JEAN-FRANÇOIS JAULENT

# Sur les conjectures de Leopoldt et de Gross

*Astérisque*, tome 147-148 (1987), p. 107-120

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__147-148__107_0>

*Société Mathématique de France*
*Astérisque 147-148 (1987), p.107-120.*

# SUR LES CONJECTURES DE LEOPOLDT ET DE GROSS

par
Jean-François JAULENT

Les conjectures de Leopoldt et de Gross dont il est question ici sont celles qui postulent la non nullité des régulateurs $\ell$-adiques classiques construits l'un sur les unités d'un corps de nombres K, l'autre sur un sous-groupe canonique de ses $\ell$-unités, pour un entier premier $\ell$ donné.

L'objet de cet exposé est de discuter les principaux éléments de démonstration de ces conjectures, puis d'en développer quelques conséquences pour l'arithmétique des $\ell$-extensions abéliennes $\ell$-ramifiées.

Les démonstrations des théorèmes présentés sont réunies dans un appendice.

## 1. - ÉLÉMENTS DE DÉMONSTRATION.

Ces démonstrations, partielles, mais valables cependant pour une large classe de corps, sont de deux ordres : les démonstrations transcendantes d'une part, qui reposent sur des résultats d'indépendance de logarithmes de nombres algébriques ; les démonstrations algébriques d'autre part, qui relèvent essentiellement de la théorie d'Iwasawa.

### a. Approche transcendante.

Un corps de nombres K étant donné, nous pouvons lui associer naturellement deux $\mathbb{Z}_\ell$-modules multiplicatifs en procédant comme suit :

(i) d'une part, en formant directement le tensorisé $\ell$-adique du groupe multiplicatif de K :

$$\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times .$$

Le groupe obtenu peut être regardé comme la limite inductive des tensorisés $\ell$-adiques $\mathcal{E}_K^S = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_K^S$ des groupes de S-unités du corps K, lorsque S parcourt les ensembles finis de places de K. Les groupes $\mathcal{E}_K^S$ sont des $\mathbb{Z}_\ell$-modules noethériens, donc compacts pour leur topologie naturelle de $\mathbb{Z}_\ell$-modules ; en revanche, leur réunion $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times$ n'est ni de type fini, ni même compacte pour sa topologie de limite inductive.

(ii) d'autre part, en formant d'abord le tensorisé $\ell$-adique du groupe additif de $K$. L'algèbre obtenue

$$K_\ell = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K = \prod_{\mathfrak{l}|\ell} K_{\mathfrak{l}}$$

est le produit direct des complétés de $K$ pour les places au-dessus de $\ell$. Son groupe multiplicatif :

$$K_\ell^\times = \left(\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K\right)^\times = \prod_{\mathfrak{l}|\ell} K_{\mathfrak{l}}^\times = \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \left(\mu_{\mathfrak{l}}^{\circ} . \mathcal{U}_{\mathfrak{l}}^1 . \pi_{\mathfrak{l}}^{\mathbb{Z}}\right),$$

est donc le produit direct du composé $\mu_\ell^{\circ} = \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \mu_{\mathfrak{l}}^{\circ}$ des groupes locaux de racines de l'unité d'ordre étranger à $\ell$, du groupe $\mathfrak{U}_\ell^1 = \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \mathfrak{U}_{\mathfrak{l}}^1$ des unités principales semi-locales, et d'autant d'exemplaires de $\mathbb{Z}$ qu'il y a de places dans $K$ au-dessus de $\ell$. La méthode la plus économique pour construire un $\mathbb{Z}_\ell$-module à partir de $K_\ell^\times$ consiste donc à former la limite projective :

$$\hat{K}_\ell^\times = \varprojlim_k K_\ell^\times / K_\ell^{\times \ell^k} = U_\ell^1 . \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \pi_{\mathfrak{l}}^{\mathbb{Z}_\ell}.$$

Le groupe obtenu est un $\mathbb{Z}_\ell$-module noethérien, donc compact pour sa topologie naturelle de $\mathbb{Z}_\ell$-module.

Cela étant, l'injection diagonale de $K$ dans le produit de ses complétés $K_\ell = \prod_{\mathfrak{l}|\ell} K_{\mathfrak{l}}$ induit un $\mathbb{Z}_\ell$-morphisme naturel

$$\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times \twoheadrightarrow \hat{K}_\ell^\times$$

qui est surjectif (en vertu du théorème d'approximation faible) et continu (pour la topologie limite inductive sur $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times$). D'un autre côté, pour chaque place $\mathfrak{l}$ de $K$ au-dessus de $\ell$, le logarithme d'Iwasawa $\mathrm{Log}_{\mathfrak{l}}$ envoie le groupe multiplicatif du complété $K_{\mathfrak{l}}$ sur le $\mathbb{Z}_\ell$-réseau $\mathrm{Log}_{\mathfrak{l}} K_{\mathfrak{l}}^\times$ de son groupe additif. L'application $\mathrm{Log}_\ell = \left(\mathrm{Log}_{\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l}|\ell}$ envoie donc le groupe $K_\ell^\times$ sur le $\mathbb{Z}_\ell$-réseau $\mathrm{Log}_\ell K_\ell^\times$ de l'algèbre $K_\ell$, et elle induit de façon évidente un $\mathbb{Z}_\ell$-morphisme continu de $\hat{K}_\ell^\times$ sur $\mathrm{Log}_\ell K_\ell^\times$ que nous continuons par abus à noter $\mathrm{Log}_\ell$ :

$$\hat{K}_\ell^\times \xrightarrow{\ \mathrm{Log}_\ell\ } \mathrm{Log}_\ell K_\ell^\times \subset \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K.$$

<u>DÉFINITION</u>. - Etant donnés un corps de nombres $K$ et un nombre premier $\ell$, nous appelons logarithme $\ell$-adique sur $K$, et nous notons $\ell og_\ell$, l'épimorphisme continu du $\mathbb{Z}_\ell$-module multiplicatif $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times$ sur le $\mathbb{Z}_\ell$-réseau $\mathrm{Log}_\ell K_\ell^\times$ du $\mathbb{Z}_\ell$-

module additif $K_\ell = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K$, induit par le plongement diagonal de $K^\times$ dans le produit des $K_{\mathfrak{l}}^\times$ et les logarithmes d'Iwasawa attachés aux corps $K_{\mathfrak{l}}$.

$$\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times \xrightarrow{\ \ell og_\ell\ } \mathrm{Log}_\ell K_\ell^\times \subset \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K.$$

Cela posé, le problème fondamental de l'indépendance $\ell$-adique est le suivant :

<u>PROBLÈME</u>. - Etant donnés $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans $K^\times$, soient $M = \prod_{i=1}^n x_i^{\mathbb{Z}}$ le sous-groupe de $K^\times$ engendré par ces éléments, et $M_\ell = \prod_{i=1}^n x_i^{\mathbb{Z}_\ell} \subset \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times$ le $\mathbb{Z}_\ell$-module associé. A quelle condition la restriction à $M_\ell$ du logarithme $\ell$-adique est-elle presque injective (i.e. à noyau fini) ? presque surjective (i.e. à conoyau fini) ? presque bijective (i.e. à noyau et conoyau finis) ?

Il suffit naturellement de résoudre ce problème lorsque K est galoisien sur $\mathbb{Q}$. Dans ce cas, nous avons :

<u>CONJECTURE</u>. - Supposons K galoisien sur $\mathbb{Q}$, et $M$ stable par le groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ ; notons $\chi_M$ le caractère du $\mathbb{Q}[G]$-module $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$, et $\chi_{\text{rég}}$ le caractère de la représentation régulière. Faisons l'hypothèse que $M$ ne contienne pas de puissances de $\ell$. Nous avons alors les équivalences :

(i) $\ell og_\ell|_{M_\ell}$ presque injective $\Leftrightarrow$ $\chi_M \le \chi_{\text{rég}}$

(ii) $\ell og_\ell|_{M_\ell}$ presque surjective $\Leftrightarrow$ $\chi_M \ge \chi_{\text{rég}}$

(iii) $\ell og_\ell|_{M_\ell}$ presque bijective $\Leftrightarrow$ $\chi_M = \chi_{\text{rég}}$.

Disons tout de suite que cette conjecture est vraie sous la conjecture de Schanuel $\ell$-adique, et qu'elle contient par ailleurs les conjectures de Leopoldt et de Gross :

- Le cas de la conjecture de Leopoldt est assez simple : Il suffit de prendre pour $M$ le groupe des unités $E_K$, et d'invoquer le théorème de représentation de Herbrand, pour obtenir $\chi_{E_K} \le \chi_{\text{rég}}$ donc $\ell og_\ell|_{\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_K}$ presque injective ; ce qui est précisément l'assertion de Leopoldt.

- Le cas de la conjecture de Gross est plus technique et requiert une hypothèse subsidiaire (qui est automatiquement vérifiée dans le cas abélien) : Soit $\chi_\ell$ l'induit à G du caractère de la représentation unité du sous-groupe de décomposition $D_\ell$ de l'une quelconque des places de $K$ au-dessus de $\ell$. Si le caractère $\chi_\ell$ est saturé $\left(\text{i.e. s'il est étranger à son supplémentaire } \bar{\chi}_\ell = \chi_{\text{rég}} - \chi_\ell\right)$, alors la conjecture avancée implique la conjecture de Gross pour le corps $K$ (cf. [7], pour plus de détails).

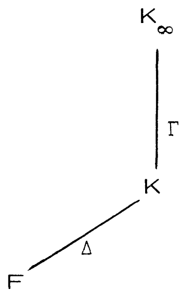
Comme les arguments de transcendance ne prennent pas vraiment en compte la nature arithmétique des éléments algébriques manipulés, la conjecture énoncée semble ainsi un point de passage obligé de toute démonstration générale des conjectures de Leopoldt et de Gross. Le résultat le plus fort dans cette direction est le suivant, qui provient directement du théorème d'indépendance de Baker-Brumer (cf. [2]) :

THÉORÈME 1. - La conjecture énoncée, et donc les conjectures de Leopoldt et de Gross, sont vérifiées dès que l'algèbre $\mathbb{Q}_\ell[G]$ est un produit direct de corps, ce qui a lieu en particulier dès que le groupe $G$ est abélien.

Ce résultat résoud donc le problème dans le cas abélien et quelques autres. Par exemple, si $G$ est le groupe quaternionnien $H_8$, la conjecture énoncée est vraie pour $\ell = 2$ (car $\mathbb{Q}_2[H_8]$ est un produit direct de corps), mais nous ne savons si elle l'est, pour aucun autre premier.

b. Approche algébrique ($\ell$ impair).

Nous supposons ici que $\ell$ est impair et que $K$ contient les racines $\ell$-ièmes de l'unité (Le cas $\ell = 2$ relève des mêmes techniques, à ceci près qu'il faut supposer que $K$ contient les racines quatrièmes de l'unité). Partant d'un corps de nombres arbitraire $F$, nous posons $K = F[\zeta_\ell]$ ; puis, pour chaque $n \geq 1$, nous écrivons $K_n = F[\zeta_{\ell^n}]$ le corps engendré sur $\ell$ par les racines $\ell^n$-ièmes de l'unité, et $K_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ la tour cyclotomique sur $K$.




Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}\left(K_\infty/F\right)$ est alors le produit direct du sous-groupe procyclique $\Gamma = \gamma^{\mathbb{Z}_\ell} = \mathrm{Gal}\left(K_\infty/K\right)$ et d'un groupe abélien $\Delta$ d'ordre divisant $(\ell - 1)$, isomorphe à $\mathrm{Gal}\,(K/F)$. L'algèbre de groupe $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ est donc une algèbre semi-locale, composée directe d'exemplaires de $\mathbb{Z}_\ell$, chaque facteur local $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]e_\varphi \simeq \mathbb{Z}_\ell$ étant associé à un caractère $\ell$-adique irréductible $\varphi$ du groupe $\Delta$. Enfin, le groupe $R_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$ des caractères $\ell$-adiques virtuels de $\Delta$ est muni d'une involution canonique (le miroir de Leopoldt) définie sur les caractères irréductibles par l'identité

$$\varphi \mapsto \varphi^* = \omega\varphi^{-1},$$

où $\omega$ est le caractère de l'action de $\Delta$ sur les racines $\ell$-primaires de l'unité, c'est-à-dire le caractère du module de Tate $\mathbf{T}_\ell = \varprojlim_n \mu_{\ell^n}$.

Pour chaque naturel $n$, désignons par $C'_n$ la $\ell$-extension abélienne maximale non ramifiée et $\ell$-décomposée du corps $K_n$ (i.e. la $\ell$-extension abélienne maximale de $K_n$ qui est non ramifiée à toutes les places et complètement décomposée aux places au-dessus de $\ell$) ; notons $C'_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C'_n$ la réunion des $C'_n$. Par la théorie du corps de classes, le groupe de Galois

$$\mathcal{C}' = \mathrm{Gal}\left(C'_\infty/K_\infty\right)$$

s'identifie à la limite projective $\varprojlim \mathcal{C}\ell'_n$ (prise pour les applications normes) des $\ell$-groupes de $\ell$-classes d'idéaux des corps $K_n$, c'est-à-dire des quotients $\mathcal{C}\ell'_n$ des $\ell$-groupes de classes d'idéaux au sens ordinaire $\mathcal{C}\ell'_n$ par leurs sous-groupes respectifs engendrés par les classes des idéaux premiers au-dessus de $\ell$. Le groupe $\mathcal{C}'$ est naturellement un module sur l'algèbre d'Iwasawa $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\gamma - 1]]$ et sur le groupe $\Delta$, donc un $\Lambda[\Delta]$-module. Il lui correspond ainsi deux paramètres $\lambda$ et $\mu$, qu'il est préférable de regarder comme caractères $\ell$-adiques du groupe $\Delta$, et qui sont alors caractérisés par l'identité d'Iwasawa :

<u>PROPOSITION</u>. - Il existe trois caractères $\ell$-adiques $\lambda, \mu, \nu$ du groupe $\Delta$ tels que, pour chaque caractère $\ell$-adique irréductible $\varphi$ de $\Delta$ et tout $n$ assez grand, l'ordre $\ell^{x'_{n,\varphi}}$ de la $\varphi$-composante du $\ell$-groupe $\mathcal{C}\ell'_n$ soit donné par la formule :

$$x'_{n,\varphi} = \langle\mu,\varphi\rangle\ell^n + \langle\lambda,\varphi\rangle n + \langle\nu,\varphi\rangle.$$

Cela posé, à chaque étage fini $K_n$ de la tour cyclotomique $K_\infty/K$, sont associés deux $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-modules noethériens et projectifs, qui mesurent les défauts respectifs dans $K_n$ des conjectures de Leopoldt et Gross. Le résultat essentiel de la théorie, pour le problème que nous avons en vue, est que ces modules forment une suite croissante et stationnaire, et que les valeurs ultimes de leurs caractères respectifs vérifient une majoration simple :

<u>THÉORÈME 2</u>. - Dans une tour cyclotomique, les caractères de défaut respectifs des conjectures de Leopoldt et Gross vérifient les majorations :

$$\delta_{\text{Gross}} \leq \lambda \qquad \& \qquad \delta_{\text{Leopoldt}} \leq \lambda^*,$$

où $\lambda^* = \omega\lambda^{-1}$ est le reflet du paramètre $\lambda$ associé au groupe $\mathcal{C}' = \varprojlim \mathcal{C}\ell'_n$ dans l'involution du miroir.

Ce résultat permet de conclure dans certains cas à la validité des conjectures de Leopoldt et Gross, lors même que le paramètre $\lambda$ n'est pas nul, car tous les caractères irréductibles ne sont pas candidats à être représentés dans les modules de défaut. En général, cependant, il est utilisé sous la forme plus faible :

<u>COROLLAIRE</u>. - Si le groupe $\mathcal{C}'$ est nul (i.e. si l'on a $C\ell'_n = 1$, pour tout n assez grand), alors les conjectures de Leopoldt et de Gross sont vérifiées à chaque étage de la tour cyclotomique $K_\infty/K$.

La condition $\mathcal{C}' = 1$ est celle avancée par Gillard (cf. [5]) dans son étude sur la conjecture de Leopoldt. On peut montrer (cf. [7]) qu'elle est en fait équivalente à la condition suffisante de la conjecture de Leopoldt donnée par Bertrandias et Payan au moyen de la théorie de Kummer (cf. [1]). Malheureusement, elle ne se lit pas très commodément sur le corps K sous cette forme. En particulier, elle ne résulte pas de la condition plus simple $C\ell'_o = 1$ (car des classes peuvent apparaître lorsqu'on monte la tour), mais ne la nécessite pas non plus (car il peut y avoir capitulation). Il est possible cependant d'en donner une interprétation en termes d'invariants de K, au moyen de la K-théorie :

<u>SCOLIE</u>. - La condition $\mathcal{C}' = 1$ a lieu si et seulement si le $\ell$-Sylow du noyau dans $K_2(K)$ des symboles de Hilbert se réduit à 1 :

$$\mathcal{C}' = 1 \quad \Leftrightarrow \quad H_2(K)_\ell = 1.$$

L'étude heuristique des groupes $H_2(K)_\ell$ montre que ceux-ci se comportent approximativement comme les $\ell$-groupes de $\ell$-classes $C\ell'(K)$. De ce point de vue, le résultat précédent signifie donc que les conjectures de Leopoldt et de Gross sont vérifiées dans le corps K, dès que celui-ci est "principal" en un sens donné par la K-théorie.

## 2. - <u>APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES</u>.

Nous supposons ici que F est réel et que $\ell$ est impair. L'extension abélienne K/F possède alors une conjugaison complexe et il est naturel de dire qu'un caractère $\ell$-adique du groupe $\Delta = \mathrm{Gal}(K/F)$ est <u>réel</u>, lorsque ses facteurs absolument irréductibles prennent la valeur (+1) sur la conjugaison complexe ; qu'il est <u>imaginaire</u>, lorsqu'ils prennent la valeur (-1). Avec ces conventions, tout caractère $\ell$-adique virtuel $\psi$ du groupe $\Delta$ s'écrit de façon unique $\psi = \psi^+ + \psi^-$ comme somme d'un caractère réel et d'un caractère imaginaire.

### a. <u>Comparaison des groupes $C\ell_n$ et $C\ell'_n$</u>.

Pour chaque naturel n, désignons par $C_n$ la $\ell$-extension abélienne maximale non ramifiée du corps $K_n$, et notons $C_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ la réunion des $C_n$. Le groupe de Galois $\mathcal{C} = \mathrm{Gal}\left(C_\infty/K_\infty\right)$ s'identifie, via la théorie du corps de classes, à la limite projective $\varprojlim C\ell_n$ (prise pour les applications normes) des $\ell$-groupes de classes d'idéaux des corps $K_n$. C'est un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien dont nous notons $\lambda_c$ et $\mu_c$ les paramètres dans $R_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$. Le dernier $\mu_c$ est sans malice : il est égal au paramètre $\mu$ du groupe $\mathcal{C}'$ défini plus haut. Une première conséquence des conjectures de Leopoldt et Gross est de permettre le calcul de $\lambda_c$ au moyen de la théorie des genres (cf. [7]) :

<u>THÉORÈME 3</u>. - Supposons les conjectures de Leopoldt et de Gross vérifiées dans la tour cyclotomique $K_\infty/K$. Alors le paramètre $\lambda_c$ associé au groupe $\mathcal{C} = \varprojlim C\ell_n$ est donné par la formule :

$$\lambda_c = \lambda + \psi_\ell^-,$$

où $\lambda$ est associé au groupe $\mathcal{C}' = \varprojlim C\ell_n'$, et $\psi_\ell = \sum_{\mathfrak{l}|\ell} g_{\mathfrak{l}}\left(K_\infty/K\right).\mathrm{Ind}_{\Delta_{\mathfrak{l}}}^{\Delta} 1_{\Delta_{\mathfrak{l}}}$ est la somme des induits à $\Delta$ des caractères des représentations unités des sous-groupes de décomposition des places de $F$ au-dessus de $\ell$ dans Gal $(K/F)$, comptés avec une multiplicité égale à leur indice de décomposition dans l'extension $K_\infty/K$.

L'identité réelle $\lambda_c^+ = \lambda^+$ résulte de la conjecture de Leopoldt. Elle signifie que la partie réelle $\mathcal{L}_n^+$ du sous-groupe de $C\ell_n$ engendrée par les classes des idéaux premiers au-dessus de $\ell$ est constante pour n assez grand, résultat déjà remarqué par Gillard dans le cas abélien (cf. [5]). L'identité imaginaire $\lambda_c^- = \lambda^- + \psi_\ell^-$ provient de la conjecture de Gross. Elle montre qu'en revanche le groupe $\mathcal{L}_n^-$ est maximal sous les seules contraintes algébriques exprimées par le caractère $\psi_\ell$. En particulier :

<u>COROLLAIRE</u>. - Pour chaque naturel n, désignons par $\mathcal{E}_n' = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_n'$ le tensorisé $\ell$-adique du groupe des $\ell$-unités de $K_n$ ; notons $\mathcal{E}_n'^-$ la composante imaginaire de ce groupe, et $\mu_n^-$ celle du $\ell$-Sylow du groupe des unités de $K_n$. Il existe un entier $n_o$ au-delà duquel on a :

$$\mathcal{E}_n'^- = \mathcal{E}_{n_o}'^- \mu_n^-.$$

b. <u>Calcul du caractère de défaut d'une conjecture de Coates</u>.

Considérons les $\ell$-extensions abéliennes suivantes du corps $K_\infty$ :
$M_\infty$, de radical le noyau des symboles modérés :

$$\mathrm{Rad}\left(M_\infty/K_\infty\right) = \{\ell^{-k} \otimes x \in \left(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell\right) \otimes_{\mathbb{Z}} K_\infty^\times \mid \left(x, \zeta_{\ell^k}\right)_{\mathfrak{p}_\infty} = 1, \quad \forall\, \mathfrak{p}_\infty \in Pl\left(K_\infty\right)\}.$$

- $H_\infty$, de radical le noyau des symboles de Hilbert :

$$\mathrm{Rad}\left(H_\infty/K_\infty\right) = \{\ell^{-k}\otimes x \in \left(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell\right)\otimes_{\mathbb{Z}} K_\infty^\times \mid \left(\frac{x,\zeta_{\ell^k}}{\mathfrak{p}_\infty}\right) = 1, \quad \forall \mathfrak{p}_\infty \in P\mid\left(K_\infty\right)\}.$$

- $K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E'_\infty}]$ de radical les racines des $\ell$-unités de $K_\infty$ :

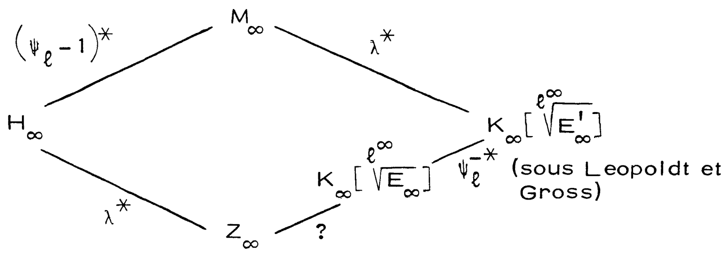
$$\mathrm{Rad}\left(K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E'_\infty}]/K_\infty\right) = \left(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell\right)\otimes_{\mathbb{Z}} E'_\infty.$$

- $K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E_\infty}]$ de radical les racines des unités de $K_\infty$ :

$$\mathrm{Rad}\left(K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E_\infty}]/K_\infty\right) = \left(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell\right)\otimes_{\mathbb{Z}} E_K.$$

- $Z_\infty$, fixée par le sous-module de $\Lambda$-torsion de $\mathrm{Gal}\left(M_\infty/K_\infty\right)$.

Nous obtenons le schéma de corps où nous avons représenté les paramètres lambda des groupes de Galois :




L'égalité de $Z_\infty$ et de $K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E_\infty}]$ a été conjecturée par Coates dans [3]. Il est facile de voir qu'elle n'est pas compatible avec les conjectures de Leopoldt et de Gross : Sous celles-ci, le théorème 3 permet d'affirmer que le paramètre lambda du groupe $\mathrm{Gal}\left(K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E'_\infty}]/K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E_\infty}]\right)$ est le reflet du caractère $\psi_\ell^-$.
Il vient alors :

<u>THÉORÈME 4</u>. - Sous les conjectures de Leopoldt et de Gross, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}\left(K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E_\infty}]/Z_\infty\right)$ est un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module noethérien et projectif de caractère $\left(\psi_\ell^+ - 1\right)^*$. En particulier, l'égalité $Z_\infty = K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{E_\infty}]$ a lieu si et seulement si $\psi_\ell^+$ est le caractère unité, c'est-à-dire si et seulement s'il existe un

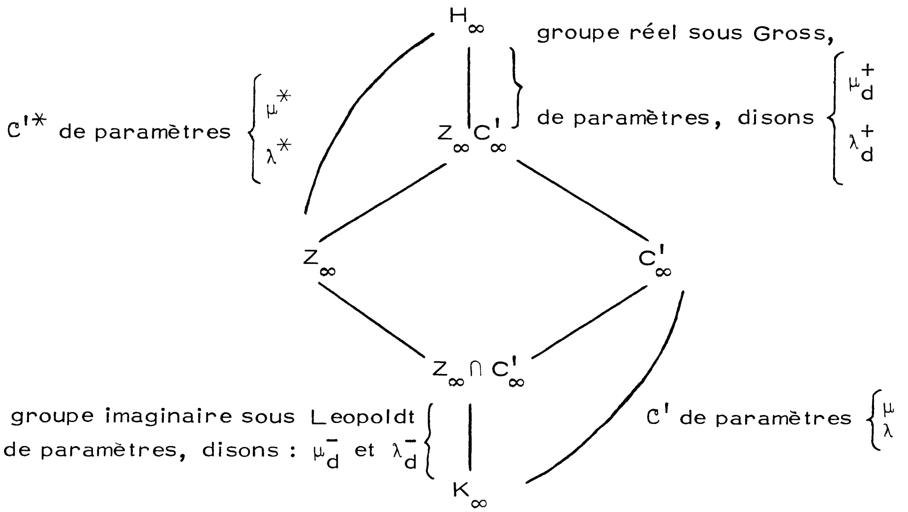
seul idéal premier au-dessus de $\ell$ dans le sous-corps réel maximal du corps $K_\infty$

Le critère obtenu est celui donné par Wingberg (cf. [8]), lorsque le corps K est abélien sur $\mathbb{Q}$.

c. Inégalités du miroir.

Les inégalités classiques du miroir concernent les invariants d'Iwasawa du groupe $\mathcal{C} = \varprojlim \mathcal{C}\ell_n$. En fait, des inégalités plus fines valent pour les invariants d'Iwasawa du groupe $\mathcal{C}' = \varprojlim \mathcal{C}\ell'_n$, qu'il est possible d'interpréter très simplement sous les conjectures de Leopoldt et de Gross.

Considérons pour cela le schéma de corps :




Sous la conjecture de Leopoldt, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}\left(Z_\infty \cap C'_\infty/K_\infty\right)$ est imaginaire ; et, sous celle de Gross, le groupe $\mathrm{Gal}\left(H_\infty/Z_\infty C'_\infty\right)$ est réel. Comme $\mathrm{Gal}\left(H_\infty/Z_\infty\right)$ est le reflet de $\mathrm{Gal}\left(C'_\infty/K_\infty\right)$ dans l'involution du miroir, il suffit d'évaluer de deux façons les paramètres du groupe $\mathrm{Gal}\left(Z_\infty C'_\infty/Z_\infty\right) \simeq \mathrm{Gal}\left(C'_\infty/Z_\infty \cap C'_\infty\right)$ pour obtenir :

THÉORÈME 5. - Sous les conjectures de Gross et de Leopoldt, les paramètres $\lambda$ et $\mu$ du groupe $\mathcal{C}'$ vérifient les inégalités du miroir :

$$\mu^- - \mu^{+*} = \mu_d^- = \mu_d^{+*} \geq 0 \quad \& \quad \lambda^- - \lambda^{+*} = \lambda_d^- = \lambda_d^{+*} \geq 0.$$

Nota. - Ce résultat contient strictement l'inégalité classique : $\deg \lambda_c^+ \leq \deg \lambda_c^-$.

## Appendice : Démonstration des théorèmes

Nous esquissons ci-dessous les preuves des principaux résultats.

Théorème 1.

Soit K un corps de nombres absolument galoisien, dont le groupe de Galois G a pour algèbre $\ell$-adique un composé direct de corps

$$\mathbb{Q}_\ell[G] = \prod K_\pi,$$

indexés par les caractères $\ell$-adiques irréductibles du groupe G.

Supposons donné un sous-module noethérien M de $K^\times$, stable pour l'action de G, ne contenant ni racines de l'unité, ni puissances de $\ell$ ; notons $\mu$ son caractère, et $\mu_\ell$ celui du $\mathbb{Z}_\ell$-module engendré par son image $\log_\ell(M)$ dans le complété semi-local $K_\ell$.

Nous allons montrer que si $\mu$ est le caractère régulier, il en est de même de $\mu_\ell$. Pour cela, remarquons que lorsque $\mathbb{Q}\otimes M$ est la représentation régulière de G, nous pouvons trouver un x dans M qui engendre un sous-module de M d'indice fini et libre sur $\mathbb{Z}[G]$ (de sorte que les conjugués de x sont $\mathbb{Z}$-multiplicativement indépendants). Faisons choix d'un tel x, et considérons le sous-module de $K_\ell$ engendré sur $\mathbb{Z}_\ell[G]$ par le logarithme $\ell$-adique de x. Si l'un des caractères $\ell$-adiques irréductibles $\pi$ de G n'était pas représenté dans $\mu_\ell$, nous aurions trivialement

$$\sum \pi(\gamma^{-1}) \log_\ell(x^\gamma) = 0$$

par action de l'idempotent primitif associé, en contradiction avec le théorème d'indépendance de Baker-Brumer. Il suit de là que tous les caractères $\pi$ sont nécessairement représentés dans $\mu_\ell$, ce qui entraîne le résultat annoncé : $\mu_\ell = \mu$.

L'assertion (iii) de la conjecture en résulte immédiatement. Les assertions (ii) et (i) s'en déduisent sans peine, par restriction à un sous-module dans le premier cas, par extension à un sur-module dans le second.

Théorème 2.

Soient F un corps de nombres (de degré fini), K une extension abélienne de F, de degré d étranger à $\ell$, de groupe de Galois $\Delta$, et K la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique de K. Nous notons $\lambda$ le paramètre lambda du groupe de Galois C' de la $\ell$-extension abélienne maximale non-ramifiée et $\ell$-décomposée du corps K.

Nous écrivons :

- $\log_\ell$ l'application de $\mathbb{Z}_\ell \otimes K^\times$ dans $K_\ell = \mathbb{Z}_\ell \otimes K$ induite par les logarithmes $\ell$-adiques locaux attachés aux places de $K$ au-dessus de $\ell$.

- $|\ |_\ell$ l'application de $\mathbb{Z}_\ell \otimes K^\times$ dans le sous-groupe $v_\ell$ de la somme directe $\oplus(1+\ell\mathbb{Z}_\ell)$ formé des familles qui vérifient la formule du produit, induite par les valeurs absolues $\ell$-adiques principales attachées aux places divisant $\ell$.

Le groupe de défaut de la conjecture de Gross est le plus grand quotient projectif du conoyau de la restriction de $|\ |_\ell$ au tensorisé $\ell$-adique $\mathbb{Z}_\ell \otimes E'_K$ du groupe des $\ell$-unités de $K$. Son caractère $\delta_{\text{Gross}}$ est, par définition, le caractère de défaut de la conjecture de Gross.

Par la théorie du corps de classes, le conoyau précédent s'identifie au quotient des genres du groupe $C'$, i.e. au groupe de Galois de la $\ell$-extension maximale non ramifiée et $\ell$-décomposée de $K$ qui est abélienne sur $K$. Il vient donc directement :

$$\delta_{\text{Gross}} < \lambda .$$

Le groupe des unités infinitésimales de $K$ est le noyau de la restriction de $\log_\ell$ au tensorisé $\ell$-adique $\mathbb{Z}_\ell \otimes E_K$ du groupe des unités de $K$. C'est un $\mathbb{Z}_\ell[\Lambda]$-module projectif, et son caractère $\delta_{\text{Leopoldt}}$ est, par définition, le caractère de défaut de la conjecture de Leopoldt.

Par la théorie de Kummer, les unités infinitésimales permettent de définir une $\ell$-extension abélienne de $K$, qui est $\ell$-ramifiée (puisque engendrée par des unités) et $\ell$-décomposée (puisque engendrée par des infinitésimaux), donc non ramifiée et $\ell$-décomposée. Son groupe de Galois est un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module projectif qui a pour caractère le reflet $\delta^*_{\text{Leopoldt}}$ de celui de son radical. Il vient donc :

$$\delta_{\text{Leopoldt}} < \lambda^*,$$

comme attendu.

<u>Théorème 3.</u>

Nous supposons désormais que $K$ est une extension quadratique totalement imaginaire d'un sur-corps totalement réel $K^+$ de $F$. Nous notons $K_n$ l'unique sous-extension de $K$ cyclique de degré $\ell^n$ sur $K$, et $\Gamma_n$ le groupe profini $\mathrm{Gal}(K/K_n)$ identifié à $\mathbb{Z}_\ell$ par le choix d'un générateur topologique $\gamma_n$.

Fixons $n$ assez grand pour que les places au-dessus de $\ell$ soient totalement ramifiées dans $K/K_n$. Cela fait, il est clair que le groupe de Galois $\Gamma_n$ opère trivialement sur les sous-groupes respectifs des $\ell$-groupes de classes $C\ell_m$ attachés aux corps $K_m$ au-dessus de $K_n$ et engendrés par les places au-dessus de $\ell$. Leur limite projective $\mathfrak{L}$ est donc fixe par $\Gamma_n$, et son caractère $\alpha$ peut ainsi s'obtenir par comparaison des caractères respectifs des quotients des genres $G_n = C/C^{\gamma_n - 1}$ et $G'_n = C'/C'^{\gamma_n - 1}$ attachés aux groupes $C$ et $C' = C/\mathfrak{L}$. Notons $V_n = |\mathbb{Z}_\ell \otimes K_n^\times|_\ell$ le groupe des valeurs absolues $\ell$-adiques principales des éléments de $K_n$ (qui est un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module de caractère $\psi_\ell$), et distinguons parties réelles et imaginaires :

D'après la conjecture de Leopoldt, le tensorisé $\ell$-adique $\mathbb{Z}_\ell \otimes E_n$ du groupe des unités de $K_n$ s'injecte dans le groupe des unités principales $U_n$ du complété semi-local de K pour les places au-dessus de $\ell$. La partie réelle du quotient $U_n/\mathbb{Z}_\ell \otimes E_n$ est donc un $\mathbb{Z}_\ell$-module de rang $\ell$, et la théorie du corps de classes montre alors que le groupe $G_n^+$ est fini. Il vient donc directement :

$$\theta^+ = 0 .$$

D'après la conjecture de Gross, le tensorisé $\ell$-adique $\mathbb{Z}_\ell \otimes E'_n$ du groupe des $\ell$-unités de $K_n$ s'injecte dans le groupe $V_n = |\mathbb{Z}_\ell \times K_n^\times|_\ell$ défini plus haut. La partie imaginaire du quotient $V_n/\mathbb{Z}_\ell \times E'_n$ est donc finie, et la théorie du corps de classes montre alors que le groupe $G'_n$ est fini. Il vient donc ici :

$$\theta' = 0 .$$

Comme, en revanche, la partie imaginaire du quotient $V_n/\mathbb{Z}_\ell \otimes E_n$ est égale à celle de $V_n$, le groupe $G_n$ est isomorphe à $V_n^-$, et son caractère est ainsi :

$$\theta^- = \psi_\ell^- .$$

De l'identité $\theta' = 0$, nous tirons donc $\alpha = \theta = \psi_\ell^-$, comme attendu.

<u>Théorèmes 4 et 5.</u>

La démonstration des deux derniers résultats repose sur la correspondance, exposée dans [7], entre les invariants lambda des différents groupes concernés :

- L'invariant $\lambda_M$, correspondant au groupe de Galois $\mathrm{Gal}(M/K)$ de la $\ell$-extension abélienne $\ell$-ramifiée maximale de K.

- L'invariant $\lambda_H$, correspondant au groupe de Galois $\mathrm{Gal}(H/K)$ de la $\ell$-extension hilbertienne maximale de K.

- L'invariant $\lambda_C$, correspondant au groupe de Galois $\mathrm{Gal}(C/K)$ de la $\ell$-extension abélienne non ramifiée maximale de K.

- L'invariant $\lambda$, correspondant au groupe de Galois $\mathrm{Gal}(C'/K)$ de la $\ell$-extension abélienne non ramifiée $\ell$-décomposée maximale de K.

(i) La démonstration de l'égalité

$$\lambda_C = \lambda - \psi_\ell^-$$

fait l'objet du théorème 3 ci-dessus.

(ii) Celle des identités de dualité

$$\lambda_H = \lambda_M - (\psi_\ell - 1) = \lambda^*$$

s'appuie sur la notion de suite paramétrée de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-modules finis, qui généralise la classique formule d'Iwasawa sur le nombre de classes d'idéaux dans une tour cyclotomique. Sans entrer dans les détails techniques, disons simplement ici que la notion de suite paramétrée permet de ramener le calcul des invariants d'Iwasawa d'un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien X (pas nécessairement de $\Lambda$-torsion) à l'étude du comportement asymptotique de certains de ses quotients finis. En particulier, l'identité $\lambda^*_M = \lambda + (\psi_\ell - 1)$ résulte, sous la conjecture de Leopoldt, de la suite exacte classique

$$1 \longrightarrow E'_n/E'^{\ell^n}_n \longrightarrow \mathrm{Rad}(M_n/K_n) \longrightarrow {}_{\ell^n}C\ell'_n \longrightarrow 1$$

qui relie le radical kummerien de la $\ell$-extension abélienne maximale $\ell$-ramifiée d'exposant $\ell^n$ du corps $K_n$ avec le sous-groupe de $\ell^n$-torsion de son $\ell$-groupe des $\ell$-classes d'idéaux. Enfin, l'identité $\lambda_H = \lambda_M - (\psi_\ell - \ell)^*$ s'obtient directement, toujours sous la conjecture de Leopoldt, à partir de l'isomorphisme

$$\mathrm{Gal}(M/H) = \prod T_\ell/T_\ell$$

où $T_\ell = \varprojlim \mu_n$ est le module de Tate, et le produit est étendu aux places de K qui divisent $\ell$.

Les théorèmes annoncés s'en déduisent comme indiqué.

# RÉFÉRENCES

[1] F. BERTRANDIAS & J.-J. PAYAN. – Γ-extensions et invariants cyclotomiques.
Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 5 (1972), 517-543.

[2] A. BRUMER. – On the units of algebraic number fields.
Mathematika 14 (1967), 121-124.

[3] J. COATES. – On $K_2$ and some classical conjectures in algebraic number theory.
Ann. of Math. 95 (1972), 89-116.

[4] L.J. FEDERER. – The non vanishing of Gross p-adic regulator Galois cohomologicaly.
Journées Arithmétiques de Besançon (1985).

[5] R. GILLARD. – Formulations de la conjecture de Leopoldt et étude d'une condition suffisante.
Abh. Math. Sem. Hamburg 48 (1979), 125-138.

[6] R. GREENBERG. – On the Iwasawa invariants of totally real number fields.
Am. J. Math. 98 (1976), 263-284.

[7] J.-F. JAULENT. – L'arithmétique des $\ell$-extensions.
Thèse, Besançon (1986).

[8] K. WINGBERG. – Duality theorems for Γ-extensions of algebraic number fields.
Compositio Math. 55 (1985), 333-381.

Jean-François JAULENT
Université de Franche-Comté
Faculté des Sciences et des Techniques
U.A. au C.N.R.S. n° 040741
25030 BESANCON CEDEX