

# *Astérisque*

M. YOR

## **Une décomposition asymptotique du nombre de tours du mouvement Brownien complexe**

*Astérisque*, tome 132 (1985), p. 103-126

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1985\\_\\_132\\_\\_103\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__132__103_0)

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Une décomposition asymptotique du nombre de tours  
du mouvement Brownien complexe.

M. YOR

1. Introduction.

(1.1) Les résultats suivants sont à l'origine de ce travail :

(i) P. Hartman [3] a démontré, de façon purement analytique, que pour tout couple  $(r, R)$  vérifiant :  $0 < r < R < \infty$ , les fonctions de  $\lambda (\in \mathbb{R}_+)$  :

$$(1.a) \quad \frac{I_{\sqrt{2\lambda}}(r)}{I_0(r)} \quad ; \quad (1.b) \quad \frac{K_0(r)}{K_{\sqrt{2\lambda}}(r)}$$

$$(1.c) \quad \frac{I_{\sqrt{2\lambda}}(r)}{I_0(r)} \frac{I_0(R)}{I_{\sqrt{2\lambda}}(R)} \quad ; \quad (1.d) \quad \frac{K_{\sqrt{2\lambda}}(R)}{K_0(R)} \frac{K_0(r)}{K_{\sqrt{2\lambda}}(r)}$$

sont les transformées de Laplace de probabilités (indéfiniment divisibles) sur  $\mathbb{R}_+$  [ voir aussi P. Hartman et G. Watson [4], pour (1.a) ]. Notons que (1.a) [ resp. (1.b) ] est obtenue en faisant tendre  $R$  vers  $+\infty$  en (1.c) [ resp. (1.d) ]

Des interprétations probabilistes de ces résultats en termes des processus de Bessel ont été fournies par J. Pitman et M. Yor [9], M. Yor [15].

(ii) F. Spitzer [10] a montré que, si  $(\theta_t, t \geq 0)$  est une détermination continue de l'argument du mouvement Brownien complexe  $(Z_t, t \geq 0)$ , issu de  $z_0 \neq 0$ , alors  $\frac{2\theta_t}{\log t}$  converge en loi vers  $c_1$ , la distribution de Cauchy de paramètre 1.

La démonstration de Spitzer s'appuie sur le calcul explicite de la transformée de Fourier de la variable  $\theta_t$  [ voir aussi Itô-Mc Kean [5], p. 270 ], laquelle est très liée à la transformée de Laplace (1.a) ; cf, S. Edwards [2] et M. Yor [15]. Dans le but d'éviter cette démonstration de type calculatoire, D. Williams [14] a développé une méthode d'encadrement des temps fixes  $t$  par les temps d'arrêt  $T_r = \inf \{t : |Z_t| = r\}$ , dont il découle aisément que la limite en loi de  $\left( \frac{2\theta_t}{\log t} ; t \rightarrow \infty \right)$  coïncide avec celle de  $\left( \frac{1}{\log r} \theta_{T_r} ; r \rightarrow \infty \right)$ , qui est  $c_1$ . R. Durrett [1] a également obtenu une démonstration très simple du résultat de Spitzer, fondée sur l'invariance de la loi Brownienne par changement

déterministe d'échelle.

(1.2) Le résultat de Spitzer étant très lié à la transformée (1.a), il nous a semblé naturel de chercher un résultat asymptotique portant sur le processus  $(\theta_t ; t \rightarrow \infty)$ , qui s'appuierait sur la transformée (1.b).

Avant d'énoncer notre résultat principal dans cette direction, introduisons quelques notations :  $W_{z_0}$  désigne la loi de  $(Z_t, t \geq 0)$ , issu de  $z_0$  ; on note  $\rho_t = |Z_t|$  ;  $C_t = \int_0^t \rho_s^{-2} ds$  ;  $C_{(s,t)} = C_t - C_s$  ( $0 \leq s \leq t$ ), et  $P_a^0$  la loi de  $(\rho_t, t \geq 0)$ , où  $a = |z_0|$ .

Grâce à la représentation de  $(\theta_t)$  en "skew-product" :

$$(1.e) \quad \theta_t - \theta_0 = \beta C_t \quad (t \geq 0),$$

où  $(\beta_t)$  désigne un mouvement Brownien réel, indépendant de  $(\rho_t, t \geq 0)$  [cf, Itô-Mc Kean [5], p. 270], on peut énoncer le renforcement suivant du résultat de Spitzer :

Théorème 1 : Notons, pour tout  $t > 0$ ,  $H_t = \inf \{u > 0 : \frac{1}{u} \rho_u = \frac{1}{t} \rho_t\}$ . On a alors, pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} & W_{z_0} \{ \exp i \frac{2}{\log t} [\alpha \theta_{H_t} + \beta \theta_{(H_t, t)}] \} \\ &= E_a^0 \{ \exp - \frac{2}{(\log t)^2} [\alpha^2 C_{H_t} + \beta^2 C_{(H_t, t)}] \} \xrightarrow{(t \rightarrow \infty)} \frac{|\alpha|}{\text{sh}|\alpha|} \cdot \frac{1 - e^{-2|\beta|}}{2|\beta|} \end{aligned}$$

Cet énoncé appelle quelques remarques : on retrouve le résultat de Spitzer en prenant  $\alpha = \beta$  ; de plus, le théorème montre en particulier que  $\frac{4}{(\log t)^2} C_{H_t}$  converge en loi, lorsque  $t \rightarrow \infty$ , vers la distribution de  $T_1^{(3)} = \inf \{t : \rho_t^{(3)} = 1\}$ , où  $\rho^{(3)}$  désigne ici un processus de Bessel de dimension 3, issu de 0.

(1.3) Une explication du résultat précédent est fournie par la méthode d'encadrement de Williams [14], déjà évoquée en (1.1), (ii). En effet, la mise en oeuvre de cette méthode pour obtenir une seconde démonstration du *théorème 1* fait apparaître de façon naturelle la représentation de Pitman [8] du processus de Bessel de dimension 3, à savoir  $(2S_t - B_t ; t \geq 0)$ , où  $(B_t)$  désigne ici le mouvement Brownien réel issu de 0, et  $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$ .

Introduisons les variables, indexées par  $t > 0$  :

$$(1.f) \quad H_t^{(2)} = \inf \left\{ u : \frac{1}{u} \rho_u = \inf_{s \leq t} \left\{ \frac{1}{s} \rho_s \right\} \right\}$$

$$H_t^{(3)} = \inf \left\{ u \geq H_t : \frac{1}{u} \rho_u = \sup_{H_t \leq s \leq t} \left\{ \frac{1}{s} \rho_s \right\} \right\}$$

Ces variables, ainsi que  $H_t$ , sont représentées dans la figure 1 ci-dessous.

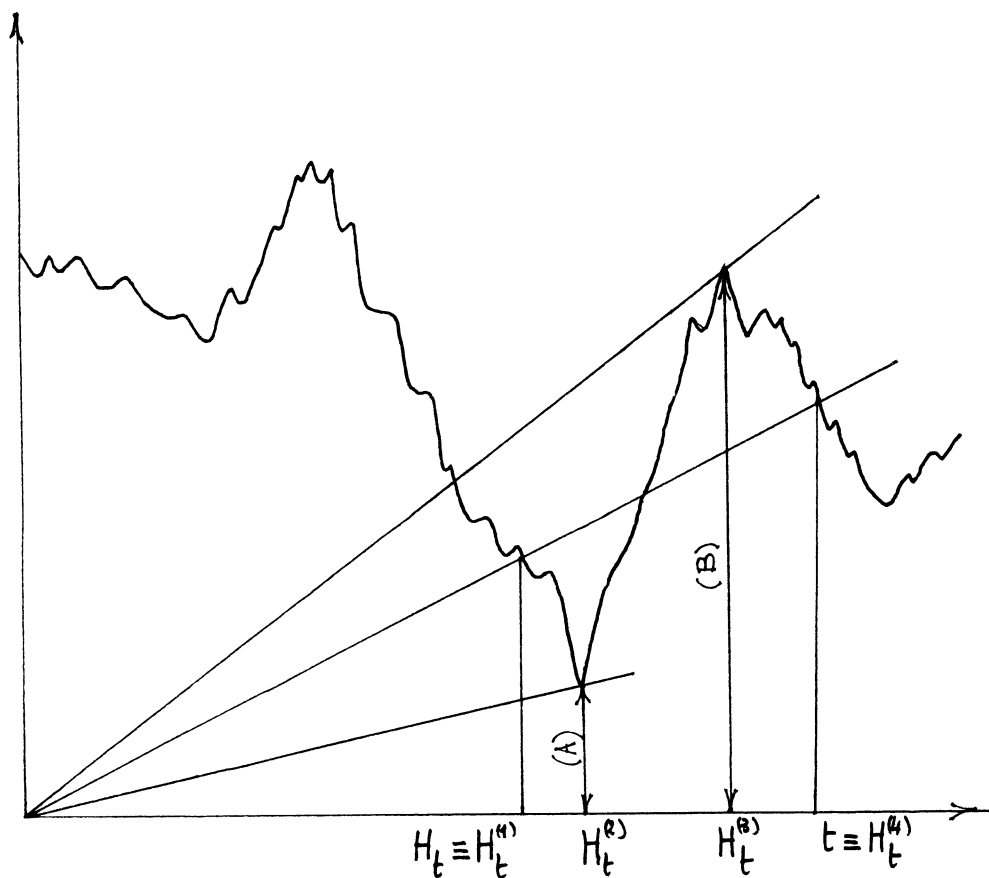


Figure 1

A l'aide d'un argument d'inversion du temps, (cf : (3.2) et (3.3)), il existe en fait,  $P_a^0$  p.s, pour tout  $t > 0$  fixé, un seul instant  $u(= H_t^{(2)}) < t$ , resp :  $v(= H_t^{(3)})$ , dans l'intervalle  $]H_t, t[$ , tels que :  $\frac{1}{u} \rho_u = \inf_{s \leq t} (\frac{1}{s} \rho_s)$ , resp :  $\frac{1}{v} \rho_v = \sup_{H_t \leq s \leq t} (\frac{1}{s} \rho_s)$ . Pour simplifier l'énoncé ci-dessous, notons encore :  $H_t^{(1)} = H_t$  ;  $H_t^{(4)} = t$ .

Le résultat suivant est un renforcement du théorème (1.1) :

$$(1.g) \quad \left( \frac{4}{(\log t)^2} C_{H_t^{(i)}} ; 1 \leq i \leq 4 \right) \xrightarrow{(d)} (J_i ; 1 \leq i \leq 4),$$

où les variables  $J_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) sont représentées par les flèches (i) dans les figures 2 et 3 ci-dessous. Conjointement avec ce résultat, on obtient également, si l'on note :  $(I_t, M_t) = \frac{-2}{\log t} \left( \inf_{s \leq t} \log \frac{\rho_s}{s} ; \sup_{H_t \leq s \leq t} \log \frac{\rho_s}{s} \right)$  :

$$(1.h) \quad (I_t, M_t) \xrightarrow{(d)} (a, b),$$

les variables  $a$  et  $b$  étant représentées dans les figures 2 et 3.

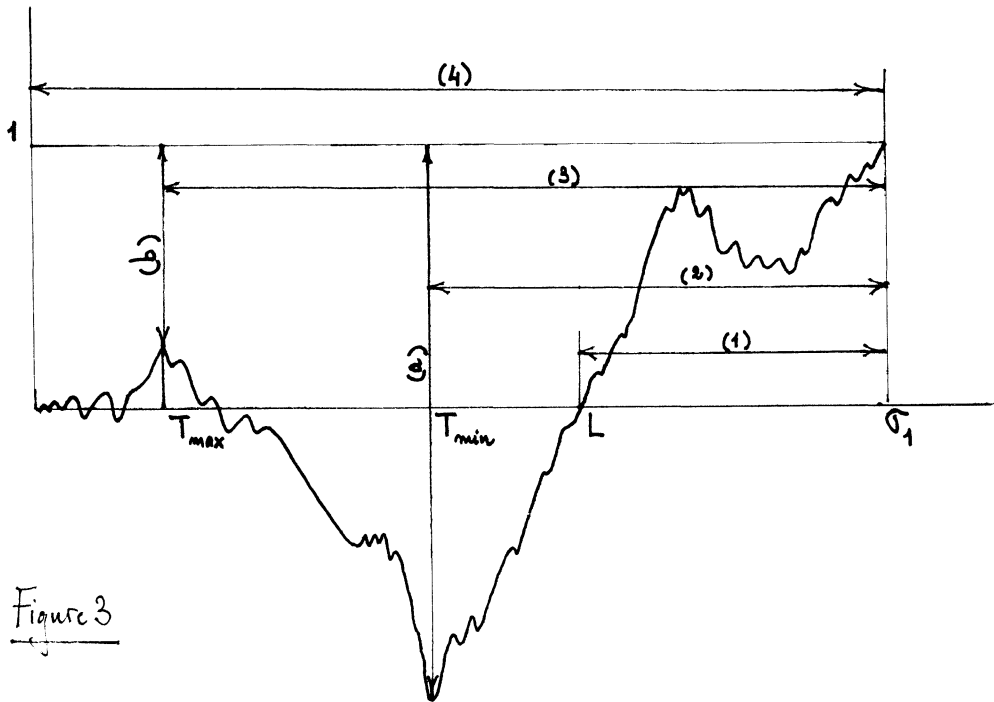
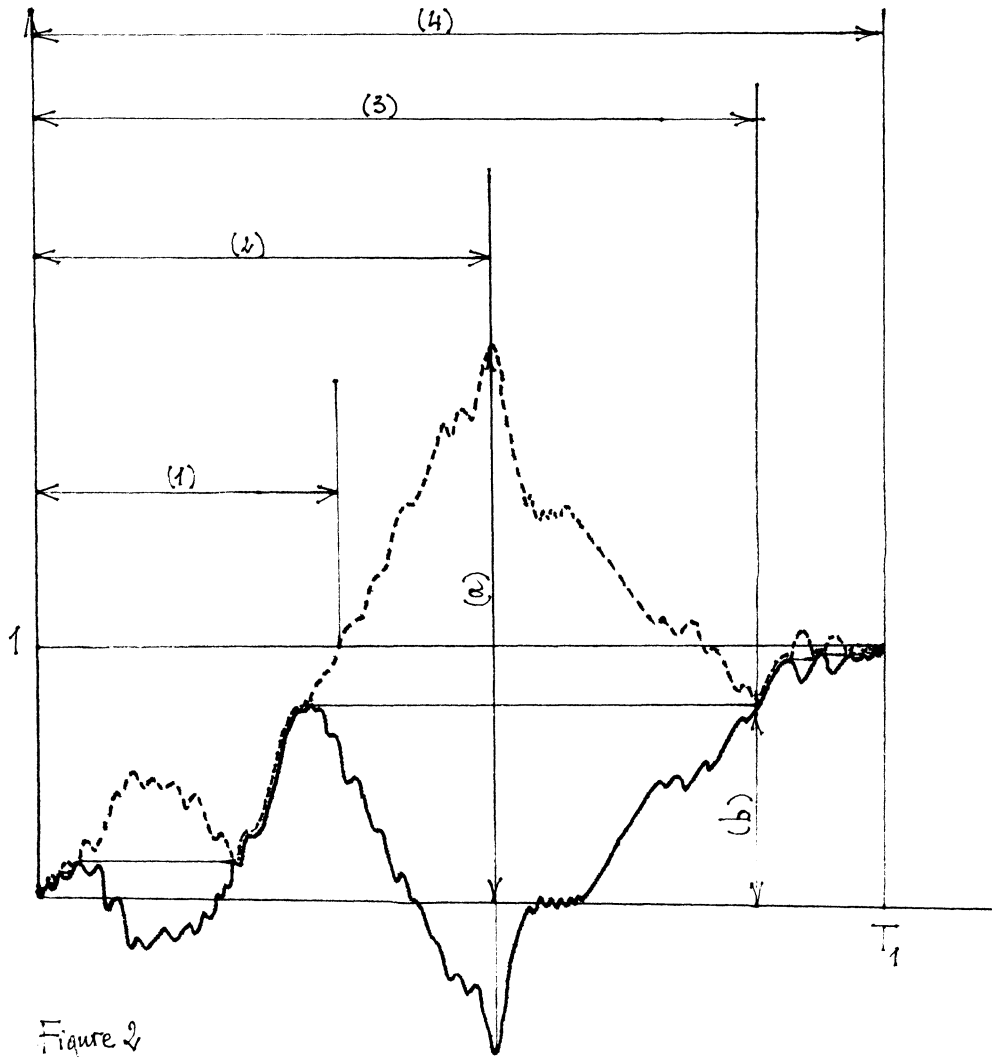


Figure 3



La trajectoire en pointillé de la figure 2 représente une trajectoire générique du processus de Bessel  $(\rho_t^{(3)})$ , construite, à l'aide du théorème de Pitman, à partir de la trajectoire générique (en trait continu) du mouvement Brownien réel,  $(B_t)$ , arrêté à son premier temps d'atteinte de 1, soit  $T_1$ .

D'après un théorème de Williams ([13] ; [12], p. 211), le retournement au temps  $T_1$  de la trajectoire supérieure de la figure 2 nous donne la trajectoire générique (figure 3) d'un nouveau mouvement Brownien  $(\gamma_t)$ , arrêté à son premier temps d'atteinte de 1, soit  $\sigma_1$ .

Notons  $L = \sup \{t \leq \sigma_1 : \gamma_t = 0\}$

$T_{\min}$  l'unique instant  $t < \sigma_1$ , où  $(\gamma_t)$  atteint son minimum.

$T_{\max}$  l'unique instant  $t < L$ , où  $(\gamma_t)$  atteint son maximum.

Avec ces notations, on peut écrire :

$$J_1 = \sigma_1 - L ; J_2 = \sigma_1 - T_{\min} ; J_3 = \sigma_1 - T_{\max} ; J_4 = \sigma_1.$$

(notons que  $T_{\max}$  n'est pas nécessairement inférieur à  $T_{\min}$ ).

*Nota Bene* : Malheureusement, nous ne parvenons pas à justifier complètement l'utilisation de la méthode d'encadrement de Williams, et nous montrerons seulement, en toute rigueur ;

$$(1.g') \quad \frac{1}{(\log r)^2} (C_{H_T}^{(i)}) ; 1 \leq i \leq 4) \xrightarrow[(r \rightarrow \infty)]{(d)} (J_i ; 1 \leq i \leq 4).$$

(1.4) Finalement, la rédaction de cet article est organisée comme suit :

le paragraphe 2 contient quelques rappels nécessaires sur les processus de Bessel ; la méthode calculatoire est développée au paragraphe 3, et la méthode d'encadrement au paragraphe 4 ; le paragraphe 5 est consacré à l'étude de  $C_{H_t}^{(d)}$ , etc..., lorsque  $(\rho_t)$  désigne le processus de Bessel de dimension  $d > 2$  (les résultats obtenus sont, bien sûr, de nature tout à fait différente de ceux obtenus pour la dimension 2).

Par souci de clarté, nous nous sommes restreint, dans cette Introduction, à l'énoncé des principaux résultats, mais les différents paragraphes contiennent en fait certaines extensions de ceux-ci.

## 2. Préliminaires.

(2.1) Soit  $\mu \geq 0$ . On appelle processus de Bessel d'indice  $\mu$ , et on note

BES ( $\mu$ ), la diffusion à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , de générateur infinitésimal :

$$(2.a) \quad A_\mu = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\mu+1}{2x} \frac{d}{dx}$$

On désigne souvent  $d_\mu \equiv 2(\mu+1)$  comme la "dimension" de BES ( $\mu$ ) : en effet, la partie radiale du mouvement Brownien à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  est le processus de Bessel d'indice  $\mu_d = \frac{d}{2} - 1$ .

Dans tout cet article, hormis le paragraphe 5, la dimension  $d=2$ , qui correspond à l'indice  $\mu=0$ , joue bien sûr un rôle très important.

Sur l'espace  $\Omega_+ = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ , on note  $\rho_t(\omega) = \omega(t)$ ,  $\mathcal{R}_t = \sigma\{\rho_s, s \geq 0\}$ , et  $\mathcal{R}_t = \sigma\{\rho_s, s \leq t\}$  ( $t \geq 0$ ). Pour tout  $a \in \mathbb{R}_+$ ,  $P_a^\mu$  désigne la distribution, sur  $(\Omega_+, \mathcal{R})$ , de BES ( $\mu$ ), qui vérifie  $P_a^\mu[\rho_0 = a] = 1$ .

Si  $U : \Omega_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une variable aléatoire, on notera quelquefois  $U(\omega(s); s \geq 0)$  pour  $U(\omega)$ . En outre, pour tout  $x \geq 0$ , on note  $T_x(\omega) = \inf\{t : \rho_t = x\}$ ;  $L_x = \sup\{t : \rho_t = x\}$ .

(2.2) S. Watanabe [11] a montré l'importance, pour l'étude des processus de Bessel, d'une classe plus large de processus, les processus de Bessel avec "drift" : on appelle processus de Bessel d'indice  $\mu \geq 0$ , et de "drift"  $\delta \geq 0$ , et on note BES ( $\mu, \delta$ ), la diffusion à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , de générateur infinitésimal :

$$(2.b) \quad A_{\mu, \delta} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \left[ \frac{2\mu+1}{2x} + \frac{\partial}{\partial x} (\log \psi_\mu(\delta \cdot x)) \right] \frac{d}{dx},$$

$$\text{où } \psi_\mu(y) = \left(\frac{y}{2}\right)^{-\mu} \Gamma(\mu+1) I_\mu(y), \text{ si } y > 0; = 1, \text{ si } y=0.$$

BES ( $\mu; 0$ ) n'est autre que BES ( $\mu$ ). Pour tout  $a \in \mathbb{R}_+$ , on note  $P_a^{\mu, \delta}$  la distribution sur  $(\Omega_+, \mathcal{R})$ , de BES ( $\mu; \delta$ ) qui vérifie  $P_a^{\mu, \delta}[\rho_0 = a] = 1$ .

Rappelons un résultat important, dû à S. Watanabe [11] :

(2.c) La distribution de  $(t \rho(\frac{1}{t}), t > 0)$  sous  $P_x^{\mu, \delta}$ , est  $P_\delta^{\mu, x}$ , pour tout  $\mu \geq 0$ , et tous  $x, \delta \geq 0$ .

Définissons maintenant, pour tout  $\omega \in \Omega_+$ ,  $\hat{\omega}$  par

$$\hat{\omega}(u) = u\omega\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{t}\right), \quad 0 < u < t.$$

Le résultat suivant découle aisément de (2.c) :

(2.d)  $(\rho_u, 0 < u < t)$  a même distribution, sous  $P_a^\mu$  ( $\cdot / \rho_t = r$ ) que  $(\hat{\rho}(u), 0 < u < t)$  sous  $P_{r'}^{\mu, a}$ , où  $r' = \frac{r}{t}$ .



(2.3) Si  $\rho_t = |B_t|$ , avec  $(B_t)$  mouvement Brownien à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  ( $d \geq 2$ ), qui n'est pas issu de l'origine, la fonctionnelle additive  $C_t \equiv \int_0^t \rho_s^{-2} ds$  apparaît dans la décomposition en "skew-product" de  $(B_t)$  [cf, Itô-Mc Kean [5], p. 270].

$(C_t)$  figure également dans l'expression de la densité de Radon-Nikodym des différentes probabilités  $P_a^\mu |_{\mathcal{F}_t}$  ( $a \neq 0$ ) [cf. [15], Lemme 4.5].

Citons enfin une interprétation probabiliste, en termes de  $(C_t)$ , donnée par J. Pitman et M. Yor [9], des transformées (1.a) et (1.b) : soient  $a, x > 0$  ; rappelons que :  $T_x = \inf \{t : \rho_t = x\}$  ;  $L_x = \sup \{t : \rho_t = x\}$ . On a :

$$(2.e) \quad E_x^{0,a} \left[ \exp \left( -\frac{\alpha^2}{2} C_\infty \right) \right] = \frac{I_\alpha(ax)}{I_0(ax)}$$

$$(2.f) \quad E_x^{0,a} \left[ \exp \left( -\frac{\alpha^2}{2} C_{(L_x, \infty)} \right) \right] = \frac{K_0(ax)}{K_\alpha(ax)} .$$

On utilisera également les formules ci-dessous, qui se déduisent des deux formules précédentes par application de la propriété de Markov en  $L_y$ , ou  $T_y$ , avec  $y \geq x$  ; on a :

$$(2.g) \quad E_x^{0,a} \left[ \exp \left( -\frac{\alpha^2}{2} C_{L_y} \right) \right] = \frac{I_\alpha(ax)}{I_0(ax)} \cdot \frac{K_\alpha(ay)}{K_0(ay)}$$

$$(2.h) \quad E_x^{0,a} \left[ \exp \left( -\frac{\alpha^2}{2} C_{T_y} \right) \right] = \frac{I_\alpha(ax)}{I_0(ax)} \cdot \frac{I_0(ay)}{I_\alpha(ay)}$$

Remarque : Pour plus de clarté, nous avons présenté les formules ci-dessus en dimension  $d=2$ , c'est à dire lorsque l'indice  $\mu$  est nul. Pour obtenir les formules analogues en toute dimension  $d \geq 2$ , c'est à dire pour tout  $\mu \geq 0$ , il suffit de changer, dans les membres de droite  $\alpha$  en  $\lambda = (\alpha^2 + \mu^2)^{1/2}$ , et 0 en  $\mu$ . On a, par exemple :

$$(2.e)_\mu \quad E_x^{\mu,a} \left[ \exp \left( -\frac{\alpha^2}{2} C_\infty \right) \right] = \frac{I_\lambda(ax)}{I_\mu(ax)} .$$

### 3. La méthode calculatoire.

(3.1) Le lemme suivant permet souvent de remplacer l'étude asymptotique de certaines distributions associées aux processus de Bessel, par une étude correspondante pour les ponts de Bessel.

Lemme 1 : Soient  $a > 0$ , et  $\mu \geq 0$  fixés. Soit  $(F_t, t \geq 0)$  un processus uniformément borné. Alors, s'il existe  $c \in \mathbb{R}$  telle que :

$$E_a^\mu (F_t | \rho_t = r \sqrt{t}) \xrightarrow{(t \rightarrow \infty)} c, \text{ dr p.s.}$$

on a :

$$E_a^\mu (F_t) \xrightarrow{(t \rightarrow \infty)} c.$$

Démonstration : C'est une simple application du théorème de convergence dominée de Lebesgue. On a :

$$E_a^\mu (F_t) = \int_0^\infty dr p_t^\mu (a, r) E_a^\mu (F_t | \rho_t = r)$$

avec

$$p_t^\mu (a, r) = \frac{r}{t} \exp \left( -\frac{a^2 + r^2}{2t} \right) I_\mu \left( \frac{ar}{t} \right) \left( \frac{r}{a} \right)^\mu$$

On en déduit, après changement de  $r$  en  $r\sqrt{t}$  :

$$E_a^\mu (F_t) \underset{(t \rightarrow \infty)}{\simeq} \int_0^\infty dr r e^{-\frac{r^2}{2}} I_\mu \left( \frac{ra}{\sqrt{t}} \right) \left( \frac{r\sqrt{t}}{a} \right)^\mu E_a^\mu (F_t | \rho_t = r\sqrt{t})$$

On obtient finalement le résultat annoncé, à l'aide de l'équivalence :

$$I_\mu(x) \underset{x \rightarrow 0}{\simeq} \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} \left( \frac{x}{2} \right)^\mu,$$

et de la majoration :  $I_\mu \left( \frac{z}{u} \right) u^\mu \leq I_\mu(z)$ , valable pour  $u \geq 1$ .

(3.2) La méthode calculatoire repose en définitive sur l'identité de lois (2.d) liant les ponts de Bessel et les processus de Bessel avec drift. Pour utiliser cette identité de façon générale, introduisons les notations suivantes :

si  $U$  est une v.a. positive, définie sur  $(\Omega_+, \mathcal{Q})$ , on lui associe, pour tout  $t > 0$ , la variable  $U_t$  suivante, définie sur  $C(10, \infty[ ; \mathbb{R}_+)$

$$(3.a) \quad U_t(\omega) = U \left( \omega \left( \frac{t}{1+ut} \right) ; u \geq 0 \right),$$

puis on définit :

$$(3.b) \quad H_t^U = \inf \left\{ u : \frac{1}{u} \rho_u = U_t \left( \frac{1}{s} \rho_s ; s > 0 \right) \right\}$$

On a alors le

Lemme 2 : Soient  $a, t > 0$ . Soient  $U, V : (\Omega_+, \mathcal{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$  deux variables positives telles que :  $V(\omega) \geq U(\omega) \geq \inf \{ \omega(u) ; u \geq 0 \}$ . Alors  $p_a^\mu$  p.s ,

$H_t^V \leq H_t^U \leq t$ , et pour tout  $r \geq 0$ , la loi de

$$(C_{H_t^V} ; C_{(H_t^V, H_t^U)} ; C_{(H_t^U, t)}), \text{ sous } P_a^\mu (./\rho_t = r)$$

est identique à celle de :

$$(C_{(L_V, \infty)} ; C_{(L_U, L_V)} ; C_{L_U}), \text{ sous } P_r^{\mu, a}, \text{ où } r' = \frac{r}{t}.$$

*Démonstration* : Pour simplifier, étudions seulement la loi de  $C_{(H_t^V, H_t^U)}$ ,

sous  $P_a^\mu (./\rho_t = r)$  : d'après l'identité (2.d), et avec les notations du para-

graphe 2, cette loi est celle de  $\int_{H_t^V(\hat{\rho})}^{H_t^U(\hat{\rho})} \hat{\rho}^{-2}(u) du$ , sous  $P_r^{\mu, a}$ . Or, par défini-

tion de  $H_t^V$ , et de  $\hat{\rho}$ , on a :

$$H_t^V(\hat{\rho}) = \inf \{u : \rho \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{t} \right) = U(\rho(s), s \geq 0)\},$$

et donc : (3.c)  $\frac{1}{H_t^V(\hat{\rho})} - \frac{1}{t} = L_U(\rho).$

Un changement de variables immédiat entraîne alors :

$$\int_{H_t^V(\hat{\rho})}^{H_t^U(\hat{\rho})} \hat{\rho}^{-2}(u) du = \int_{L_U(\rho)}^{L_V(\rho)} \rho^{-2}(u) du, \text{ d'où le résultat annoncé.}$$

(3.3) En vue d'une application des *lemmes 1* et *2*, les fonctionnelles  $U$ , et par suite  $U_t$ , suivantes, sont particulièrement intéressantes :

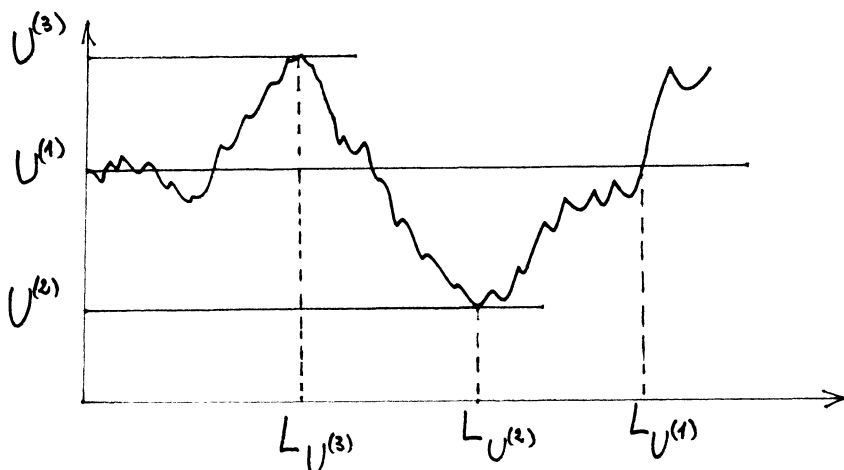
.  $U^{(1)}(\omega) = \varphi(\omega(0)) ; U_t^{(1)}(\omega) = \varphi(\omega(t))$

[avec  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , vérifiant :  $\varphi(r) \geq r$ ].

.  $U^{(2)}(\omega) = \inf \{\omega(s) ; s \geq 0\} ; U_t^{(2)}(\omega) = \inf \{\omega(s) ; s \leq t\}.$

.  $U^{(3)}(\omega) = \sup \{\omega(s) ; s \leq L_{\omega(0)}(\omega)\} ;$

$$U_t^{(3)}(\omega) = \sup \{\omega(s) ; T_{\omega(t)}(\omega) \leq s \leq t\}$$



Ces fonctionnelles permettent de définir, via (3.b), respectivement :

$$H_t^{(1)} \equiv H_t^\rho = \inf \{ u : \frac{\rho_u}{u} = \varphi \left( \frac{\rho_t}{t} \right) \}$$

$$H_t^{(2)} = \inf \{ u : \frac{\rho_u}{u} = \inf_{s \leq t} \left( \frac{\rho_s}{s} \right) \}.$$

En fait, d'après (3.c), et un résultat de Williams [13] assurant l'unicité du temps de réalisation de l'infimum de certaines diffusions,  $H_t^{(2)}$  est,  $P_a^0$  p.s., l'unique temps  $u < t$  tel que :  $\frac{\rho_u}{u} = \inf_{s \leq t} \frac{\rho_s}{s}$ .

Enfin, à la fonctionnelle  $U^{(3)}$ , on peut encore associer, via (3.b) :

$$\hat{H}_t^{(3)} = \inf \{ u : \frac{\rho_u}{u} = \sup_{H_t \leq s \leq t} \left( \frac{\rho_s}{s} \right) \}.$$

Il semble cependant plus intéressant d'introduire  $H_t^{(3)}$ , l'unique temps  $v \in ]H_t, t[$ , auquel  $\frac{\rho_v}{v} = \sup_{H_t \leq s \leq t} \left( \frac{\rho_s}{s} \right)$ , ce temps correspondant, dans la figure 3,

à l'un des temps importants de la décomposition de Williams des trajectoires Browniennes [13].

(3.4) [ Dans ce sous-paragraphe, et dans le suivant, on travaille, sauf mention contraire, relativement à  $P_a^0$  ]. On donne maintenant une démonstration, et une

extension, du *théorème 1*, où l'on remplace  $(H_t)$  par  $H_t^\varphi = \inf\{u : \frac{\rho_u}{u} = \varphi(\frac{\rho_t}{t})\}$ , avec  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , vérifiant :  $\varphi(r) \geq r$ .

(Ces variables correspondent aux fonctionnelles  $U^{(1)}$  introduites en (3.3)).

On utilisera les notations suivantes : on associe au mouvement Brownien réel  $(\beta_t, t \geq 0)$ , et au processus de Bessel de dimension 3, soit  $(\rho_t^{(3)}, t \geq 0)$ , supposés tous les deux issus de 0, la famille de leurs premiers temps de passage :

$$\sigma(a) = \inf \{t : \beta_t = a\} \quad (a > 0) ; \quad T_b^{(3)} = \inf \{t : \rho_t^{(3)} = b\} \quad (b > 0).$$

Théorème 2 : Soient  $\varphi_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  ( $1 \leq i \leq n$ ) une suite finie de fonctions telles que :

$$\varphi_1(r) \geq \varphi_2(r) \geq \dots \geq \varphi_n(r) \geq r,$$

et  $\lim_{r \rightarrow 0} \varphi_1(r) = 0.$

Alors : 1) Si, pour tout  $i$ ,  $(\varphi_i : \varphi_1) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \lim_{(r \rightarrow 0)} \frac{\varphi_i(r)}{\varphi_1(r)} > 0,$

on a :  $(C_{(H_t^{\varphi_1}, H_t^{\varphi_i})} ; 1 \leq i \leq n) \xrightarrow{(d) (t \rightarrow \infty)} (\sigma(-\log(\varphi_i : \varphi_1)) ; 1 \leq i \leq n)$

2) Si, pour tout  $i$ ,  $\tilde{\varphi}_i \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \varphi_i(r)}{\log r}$  existe, et est strictement

positive, alors :

$$\left( \frac{4}{(\log t)^2} C_{H_t^{\varphi_i}} ; 1 \leq i \leq n \right) \xrightarrow{(d) (t \rightarrow \infty)} (T_{\tilde{\varphi}_i}^{(3)} ; 1 \leq i \leq n)$$

D\u00e9monstration : Soient  $\varphi, \psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  deux fonctions qui satisfont  $\varphi(r) \geq \psi(r) \geq r$ . On a, d'apr\u00e8s le *lemme 2*, et la propri\u00e9t\u00e9 de Markov aux derniers temps de passage en un point, en notant  $r = \rho_t$  :

$$\begin{aligned} & E_a^0 [ \exp \{ -\alpha C_{H_t^\varphi} - \beta C_{(H_t^\varphi, H_t^\psi)} - \gamma C_{(H_t^\psi, t)} \} | \rho_t = \rho ] \\ &= E_r^{0,a} [ \exp -\alpha C_{(L_\varphi(r), \infty)} ] \cdot E_r^{0,a} [ \exp -\beta C_{(L_\psi(r), L_\varphi(r))} ] \cdot E_r^{0,a} [ \exp -\gamma C_{L_\psi(r)} ]. \end{aligned}$$

Plus g\u00e9n\u00e9ralement, pour tout  $t$ , les variables

$$\left( C_{H_t^{\varphi_1}} ; C_{(H_t^{\varphi_1}, H_t^{\varphi_2})} ; \dots ; C_{(H_t^{\varphi_{n-1}}, H_t^{\varphi_n})} ; C_{(H_t^{\varphi_n}, t)} \right)$$

sont indépendantes relativement à  $P_a^0$  ( $\rho_t = \rho$ ).

Compte-tenu de l'identité ci-dessus, la convergence en loi des  $n$ -uplets qui figurent dans l'énoncé sera donc démontrée, une fois obtenus les deux résultats unidimensionnels suivants :

$$\begin{aligned} \text{a) } E_r^{0,a} \left[ \exp - \frac{\alpha^2}{2} C_{(L_{\psi(r)}, L_{\varphi(r)})} \right] &\xrightarrow{(r \rightarrow 0)} (\psi : \varphi)^\alpha \\ \text{b) } E_r^{0,a} \left[ \exp - \frac{2\alpha^2}{(\log t)^2} C_{(L_{\varphi(r)}, \infty)} \right] &\longrightarrow \frac{\overset{\sim}{\alpha\varphi}}{\text{sh}(\alpha\varphi)} \end{aligned}$$

- Pour a), on a, à l'aide de la formule (2.f) :

$$\begin{aligned} &E_r^{0,a} \left[ \exp - \frac{\alpha^2}{2} C_{(L_{\psi(r)}, L_{\varphi(r)})} \right] \\ &= \frac{E_r^{0,a} \left[ \exp - \frac{\alpha^2}{2} C_{(L_{\psi(r)}, \infty)} \right]}{E_r^{0,a} \left[ \exp - \frac{\alpha^2}{2} C_{(L_{\varphi(r)}, \infty)} \right]} = \frac{K_0(a\psi(r))}{K_\alpha(a\psi(r))} \times \frac{K_\alpha(a\varphi(r))}{K_0(a\varphi(r))} \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \frac{K_0(a\psi(r))}{K_\alpha(a\varphi(r))} \simeq \frac{\log \psi(r)}{\log \varphi(r)} \longrightarrow 1, \text{ dès que } (\psi : \varphi) > 0.$$

D'autre part, d'après l'identité :  $K_\alpha(z) = \frac{\Pi}{2 \sin(\alpha\Pi)} [I_{-\alpha}(z) - I_\alpha(z)]$ ,

$$\text{on obtient : } \frac{K_\alpha(a\varphi(r))}{K_\alpha(a\psi(r))} \simeq \frac{I_{-\alpha}(a\varphi(r))}{I_{-\alpha}(a\psi(r))} \simeq \left( \frac{\psi(r)}{\varphi(r)} \right)^\alpha \longrightarrow (\psi : \varphi)^\alpha.$$

- En ce qui concerne b), on a, toujours à l'aide de la formule (2.f), en posant  $\beta = \frac{2\alpha}{\log t}$  :

$$E_r^{0,a} \left[ \exp - \frac{2\alpha^2}{(\log t)^2} C_{(L_{\varphi(r)}, \infty)} \right] = \frac{K_0(a\varphi(r))}{K_\beta(a\varphi(r))}$$

Or,  $K_0(a\varphi(r)) \simeq -\log \varphi(r)$  ; d'autre part,

$$K_\beta(a\varphi(r)) \simeq \frac{1}{2\beta} [I_{-\beta}(a\varphi(r)) - I_\beta(a\varphi(r))],$$

et l'on a, en remarquant que :  $\beta \simeq -\frac{\alpha}{\log r}$  :

$$I_{-\beta}(a\varphi(r)) \simeq e^{-\beta \log\left(\frac{a\varphi(r)}{2}\right)} \longrightarrow e^{\alpha \tilde{\varphi}}$$

$$I_{\beta}(a\varphi(r)) \simeq e^{\beta \log\left(\frac{a\varphi(r)}{2}\right)} \longrightarrow e^{-\alpha \tilde{\varphi}},$$

d'où, finalement :  $\frac{K_0(a\varphi(r))}{K_{\beta}(a\varphi(r))} \longrightarrow \frac{\alpha \tilde{\varphi}}{\text{sh}(\alpha \tilde{\varphi})}$ , c'est à dire b).

Nous terminons ce sous-paragraphe par l'étude asymptotique du processus  $(H_t; t \rightarrow \infty)$  lui même.

Proposition 1 : Pour toute fonction continue  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , à support compact dans  $]0, \infty[$ , on a :

$$(\log t) E_a^0 [f(H_t)] \xrightarrow{(t \rightarrow \infty)} \int_0^{\infty} \frac{dv}{v} \exp\left(-\frac{a^2}{2v}\right) f(v).$$

Démonstration : D'après le lemme 1, il s'agit d'étudier :

$$E_a^0 [f(H_t)/\rho_t = x\sqrt{t}] = E_r^{0,a} [f\left(\frac{t}{1+tL_r}\right)]$$

où  $r = x/\sqrt{t}$ , l'égalité provenant de (3.c).

La densité de  $L_r$  sous  $P_r^{0,a}$  est connue (cf. [9], paragraphe 7).

L'expression précédente est donc égale à :

$$\int_0^{\infty} du p_u^{0,a}(r,r) \frac{1}{2I_0(ar)K_0(ar)r} f\left(\frac{t}{1+tu}\right)$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{du}{u} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{2r^2}{u} + a^2u\right]\right) \frac{I_0\left(\frac{r^2}{u}\right)}{2I_0(ar)K_0(ar)} f\left(\frac{t}{1+tu}\right)$$

$$\simeq \frac{1}{\log t} \int_0^{\infty} \frac{du}{u} \exp\left(-\frac{a^2u}{2}\right) f(1/u). \quad \square$$

(3.5) Nous n'étudierons pas, à l'aide de la méthode calculatoire, le comportement asymptotique de :  $\left(\frac{1}{(\log t)^2} C_{H_t}(i), t \rightarrow \infty\right)$ , pour  $i=2,3$ , mais seulement celui de :

$$\left\{ \inf_{u \leq t} \frac{\rho_u}{u} ; \sup_{H_t \leq u \leq t} \frac{\rho_u}{u} \right\}.$$

On obtient le résultat suivant, annoncé en (1.h) :

Proposition 2 : Notons  $I_t = \frac{-2}{\log t} \inf_{s \leq t} (\log \frac{\rho_s}{s})$  ;  $M_t = \frac{-2}{\log t} \sup_{H_t \leq s \leq t} (\log \frac{\rho_s}{s})$ .

Alors : (3.d)  $(I_t ; M_t) \xrightarrow[(t \rightarrow \infty)]{(d)} \{1 - \inf_{u \leq \sigma(1)} \gamma(u) ; 1 - \sup_{u \leq L} \gamma(u)\}.$

En particulier,  $P_a^0 (I_t \geq y) \xrightarrow[(t \rightarrow \infty)]{} \frac{1}{y} \quad (y \geq 1)$

$P_a^0 (M_t \leq z) \xrightarrow[(t \rightarrow \infty)]{} z \quad (0 \leq z \leq 1).$

Démonstration : a) Remarquons tout d'abord que, pour tout  $\mu \geq 0$ , la loi, sous  $P_a^\mu (./\rho_t = r)$ , du couple :

$(\inf_{s \leq t} \frac{\rho_s}{s} ; \sup_{H_t \leq s \leq t} \frac{\rho_s}{s})$  est, d'après (2.d), celle du couple :

$(\inf_{u \geq 0} \rho_u ; \sup_{u \leq L_x} \rho_u)$ , sous  $P_x^{\mu, a}$ , où  $x = \frac{r}{t}$ .

b) Soient  $(P_x ; x \geq 0)$  les distributions d'une diffusion continue à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , telle que :  $\rho_t \xrightarrow[(t \rightarrow \infty)]{} \infty$ ,  $P_x$  p.s., et que 0 soit polaire. On peut prendre pour échelle de cette diffusion une fonction  $s : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_-$ , strictement croissante telle que :  $s(0+) = -\infty$ , et  $s(\infty) = 0$ . On a :

$$P_x (T_y < \infty) = P_x (L_y > 0) = \left( \frac{s(x)}{s(y)} \right) \wedge 1,$$

formule dont on déduit aisément la loi conjointe de :

$$I = \inf_{u \geq 0} \rho_u ; S_{L_x} = \sup_{u \leq L_x} \rho_u, \text{ sous } P_x \quad (x > 0).$$

On a, pour tous  $0 < y < x < z < \infty$  :

$$(3.e) \quad P_x (I < y ; S_{L_x} > z) = \frac{s(z) - s(x)}{s(z) - s(y)} \cdot \frac{s(z)}{s(x)} + \frac{s(x) - s(y)}{s(z) - s(y)} \cdot \frac{s(z)}{s(y)}$$



c) D'après [9], une fonction d'échelle, spécifiée ci-dessus, pour le processus BES ( $\mu$  ; a), est :  $s(x) = \frac{-K_\mu(ax)}{I_\mu(ax)}$ .

D'après l'étape a) de la démonstration, on peut maintenant écrire :

$$P_a^0 (I_t > y ; M_t < z | \rho_t = r\sqrt{t}) = P_x^{0,a} (I < y' ; S_{L_x} > z'),$$

où  $x = r/\sqrt{t}$  ;  $y' = \exp(-\frac{y}{2} \log t)$  ;  $z' = \exp(-\frac{z}{2} \log t)$ .

Remarquons que, pour  $t$  suffisamment grand, on a bien :  $y' < x < z'$  ; on peut donc appliquer la formule (3.e), avec  $(x, y', z')$ , et faire tendre  $t$  vers  $\infty$ .

Or, on a :  $\frac{s(z')}{s(x)} \xrightarrow{(t \rightarrow \infty)} z$ , à l'aide de l'équivalence :  $K_0(z) \underset{(z \rightarrow 0)}{\sim} -\log z$ .

Par passage à la limite, on obtient finalement, à l'aide du *Lemme 1*, et de la formule (3.e) : pour  $0 < z \leq 1 < y$ ,

$$(3.f) \quad P_a^0 (I_t \geq y ; M_t \leq z) \xrightarrow{(t \rightarrow \infty)} \frac{1-z}{y-z} \cdot z + \frac{y-1}{y-z} \cdot \frac{z}{y}.$$

d) On vérifie, par des calculs élémentaires sur le mouvement Brownien, du type de ceux qui ont menés à (3.e), que le membre de droite de (3.f) est bien la fonction de répartition du membre de droite de (3.d).

#### 4. La méthode d'encadrement.

(4.1) A la différence de la présentation adoptée en (3.2), on suppose donné d'emblée un processus  $(V_t(\omega) ; t > 0)$ , défini sur  $C(]0, \infty[ , \mathbb{R})$ , auquel on associe les variables :

$$(4.a) \quad H_t^V = \inf \{u : \frac{1}{u} \rho(u) = V_t (\frac{1}{s} \rho(s) ; s > 0)\}.$$

On fait, sur le processus  $V$ , les hypothèses suivantes :

(i) si  $h$  est une fonction strictement croissante, continue

$$V_t(h \circ \omega) = h [V_t(\omega) ]$$

(ii) si  $(\tau_t(\omega) ; t \geq 0)$  est un changement de temps strictement croissant et continu,  $V_t(\omega \circ \tau) = V_{\tau_t(\omega)}(\omega)$ .

(iii) pour tout  $t > 0$ ,  $V_t(\omega) \geq \inf \{\omega(u) ; u \leq t\}$  (cette dernière hypothèse, semblable à celle faite dans l'énoncé du *Lemme 2*, entraîne l'inégalité :  $H_t^V \leq t$ ).

Remarquons que les processus  $(V_t = U_t^i ; t > 0)$  ( $i=1,2,3$ ) introduits en (3.3), satisfont ces hypothèses, à condition de se restreindre, pour  $U^{(1)}$ , à  $\varphi(r) = r$ .

(4.2) [On travaille dorénavant relativement à  $P_a^0$ ].

Nous ne détaillerons pas ici la méthode d'encadrement de Williams [14] (voir [6], pour une étude systématique). Indiquons simplement qu'il suffit, pour prouver la convergence en loi de  $\left(\frac{4}{(\log t)^2} C_{H_t^V} ; t \rightarrow \infty\right)$  vers une distribution  $F(dx)$ , de montrer :

- d'une part, que  $\left(\frac{1}{(\log r)^2} C_{H_r^V} ; r \rightarrow \infty\right)$  converge en loi vers  $F(dx)$  ;

- d'autre part, que la famille des lois de :

$$\left(\frac{1}{(\log r_2 - \log r_1)^2} C_{(H_-(r_1, r_2), H_+(r_1, r_2))} ; 0 < r_1 < r_2 < \infty\right)$$

est tendue, où l'on a posé :  $H_-(r_1, r_2) = \inf \{H_t^V ; T_{r_1} \leq t \leq T_{r_2}\}$

$$H_+(r_1, r_2) = \sup \{H_t^V ; T_{r_1} \leq t \leq T_{r_2}\}.$$

Pour étudier le premier point, introduisons les notations suivantes :

$(\beta_t)_{t \geq 0}$  désigne le mouvement Brownien réel, issu de 0,  $S_t = \sup_{s \leq t} \beta_s$ ,

$\sigma_1 = \inf\{u \geq 0 : \beta_u = 1\}$ , et pour  $c > 0$  :

$$\beta_t^{(c)} = \beta_t - \frac{1}{c} \log c^2 \cdot \int_0^t \exp(2c\beta_s) ds \quad (t > 0),$$

processus qui converge p.s., uniformément sur tout compact de  $]0, \infty[$  vers  $(\beta_t - 2S_t)$ , lorsque  $c \rightarrow \infty$ .

On a le

Lemme 3 : Soit  $r > 1$ . Alors, si l'on note  $c = \log r$  :

$$(4.b) \quad \frac{1}{\log r} \log V_{T_r} \left(\frac{\rho_u}{u} ; u > 0\right) \stackrel{(d)}{=} V_{\sigma_1}(\beta_t^{(c)} ; t > 0)$$

$$(4.c) \quad \frac{1}{(\log r)^2} C_{H_{T_r}^V} \stackrel{(d)}{=} \inf \{u : \beta_u^{(c)} = V_{\sigma_1}(\beta_s^{(c)} ; s > 0)\}$$

Démonstration : On utilise la représentation :  $\log \rho_t = \beta_{c_t}$ , avec  $(\beta_t)$

mouvement Brownien réel, issu de 0. Remarquons que, si  $(\tau_t)$  désigne l'inverse

$$\text{de } (C_t), \text{ on a : } \tau_t = \int_0^t \exp(2\beta_u) du.$$

On en déduit, à l'aide des propriétés (ii), puis (i), énoncées en (4.1) :

$$\begin{aligned} C_{H_t^V} &= \inf \{ u : \beta_u - \log \int_0^u \exp(2\beta_s) ds \\ &= \log V_{C_t} [ \exp [ \beta_s - \log \int_0^s \exp(2\beta_v) dv ] ; s > 0 ] \\ &= V_{C_t} [ \beta_s - \log \int_0^s \exp(2\beta_v) dv ; s > 0 ] \}. \end{aligned}$$

On a :  $T_r \equiv \inf \{ t : \rho_t = r \} = \inf \{ t : \log \rho_t = c \}$  et donc  $C_{T_r} = \sigma(c) \equiv \inf \{ t : \beta_t = c \}$ . Définissons un nouveau mouvement brownien  $(\tilde{\beta}_t, t \geq 0)$  par la formule :  $\beta_t = c \tilde{\beta}_t / c^2$ . On a alors, en appliquant à nouveau les propriétés (ii) et (i) :

$$\begin{aligned} C_{H_{T_r}^V} &= \inf \{ u : c \tilde{\beta}_u / c^2 - \log \int_0^u \exp(2c \tilde{\beta}_s / c^2) ds \\ &= V_{\sigma(c)} [ c \tilde{\beta}_s / c^2 - \log \int_0^s \exp(2c \tilde{\beta}_v / c^2) dv ; s > 0 ] \\ &= c \frac{V_{\sigma(c)}}{c^2} [ \tilde{\beta}_s - \frac{1}{c} \log c^2 \int_0^s \exp(2c \tilde{\beta}_v) dv ; s > 0 ] \}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} C_{H_{T_r}^V} &= \inf \{ u : \tilde{\beta}_u - \frac{1}{c} \log c^2 \int_0^u \exp(2c \tilde{\beta}_s) ds \\ &= V_{\tilde{\sigma}(1)} [ \tilde{\beta}_s - \frac{1}{c} \log c^2 \int_0^s \exp(2c \tilde{\beta}_v) dv ; s > 0 ] \} \end{aligned}$$

où  $\tilde{\sigma}(1) = \inf \{ t : \tilde{\beta}_t = 1 \}$ , c'est à dire (4.c).

On montre (4.b) à l'aide des mêmes arguments.

Remarque : On a prouvé en fait l'identité en loi pour les couples de variables figurant en (4.b) et (4.c). On aurait un résultat analogue en partant d'un processus  $V$  multidimensionnel.

(4.3) A la suite du *lemme 3*, il est naturel de chercher des conditions sur  $V$  qui assureraient les convergences en loi suivantes :

$$(4.b') \quad \frac{1}{\log r} \log V_{T_r} \left( \frac{\rho_u}{u} ; u > 0 \right) \xrightarrow[(r \rightarrow \infty)]{(d)} V_{\sigma(1)}(\beta_t - 2S_t ; t > 0)$$

$$(4.c') \quad \frac{1}{(\log r)^2} C_{H_{T_r}^V} \xrightarrow[(r \rightarrow \infty)]{(d)} V_{\star} = \inf \{u : \beta_u - 2S_u = V_{\sigma(1)}(\beta_t - 2S_t ; t > 0)\}$$

Nous démontrerons simplement ces résultats pour les trois exemples  $V_t = U_t^{(i)}$ ,  $i=1,2,3$ , introduits en (3.3).

Cas  $i=1$  : On a alors :

$$V_{\sigma(1)}(\beta_t^{(c)} ; t > 0) = \beta_{\sigma(1)}^{(c)} \xrightarrow[(c \rightarrow \infty)]{} \beta_{\sigma(1)} - 2S_{\sigma(1)} = -1.$$

Il reste à démontrer que, p.s.,

$$\begin{aligned} \hat{T}_c &\equiv \inf \{u : \beta_u^{(c)} = \beta_{\sigma(1)}^{(c)}\} \text{ converge vers} \\ U_{\star}^{(1)} &\equiv \inf \{u : \beta_u - 2S_u = -1\}. \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que, par définition de  $\hat{T}_c$ , on a :  $\hat{T}_c \leq \sigma(1)$  ; il suffit donc de montrer que, p.s., toute sous-suite convergente  $\{\hat{T}_{c_n}(\omega)\}$  converge vers  $U_{\star}^{(1)}$ . Notons  $\hat{T}_{\omega} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{T}_{c_n}(\omega)$ .

Remarquons tout d'abord que :

$$\lim_n (2S_{\hat{T}_{c_n}} - \beta_{\hat{T}_{c_n}}) \geq \lim_n (-\beta_{\hat{T}_{c_n}}^{(c)}) = 1, \text{ et donc : } \hat{T}_{\omega} \geq U_{\star}^{(1)}.$$

Montrons maintenant :

$$(4.d) \quad \text{pour tout } u \leq \hat{T}_{\omega}, \beta_u - 2S_u \geq -1.$$

Soit  $u < \hat{T}_{\omega}$ . Pour  $n$  suffisamment grand, on a :  $u < \hat{T}_{c_n}(\omega)$ , et donc :

$$\beta_u - \frac{1}{c_n} \log c_n^2 \int_0^u \exp(2c_n \beta_s) ds \geq \beta_{\sigma(1)}^{(c_n)} \longrightarrow -1,$$

d'où (4.d).

Or, si  $\hat{T}_{\omega}$  était strictement plus grand que  $U_{\star}^{(1)}$ , il existerait  $u \in ]U_{\star}^{(1)}(\omega) ; \hat{T}_{\omega}[$  tel que  $X_u \equiv \beta_u - 2S_u < -1$ .

En effet, on a :  $X_{t+U_{\star}^{(1)}}^{(1)} - X_{U_{\star}^{(1)}}^{(1)} \leq \beta_{t+U_{\star}^{(1)}} - \beta_{U_{\star}^{(1)}} < 0$ , une infinité de fois dans un voisinage de  $t = 0_+$ , puisque  $U_{\star}^{(1)}$  étant un temps d'arrêt pour le mouvement Brownien  $(\beta_t)$ , le processus  $(\beta_{t+U_{\star}^{(1)}} - \beta_{U_{\star}^{(1)}}; t \geq 0)$  est un nouveau mouvement Brownien.

Cas i=2 :

Dans ce cas,  $U_{\sigma(1)}^{(2)}(\beta_t^{(c)}; t > 0) = \inf \{\beta_t^{(c)}; t \leq \sigma(1)\}$ . Par définition de  $\beta^{(c)}$ , on a :  $\beta_t^{(c)} \geq \beta_t - 2S_t$ , et donc, pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$U_{\sigma(1)}^{(2)}(\beta_t - 2S_t; t > 0) \leq U_{\sigma(1)}^{(2)}(\beta_t^{(c)}; t > 0) \leq \inf \{\beta_t^{(c)}; \varepsilon \leq t \leq \sigma(1)\}.$$

$\varepsilon > 0$  étant fixé, le membre de droite converge, lorsque  $c \rightarrow \infty$ , vers :

$$\inf \{\beta_t - 2S_t; \varepsilon \leq t \leq \sigma(1)\}, \text{ et on a finalement :}$$

$$U_{\sigma(1)}^{(2)}(\beta_t^{(c)}; t > 0) \xrightarrow[\text{p.s.}]{(c \rightarrow \infty)} \inf \{\beta_t - 2S_t; t \leq \sigma(1)\}.$$

Notons encore, comme pour le cas  $i=1$ ,  $\hat{T}_c = \inf \{u : \beta_u^{(c)} = U_{\sigma(1)}^{(2)}(\beta_t^{(c)}; t > 0)\}$  et soit  $\{\hat{T}_{c_n}\}$  une sous-suite qui converge vers  $\hat{T}_\omega$ .

Puisque :  $\beta_t - 2S_t \leq \beta_t^{(c)}$ , on a :  $\beta_{\hat{T}_c} - 2S_{\hat{T}_c} \leq U_{\sigma(1)}^{(2)}(\beta_t - 2S_t; t > 0)$ ,

$$\text{d'où : } \hat{T} \geq U_{\star}^{(2)}(\beta_t - 2S_t; t > 0).$$

En particulier, on a :  $\hat{T} > 0$ , et donc, par passage à la limite :

$$\beta_{\hat{T}} - 2S_{\hat{T}} = U_{\sigma(1)}^{(2)}(\beta_t; t > 0).$$

Or, il existe un unique instant, dans l'intervalle  $[0, \sigma_1]$ , auquel le processus  $(\beta_t - 2S_t)$  réalise son minimum.

$$\text{On a donc : } \hat{T} = U_{\star}^{(2)}(\beta_t - 2S_t; t > 0).$$

La démonstration pour le cas i=3 est très semblable à celle du cas i=2. On a finalement démontré, en utilisant les notations développées en (1.3), le résultat annoncé :

$$(1.g') \quad \frac{1}{(\log r)^2} (C_{H_{\hat{T}_r}^{(i)}}; 1 \leq i \leq 4) \xrightarrow[\text{(r} \rightarrow \infty\text{)}]{(d)} (J_i; 1 \leq i \leq 4),$$

conjointement avec le résultat :

$$\frac{1}{(\log r)} \left( \inf_{u \leq T_r} \log \frac{\rho_u}{u} ; \sup_{H_T \leq u \leq T_r} \log \frac{\rho_u}{u} \right) \xrightarrow{(d)} (I ; M), \quad (r \rightarrow \infty)$$

où 
$$I = \inf_{u \leq \sigma(1)} (\beta_u - 2S_u) ; M = \sup_{\Sigma(1) \leq u \leq \sigma(1)} (\beta_u - 2S_u),$$

avec  $\Sigma(1) = \inf \{u : \beta_u - 2S_u = -1\}$ . Ce dernier résultat est la traduction, via la méthode d'encadrement, de la proposition 2.

5. La méthode calculatoire en dimension  $d > 2$ .

On étudie ici le comportement asymptotique de  $H_t, C_{H_t}, C_t$ , lorsque  $t \rightarrow \infty$ , sous  $P_a^\mu$  ( $a, \mu > 0$ ). Il est intéressant de comparer les résultats obtenus avec ceux des paragraphes 3 et 4.

De même qu'en (3.3), on a, à l'aide du *Lemme 2*, et des formules (2.e) $_\mu, \dots, (2.h)_\mu$ , en posant  $\lambda = (\mu^2 + \alpha^2)^{1/2}$  :

(5.a) 
$$E_a^\mu \left[ \exp - \frac{\alpha^2}{2} C_t \mid \rho_t = x \right] = \frac{I_\lambda(r)}{I_\mu(r)}, \text{ où } r = \frac{ax}{t} ;$$

(5.b) 
$$E_a^\mu \left[ \exp - \frac{\alpha^2}{2} C_{(H_t, t)} \mid \rho_t = x\sqrt{t} \right]$$

$$= E_r^{\mu, a} \left[ \exp - \frac{\alpha^2}{2} C_{L_r} \right] = \frac{I_\lambda(ar)K_\lambda(ar)}{I_\mu(ar)K_\mu(ar)} \quad (r = x/\sqrt{t})$$

(5.c) pour toute fonction  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , borélienne,

$$E_a^\mu \left[ f(H_t) \mid \rho_t = x\sqrt{t} \right] = E_r^{\mu, a} \left[ f \left( \frac{t}{1+tL_r} \right) \right] \quad (r = x/\sqrt{t})$$

On obtient finalement la

Proposition 3 : Soient  $a, \mu > 0$ . Alors, relativement à  $P_a^\mu$  :

1) 
$$\frac{2C_t}{\log t} \xrightarrow{(P)} \frac{1}{\mu} ; \frac{1}{(\log t)^{1/2}} \left( C_t - \frac{\log t}{2\mu} \right) \xrightarrow{(d)} N(0 ; \frac{1}{2\mu^{3/2}})$$

2) 
$$C_{(H_t, t)} \xrightarrow{(d)} \gamma \left( \frac{1}{2} ; \frac{\mu^2}{2} \right),$$

où  $\gamma(\nu, \rho)$  désigne la distribution :  $\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\rho t^{\nu-1} \exp(-tp) dt$ , sur  $\mathbb{R}_+$ .

3) Pour toute fonction continue  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , à support compact dans  $[0, \infty[$ ,

$$t^\mu E_a^\mu [ f(H_t) ] \xrightarrow{(t \rightarrow \infty)} c_\mu \int_0^\infty dv v^{\mu-1} \exp(-a^2/2v) f(v),$$

où 
$$c_\mu = \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu)}$$

Démonstration : Les assertions 1) et 2) découlent aisément des formules (5.a) et (5.b) respectivement. En ce qui concerne 3), on a, d'après (5.c) :

$$\begin{aligned} & E_a^\mu [ f(H_t) | \rho_t = x\sqrt{t} ] \\ &= \int_0^\infty du p_u^{\mu,a}(r,r) \frac{1}{2 \Gamma_\mu(ar) K_\mu(ar) r} f\left(\frac{t}{1+tu}\right) \quad (r = x/\sqrt{t}) \\ &\stackrel{a}{=} \int_0^\infty \frac{du}{u} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{2r^2}{u} + a^2u\right]\right) I_\mu\left(\frac{r^2}{u}\right) f\left(\frac{t}{1+tu}\right) \\ &\stackrel{a}{=} \frac{1}{\Gamma(\mu)} \left(\frac{x^2}{2}\right)^\mu \frac{1}{t^\mu} \int_0^\infty dv v^{\mu-1} \exp(-a^2/2v) f(v) \end{aligned}$$

On a donc :

$$t^\mu E_a^\mu [ f(H_t) / \rho_t = x\sqrt{t} ] \xrightarrow{(t \rightarrow \infty)} \frac{1}{\Gamma(\mu)} \left(\frac{x^2}{2}\right)^\mu \langle m_\mu, f \rangle,$$

où 
$$m_\mu(dv) = dv v^{\mu-1} \exp(-a^2/2v).$$

En modifiant légèrement la démonstration du *Lemme 1*, on obtient :

$$\begin{aligned} t^\mu E_a^\mu [ f(H_t) ] &\rightarrow \langle m_\mu, f \rangle \int_0^\infty dx x e^{-x^2/2} \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} \frac{1}{\Gamma(\mu)} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{2\mu} \\ &= \langle m_\mu, f \rangle c_\mu, \end{aligned}$$

avec 
$$c_\mu = \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu)}.$$

Remarque : J. Neveu [7] a montré, en utilisant le théorème ergodique, que l'on a en fait : 
$$\frac{2}{\log t} C_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu}, \quad P_a^\mu \text{ p.s.}$$

RÉFÉRENCES :

- [ 1 ] R. Durrett : A new proof of Spitzer's result on the winding of two dimensional Brownian motion. The Annals of Proba., 10, n°1, 244-246, 1982.
- [ 2 ] S.F. Edwards : Statistical mechanics with topological constraints, I. Proc. Phys. Soc, 91, 513-519 (1967).
- [ 3 ] P. Hartman : Completely monotone families of solutions of n th order linear differential equations and infinitely divisible distributions. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, IV, vol III (1976), 267-287.
- [ 4 ] P. Hartman, G.S. Watson : "Normal" distribution functions on spheres and the modified Bessel functions. Ann. Proba. 2, 1974, 593-607.
- [ 5 ] K. Itô, H.P. Mc Kean : Diffusion processes and their sample paths. Springer Verlag (1965).
- [ 6 ] P. Messulam, M. Yor : On D. Williams'pinching method and some applications. J. London Math Soc. (2), 26, 1982, 348-364.
- [ 7 ] J. Neveu : Communication personnelle.
- [ 8 ] J.W. Pitman : One dimensional Brownian motion and the three dimensional Bessel process. Adv. App. Proba 7, 511-526, 1975.
- [ 9 ] J.W. Pitman, M. Yor : Bessel processes and infinitely divisible laws, in : "Stochastic Integrals", ed : D. Williams. Lect. Notes in Maths. 851. Springer (1981).
- [ 10 ] F. Spitzer : Some theorems concerning two-dimensional Brownian motion. Trans. Amer. Math. Soc. 87, 187-197, 1958.
- [ 11 ] S. Watanabe : On time inversion of one-dimensional diffusion processes. Z. Wahr. 31, 115-124 (1975).



- [ 12 ] D. Williams : Diffusions, Markov processes and Martingales Vol 1. Foundations. J. Wiley (1979).
- [ 13 ] D. Williams : Path decomposition and continuity of local time for one-dimensional diffusions, I. Proc. London Math. Soc. Ser 3, 28, 738-768 (1974).
- [ 14 ] D. Williams : A simple geometric proof of Spitzer's winding number formula for 2-dimensional Brownian motion. Unpublished manuscript, University College, Swansea, 1974.
- [ 15 ] M. Yor : Loi de l'indice du lacet Brownien, et distribution de Hartman - Watson. Zeitschrift für Wahr., 53, 71-95 (1980).

Laboratoire de Calcul des Probabilités  
Tour 56  
4, Place Jussieu  
75230 PARIS (5<sup>e</sup>)