YVONNE CHOQUET-BRUHAT

Causalité des théories de supergravité

Astérisque, tome S131 (1985), p. 79-93
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__S131__79_0>

Société Mathématique de France
Astérisque, hors série, 1985, p. 79–93

CAUSALITÉ DES THÉORIES DE SUPERGRAVITÉ

PAR

Yvonne CHOQUET-BRUHAT

Introduction

Une contribution essentielle d'Élie CARTAN au support mathématique de la physique d'aujourd'hui est sa théorie des conditions d'intégrabilité des systèmes extérieurs. Son étude, motivée par l'étude des problèmes géométriques et de leurs groupes de transformations, a une place privilégiée dans la recherche de l'unification dans une même structure géométrique des lois physiques fondamentales. Cette unification, rêve d'EINSTEIN, a fait des progrès remarquables ces dernières années. La théorie des connexions propose une unification en un champ de Yang et Mills des trois interactions fondamentales, forte, faible et électromagnétique. La théorie unifiée electro-faible de Weinberg-Salam, du moins, a reçu des confirmations expérimentales indiscutées. Des travaux intensifs avec des résultats prometteurs sont en cours pour l'unification, par l'introduction d'un espace temps de dimension supérieure à quatre du type de Kaluza-Klein, de ces interactions avec la plus anciennement connue mais la plus mystérieuse à l'échelle microscopique de ces forces fondamentales : la gravitation.

D'autre part, les théoriciens (DESER-ZUMINO et FERRARA-FREEDMAN VAN NIEUWENHUIZEN) ont découvert un système remarquable, appelé supergravité, qui couple le champ de gravitation (boson de spin 2) et un champ de spin 3/2 (fermion, appelé gravitino) — et on propose des modèles utilisant à la fois Kaluza-Klein et supergravité pour une unification finale de tous les champs-particules élémentaires, bosons et fermions. Toutes ces théories prennent leur interprétation physique quand elles sont quantifiées — démarche qui soulève d'ailleurs de nombreux problèmes non résolus — mais leur base est comme les équations originelles de Maxwell et d'Einstein un système d'équations aux dérivées partielles pour les champs classiques. Ces équations sont des systèmes mal posés au sens de Cauchy-Kowalevski, comme le laissait prévoir leurs propriétés d'invariance par les groupes dits de jauge, liés au changement de trivialisation des espaces fibrés dont ces champs sont des sections.

Cependant le désir de trouver des équations dont les solutions aient une généralité suffisante, et qui soient déterministes, est un principe directeur dans le choix de tous ces modèles. La longue correspondance entre EINSTEIN et Élie CARTAN à propos de la théorie unifiée non symétrique en est un exemple (*cf.* [1]). Élie CARTAN lui-même a démontré dès 1922 [2], en utilisant ses travaux sur les systèmes différentiels extérieurs que le système différentiel extérieur associé aux equations d'Einstein (originelles, pour le champ de gravitation) est fermé : il démontrait ainsi qu'à des données de Cauchy analytiques vérifiant les équations d'Einstein à l'instant initial, c'est-à-dire sur une sous-variété S de dimension 3, correspondait au moins une solution de ces équations dans un voisinage de S. Ce résultat fondamental sur la généralité des solutions montre ce qu'on appelle la cohérence (complète intégrabilité au sens d'Élie CARTAN [3]) du système des équations d'Einstein.

Le déterminisme, ou causalité au sens relativiste, requiert un autre genre de résultat : c'est que la solution en un point ne dépend que des données dans le passé relativiste de ce point déterminé par le cône optique de la métrique. Une telle propriété oblige à sortir du cadre des fonctions analytiques. Une méthode pour démontrer à la fois la cohérence et la causalité d'un système d'équations aux dérivées partielles d'une théorie de jauge est précisément de choisir une jauge, c'est-à-dire une condition supplémentaire satisfaite par les inconnues, telle que dans cette jauge le système se présente comme un système hyperbolique dont le cône caractéristique est dans ou sur le cône optique de la métrique d'espace-temps. Il faut ensuite démontrer que si les données de Cauchy vérifient les équations (c'est-à-dire celles d'entre elles, appelées contraintes, qui ne dépendent que de ces données de Cauchy), alors la condition de jauge est préservée par l'évolution.

La causalité a été démontrée pour les équations d'Einstein couplées avec diverses sources, en particulier des champs de Yang-Mills, avec divers choix de jauge. Pour ces derniers champs on a même démontré des théorèmes d'existence globaux, c'est-à-dire pour un temps infini, dans le cas de l'espace-temps de Minkowski ou des espaces temps qui lui sont conformes, par exemple le cylindre d'Einstein (*cf.* [4], [5], [6]).

Le but de cette conférence est de donner des résultats obtenus récemment concernant la causalité des modèles proposés en supergravité.

I. Supergravité simple

La supergravité originelle est une théorie qui couple le champ de gravitation — représenté par une métrique de signature hyperbolique sur une variété de dimension 4 — et un champ de spin 3/2 représenté par une 1-forme sur cette variété, à valeurs spinorielles. Une motivation physique pour la recherche d'une telle théorie est le désir d'unifier en un même multiplet un champ bosonique (le graviton, représenté par la métrique) et un champ fermionique (le gravitino, représenté par la 1-forme spinorielle), par souci esthétique et organisateur d'une part, dans l'espoir de lever les difficultés posées par la quantification du champ de gravitation d'autre part. La supergravité répond partiellement à ces deux exigences. Elle obtient une invariance infinitésimale du lagrangien dont dérivent les équations par les transformations dites "supersymétriques" qui agissent sur le multiplet en mélangeant ses composants; on montre d'autre part que la théorie est renormalisable aux premières et deuxièmes boucles, les difficultés se retrouvent malheureusement au troisième niveau.

La supersymétrie infinitésimale est équivalente à une identité remarquable satisfaite par les équations particulières choisies, qui assure leur cohérence — non triviale pour les équations d'un champ de spin 3/2 dans un espace temps à courbure de Ricci non nulle (ou proportionnelle à la métrique), ce qui est aussi une des origines de la supergravité. ([1]).

1. Théorie de Rarita-Schwinger. — Des considérations physiques fondées sur des états d'une particule de spin 3/2 ont conduit RARITA et SCHWINGER à proposer pour le champ correspondant dans l'espace temps de Minkowski des équations dont la généralisation à un espace temps pseudo-riemannien par le principe d'équivalence est immédiate.

Ces équations sont :

$$A^\lambda \equiv \eta^{\lambda\mu\nu\rho}\gamma_\mu \nabla_\nu \psi_\rho = 0 \tag{1.1}$$

où $\eta^{\lambda\mu\nu\rho}$ est le tenseur élément de volume de la métrique $g = (g_{\lambda\mu})$; γ_μ les matrices de Dirac, données en fonction d'un système de matrices de Dirac standard γ_a par $\gamma_\mu = e^a_\mu \gamma_a$, où les $e^a = e^a_\mu dx^\mu$ sont les 1-formes d'un corepère mobile orthonormé. ∇_ν est la dérivée covariante dans la connexion riemannienne de la 1-forme à valeurs spinorielles ψ_ρ.

RARITA-SCHWINGER adjoignaient à ces équations la condition

$$\chi \equiv \gamma^\lambda \psi_\lambda = 0 \tag{1.2}$$

([1]) *cf.* LATRÉMOLIÈRE (1970), MADORE (1975). Cette difficulté avait déjà été remarquée dans un espace temps plat, mais avec un champ électromagnétique, par FIERZ et PAULI en 1939 pour ne garder que des états de "spin pur". Les équations (1.1) sont un système mal posé au sens de Cauchy-Kowalevski : son déterminant caractéristique est identiquement nul.

THÉORÈME.

1) *Le système* (1.1) *n'est pas fermé si* $\mathrm{Ricc}(g) \neq 0$.

2) *Le système* (1.1), (1.2) *n'est pas fermé si* $\mathrm{Ricc}(g) \neq cg$ *où* c *est un nombre.*

3) *Le système* (1.1), (1.2) *est fermé et causal si* $\mathrm{Ricc}(g) = cg$.

Preuve.

1. Les solutions de (1.1) vérifient aussi $\nabla_\lambda A^\lambda = 0$ qui s'écrit :

$$\nabla_\lambda A^\lambda \equiv \eta^{\lambda\mu\nu\rho}\gamma_\mu \nabla_\lambda \nabla_\nu \psi_\rho = 0.$$

D'où d'après l'identité de Ricci pour la 1-forme-spineur ψ_ρ (*cf.* [8])

$$\nabla_\lambda A^\lambda \equiv \frac{1}{2}\eta^{\lambda\mu\nu\rho}\gamma_\mu (R_{\lambda\mu\ \rho}{}^{\sigma}\ \psi_\sigma - \frac{1}{4}R_{\lambda\nu\, ab}\ \gamma^a\gamma^b\psi_\rho) = 0,$$

qui donne en utilisant l'identité de Bianchi algébrique et l'algèbre de Dirac

$$\nabla_\lambda A^\lambda \equiv -\frac{1}{2}G_\lambda{}^\rho \psi^\lambda \gamma_\rho = 0, \qquad G_\lambda{}^\rho = R_\lambda{}^\rho - \frac{1}{2}g_\lambda{}^\rho R. \tag{1.3}$$

D'où la condition nécessaire $G_\lambda{}^\rho = 0$ (équivalent : $R_{\lambda\mu} = 0$) pour que le système (1.1) soit fermé.

2. Si $G_\lambda{}^\rho = cg_\lambda{}^\rho$, (1.3) est équivalent à (1.2).

3. Pour montrer que le système (1.1), (1.2) est fermé, et même causal si $G_\lambda{}^\rho = cg_\lambda{}^\rho$, on utilise l'identité :

$$A_\alpha - \frac{1}{2}\xi\gamma^\lambda\gamma_\alpha f_\lambda + \frac{1}{2}\xi\gamma^\lambda\gamma_\alpha\nabla_\lambda\chi \equiv 0, \tag{1.4}$$

où ξ (aussi noté γ_5) est l'isomorphisme de l'espace des spineurs défini par

$$\xi = \gamma_5 = \frac{1}{4!}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta,$$

et où on a posé

$$f_\lambda \equiv \gamma^\mu \nabla_\mu \psi_\lambda. \tag{1.5}$$

$f_\lambda = 0$ est un système hyperbolique causal pour l'inconnue ψ_λ. La divergence de (1.4) donne, pour une solution de ce système, après un calcul simple

$$c\chi + \frac{1}{2}\xi(\nabla^\lambda\nabla_\lambda\chi + \frac{1}{4}R\chi) = 0, \tag{1.6}$$

équation hyperbolique causale pour χ.

Soient donc des données initiales $\psi_\rho|_S$ vérifiant (1.1) et (1.2) sur S, c'est-à-dire, si en coordonnées locales S a pour équation $x^0 = 0$, les contraintes

$$\chi|_{x^0=0} = 0\,, \qquad A^0 \equiv \eta^{0ijk}\gamma_i\nabla_j\psi_k = 0\,, \qquad i,j,k = 1,2,3\,.$$

L'identité (1.4) montre qu'alors $\nabla_0\chi|_{x^0=0} = 0$, et l'équation (1.6) que $\chi = 0$ dans le domaine d'existence de la solution du système hyperbolique $f_\lambda = 0$. Le dernier résultat de ce théorème suggère une analogie entre les équations de Rarita-Schwinger (1.1) et les équations d'une théorie de jauge, quand la métrique g est Einsteinienne ($\mathrm{Ricc}(g) = cg$).

2. Supergravité. But et hypothèses fondamentales. — Un but de la supergravité est de coupler le champ ψ_ρ avec la métrique de manière à ce que ce champ vérifie une équation de Rarita-Schwinger généralisant (1.1) telle que (modulo les équations du champ de gravitation avec la source engendrée par ψ_ρ), on ait une identité, généralisant (1.3), qui entraîne le caractère fermé et causal du système couplé. La condition $\chi = 0$ est une sorte de "condition de jauge" : en particulier si les données de Cauchy vérifient $\chi|_S = 0$, et les contraintes, alors ψ_λ doit vérifier aussi $\chi = 0$ dans un voisinage de S. Un tel système a été obtenu (*cf.* [22], [23]) sous les hypothèses suivantes :

1) La théorie d'Einstein est remplacée par la théorie d'Einstein-Cartan, ce qui est tout à fait raisonnable. Il y a déjà plus d'un demi-siècle Élie CARTAN avait fait remarquer à EINSTEIN que les arguments physiques de sa théorie restaient valables en faveur d'une connexion sur l'espace temps muni d'une métrique de signature hyperbolique et d'une connexion métrique, mais avec torsion.

Les équations de la théorie d'Einstein-Cartan diffèrent des équations d'Einstein dans le cas de sources qui ont une densité non nulle de moment angulaire (*cf.* [24], [25]) — il est donc logique de l'appliquer au cas des sources spinorielles dont le tenseur d'impulsion énergie naturel est non symétrique.

2) La forme spinorielle est restreinte à prendre ses valeurs dans un sous fibré, soit spineurs de Majorana (c'est-à-dire réels dans une représentation réelle de l'algèbre de Clifford, qui existe si $d = 4$), soit spineurs de Weyl d'hélicité fixée : ceci restreint le type physique du gravitino. (1)

3) La 1-forme spinorielle — donc aussi tous les autres champs — sont astreints à prendre leurs valeurs dans une algèbre $\mathbf{Z}_2$ graduée commutative $\mathbf{a}$; les spineurs anticommutent, métrique et connexion commutent entre eux et avec les spineurs. Ces propriétés algébriques sont nécessaires pour démontrer l'identité cherchée qui est désormais une $\mathbf{a}$-identité.

---

(1) Le neutrino intervenant dans les interactions faibles est aussi un spineur de Weyl.

Il n'est toutefois pas nécessaire pour formuler la théorie d'introduire les "supervariétés", où les coordonnées locales sont elles mêmes remplacées par les éléments d'une algèbre graduée. Ce dernier point de vue est en conformité avec le traitement par Élie CARTAN de la recherche des solutions des équations aux dérivées partielles comme variétés intégrales d'un système différentiel extérieur sur une variété où les variables indépendantes et les variables dépendantes (c'est-à-dire les inconnues) jouent le même rôle. La théorie des superespaces pose des problèmes délicats et intéressants (*cf.* [9], [10], [11]). Les théories cohérentes actuellement construites ne nécessitent pas leur usage : les coordonnées locales restent numériques. Cependant une véritable unification des bosons et des fermions en un même multiplet devrait être une section d'un fibré dont le groupe structural serait un supergroupe de Lie, avec une algèbre de Lie graduée.

3. Equations. — Les équations de la supergravité sont déduites du langrangien

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{E.C} + \mathcal{L}_{3/2},$$

où $\mathcal{L}_{E.C}$, lagrangien d'Einstein-Cartan, est la courbure scalaire R à valeurs dans $\mathbf{a}$ de la connexion métrique ω avec torsion S et $\mathcal{L}_{3/2}$ la généralisation du lagrangien de Rarita-Schwinger avec la définition de la dérivée covariante d'un tenseur-spineur par la connexion riemannienne dans l'espace tensoriel, et la connexion métrique avec torsion dans l'espace des spineurs, par exemple ($\Gamma_{\mu}{}^{\lambda}_{\nu}$ symboles de Christoffel, $\omega_{\mu}{}^{a}_{b}$ connexion métrique avec torsion)

$$D_\mu \psi_\lambda = \partial_\mu \psi_\lambda - \Gamma_\mu{}^\nu{}_\lambda\, \psi_\nu - \frac{1}{4}\omega_\mu{}^a{}_b\, \gamma_a \gamma^b \psi_\lambda. \tag{3.1}$$

Les équations obtenues sont :

1) *Les équations d'Einstein-Cartan*

$$\Sigma_{\alpha\beta} \equiv G_{\alpha\beta} - T_{\alpha\beta} = 0, \tag{3.2}$$

où $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R$ est le tenseur (ici non symétrique) d'Einstein de la connexion ω et $T_{\alpha\beta}$, tenseur d'impulsion énergie de la source ψ_λ, est

$$T_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\lambda\nu\rho} \{\bar{\psi}^\lambda \gamma_\alpha \xi D^\nu \psi^\rho\}, \tag{3.3}$$

où $\{\ \}$ désigne la partie réelle, c'est-à-dire, pour des spineurs à valeurs (1) dans $\mathbf{a}^-$

$$\{\bar{\psi}^\lambda \gamma_\alpha \xi D^\nu \psi^\rho\} = \bar{\psi}^\lambda \gamma_\alpha \xi D^\nu \psi^\rho + D^\nu \bar{\psi}^\rho \gamma_\alpha \xi \psi^\lambda.$$

(1) $\mathbf{a}^-$ et $\mathbf{a}^+$ désignent respectivement les éléments anticommutatifs et commutatifs de $\mathbf{a}$.

($\bar{\psi}$ est l'adjoint de Dirac de $\psi, \bar{\psi} = \widetilde{\psi}\gamma_0$, c'est un spineur covariant à valeurs dans $\mathbf{a}^-$; $\bar{\psi}\varphi = -\varphi\bar{\psi}$, à valeurs dans $\mathbf{a}^+$ est défini par la dualité spineur-cospineur.)

2) *Les équations de Rarita-Schwinger*

$$B^\lambda \equiv \eta^{\lambda\mu\nu\rho}(\gamma_\mu D_\nu \psi_\rho + \frac{1}{2}(D_\nu \gamma_\mu)\psi_\rho) = 0. \tag{3.4}$$

La connexion ω est déterminée par la métrique et par sa torsion, on trouve ici pour cette torsion le tenseur, à valeurs dans $\mathbf{a}^+$

$$S_\alpha{}^\lambda{}_\beta = \{\bar{\psi}_\alpha \gamma^\lambda \psi_\beta\} = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_\alpha \gamma^\lambda \psi_\beta - \alpha \leftrightarrow \beta). \tag{3.5}$$

Les équations (3.2), (3.4) contiennent non seulement la métrique mais aussi le choix d'un repère mobile $e^a = e^a{}_\mu \, dx^\mu$, orthonormé, c'est-à-dire qui détermine la métrique par les équations

$$g_{\lambda\mu} = e^a_\lambda \, e^b_\mu \, \eta_{ab} \,, \qquad \eta_{ab} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \tag{3.6}$$

(e^a_μ est à valeurs dans $\mathbf{a}^+$).

Le système (3.2), (3.4) (nous supposons toujours la torsion définie par (3.5) est un système d'équations aux dérivées partielles, sur une variété différentiable usuelle V_4, pour les inconnues à valeurs dans $\mathbf{a}$, e^a_μ et ψ_ρ. On va analyser formellement le problème de Cauchy pour un tel système.

4. Identités. — Le système (3.2), (3.4) est évidemment mal posé, il a un déterminant caractéristique identiquement nul. Cette propriété est déjà vraie pour les équations (3.2) quand ψ est connu : elles satisfont à des identités, conséquences des groupes d'invariance du lagrangien dont elles résultent.

De l'invariance par rotation lorentzienne du repère mobile, et transformation associée des spineurs on déduit l'identité

$$\Sigma_{[\alpha\beta]} + \{\bar{\psi}_\lambda \xi \gamma_{[\alpha}\gamma_{\beta]} B^\lambda\} \equiv 0 \tag{4.1}$$

(modulo l'équation de Rarita-Schwinger l'équation d'Einstein-Cartan est équivalente à sa partie symétrisée).

De l'invariance par difféomorphisme on déduit,

$$\nabla_\mu \Sigma_\lambda{}^\mu \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ (\Sigma_\lambda{}^\mu \,, B^\lambda)). \tag{4.2}$$

Les identités (4.1) et (4.2) seront utilisées pour démontrer qu'une jauge convenable choisie pour les groupes concernés est vérifiée effectivement par les solutions si elle l'est par les données initiales. Pour assurer la conservation d'une jauge levant l'incohérence des équations (3.4) on cherche une identité analogue à (1.3) dite *identité de supersymétrie.* Calculant $D_\lambda B^\lambda$ on trouve, en utilisant les identités de Ricci et de Bianchi et l'algèbre de Dirac

$$D_\lambda B^\lambda \equiv -\frac{1}{2}\Sigma_\lambda{}^\rho \xi \gamma^\lambda \psi_\rho + C, \tag{4.3}$$

où C est le spineur à valeurs dans $\mathbf{a}^-$

$$C = \frac{1}{4}\eta^{\lambda\mu\nu\rho} S_\lambda{}^\alpha{}_\mu \, \gamma_\alpha D_\nu \psi_\rho - \frac{1}{2} T_\lambda{}^\rho \xi \gamma^\lambda \psi_\rho .$$

On démontre que C est identiquement nul si ψ_ρ est un spineur de Majorana, c'est-à-dire réel, ou un spineur de Weyl, c'est-à-dire prend ses valeurs dans un espace propre de l'opérateur ξ (un tel spineur "viole la parité" : par un changement d'orientation de l'espace tangent ξ est changé en $-\xi$ et les espaces propres sont permutés).

L'identité (4.3) s'écrit alors

$$D_\lambda B^\lambda \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ \Sigma_\lambda{}^\rho = 0). \tag{4.4}$$

5. Jauges. — La jauge de Rarita-Schwinger est toujours

$$\chi \equiv \gamma^\lambda \psi_\lambda = 0 \, .$$

Un choix possible de jauge pour le groupe de Lorentz (*cf.* [12]) est :

$$\varphi_{ab} \equiv g_{\alpha\beta} e_{[b}{}^\beta g^{\lambda\mu} \partial^2_{\lambda\mu} e_{a]}{}^\alpha = 0 \tag{5.1}$$

et pour le groupe de difféomorphismes

$$\varphi^\lambda \equiv g^{\alpha\beta} \Gamma_\alpha{}^\lambda{}_\beta = 0.$$

Remarque. — (5.1) est équivalent à

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu \omega_\nu{}^a{}_b = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \varphi) \, .$$

Dans ces jauges le système (3.2), (3.4) prend la forme d'un système quasi-diagonal (dit système tronqué) dont l'opérateur principal $g^{\lambda\mu}\partial^2_{\lambda\mu}$ est formellement hyperbolique ($g^{\lambda\mu}$ est à valeurs dans $\mathbf{a}^+$). Les identités (4.2), (4.4) et une identité (1.4) montrent que pour toute solution du système tronqué les "conditions de jauge" χ et φ^λ vérifient un système lui aussi quasidiagonal, formellement hyperbolique, linéaire et homogène (on élimine φ_{ab} à l'aide de l'identité (4.1). On montre d'autre part que si les données de Cauchy vérifient les conditions de jauge initiales et les "contraintes" (c'est-à-dire celles des équations (3.2), (3.4) qui ne dépendent que de ces données : ${\Sigma_\lambda}^0 = 0$ et $B^0 = 0$ si la variété S support des données de Cauchy a pour équation locale $x^0 = 0$, alors les dérivées transversales à S de ces conditions de jauge s'annulent aussi sur S.

Tous les résultats sont des égalités algébriques, qui montrent la complète intégrabilité formelle au sens d'Élie CARTAN du système (3.2), (3.4), dans l'algèbre **a**.

6. Théorème d'existence. — On peut démontrer des théorèmes d'existence et d'unicité pour le système tronqué, et pour le système homogène satisfait par les conditions de jauge, si on restreint l'algèbre graduée **a** à être une algèbre de Grassmann $\mathcal{G}$, espace vectoriel sur **C** engendré par un nombre fini (ou infini) d'élements ς^I, $I = 1, \ldots, N$ et leurs produits soumis à la loi anticommutative

$$\varsigma^I \varsigma^J = -\varsigma^J \varsigma^I .$$

Des équations à valeurs dans $\mathcal{G}$ sont alors équivalentes à un nombre fini (ou infini) d'équations numériques, obtenues en égalant à zéro le coefficient de chaque produit antisymétrisé de générateurs. Les contraintes et les identités, qui sont à valeurs dans $\mathcal{G}$, permettent à chaque étape de montrer la cohérence et la causalité du système obtenu.

Les équations d'ordre zéro dans $\mathcal{G}$ se réduisent aux équations d'Einstein du vide pour la partie d'ordre zéro numérique de la métrique (puisque ψ_λ est d'ordre impair), les équations d'ordre 1 aux équations de Rarita-Schwinger dans l'espace temps einsteinien que l'on vient de déterminer : leur causalité a été démontrée au § 1.

Les équations suivantes sont à chaque ordre p un système linéaire pour les inconnues d'ordre p quand les inconnues d'ordre inférieur sont connues, l'opérateur principal du système tronqué est équivalent à l'opérateur des ondes de la métrique d'ordre zéro : les équations d'ordre 2, par exemple, déterminent (dans les jauges choisies, qu'on montre conservées, à cet ordre, par l'évolution) la partie d'ordre 2 de la métrique en fonction de sa partie d'ordre 0 et du champ de spin 3/2 d'ordre 1.

Si l'algèbre de Grassmann a un nombre fini de générateur on obtient ainsi l'existence d'une solution du problème de Cauchy dans les espaces de Sobolev appropriés. Cette solution respecte la causalité : son domaine d'existence, et sa dépendance des données initiales est déterminé par la partie numérique de la métrique. Si l'algèbre de Grassmann a un nombre infini de générateurs on obtient la solution sous forme d'une série formelle de fonctions C^∞ (*cf.* [13]).

II. Supergravités ($\mathbf{N = 1, 2, \ldots, 8}$)

La supergravité simple est une théorie rigide : si on lui adjoint un autre champ (par exemple électromagnétique) fournissant un terme additionnel au tenseur d'impulsion énergie $T_{\alpha\beta}$ (par exemple le tenseur de Maxwell), le système constitué des équations (3.2) (avec un $T_{\alpha\beta}$ modifié), (3-4), et les équations régissant le nouveau champ (par exemple les équations de Maxwell) n'est plus un système cohérent — ce résultat ne surprend pas les physiciens, guidés par le principe de l'égalité, dans une théorie unitaire, du nombre d'états bosoniques et fermioniques : il n'est pas possible de construire une théorie cohérente d'Einstein-Cartan avec une source de Maxwell et des champs de spin 3/2 que si ces champs (gravitini, de Majorana par exemple) sont au nombre de 2. Une théorie à deux "gravitini" est dite $N = 2$, elle possède deux identités de supersymétrie et a été effectivement construite, ainsi que des théories (dites supergravité étendues) à $N = 3, 4$ gravitini, pour l'introduction des nouveaux champs bosoniques les calculs deviennent considérables. $N = 8$ est le nombre maximal de gravitini que l'on puisse considérer si l'on ne veut pas introduire de champs de spin supérieur à 2 (une transformation infinitésimale de supersymétrie modifie additivement de 1/2 le spin et l'ensemble de ces transformations doit faire passer au plus de 2 à -2). Les équations physiquement satisfaisantes des champs de spin supérieur à 2 semblent ne pas pouvoir donner de système cohérent par couplage avec les équations d'Einstein, car leurs conditions d'intégrabilité ne contiennent pas seulement le tenseur de Ricci, mais le tenseur de Riemann.

III. Théories de Kaluza-Klein en supergravité

La théorie originale de KALUZA-KLEIN, complétée par JORDAN et THIRY, propose une unification géométrique de la gravitation et du champ électromagnétique en un espace temps de dimension 5 qu'un groupe d'isométries isomorphe à $U(1)$ munit d'une structure d'espace fibré principal dont la base est l'espace temps usuel et la fibre type un cercle : le potentiel électromagnétique est une connexion sur ce fibré déterminée par le champ de Killing. La théorie complète comporte, outre les deux champs cités, un champ scalaire dont l'interprétation physique a varié au cours des ans (*cf.* [14], [15]). Elle a été généralisée (*cf.* [16], [17], [18]) au cas d'un groupe de Lie de dimension n quelconque et permet ainsi une formulation synthétique des équations d'Einstein et de Yang-Mills — avec l'adjonction d'un certain nombre de champs scalaires. Il est évidemment très tentant de chercher une théorie unifiée de tous les champs fondamentaux, bosons et fermions, sous la forme d'une supergravité dans un espace temps de dimension $d = 4 + n$, dont les inconnues originelles sont la métrique (ou plutôt le repère mobile) et la

1-forme spinorielle. Malheureusement une telle théorie n'est pas cohérente sans l'adjonction de champs supplémentaires : l'identité de supersymétrie n'est pas vraie.

La physique laisse prévoir ce résultat, à cause de l'inégalité du nombre d'états bosoniques (c'est-à-dire correspondant à la métrique) et fermioniques (correspondant à la 1-forme spinorielle) dans une variété de dimension d.

Le problème est donc d'introduire des champs supplémentaires, puis de trouver un système cohérent et si possible causal. Il semble que le problème ne puisse pas avoir de solution si $d > 11$, car il faudrait alors introduire des champs de spin supérieur à 2. Il faut d'autre part, pour pouvoir rendre compte des résultats d'observation, que $d - 4$ (la dimension du groupe correspondant au champ de Yang-Mills) soit assez grand. Pour le meilleur candidat, $d = 11$, le groupe est de dimension 7, ce qui est incompatible avec l'unification des interactions forte, faible et électromagnétique qui semble requérir le groupe $SU(3)\times U(2)\times U(1)$. Une solution est de modifier la théorie de Kaluza-Klein, en remplaçant la fibre par un espace homogène $M = G/H$: le groupe d'isométries de tels espaces, de dimension 7, peut atteindre la dimension 28, et contenir, en particulier le groupe $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ (*cf.* Witten [19]). Cependant, avec cette extension de la théorie de Kaluza-Klein, les équations non linéaires n'ont plus une interprétation directe. Les résultats que l'on cherche à comparer avec les données d'observation sont déduits des équations linéarisées au voisinage d'une solution particulière que ses propriétés de symétrie — et de minimisation de l'énergie — conduisent à considérer comme l'état du vide.

1. La théorie de Cremmer-Julia-Scherk. Equations. — La théorie C.J.S. est une théorie générale de la supergravité à 11 dimensions, rendue cohérente par l'addition d'une 3-forme extérieure A, de différentielle $F = dA$ à valeurs dans $\mathbf{a}^+$ que l'on appelle le photon à 3 indices car elle satisfait à des équations dont l'opérateur principal est du type de l'opérateur de Maxwell. Figurent de plus dans les équations des termes d'interaction, non linéaires, choisis précisément pour rendre les équations cohérentes — c'est-à-dire obtenir l'identité de supersymétrie. Les concepts à la base de la théorie sont relativement simples, et conduisent à des équations déterminées de façon unique, à travers des difficultés techniques assez grandes il est vrai.

Les équations sont de la forme

1. *Les équations d'Einstein avec sources*

$$\Sigma_{MN} \equiv G_{MN} - T_{MN} = 0, \tag{1.1}$$

où $G_{MN} \equiv R_{MN} - 1/2 g_{MN} R$ est le tenseur d'Einstein d'une connexion métrique, mais avec la torsion à valeurs dans $\mathbf{a}^+$ donnée par

$$S_M{}^A{}_N = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_P \Gamma_{MN}{}^{APQ} \psi_Q - 2\bar{\psi}_M \Gamma^A \psi_N).$$

La métrique est déterminée par le repère mobile e : (e^A_M) à valeurs dans $\mathbf{a}^+$ par

$$g_{MN} = e^A_M e^B_N \eta_{AB}\,, \qquad \eta_{AB} = \mathrm{diag}(1, -1, \ldots, -1)\,.$$

La source T_{MN} est un polynôme donné en e, ψ et leurs dérivées premières, et de F.

2. *Les équations de Rarita-Schwinger*

$$\mathcal{R}^M \equiv \Gamma^{MNP} D_N \psi_P + r^M = 0, \tag{1.2}$$

où r^M est un polynôme donné de ψ, e, F.

3. *Les "équations de Maxwell à trois indices"*, de la forme

$$\mathcal{F} \equiv \nabla \cdot F + k^*(F \wedge F) + \nabla \cdot \varphi = 0 \tag{1.3}$$

avec

$$(\nabla \cdot F)^{MNP} = \nabla_Q F^{QMNP},$$

où $*$ désigne l'adjonction sur les formes dans la métrique, et φ une 4-forme, polynôme en e et polynôme pair en ψ (donc à valeurs dans $\mathbf{a}^+$).

2. Identités. — Le système (1.1), (1.2), (1.3) est invariant par transformation du groupe spinoriel (et transformation de Lorentz associée) dans l'espace tangent, il est aussi invariant par difféomorphismes. On en déduit des identités du type

$$\Sigma_{[MN]} = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \mathcal{R}^M), \tag{2.1}$$

$$D_M \Sigma_L{}^M \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ \mathcal{R}^M, \mathcal{F}), \tag{2.2}$$

(modulo signifie : à l'addition de termes linéaires et homogènes près). On voit aussi sur (1.3) l'identité

$$\nabla \cdot \mathcal{F} \equiv 0, \tag{2.3}$$

(c'est une conséquence de l'invariance du lagrangien par l'addition à A d'une différentielle exacte). Enfin on a l'identité "de supersymétrie"

$$D_M \mathcal{R}^M \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ \mathcal{R}^M, \Sigma_{MN}, \mathcal{F})\,. \tag{2.4}$$

Cette identité remarquable est une conséquence du choix particulier des équations. On la démontre (*cf.* CREMMER, JULIA et SCHERK 1978 [20]) en utilisant les identités de Ricci, de Riemann et de Bianchi et des réarrangements de Fierz (en dimension $d = 11$).

3. Problème de Cauchy. — Le système (1.1), (1.2), (1.3) est évidemment mal posé. Des données de Cauchy (e, ∂e, ψ, A, F) sur la sous variété S doivent vérifier les contraintes sur S (soit $x^0 = 0$ en coordonnées locales)

$$\Sigma_M{}^0 = 0\,, \qquad \mathcal{R}^0 = 0\,, \qquad \mathcal{F}^0 = 0. \tag{3.1}$$

Le système tronqué par le choix de jauges

$$\varphi_{AB} \equiv e_{[AM} g^{PQ} \partial^2_{PQ} e^M_{B]} = 0, \tag{3.3}$$

$$\varphi^P \equiv g^{MN} \Gamma_M{}^P{}_N = 0, \tag{3.4}$$

$$\chi = 0, \tag{3.5}$$

$$\nabla \cdot A = 0, \tag{3.6}$$

est un système formellement (à valeurs dans **a**) hyperbolique. Les identités (2.1) permettent de montrer que, pour une solution du système tronqué on a :

$$\varphi_{AB} = 0 \quad (\text{mod } \chi, \partial\chi).$$

Les identités (2.2), (2.3), (2.4) fournissent alors, pour les solutions du système tronqué, un système linéaire et homogène, formellement hyperbolique, vérifié par les "conditions de jauge" $\varphi^P, \chi, \nabla \cdot A$ Les contraintes (3.1) montrent d'autre part que, pour les solutions du système tronqué, on a

$$\partial_0 \varphi^P\big|_{x^0 = 0} = 0\,, \qquad \partial_0 \chi\big|_{x^0 = 0} = 0$$

et

$$\partial_0 \nabla \cdot A\big|_{x^0 = 0} = 0$$

si

$$\varphi^P\big|_{x^0 = 0} = 0 \qquad \text{et} \qquad \chi\big|_{x^0 = 0} = 0\,, \qquad \nabla \cdot A\big|_{x^0 = 0} = 0.$$

Remarque. — Les données de Cauchy "géométriques" sont un repère mobile tangent à S, déterminant sa métrique, un 2-tenseur symétrique (courbure extérieure de S dans V_d), A et F sur S, enfin une 1-forme sur S à valeurs spinorielles (pour un repère de V_d : on complète le repère mobile par le vecteur unitaire orthonormal à S). Ces données sont complétées (c'est-à-dire on choisit $\partial_0 e$, $\partial_0 A$, ψ_0) de manière à satisfaire les conditions de jauge initiales.

Ces divers résultats permettent si l'algèbre **a** est une algèbre de Grassmann de démontrer effectivement l'existence d'une solution des équations de la théorie C.J.S., dans les jauges choisies, dont le domaine de dépendance des données initiales est déterminé par la partie numérique de la métrique. (*cf.* [21]).

Unicité. — Il n'est pas difficile de montrer que les conditions (3.3), (3.4) peuvent être satisfaites (localement) en faisant subir à un repère mobile arbitraire donné des transformations de jauge (Lorentz et difféomorphismes) de même (3.6) peut toujours être satisfait en ajoutant à A une différentielle exacte — par contre la théorie des supergroupes ne semble pas être encore en mesure d'affirmer que la condition (3.5) peut toujours être vérifiée à partir d'une 1-forme spinorielle ψ donnée. Une réponse positive à ce problème ouvert permettrait davantage de considérer la supergravité comme une théorie unifiée des champs de bosons et de fermions.

RÉFÉRENCES

[1] CARTAN–EINSTEIN. — *Correspondance*, ed. Debever.

[2] CARTAN (É.). — *J. Math. Pures Appl.*, t. **1**, 1922, p. 141–203.

[3] CARTAN (É.). — *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques.* — Hermann.

[4] CHOQUET-BRUHAT (Y.) et CHRISTODOULOU (D.). — *Annales E.N.S.*, t. **14**, 1981, p. 481–500.

[5] EARDLEY (D.) and MONCRIEF (V.). — *Comm. Math. Phys.*, 1982, t. **83**, p. 171–212.

[6] CHOQUET-BRUHAT (Y.) and SEGAL (I.E.). — *J. Funct. Anal.*, t. **55**, n° 2, 1983, p. 112–150.

[7] MADORE (J.). — *Phys. Lett. B.*, t. **55**, n° 2, 1975.

[8] LICHNEROWICZ (A.). — *Bull. Soc. Math.*, t. **92**, 1964, p. 11.

[9] KOSTANT (B.). — in *Differential Geometry*, Bonn Symposium, Springer-Verlag, (*Lecture Notes in Math.*, **570**).

[10] DEWITT (B.). — *Supermanifolds.* — Cambridge University Press, 1984.

[11] REGGE (T.). — in *Relativy, groups and topology,* [B. DeWitt, ed., Les Houches]. North-Holland, 1983.

[12] BAO (D.), ISENBERG (J.), YASSKIN (P.). — *Ann. of Physics*, (à paraître).

[13] CHOQUET-BRUHAT (Y.). — *Lett. Math. Phys.*, t. **7**, 1983, p. 459–467.

[14] LICHNEROWICZ (A.). — *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme.* — Masson 1955.

[15] PIGEAUD (P.). — *C.R. Acad. Sci.* t. **280**, 1975, p. 749–752.

[16] DEWITT (B.). — in *Dynamical theory of groups and fields.* — Gordon and Breach, 1965.

[17] KERNER (R.). — *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **9**, n° 2, 1968, p. 143–152 et t. **34**, n° 4, 1981, p. 437–463.

[18] CHO (Y.M.) and FREUND (P.G.O.). — *Phys. Rev. D.*, t. **12**, 1975, p. 1711.

[19] WITTEN (E.). — *Nuclear Phys. B*, t. **186**, 1981, p. 412–428.

[20] CREMMER (E.), JULIA (B.), SCHERK (J.). — *Phys. Lett. B*, t. **76**, n° 4, 1978, p. 409–411.

[21] CHOQUET-BRUHAT (Y.). — *Comm. Math. Phys.*, (à paraître).

[22] DESER (S.), ZUMINO (B.). — *Phys. Rev. Lett.*, t. **38**, n° 25, 1977, p. 1433–1436.

[23] FREEDMAN (D.Z.), VAN NIEUWENHUIZEN (P.) and FERRARA (S.). — *Phys. Rev. D.*, t. **13**, n° 12, 1976, p. 3214–3218.

[24] TRAUTMAN (A.). — Fiber bundles, gauge fields and gravitation, in *General Relativity and Gravitation*, A. Held ed., Plenum 1980.

[25] HEHL (F.W.), van der HEYDE (P.), KERLICK (G.D.) and NESTER (J.M.). — *Rev. Modern Phys.*, t. **48**, 1976, p. 395.

Yvonne CHOQUET-BRUHAT,
Institut de Mécanique,
Tour 66, 4, Place Jussieu,
Université Paris VI,
75005 Paris.