Astérisque

YVES MEYER

Les nouveaux opérateurs de Calderón-Zygmund

Astérisque, tome 131 (1985), p. 237-254

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__131__237_0>

LES NOUVEAUX OPÉRATEURS DE CALDERÓN-ZYGMUND

YVES MEYER

Nous nous proposons de donner une démonstration nouvelle d'un théorème de G. David et J.L. Journé ([1],[4]) dont l'énoncé est rappelé ci-dessous (théorème 1). Cette démonstration a l'avantage de faire apparaître une nouvelle algèbre d'opérateurs définis par des intégrales singulières généralisées.

1 - NOTATIONS ET ÉNONCÉ DU THÉORÈME FONDAMENTAL.

Commençons par un point de vue abstrait qui permet d'éviter l'usage des espaces vectoriels topologiques localement convexes comme l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions de test de Schwartz.

Soit H un espace de Hilbert (sur le corps des réels ou des complexes), soit $\langle\, .\, ,\, .\, \rangle_H$ le produit scalaire correspondant et soit $V \subset H$ un sous-espace vectoriel dense dans H qui est aussi un espace de Hilbert. Appelons $\langle\, .\, ,\, .\, \rangle_V$ le produit scalaire défini par la structure hilbertienne de V et supposons que

$$(1) \qquad \langle v,v\rangle_V \geq \langle v,v\rangle_H \quad \text{pour tout } v \in V .$$

Désignons par V' et H' les duaux de V et H . Tout élément $\ell \in H'$ est une forme linéaire continue sur H et peut donc être restreinte à V ; ℓ définit alors un élément (encore noté ℓ) de V' . En identifiant H à H' , on a donc

$$(2) \qquad V \subset H = H' \subset V'$$

et l'on appellera $\langle v',v\rangle$ la forme sesquilinéaire exprimant la dualité entre V' et V et dont la restriction à $H' \times H$ est le produit scalaire dans H .

Le problème que nous allons résoudre est du type suivant. Soit $T : V \rightarrow V'$ un opérateur linéaire continu. Trouver une condition suppémentaire entraînant que T soit, en fait, la restriction à V d'un (unique) opérateur linéaire continu

$T : H \longrightarrow H$.

Dans l'exemple que nous traiterons ci-dessous, une première condition nécessaire vient de l'existence d'un groupe $G \subset \mathcal{L}(H,H)$ d'isométries de H , laissant V invariant.

Pour écrire cette condition nécessaire, il est commode d'associer à T la forme sesquilinéaire $J : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

(3) $$J(u,v) = < T(u),v> \ , \ u \in V \ , \ v \in V$$

On a donc, pour $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, $\lambda_2 \in \mathbb{C}$, u_1, u_2, v_1, v_2 éléments de V

(4) $$J(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1 \ J(u_1,v) + \lambda_2 \ J(u_2,v)$$

(5) $$J(u,\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \overline{\lambda}_1 \ J(u,v_1) + \overline{\lambda}_2 \ J(u,v_2)$$

(6) $$|J(u,v)| \le C \ \|u\|_V \ \|v\|_V \ .$$

Réciproquement une forme vérifiant (4), (5) et (6) définit, de façon unique un opérateur linéaire continu $T : V \longrightarrow V'$ par (3).

Pour revenir à notre condition nécessaire, appelons $g.v$ l'action de $g \in G$ sur $v \in V$. Alors nous utiliserons la définition suivante.

Définition 1. On dit que $T : V \longrightarrow V'$ est d'ordre 0 relativement à G s'il existe une constante $C \ge 0$ telle que, pour tout $g \in G$, tout $u \in V$ et tout $v \in V$ on ait

(7) $$|J(g.u,g.v)| \le C\|u\|_V\|v\|_V \ .$$

Revenons sur terre. Dans tout ce qui suit H sera l'espace (canonique) $L^2(\mathbb{R}^n;dx)$, m sera un entier vérifiant $m > 2n$ et $V = V_m$ sera le sous-espace de l'espace de Sobolev H^m composé des fonctions $f \in H^m$ telles que $\partial^\alpha f(x)\ (1+|x|^2)^{m/2} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \le m$.

La structure hilbertienne de V est donnée par le produit scalaire

(8) $$<f,g>_V = \sum_{|\alpha|\le m} \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha f \ \overline{\partial^\alpha g} \ \ (1+|x|^2)^m \ dx \ .$$

On vérifie sans peine que les fonctions $f \in V$ sont de classe $C^{m-n/2}$ (si $0 < \mu < 1$, $C^\mu(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions hölderiennes d'exposant μ ; si $\mu = 1$, $C^\mu(\mathbb{R}^n)$ est la classe de Zygmund des fonctions $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant $|f(x+y)+f(x-y)-2f(x)| \le C|y|$ et si $\mu + m = r$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < \mu \le 1$, $f \in C^r$ si $\partial^\alpha f \in C^\mu$ lorsque $|\alpha| \le m$). De plus les fonctions $f \in V$ et toutes leurs dérivées $\partial^\beta f$, $|\beta| < m - \frac{n}{2}$ sont $O(|x|^{-2m})$ à l'infini. L'intersection des espaces V_m est donc la classe $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de Schwartz. Enfin $f \in V_m$ signifie $x^\alpha \partial^\beta f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ pour $|\alpha| \le m$ et $|\beta| \le m$ et, à ce titre, V_m est invariant par la transformation de Fourier.

Le groupe G est désormais composé des transformations affines du type $g.f(x) = \delta^{-n/2} f(\frac{x-x_o}{\delta})$, $\delta > 0$, $x_o \in \mathbb{R}^n$, opérant sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ ou sur V.

Il est très important d'observer que l'on a $\|g.f\|_2 = \|f\|_2$ mais que G n'opère pas isométriquement sur V.

Nous désignerons par $V \hat{\otimes}_\pi V$ le produit tensoriel projectif de V par V : il se compose des fonctions $f(x,y) = \sum_0^\infty f_k(x) g_k(y)$ telles que $\sum_0^\infty \|f_k\|_V \|g_k\|_V < +\infty$. Alors tout opérateur linéaire continu $T : V \longrightarrow V'$ définit canoniquement un élément du dual $(V \hat{\otimes}_\pi V)^*$ par le biais de la forme J associée à T. Or $(V \hat{\otimes}_\pi V)^* \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ et la distribution correspondante s'appelle le noyau-distribution de T.

On a ainsi, si $f \in V$, $g \in V$ sont à valeurs réelles,

$$J(f,g) = \langle T(f), g \rangle = \langle K, f \otimes g \rangle$$

où K est le noyau-distribution de T.

Nous allons désormais restreindre notre étude à un cadre défini par A. Calderón et A. Zygmund : celui des opérateurs linéaires continus $T : V \longrightarrow V'$ dont le noyau-distribution vérifie les célèbres estimations de Calderón-Zygmund que nous rappelons maintenant.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tels que $y \neq x$.

Définition 2. Soit $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \le 1$ un exposant. Nous désignerons par F_ε l'espace vectoriel des opérateurs linéaires continus $T : V \longrightarrow V'$ dont le noyau-distribution $K(x,y)$, restreint à l'ouvert Ω, est une fonction continue telle que, pour une certaine constante $C \ge 0$, on ait

(9) $$|K(x,y)| \le C|x-y|^{-n} \quad \text{pour tout } (x,y) \in \Omega$$

(10) $$|K(x',y) - K(x,y)| \le C \frac{|x-x'|^\varepsilon}{|x-y|^{n+\varepsilon}} \quad \text{pour tout}$$

$$(x,y) \in \Omega \text{ et tout } x' \text{ tel que } |x-x'| \le \frac{1}{2}|x-y|$$

(11) $$|K(x,y') - K(x,y)| \le C \frac{|y-y'|^\varepsilon}{|x-y|^{n+\varepsilon}}$$

pour tout $(x,y) \in \Omega$ et tout y' tel que $|y-y'| \leq \frac{1}{2}|x-y|$.

Le problème fondamental que nous allons résoudre est celui de savoir à quelle condition un opérateur $T \in F_\varepsilon$ se prolonge en un opérateur T linéaire et continu sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Si c'est le cas, nous dirons que T est un opérateur de Calderón-Zygmund et écrirons $T \in E_\varepsilon$. La raison de cette terminologie est que la théorie créée par Calderón et Zygmund s'applique à ces opérateurs.

En particulier, les opérateurs de Claderón-Zygmund sont bornés sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 < p < +\infty$, envoient $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $BMO(\mathbb{R}^n)$ (c'est un théorème de **Peetre-Spanne**-E.M. Stein) et $H^1(\mathbb{R}^n)$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. Ici $H^1(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Hardy généralisé de Stein et Weiss.

Enfin si T est un opérateur de Calderón-Zygmund, il en est de même de l'adjoint T^* de $T : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$.

Il résulte de toutes ces remarques que si T est un opérateur de Calderón-Zygmund, alors $T(1) \in BMO(\mathbb{R}^n)$ et $T^*(1) \in BMO(\mathbb{R}^n)$. Ceci en appelant 1 la fonction identiquement égale à 1 .

Nous allons montrer que l'on peut définir $T(1)$ et $T^*(1)$ sans se servir de la continuité de T sur L^2 mais en utilisant seulement les deux hypothèses suivantes : $T \in F_\varepsilon$ et T est d'ordre 0 . Désignons par $W \subset V$ le sous-espace formé des fonctions $u \in V$ vérifiant $\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\,dx = 0$.

Proposition 1 . Soit $T : V \longrightarrow V'$ un opérateur d'ordre 0 , appartenant à F_ε . Soit J la forme associée à T . Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction égale à 1 en 0 . Enfin pour tout $\varepsilon > 0$, posons $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$. Alors, pour tout $u \in W$, $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} J(\varphi_\varepsilon, u)$ existe et ne dépend pas du choix de φ . Cette limite sera notée $J(1,u)$ et vérifie $|J(1,u)| \leq C \|u\|_V$ pour une certaine constante C .

Nous allons d'abord vérifier l'existence de $J(1,u)$ lorsque u a un support compact (et $u \in W$).

On écrit $1 = g + h$ où $g \in V$ et où $h = 0$ au voisinage du support de u . Alors $\varphi_\varepsilon g$ tend vers g dans V ce qui implique la convergence de $J(\varphi_\varepsilon g,u)$ vers $J(g,u)$. En utilisant cette fois $\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\,dx = 0$, on écrit

$$J(\varphi_\varepsilon h,u) = \iint K(x,y)\ \varphi_\varepsilon(y)\ h(y)\ \overline{u(x)}\ dy\ dx =$$

$$\iint \{K(x,y) - K(x_0,y)\}\ \varphi_\varepsilon(y)\ h(y)\ \overline{u(x)}\ dy\ dx .$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue s'applique (grâce à (10)) à cette dernière intégrale, si x_0 appartient au support de u . La limite cherchée est donc

$\iint\{K(x,y) - K(x_o,y)\}\ h(y)\overline{u}(x)\ dy\ dx$. De même on montre l'existence de $J(u,1)$ si $u \in W$ a un support compact.

Nous pouvons maintenant passer au cas général d'un support quelconque. Soit $1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi(x-k)$ une décomposition de l'identité où $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On pose, si $f \in W$, $f_k(x) = \varphi(x-k)f(x)$ et $\alpha_k = \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\,dx$. On a $|\alpha_k| \leq C|k|^{-m}$ et

$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \alpha_k = 0$.

On utilise alors le lemme suivant (dont la preuve très simple est laissée au lecteur).

Lemme 1. <u>Soit, pour</u> $1 \leq p \leq n$, $e_p = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$. <u>Soit</u> $m > n$ et $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ <u>une suite de nombres complexes vérifiant</u> $|\alpha_o| \leq 1$, $|\alpha_k| \leq |k|^{-m}$ <u>et</u> $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \alpha_k = 0$.

<u>Alors on peut écrire</u> $\alpha_k = \sum_1^n \{\lambda_p(k+e_p)-\lambda_p(k)\}$ où

$$|\lambda_p(k)| \leq C|k|^{-m+n} \ \underline{\text{si}}\ \ k \neq 0\ \ \underline{\text{et}}\ |\lambda_p(0)| \leq C .$$

<u>La constante</u> C <u>ne dépend que de</u> m <u>et</u> n .

Armés de ce lemme, on pose $r_{k,p}(x) = \lambda_p(k+e_p)\ \varphi(x-k-e_p) - \lambda_p(k)\varphi(x-k)$ et $r_k(x) = \sum_{p=1}^n r_{k,p}(x)$. On a $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} r_{k,p}(x) = 0$ et l'on définit $g_k(x) = f_k(x) - r_k(x)$.

Alors $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f_k(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g_k(x)$ tandis que $\int g_k(x)dx = \alpha_k - \alpha_k = 0$.

Enfin $\|g_k(x+k)\|_V \leq C|k|^{-m+n}$ et, puisque J est d'ordre 0 (propriété que l'on applique avec $x_o = k$ et $\delta = 1$), il vient facilement $|J(1,g_k)| \leq C'|k|^{-m+n}$. Les estimations obtenues s'ajoutent si $m > 2n$. Nous venons de définir $J(1,f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} J(1,g_k)$.

La vérification de $J(1,f) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} J(\varphi_\varepsilon,f)$ est alors immédiate et laissée au lecteur.

L'espace dual de $W \subset V$ est l'espace quotient $V'/\mathbb{C}$ où $\mathbb{C} \subset V'$ représente les constantes. Ainsi chaque fois que $T \in F_\varepsilon$ et que T est d'ordre 0 , on a $T(1) \in V'/\mathbb{C}$.

Enfin l'adjoint $T^* : V \longrightarrow V'$ de $T : V \longrightarrow V'$ est défini par la forme $J^*(u,v) = \overline{J(v,u)}$.

Si $T \in F_\varepsilon$ est d'ordre 0 , on a également $T^*(1) \in V'/\mathbb{C}$.

Une dernière observation est que, en appelant $H^1(\mathbb{R}^n)$ l'espace de Hardy généralisé de Coifman et Weiss, on a $W \subset H^1(\mathbb{R}^n)$ et donc, par dualité, $BMO(\mathbb{R}^n) \subset V'/\mathbb{C}$.

Avec toutes ces notations, on a le théorème suivant.

Théorème 1 (G. David et J.L. Journé, 1983)

<u>Soit</u> $T : V \longrightarrow V'$ <u>un opérateur appartenant à</u> F_ε (<u>voir la définition</u> 2). <u>Une condition nécessaire et suffisante pour que</u> T <u>se prolonge en un opérateur continu sur</u>

$H = L^2(\mathbb{R}^n;dx)$ est que T soit d'ordre 0, que $T(1) \in BMO(\mathbb{R}^n)$ et que $T^*(1) \in BMO(\mathbb{R}^n)$.

Rappelons que T est d'ordre 0 s'il existe une constante $C \geq 0$ tel que l'on ait, pour toute isométrie $g \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))$ de la forme $g.f(x)=\delta^{-n/2} f(\frac{x-x_0}{\delta})$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$, $|\langle T(g.u), g.v\rangle_H| \leq C\|u\|_V\|v\|_V$ pour tout $u \in V$ et tout $v \in V$. La démonstration du théorème 1 consiste essentiellement à se ramener au cas où $T(1) = T^*(1) = 0$. Cette réduction se fait en introduisant l'opérateur auxiliaire de paramultiplication (au sens de J.M. Bony) entre une fonction de $L^2(\mathbb{R}^n)$ et la fonction $T(1) = \beta \in BMO$. La multiplication ordinaire ne fournit pas un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

2. LE PARAPRODUIT ET LES OPÉRATEURS BILINÉAIRES DE BASE.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ une fonction radiale, égale à 1 si $|\xi| \leq 1$ et égale à 0 si $|\xi| \geq 2$. On désigne par $\mathfrak{F} f(\xi) = \hat{f}(\xi)$ la valeur en ξ de la transformée de Fourier de f et l'on définit l'opérateur S_j par $\mathfrak{F}(S_j f)(\xi) = \varphi(\frac{\xi}{2^j})\hat{f}(\xi)$, $j \in \mathbb{Z}$. On pose $\Delta_j = S_{J+1} - S_j$ et $\psi(\xi) = \varphi(\frac{\xi}{2}) - \varphi(\xi)$. Alors $\mathfrak{F}(\Delta_j f)(\xi) = \psi(\frac{\xi}{2^j})\hat{f}(\xi)$ et, pour cette raison, les fréquences de $\Delta_j f$ appartiennent à la couronne $C_j =$

$$\{\xi \in \mathbb{R}^n \; ; \; 2^j \leq |\xi| \leq 4.2^j\}$$

On définit si $\beta \in BMO(\mathbb{R}^n)$ et $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\pi(f,\beta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} S_{j-2}(f)\, \Delta_j(\beta) \, . \tag{1}$$

On observe que les fréquences de $S_{j-2}(f)$ appartiennent à la boule $\{|\xi| \leq \frac{1}{2}2^j\} = B_j$. Les fréquences du produit $S_{j-2}(f)\,\Delta_j(\beta)$ appartiennent donc à $B_j + C_j = \tilde{C}_j = \{\frac{1}{2}2^j \leq |\xi| \leq \frac{9}{2}\, 2^j\}$ et ces nouvelles couronnes $\tilde{C}_j$, prises cinq à cinq sont deux à deux disjointes. Finalement $\|\pi(f,\beta)\|_2 \leq 5\, (\sum_{-\infty}^{+\infty}\|S_{j-2}(f)\Delta_j(\beta)\|_2^2)^{1/2}$.

Cette dernière expression se majore en introduisant le groupe discret $\Gamma = \{2^{-j}; j \in \mathbb{Z}\}$ puis l'espace produit $\mathbb{R}^n \times \Gamma$. Une suite $(\mu_j)_{j\in\mathbb{Z}^n}$ de mesures de Radon positives sur $\mathbb{R}^n$ définit alors canoniquement une mesure sur $\mathbb{R}^n \times \Gamma$ et l'on dit que μ est une mesure de Carleson si, pour toute boule $Q \subset \mathbb{R}^n$ de rayon 2^{-m}, on a

$\sum_{j\geq m} \mu_j(Q) \leq C|Q|$ où C est une constante. On a alors

$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} |S_j(f)|^2\, d\mu_j \leq C'\|f\|_2^2$ pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et le théorème célèbre de Fefferman et Stein reliant BMO et les mesures de Carleson s'énonce ainsi : si $\beta \in BMO$, $(|\Delta_j(\beta)|^2 dx)_{j\in\mathbb{Z}}$ est une mesure de Carleson ([2]).

On a donc $\sum_{-\infty}^{+\infty} \|S_{j-2}(f)\,\Delta_j(\beta)\|_2^2 \leq C\,\|f\|_2^2\,\|\beta\|_{BMO}^2$.

Le noyau-distribution $R_\beta(x,y)$ de l'opérateur R_β défini par $R_\beta(f) = \pi(f,\beta)$ vérifie les conditions (9), (10) et (11) de la définition 2. On a même mieux car il vient

$$|\partial_x^p\,\partial_y^q\,R_\beta(x,y)| \leq C(p,q)\,\|\beta\|_{BMO}\,|x-y|^{-n-|p|-|q|}$$

pour tout $p \in \mathbb{N}^n$ et tout $q \in \mathbb{N}^n$.

On a $R_\beta \in E_1$, $R_\beta(1) = \beta$ et $R_\beta^*(1) = 0$.

On construit de même, si $\gamma \in BMO$, $R_\gamma \in E_1$. Finalement si $T \in F_\varepsilon$, $T(1) = \beta$ et $T^*(1) = \gamma$, on forme la différence $L = T - R_\beta - (R_\gamma)^*$. Alors $L \in F_\varepsilon$, $L(1) = 0$ et $L^*(1) = 0$.

Il reste à étudier ce dernier cas. Ce sera l'objet des paragraphes suivants.

3. UNE ALGÈBRE D'OPÉRATEURS. ÉNONCÉS DES RÉSULTATS.

Définition 3. Nous dirons qu'un opérateur linéaire continu $T : V \longrightarrow V'$ appartient à A_ε si $T \in F_\varepsilon$ (au sens de la définition 2), si $T(1) = 0$, si $T^*(1) = 0$ et si T est d'ordre 0 .

Lemarié a prouvé que $\bigcup_{0<\varepsilon\leq 1} A_\varepsilon$ est une algèbre auto-adjointe d'opérateurs. On a un résultat un peu plus précis.

Théorème 2. Si T_1 et T_2 appartiennent à A_ε , alors $T_2 \circ T_1 \in A_\eta$ pour tout $\eta \in]0,\varepsilon[$.

En d'autres termes, la réunion $\tilde{A}_\varepsilon$ des A_η pour $\eta > \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, est une algèbre auto-adjointe d'opérateurs. Nous montrerons ensuite que les opérateurs $T \in \tilde{A}_\varepsilon$ sont bornés sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Les opérateurs $T \in A_\varepsilon$ peuvent alors être caractérisés comme les opérateurs $T \in E_\varepsilon$ qui ont la propriété supplémentaire que $T : H^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^n)$ est continu et qu'il en est de même pour $T : BMO(\mathbb{R}^n) \longrightarrow BMO(\mathbb{R}^n)$. Cette remarque ne permet pas de démontrer que $\tilde{A}_\varepsilon$ est une algèbre puisque $\tilde{E}_\varepsilon$ (défini de façon similaire) n'est pas une algèbre.

Revenons au théorème 2.

Nous allons démontrer que $\tilde{A}(\varepsilon)$ est une algèbre en vérifiant que les opérateurs

$T \in \tilde{A}(\varepsilon)$ sont définis par la condition de préserver certains ensembles de fonctions (les molécules). Ensuite la continuité sur $L^2 = L^2(\mathbb{R}^n)$ des opérateurs $T \in \tilde{A}(\varepsilon)$ sera une simple conséquence du lemme de Cotlar et Stein.

Soit $\alpha \in]0,1[$ un exposant. Nous poserons $\omega(x) = c_\alpha(1+|x|)^{-n-\alpha}$ de sorte que $\int_{\mathbb{R}^n} \omega(x)\,dx = 1$ et, pour tout $d > 0$, $\omega_d(x) = d^{-n}\omega(\frac{x}{d})$.

Définition 4. <u>Soient</u> $d > 0$ <u>et</u> $x_o \in \mathbb{R}^n$. <u>Nous écrirons</u> $f \in B(\alpha,d,x_o)$ <u>et dirons que</u> f <u>est une</u> α-<u>molécule</u>, <u>de largeur</u> d, <u>centrée en</u> x_o <u>si l'on a</u>

(1) $$|f(x)| \le \omega_d(x-x_o)$$

(2) $$|f(x')-f(x)| \le \frac{|x-x'|^\alpha}{d^\alpha}\{\omega_d(x-x_o) + \omega_d(x'-x_o)\} \text{ et}$$

(3) $$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = 0 .$$

Nous pouvons faire quelques observations simples sur les molécules. Tout d'abord la définition est faite pour être invariante par translation. On aurait pu se contenter de décrire les molécules centrées en 0. Ensuite si $f \in B(\alpha,d,0)$, alors $f(x) = d^{-n}g(d^{-1}x)$ où $g \in B(\alpha,1,0)$ et ce changement d'échelle préserve la norme L^1 de la molécule.

Une autre remarque est que (1) contient deux informations.
Si $|x-x_o| \le d$, $|f(x)| \le C(\alpha,n)\, d^{-n}$ et si $|x-x_o| = R \ge d$, $|f(x)| \le C(\alpha,n)\, d^\alpha R^{-n-\alpha}$.
De même (2) contient deux informations. Si $|x-x'| \ge d$, (2) résulte simplement de (1) et n'a donc aucun intérêt. Si $|x-x'| \le d$, on pose $|x-x_o| = R$. On a encore deux cas possibles.
Si $R \ge 2d$, on a $|f(x')-f(x)| \le C(\alpha,n)\frac{|x-x'|^\alpha}{R^{n+\alpha}}$ tandis que, si $R \le 2d$, il vient

$$|f(x')-f(x)| \le C(\alpha,n)\frac{|x-x'|^\alpha}{d^{n+\alpha}} .$$

Avec ces notations, on a le théorème suivant

Théorème 3. <u>Soit</u> $T : V \longrightarrow V'$ <u>un opérateur linéaire continu appartenant à</u> A_ε. <u>Alors pour tout couple</u> (α,β) <u>de deux exposants tels que</u> $\varepsilon > \alpha > \beta > 0$, <u>il existe une constante</u> $\lambda = \lambda(\alpha,\beta) > 0$ <u>de sorte que</u>, <u>pour toute</u> α-<u>molécule</u> $f \in B(\alpha,d,x_o)$, $\lambda T(f)$ <u>soit une</u> β-<u>molécule de même largeur</u> d <u>et centrée en</u> x_o.
<u>Tout opérateur</u> $T \in A_\varepsilon$ <u>est continu sur</u> $L^2(\mathbb{R}^n)$.
<u>Enfin réciproquement soit</u> $T : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ <u>un opérateur continu sur</u> $L^2(\mathbb{R}^n)$ <u>et soient</u> $\alpha > \beta > 0$ <u>deux exposants</u>. <u>S'il existe une constante</u> $\lambda > 0$ <u>telle que</u>, <u>pour toute</u> α-<u>molécule</u> $f \in B(\alpha,d,x_o)$, $\lambda\, T(f) \in B(\beta,d,x_o)$, <u>alors</u> $T \in A_\varepsilon$ <u>pour tout</u> $\varepsilon < \beta$.

Naturellement le théorème 2 résulte du théorème 3. Il suffit de prendre $\eta < \beta < \alpha < \varepsilon$.

4. L'ACTION DES OPÉRATEURS $T \in A_\varepsilon$ SUR LES FONCTIONS LIPSCHITZIENNES.

Pour débuter nous utiliserons un lemme décrivant l'action de $T \in A_\varepsilon$ sur des bosses φ_Q ; on désigne systématiquement par Q une boule (arbitraire) de $\mathbb{R}^n$, de centre x_o et de rayon d et par φ une fonction arbitraire de V , portée par la boule unité $|x| \leq 1$ et vérifiant $\|\varphi\|_V \leq 1$. Enfin $\varphi_Q(x) = \varphi(\frac{x-x_o}{d})$ de sorte que le support de φ_Q est contenu dans Q .

Lemme 2. Si $T \in A_\varepsilon$, il existe une constante C telle que pour toute fonction φ_Q du type ci-dessus, on ait $\|T(\varphi_Q)\|_\infty \leq C$.

On désignera par $\tilde{Q}$ la boule double de Q (même centre x_o et rayon 2d) et l'on écrira $1 = \chi_o + \chi_1$ où $\chi_o = 1$ sur $\tilde{Q}$, où χ_o est de la forme $\varphi_o(\frac{x-x_o}{d})$ pour une certaine fonction φ_o (fixée) dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et où $\chi_1 = 0$ sur Q .

Par construction, on a $\varphi_Q(y) = \varphi_Q(y)\ \chi_o(y)$ et donc, en appelant $K(x,y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ le noyau-distribution de T , il vient

$$(T\varphi_Q)(x) = \int K(x,y)\varphi_Q(y)\,dy = \int K(x,y)[\varphi_Q(y)-\varphi_Q(x)]\chi_o(y)\,dy +$$

$$\varphi_Q(x)\int K(x,y)\ \chi_o(y)\ dy = p(x) + q(x) \ .$$

Pour le moment, toutes ces intégrales sont des distributions en x (et ne prennent un sens que si elles sont intégrées contre une fonction de test en x).

Pour calculer la première intégrale p(x) nous utiliserons le lemme suivant

Lemme 3. Si $T \in A_\varepsilon$ et si $K(x,y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ est le noyau-distribution de T , alors $\int K(x,y)(\varphi(y)-\varphi(x))\chi_o(y)\,dy = \lim_{\eta \downarrow 0} \int_{|x-y| \geq \eta} K(x,y)(\varphi(y)-\varphi(x))\chi_o(y)\ dy$.

Ce lemme montrera, en particulier, que cette limite est une fonction continue et non une distribution sauvage.

Pour le voir, on appelle θ_1 et θ_2 deux fonctions radiales de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telles que $\theta_3 = \theta_1 * \theta_2 = 1$ sur la boule unité $|x| \leq 1$.

Nous allons démontrer le lemme en prouvant que

$$I_\eta(x) = \int K(x,y)(\varphi(y)-\varphi(x))\chi_o(y)\theta_3(\frac{x-y}{\eta})\ dy$$

tend vers 0 , au sens des distributions. Soit donc $g(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et calculons $I(\eta) = \int I_\eta(x)g(x)dx$. Pour faire ce calcul, on écrit
$\theta_3(\frac{x-y}{\eta}) = \eta^{-n} \int \theta_1(\frac{x-u}{\eta})\ \theta_2(\frac{u-y}{\eta})\ du$.

Dans l'intégrale $I(\eta)$, x et y appartiennent à un compact fixé par les supports de $\chi_o(y)$ et de $g(x)$. Puisque $0 < \eta \leq 1$, l'intégrale fournissant $\theta_3(\frac{x-y}{\eta})$ peut être restreinte à $|u| \leq R$.

Finalement on pose $J(u,\eta) =$

$$\eta^{-n} \iint K(x,y)(\varphi(y)-\varphi(x))\chi_o(y)g(x)\ \theta_1(\frac{x-u}{\eta})\ \theta_2(\frac{u-y}{\eta})\ dx\ dy$$

et l'on cherche à majorer $|J(u,\eta)|$.

On écrit $\varphi(y)-\varphi(x) = \varphi(y) - \varphi(u) + \varphi(u) - \varphi(x)$ ce qui amène à écrire $J(u,\eta) = J_1(u,\eta) + J_2(u,\eta)$.

On a $(\varphi(y)-\varphi(u))\ \theta_2(\frac{u-y}{\eta}) = \sum_1^n \varphi_j(u,y)(u_j-y_j)\ \theta_2(\frac{u-y}{\eta}) = \sum_1^n \varphi_j(u,y)\ \eta\ \theta_{2,j}(\frac{u-y}{\eta})$.

Puisque la forme J associée à l'opérateur T est d'ordre 0 , il vient $|J_1(u,\eta)| \leq C\eta$ (la fonction "parasite" $\varphi_j(u,y)$ appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ et n'altère pas les estimations).
On majore de même $|J_2(u,\eta)|$ en $C\eta$ et donc finalement $|I(\eta)|$ en $C'\eta$.

Le passage de la troncation douce de l'intégrale, définie par $\theta_3(\frac{x-y}{\eta})$ à la troncation "abrupte" définie par $|x-y| \leq \eta$ est facile. L'erreur commise est encore $O(\eta)$.

Revenons au lemme 2 et aux fonctions $p(x)$ et $q(x)$. On a, grâce au lemme 3 ,

$$|p(x)| \leq \int |K(x,y)|\,|\varphi_Q(y) - \varphi_Q(x)|\,|\chi_o(y)|\ dy \leq C\ .$$

Pour majorer $|q(x)|$, nous allons utiliser $T(1) = 0$.
Désignons par $U \supset Q$ la boule ouverte $|x-x_o| < \frac{3d}{2}$ et par $\tilde{q}(x)$ la restriction à U de la distribution $\int K(x,y)\chi_o(y)dy$. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ une fonction(arbitraire) portée par Q et d'intégrale nulle. On a alors $\int \psi(x)\ \tilde{q}(x)\ dx + \iint\{K(x,y)\psi(x)dx\}\chi_1(y)\ dy = 0 = I + J$. Or grâce à (10) de la définition 2 , $|J| \leq C\|\psi\|_1$. Il vient $|\int\psi(x)\tilde{q}(x)dx| \leq C\|\psi\|_1$ chaque fois que $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est d'intégrale nulle.

On a donc $\tilde{q}(x) = \omega + \gamma(x)$ où $\|\gamma(x)\|_\infty \leq C$ et où ω est une constante qu'on ne peut encore majorer.

Pour évaluer ω , on désigne par φ_Q une "bosse" assise sur Q et d'intégrale non nulle. Puisque T est d'ordre 0 on a $\left|\int \varphi_Q(x)\, \tilde{q}(x)\, dx\right| \leq C\, d^n$ et il en résulte $|\omega| \leq C'$.

Le lemme 2 est démontré.

5. ACTION DE L'OPÉRATEUR T SUR LES FONCTIONS LIPSCHITZIENNES (suite).

On continue à supposer que $T \in A_\varepsilon$ et que $\varepsilon > \alpha > \beta > 0$. Il convient de définir l'action de T sur une molécule puisque, dans un premier temps, T n'est définie que sur les fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Nous allons généraliser légèrement et démontrer le résultat suivant.

Proposition 2. Désignons par Λ_α $(0 < \alpha < 1)$ l'espace de Banach des classes (modulo les constantes) de fonction continues vérifiant $|f(y)-f(x)| \leq C|y-x|^\alpha$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$. Alors tout opérateur $T \in A_\varepsilon$ se prolonge en un opérateur linéaire continu sur Λ_α pour $0 < \alpha < \varepsilon$.

Nous devons d'abord définir Tf(x) puis vérifier que cette fonction g(x) appartient à Λ_α .

Pour cela, écrivons $1 = \xi(y) + \eta(y)$ où (x étant fixé) $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est égal à 1 au voisinage de x .

On définit $Tf(x) = \int K(x,y)[f(y)-f(x)]\xi(y)\,dy + \int K(x,y)f(y)\eta(y)\,dy + f(x)\int K(x,y)\,\xi(y)\,dy$ et l'on vérifie immédiatement que cette définition ne dépend pas du choix de $\xi(y)$. En vertu du lemme 3, nous convenons de donner à la première intégrale un sens naif. La seconde intégrale est, comme plus haut, un élément de $L^\infty(U)$ modulo les constantes sur un certain voisinage U de x et la troisième a été l'objet du lemme 2 .

Pour montrer que g(x) est, en fait, dans Λ_α , on appelle x_1 et x_2 deux éléments de $\mathbb{R}^n$ et l'on pose $d = |x_2-x_1|$.

Les fonctions ξ et η sont alors choisies de la façon suivante. On appelle Q la boule $|x-x_1| \leq 10\, d$ et ξ sera une fonction φ_Q où $\varphi = 1$ sur $|x| \leq 5$, $\varphi = 0$ si $|x| \geq 10$.

On revient à $g(x) = Tf(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x) = g_1(x) + h_1(x)$.

On a $|g_1(x)| \leq C \int_{|y-x|\leq 20d} |y-x|^{-n+\alpha}\, dy \leq C' d^\alpha$ si $x = x_1$ ou $x = x_2$.

Ensuite $h_1(x_2) - h_1(x_1) =$

$$\int \{K(x_2,y)-K(x_1,y)\}\,(f(y)-f(x_1))\,\eta(y)\,dy$$

$$+\,(f(x_2) - f(x_1))\int K(x_2,y)\xi(y)\,dy\ .$$

Cette identité découle simplement de $T(1) = 0$.

On a alors, pour majorer la première intégrale,

$$C|x_2-x_1|^{\varepsilon} \int_{|y-x_1| \geq d} |y-x_1|^{-n-\varepsilon} |y-x_1|^{\alpha} \, dy = C' \, d^{\alpha}$$

tandis que la seconde se majore grâce au lemme 2 en $C'' \, d^{\alpha}$.

6. <u>ACTION DE</u> $T \in A_{\varepsilon}$ <u>SUR LES MOLÉCULES</u> $m(x) \in B(\alpha,d,x_0)$ <u>LORSQUE</u> $0 < \alpha < \varepsilon$.

Nous savons déjà que $f(x) = (Tm)(x) \in \Lambda_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ et notre programme de travail sera de

- majorer $|f(x)|$ lorsque $|x-x_0| \leq d$
- majorer $|f(x)|$ lorsque $|x-x_0| \geq d$
- majorer $|f(x') - f(x)$ lorsque $|x-x_0| \leq 10\, d$ et $|x-x'| \leq d$
- majorer $|f(x') - f(x)|$ lorsque $|x-x_0| \geq 10\, d$ et $|x-x'| \leq d$
- calculer $\int f(x)dx$.

Nous dirons pour alléger l'écriture qu'une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est adaptée à une boule $|x-a| \leq r$ si φ est de la forme $\varphi_0(\frac{x-a}{r})$ où φ_0 est une fonction fixée une fois pour toutes dans la démonstration, $\varphi_0(x) = 1$ si $|x| \leq 1/2$ et $\varphi_0(x) = 0$ si $|x| \geq 1$. On pourra supposer φ_0 radiale.

- <u>Majoration de</u> $|f(x)|$ <u>si</u> $|x-x_0| \leq D$.

On écrit $1 = \xi(y) + \eta(y)$ où $\xi(y)$ est adaptée à $|y-x_0| \leq 10\, d$ et l'on a $f(x) = \int K(x,y)[m(y)-m(x)]\, \xi(y)\, dy + \int K(x,y)m(y)\eta(y)dy + m(x) \int K(x,y)\xi(y)\, dy =$ $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$. On a

$$|f_1(x)| \leq C \int_{|x-y| \leq 11d} |x-y|^{-n} \frac{|x-y|^{\alpha}}{d^{n+\alpha}} \, dy \leq C\, d^{-n} ,$$

$$|f_2(x)| \leq C \int_{|x_0-y| \geq 5d} d^{\alpha} |x_0-y|^{-2n-\alpha} \, dy \leq C' \, d^{-n}$$

et enfin, grâce au lemme 2, $|f_3(x)| \leq C|m(x)| \leq C''\, d^{-n}$.

- <u>Majoration de</u> $|f(x)|$ <u>si</u> $|x-x_0| \geq d$.

On pose alors $|x-x_0| = R$ et on utilise une partition $1 = I(y) + J(y) + K(y)$ où $I(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est adaptée à $|x-y| \leq R/2$ et où $J(y)$ est adaptée à $|x_0-y| \leq R/2$. De sorte que $K(y)$ est nulle si $|x-y| \leq R/4$ ou $|x_0-y| \leq R/4$.

On a donc $m(y) = m(y)\, I(y) + m(y)\, J(y) + m(y)\, K(y) = m_1(y) + m_2(y) + m_3(y)$. On a $|m_1(y)| \le C \dfrac{d^\alpha}{R^{n+\alpha}}$ et $|m_1(y')-m_1(y)| \le C \dfrac{|y-y'|^\alpha}{R^{n+\alpha}}$ si $|y'-y| \le d$. La fonction $m_3(y)$ n'a pas un support compact mais vérifie $|m_3(y)| \le C \dfrac{d^\alpha}{|y-x_o|^{n+\alpha}}$ et est portée par $|y-x_o| \ge R/4$. On a donc $\left|\int m_3(y)\,dy\right| \le C' \dfrac{d^\alpha}{R^\alpha}$. Puisqu'une inégalité analogue est vraie pour m_1, il reste $\left|\int m_2(y)\,dy\right| \le C'' \dfrac{d^\alpha}{R^\alpha}$ car l'intégrale d'une molécule est nulle.

On emploie une seconde décomposition de l'identité $1 = u(y) + v(y)$ où $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est adaptée à la boule $|y-x| \le d$.

On a $T\, m_2(x) = \int K(x,y)\, [m_1(y)-m_2(x)]\, u(y)\, dy + m_1(x) \int K(x,y)u(y)\,dy +$

$\int K(x,y)m_2(y)v(y)\,dy = \gamma_1(x) + \gamma_2(x) + \gamma_3(x)$.

On a donc $|\gamma_1(x)| \le C \int_{|x-y| \le d} |x-y|^{-n} \dfrac{|x-y|^\alpha}{R^{n+\alpha}}\, dy \le C' \dfrac{d^\alpha}{R^{n+\alpha}}$. En ce qui concerne $\gamma_2(x)$, on applique le lemme 2 et l'on a $|\gamma_2(x)| \le C\, |m_1(x)|$.

Finalement on majore brutalement

$$|\gamma_3(x)| \le C \frac{d^\alpha}{R^{n+\alpha}} \int_{\frac{d}{2} \le |x-y| \le R} |x-y|^{-n}dy = C \log \frac{2R}{d} \frac{d^\alpha}{R^{n+\alpha}} \le C(\alpha,\beta) \frac{d^\beta}{R^{n+\beta}}$$

pour tout $\beta < \alpha$.

Venons en à $Tm_2(x) = \int K(x,y)m_2(y)\,dy =$

$$\int \{K(x,y)-K(x,x_o)\}\, m_2(y)\,dy + K(x,x_o) \int m_2(y)\, dy = \delta_1(x) + \delta_2(x) .$$

On a, sur le support de $m_2(y)$, $|x_o-y| \le R/2$ et $|x-y| \ge R/4$. Il vient donc $|K(x,y)-K(x,x_o)| \le C \dfrac{|y-x_o|^\varepsilon}{R^{n+\varepsilon}}$. Or $|m_2(y)| \le \dfrac{d^\alpha}{|y-x_o|^{n+\alpha}}$ et l'on intègre sur $|y-x_o| \le R$.

Il vient, puisque $0 < \alpha < \varepsilon$, $|\delta_1(x)| \le C \dfrac{d^\alpha}{R^{n+\alpha}}$ .La majoration de $|\delta_2(x)|$ vient de $\left|\int m_2(y)\,dy\right| \le C \dfrac{d^\alpha}{R^\alpha}$. Il reste $|Tm_3(x)| \le C \int_{|y-x| \ge R/2} |x-y|^{-n} \dfrac{d^\alpha}{|x-y|^{n+\alpha}}\, dy \le C \dfrac{d^\alpha}{R^{n+\alpha}}$

en observant que, sur le support de m_3 , $|x-y|$ et $|x_o-y|$ sont du même ordre de grandeur.

- Régularité de $f(x)$ loin de x_o .

Puisque l'on souhaite démontrer que $f(x)$ est une molécule, on peut se limiter au calcul de $|f(x')-f(x)|$ lorsque $|x'-x| = \delta \leq d$ et $|x-x_o| = R \geq 10\, d$.
On écrit $1 = \xi(y) + \eta(y)$ où $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est adaptée à la boule $|y-x| \leq 10\,\delta$.
On a $$(Tm)(x) = \int K(x,y)m(y)\,dy =$$

$$\int K(x,y)[m(y)-m(x)]\,\xi(y)\,dy + \int K(x,y)m(y)\eta(y)\,dy + m(x)\int K(x,y)\xi(y)\,dy = p(x)+q(x)$$

en appelant $q(x)$ la somme des deux dernières intégrales. On a $|p(x)| \leq$

$C \int_{|x-y|\leq 10\delta} |x-y|^{-n} \dfrac{|x-y|^{\alpha}}{R^{n+\alpha}}\,dy \leq C' \dfrac{\delta^{\alpha}}{R^{n+\alpha}}$ et l'on majore de même $|p(x')|$.

On a ensuite, puisque $T(1) = 0$, $q(x) - q(x') =$

$$\int\{K(x,y)-K(x',y)\}\,[m(y)-m(x)]\,\eta(y)\,dy + (m(x)-m(x'))\int K(x',y)\xi(y)\,dy \;.$$

La seconde intégrale se majore en $C \dfrac{\delta^{\alpha}}{R^{n+\alpha}}$ grâce au lemme 2 .

La première se majore en

$$C\,\delta^{\varepsilon} \int_{\delta\leq|y-x|} |y-x|^{-n-\varepsilon}\,|m(y)-m(x)|\,dy = C\delta^{\varepsilon}\int_{\delta\leq|y-x|\leq d} \ldots dy + C\delta^{\varepsilon}\int_{d\leq|y-x|} \ldots dy = J_1+J_2.$$

Pour majorer J_1 , on utilise $|m(y)-m(x)| \leq C \dfrac{|y-x|^{\alpha}}{R^{n+\alpha}}$ et $J_1 \leq C\,\delta^{\varepsilon}\delta^{\alpha-\varepsilon}R^{-n-\alpha} = C\,\dfrac{\delta^{\alpha}}{R^{n+\alpha}}$.
L'inégalité utilisée n'est pas valable si, par exemple, y est proche de x_o . On écrit donc $J_2 \leq J_3 + J_4$ où $J_3 = C\,\delta^{\varepsilon} \int_{d\leq|y-x|} \dfrac{|m(y)|}{|y-x|^{n+\varepsilon}}\,dy$ et

$$J_4 = C\,\delta^{\varepsilon}|m(x)|\int_{d\leq|y-x|} |y-x|^{-n-\varepsilon}dy \;.$$

Des calculs explicites très simples donnent finalement $J_3 \leq C \dfrac{\delta^{\alpha}}{R^{n+\alpha}}$ et $J_4 \leq C \dfrac{\delta^{\alpha}}{R^{n+\alpha}}$.

- Régularité près de x_o .

On suppose, cette fois, $|x-x'| \leq \delta$ et $|x-x_o| \leq 10\, d$ avec $\delta \leq d$. On reprend la la partition $1 = \xi(y) + \eta(y)$ où ξ est adaptée à la boule $|y-x| \leq 10\,\delta$.
On a donc $(Tm)(x) = \int K(x,y)(m(y)-m(x))\xi(y)\,dy + m(x)\int K(x,y)\xi(y)\,dy +$ $\int K(x,y)m(y)\eta(y)\,dy = p(x) + q(x)$ où $p(x)$ désigne la première intégrale.
Comme plus haut, $|p(x)| \leq C\,\delta^{\alpha}\,d^{-n-\alpha}$ et de même pour $|p(x')|$. On a ensuite

$q(x)-q(x') = \int (K(x,y)-K(x',y))\ (m(y)-m(x))\eta(y)\ dy + (m(x)-m(x'))\int K(x',y)\xi(y)dy$.

La première intégrale se majore en écrivant $|K(x,y)-K(x',y)| \le C \dfrac{\delta^{\varepsilon}}{|x-y|^{n+\varepsilon}}$

(puisque $|x-x'| \le \delta$ et $|y-x| \ge 5\ \delta$) et $|m(y)-m(x)| \le C \dfrac{|y-x|^{\alpha}}{d^{n+\alpha}}$. La seconde se traite comme plus haut.

. $\int Tm(x)dx = 0$ car $T^{*}(1) = 0$.

7. LA CONTINUITÉ DES OPÉRATEURS $T \in A_{\varepsilon}$ SUR $L^{2}(\mathbb{R}^{n})$.

Nous allons d'abord vérifier que certains opérateurs $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n})$ admettent une décomposition de Littlewood-Paley.

Lemme 4. Soit $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n})$ un opérateur linéaire continu. Soit $K(x,y)$ le noyau distribution de T et supposons qu'il existe un nombre réel $\theta > 0$ tel que la restriction de $K(x,y)$ à l'ouvert $|x-y| > 1$ soit une fonction continue vérifiant $|K(x,y)| \le C|x-y|^{-\theta}$.
Alors, avec les notations du §2 ,

$$T = \sum_{-\infty}^{+\infty} T\,\Delta_{j}\ . \tag{1}$$

Cela revient à vérifier que si $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n})$ et $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n})$, on a

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} < T\,\Delta_{j}\, u,v > \; = \; < Tu,v > \ .$$

En fait, le problème vient de la partie de la somme où $j \longrightarrow -\infty$.
On doit montrer que $\lim_{j\to-\infty} < T\,S_{j}\,u,v > = 0$. Or $< T\,S_{j}\,u,v > = < S_{j}\,u,\,T^{*}v >$ et $T^{*}v$ coincide, hors d'un certain ensemble compact, avec une fonction continue qui est $O(|x|^{-\theta})$ à l'infini. Par ailleurs $(S_{j}u)(x) = 2^{jn}\int\varphi(2^{j}(x-y))u(y)dy$ et il suffit donc de calculer la limite pour chaque fonction individuelle $2^{jn}\varphi(2^{j}(x-x_{o}))$.
L'intégrale contre cette fonction tend vers la moyenne (à l'infini) de $T^{*}v$, c'est à dire vers 0 .
On peut observer qu'il existe des opérateurs linéaires continus $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n})$ pour lesquels la conclusion du lemme 4 est fausse. C'est la cas, par exemple, pour l'opérateur défini par le noyau-distribution $K(x,y) = \varphi(x)$ où $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n})$ est fixée. On a alors $T\,\Delta_{j} = 0$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$.
Rappelons l'énoncé du lemme de Cotlar et Stein.

Lemme 5. Soient H un espace de Hilbert, $T_j : H \longrightarrow H$ des opérateurs linéaires continus indexés par $j \in \mathbb{Z}$, T_j^* leurs adjoints et $\omega : \mathbb{Z} \longrightarrow [0,+\infty[$ une fonction telle que pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ on ait $\|T_j^* T_k\| \le \omega(j-k)$ et $\|T_j T_k^*\| \le \omega(j-k)$. Supposons que $\sum_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\omega(j)} = \sigma < +\infty$. Alors pour tout $x \in H$, la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} T_j(x)$ converge dans H et l'opérateur $T = \sum_{-\infty}^{+\infty} T_j$ ainsi défini vérifie $\|T\| \le \sigma$.

Nous allons vérifier que pour tout opérateur $T \in A_\varepsilon$, le lemme de Cotlar et Stein s'applique à la décomposition $T = \sum_{-\infty}^{+\infty} T\Delta_j$. Pour cela, nous aurons besoin d'une version concrète du lemme 5.

Lemme 6. Soient $T_j(x,y)$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, indexées par $j \in \mathbb{Z}$, et telles qu'il existe un exposant $\beta > 0$ de sorte que, pour une certaine constante C on ait

(2) $$|T_j(x,y)| \le C\,\omega_j(x-y) \text{ où } \omega_j(u) = 2^{jn}\omega(2^j u) \text{ et } \omega(u) = (1+|u|)^{-n-\beta}$$

(3) $$|T_j(x',y)-T_j(x,y)| \le C|x'-x|^\beta\, 2^{j\beta}\{\omega_j(x-y) + \omega_j(x'-y)\}$$

(4) $$|T_j(x,y')-T_j(x,y)| \le C|y'-y|^\beta\, 2^{j\beta}\{\omega_j(x-y) + \omega_j(x-y')\}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, tout $x' \in \mathbb{R}^n$, tout $y \in \mathbb{R}^n$ et tout $y' \in \mathbb{R}^n$

(5) $$\int_{\mathbb{R}^n} T_j(x,y)\,dy = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n \text{ et}$$

(6) $$\int_{\mathbb{R}^n} T_j(x,y)\,dx = 0 \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}^n .$$

Alors, en appelant T_j l'opérateur défini par le noyau $T_j(x,y)$, le lemme de Cotlar s'applique à $\sum_{-\infty}^{+\infty} T_j$.

Ceci s'obtient exactement comme dans l'application historique du lemme de Cotlar à la continuité de la transformation de Hilbert.

On appelle $A_{j,k}(x,y) = \int \overline{T_j}(u,x)\, T_k(u,y)\,du$ le noyau de $T_j^* T_k$ et l'on vérifie que $\int |A_{j,k}(x,y)|\,dy \le C2^{-\beta|j-k|}$ et que $\int |A_{j,k}(x,y)|\,dx \le C2^{-\beta|j-k|}$. Cela permet de conclure que la norme de $T_j^* T_k : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p \le +\infty)$ ne dépasse pas $C2^{-\beta|j-k|}$ et l'on raisonne de même pour $T_j T_k^*$.

Revenons aux opérateurs $T\Delta_j$ et appelons $T_j(x,y)$ le noyau-distribution de $T\Delta_j$. Alors

$$T_j(x,y) = \int K(x,u)\lambda_j(u-y)\,du$$

en appelant $\lambda_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ la fonction dont la transformée de Fourier est $\psi(\frac{\xi}{2^j})$. La fonction ψ est définie au paragraphe 2 .

La fonction $u \longrightarrow \lambda_j(u-y)$ est (à une constante près, indépendante de j et y, de normalisation) une molécule, centrée en y , de largeur 2^{-j} .

Il existe donc une constante $\gamma > 0$ telle que $x \longrightarrow \gamma\, T_j(x,y)$ soit une molécule centrée en y et de largeur 2^{-j} .

Cela rend compte des propriétés (2) et (3) dans le lemme 6 . On a, en appelant ∇_y le gradient près par rapport à la variable y ,

$$\nabla_y T_j(x,y) = -\int K(x,u)\ \nabla\lambda_j(u-y)\,du$$

et l'on vérifie sans peine que $2^{-j}\ \nabla\lambda_j(u-y)$ est (à une constante de normalisation près) une molécule centrée en y et de largeur 2^{-j} . Cela donne (4).

La propriété (5) est une partie de la définition d'une molécule. En ce qui concerne (6), une preuve purement formelle consisterait à écrire

$$\int_{\mathbb{R}^n} T_j(x,y)\,dy = T_j(1) = T\,\Delta_j(1) = T(0) = 0\ . \tag{7}$$

Pour que ce formalisme devienne une démonstration, nous utiliserons le lemme suivant

Lemme 7. Soit $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ un opérateur linéaire continu dont le noyau-distribution, restreint à l'ouvert Ω de la définition 2 , est une fonction $K(x,y)$ continue sur Ω et vérifiant $|K(x,y)| \le C|x-y|^{-n}$. Alors pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, d'intégrale nulle, on a $\int_{\mathbb{R}^n}\{\int_{\mathbb{R}^n} K(x,u)f(u-y)\,du\}\,dy = 0$ au sens des distributions.

C'est à dire que l'on a, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{|y|\le R}\{\iint K(x,u)\varphi(x)f(u-y)\,du\,dx\}\,dy = 0$$

au sens usuel.

La preuve est immédiate et laissée au lecteur.

Naturellement le lemme 7 est faux en général ce qui montre que (7) n'a aucun sens. Un contre-exemple consiste à prendre tout simplement $n = 1$ et $K(x,y) = 1$ si $y \le x$, $K(x,y) = 0$ si $y > x$.

Alors $\int_{\mathbb{R}^n} K(x,u)f(u-y)\,du = \int_{-\infty}^{x} f(u-y)\,du = F(x-y)$ où $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est la primitive de f nulle à l'infini. La conclusion du lemme serait que l'intégrale de F est nulle ce qui est faux en général.

Pour revenir à T_j, on a donc, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int\{\int\varphi(x)\ T_j(x,y)dx\}\ dy = 0 \tag{8}$$

Grâce à (2), on peut appliquer le théorème de Fubini et il vient immédiatement $\int T_j(x,y)dy = 0$ presque-partout (et donc partout car il s'agit d'une fonction continue de x, grâce à (3)).

8. LA RÉCIPROQUE DU THÉORÈME 3.

L'hypothèse se compose de deux parties : la continuité de T sur L^2 et l'action de T sur les molécules. La première assertion a seulement pour but de permettre d'écrire $T = \sum_{-\infty}^{+\infty} T\Delta_j$ et n'importe quelle autre propriété de T (par exemple les hypothèses du lemme 4) entraînant cette décomposition peut remplacer la continuité de T sur L^2. L'avantage du choix de notre hypothèse est qu'elle est stable par composition. Une fois T ainsi décomposé, on appelle $T_j(x,y)$ le noyau-distribution de $T\Delta_j$ et l'on sait que $x \longrightarrow T_j(x,y)$ est une molécule de largeur 2^{-j}, centrée en y.

On pose, sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $K(x,y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} T_j(x,y)$. La convergence est immédiate et les estimations sur la taille et la régularité du noyau le sont également.

On peut alors appliquer le lemme 7 et on a $\int T_j(x,y)dy = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $j \in \mathbb{Z}$. Finalement $\sum_{-\infty}^{+\infty} T_j(x,y)$ converge au sens des distributions de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ vers $K(x,y)$ et l'on a $T(1) = T^*(1) = 0$.

[1] G. David et J.L. Journé. Une caractérisation des opérateurs intégraux singuliers bornés sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. C.R. Acad. Sc. Paris t.296 (16 mai 1983) 761-764.

[2] C. Fefferman and E.M. Stein. H^p spaces of several variables. Acta Math. 129 (1972) 137-193.

[3] P.G. Lemarié (thèse de troisième cycle)

[4] Y. Meyer. Lemme de Cotlar, opérateurs définis par des intégrales singulières et applications aux équations aux dérivées partielles (Université Autonome de Madrid, à paraître).