singulier.

Si  $v$  est assez petit, il existe un difféomorphisme d'un voisinage  $U$  de  $\phi(L)$  :  $\psi(X, Y) = \text{Id} + O(v^\delta)$  et une fonction :  $F = 1 + O(v^\delta)$  tels



que :  $dX + v^\delta \alpha_1(X, Y) = F(X, Y) \psi_* (dX)$

D'où :  $d\bar{H} + v^\delta \alpha_1(H, \bar{Y}) = \phi_* (F \cdot \psi_* (dX))$   
 $= F \circ \phi (\psi \circ \phi)_* (dX) = F_1 d\psi_1$

où les 2 fonctions  $F_1, \psi_1$ , sont fonctions de  $(\bar{H}, \bar{Y})$  de la forme :

$$\begin{cases} F_1 = 1 + O(v^\delta) \\ \psi_1 = \bar{H} + O(v^\delta) \end{cases}$$

Maintenant  $\bar{H}$  est stable dans  $L$  (comme fonction de Morse à valeurs critiques distinctes ; Stabilité par difféomorphisme à la source et au but). Il existe donc un difféomorphisme  $U = Id + O(v^\delta)$  et une nouvelle fonction  $F_2 = 1 + O(v^\delta)$  tels que :

$$d\psi_1 = F_2 U_* (d\bar{H}).$$

En posant  $F = F_1 \cdot F_2 = 1 + O(v^\delta)$ , on peut écrire :

$$d\bar{H} + v^\delta \alpha_1(\bar{H}, \bar{Y}) = F U_* (d\bar{H}).$$

Revenons à la famille  $\tilde{\omega}$ . Posons  $\omega_D = \sum_{i=1}^{\ell-1} \tilde{v}_i \tilde{\omega}_i \pm \tilde{\omega}_\ell$ . On a :

$$\tilde{\omega} \sim dH - U_*^{-1} \left[ \frac{v}{F} \omega_D \right] + o(v).$$

Mais  $U_*^{-1} \left[ \frac{v}{F} \omega_D \right] = \omega_D + o(v)$

D'où le résultat.

Pour achever la démonstration du théorème 1, nous devons prouver l'étape initiale de la récurrence sur  $\ell$ , pour  $\ell=1$ .

Pour  $\ell=1$ , la forme  $(N_u)$  se réduit à :

$$\omega_{\lambda, u} = ydy - (x^2 + u)dx - u(\pm ydx + \psi(\lambda, x, y)xydx)$$

où  $\psi$  est une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  ;  $\lambda = (\mu, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ .

(La forme  $\alpha \neq 0$  pour  $\ell \leq 2$ ).

Nous devons montrer que si  $U > 0$  et  $K$  un compact dans l'espace des paramètres  $(\lambda_2, \dots, \lambda_k)$  sont fixés,  $\exists$  un voisinage de 0 :  $W \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$

(espace de  $(x, y, \mu)$ ) tel que pour  $(x, y, \lambda) \in W \times K$  et  $0 < u < U$  la forme  $\omega_{\lambda, u}$  n'ait pas de cycles dans  $W$ .  $U, K$  fixés, on choisit  $W$  pour que :

$$\left| \frac{\partial}{\partial y}(xy\varphi) \right| = \left| x\varphi + yx\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right| < 1/2 \text{ dans } W \times K.$$

Alors  $d\omega_{\lambda, u} = u \psi dx \wedge dy$  pour une fonction  $\psi(x, y, \lambda)$  strictement positive dans  $W \times K$ . Le théorème de Stokes implique que  $\omega_{\lambda, u}$  n'a pas de cycles.

REMARQUE

Dans la démonstration précédente, nous avons prouvé le résultat de finitude sur un compact fixe  $\bar{A}$  de l'espace  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Lorsque  $t \rightarrow 0$ , l'image de ce voisinage dans l'espace  $(x, y)$ , a un diamètre tendant vers 0. Cependant le résultat est valable sur un voisinage fixe  $A$  de l'espace  $(x, y)$  pour la raison suivante : tout cycle  $\gamma$  de  $\omega_{\lambda, u}$  sépare les deux points critiques et il est facile de voir qu'un tel cycle  $\gamma$  est dans l'image de  $\bar{A}$ .

RÉFÉRENCES :

- [A.L.G.M.] A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon and A.G. Mauer, "Theory of Bifurcation of Dynamical Systems on the Plane, (1967).
- [B] N. Bautin, "On the number of limit cycles which appear with the variation of coefficients from an equilibrium position of focus or centred type", Anna. Math. Soc. Trans., 1000, (1954).
- [B<sub>1</sub>] V. Bogdanov, "Bifurcation of a limit cycle for a family of vector fields on the plane, Seminar Petrovski, (1976), fasc.2 p. 23-35 et Selecta Math.Soviet 1 (1981) p.373-387.

- [B<sub>2</sub>] V. Bogdanov, "Versal de formations of a singular point of a vector field on the plane in the case of zero eigenvalues" Seminar Petrovski (1976) et Selecta Math.Soviet (1981)p.389-491.
- [D.R.S.] F. Dumortier, R. Roussarie, J. Sotomayor, "Generic 3-parameter families of vector fields on the plane, unfolding a singularity with linear part. The cusp case of codimension 3. (A paraitre dans "Ergodic Th. and Dyn. Sys.")
- [I] Yu.S. Il'Jashenko : "The multiplicity of limit cycles arising from perturbations of the forms  $w'=P_2/Q_1$  of an hamilton equation in the real and complex domain". Amer. Math. Soc. Transl. (2) Vol. 118, 1982, Translation from : Trudy Seminar Petrovski 3, 1978, 49-60.
- [P.] G.S. Petrov, "Number of zeros of complete elliptic integrals" Funct. An. and Applie. Vol. 18, n° 2, pp. 73-74. (1984)
- [R.] R. Roussarie, "On the number of limit cycles which appear by perturbation of a separatrix loop of planar vector field". (A paraitre dans "Bul. da Soc. Bras. de Mat. ").
- [T<sub>1</sub>] Fl. Takens, "Unfoldings of certain singularities of vector fields Generalised Hopf bifurcation". Journal of Diff. Equations, 14, 1973, 473-493.
- [T<sub>2</sub>] Fl. Takens, "Forced oscillations and bifurcations, In. Applications of Global Analysis I" Communications of Math. Inst. Rijksuniversiteit Utrecht 3, 1974.

Robert ROUSSARIE  
Laboratoire de Topologie  
U.A. 755 CNRS  
Université de DIJON  
B.P. 138  
21004 - DIJON Cédex.