A. S. WIGHTMAN

Une perspective sur la théorie quantique des champs

Astérisque, tome 131 (1985), p. 175-185
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__131__175_0>

UNE PERSPECTIVE SUR LA THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

A.S. WIGHTMAN

§1 - INTRODUCTION

Dans les années 1963-1975 les fondements mathématiques de la théorie quantique des champs ont été clarifiés par le développement de la théorie constructive des champs. On a construit des solutions de théories modèles en dimensions d'espace-temps deux et trois. Ces solutions se comportent à plusieurs égards selon les règles du "folklore" de la physique. L'existence de ces solutions anéanti une fois pour toutes la conjecture, suivant laquelle la conjonction des principes de la théorie de la relativité, de la mécanique quantique, et de la théorie des champs devait mener à une théorie triviale sans interaction. D'un autre côté, des efforts soutenus pendant plusieurs années, en vue d'appliquer les méthodes acquises à la construction de solutions de modèles plus réalistes en dimension quatre, n'ont pas eu de succès. Par conséquent, une partie importante de la recherche d'aujourdhui dans ce domaine peut s'interpréter comme un effort de compréhension des raisons pour lesquelles les théories quadri-dimensionnelles sont plus difficiles. L'exposé suivant est une revue, qui reflète cette préoccupation, aussi bien que les préjugés de l'auteur.

§2 - LA THÉORIE EUCLIDIENNE DES CHAMPS: GÉNÉRALITÉS SUR ϕ^4_ν

Dans toute la suite, j'utiliserai le formalisme de la théorie euclidienne des champs, en tenant compte du fait q'une telle théorie determine de façon unique une théorie dans l'espace temps Minkowskien invariante par rapport au groupe de Poincaré ($\equiv$ groupe de Lorentz inhomogène). Par raison de simplicité, je ne considerai q'un seul champ scalaire ϕ. Il est exprimé en termes de ses <u>fonctions de Schwinger</u>; ce sont des fonctionnelles multilinéaires, moments d'une mesure μ sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^\nu)$ (ou $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^\nu)$)

$$S_n(f_1,\ldots f_n) = \int \phi(f_1)\ldots\phi(f_n)d\mu(\phi)$$

où $f_1 \ldots f_n$ sont fonctions test sur $\mathbb{R}^\nu$, ν étant la dimension de l'espace temps.

Si la mesure μ est gaussienne, le champ ϕ est un <u>champ libre généralisé</u>. Les particules décrites par un tel champ n'inter-agissent pas. Cette distinction permet de donner une courte définition de deux programmes de la théorie des champs.

<u>La Théorie Constructive des Champs</u>:
Démontrer q'une théorie existe et qu'elle est non-gaussienne.

<u>La Théorie Destructive des Champs</u>:
Démontrer que toutes les théories d'une certaine classe sont gaussiennes. (La deuxieme terminologie, introduite par A. Sokal, [6] n'est pas standard, mais elle est néanmoins utile.)

L'exemple le plus étudié est la théorie ϕ_ν^4 , dont la mesure est formellement donnée par

$$d\mu(\phi) = \frac{1}{Z} \exp [- \int d^\nu x (\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m_0{}^2}{2} \phi^2 + \lambda\phi^4)]d\phi$$

$\phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^\nu)$; Z une normalisation. Donner un sens mathématique à une telle expression est un des problèmes fondamentaux de la théorie de la renormalisation. Pour les dimensions $\nu = 2$ et 3, cela a été fait dans la théorie constructive des champs vers 1975; la théorie ϕ_ν^4 , $\nu = 2, 3$ existe, et elle est non-gaussienne si $\lambda \neq 0$. Plus, recemment (1981-83) Aizenman [1] et Fröhlich [2] ont obtenu un résultat remarquable, bien que "destructif": ϕ_ν^4 est gaussienne, pour $\nu \geq 4$. Il est commode de décrire cette situation en termes d'un parametre réel, g , <u>la constante de couplage renormalisée</u>. Elle possède la propriété suivante:

$g = 0$ implique que μ est gaussienne

$g \neq 0$ implique que μ est non-gaussienne

g indique l'intensité de l'interaction entre les particules de la théorie. Les bornes 2 pour $\nu = 0$ et 6 pour $\nu = 1$ sont exactes (C. Newman [4]) celles pour $\nu = 2$ et 3 résultent d'estimations.

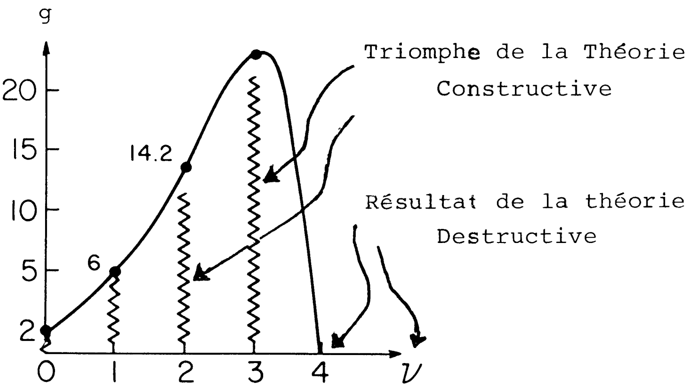

Figure 1. Valeurs de la constant de couplage renormalisée, g, comme fontions de la dimension ν de l'espace-temps

D'autres informations sur la théorie ϕ_ν^4 proviennent des séries perturbatives renormalisées. Ce sont des expressions définissant les S_n comme séries formelles en puissance de g . Remarquons en passant que les séries perturbatives permettent une interpolation dans la variable ν entre les valeurs entières $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$ et par consequent, que l'on est tenté de regarder les fonctions de Schwinger comme fonctions de trois parametres réels: une masse, m , que donne la masse des particules fondamentales de la théorie, la constante de couplage renormalisée, g , et la dimension de l'espace temps ν . (Une telle interpolation pour les S_n n'existe pas actuellement, en dehors de la théorie des perturbations.) Dans le langage de la mécanique statistique, on pourrait dire que les solutions dans les régions hachurées appartiennent à une seule phase, et que la courbe conjecturée —— est une frontière de phase; je l'appellerai la transition de phase ultraviolette.

Pour ϕ_4^4 , la comparaison de la solution perturbative avec les resultats de la théorie destructive donne lieu à une situation assez curieuse. La solution perturbative indique qu'une solution non-gaussienne doit exister, mais les resultats de Fröhlich-Aizenman affirment que, moyennant quelques hypothêses une telle solution n'existe pas.

Est-il possible que, audessus de la transition de phase ultraviolette il existe une autre phase, indiquée en pointillés dans la Figure 2? [7]

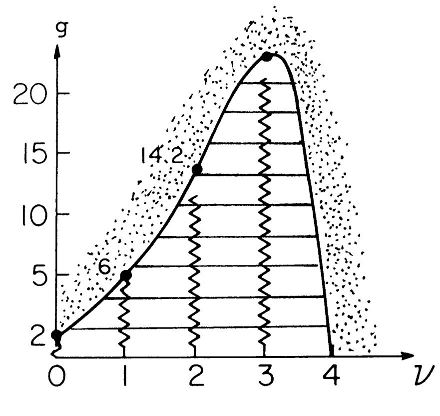

Figure 2. Deux phases conjecturées de ϕ_ν^4

Si oui, il serait naturel de l'imaginer comme étant apparentée aux théories ϕ_ν^4 pour $\nu \geq 5$, théories qui, dans la terminologie de la théorie quantique des champs, sont non-rénormalisables. Nous ne connaissons pas bien les théories non-rénormalisables. Les informations minuscules qui existent ne donnent pas une vision coherente de leur comportement. [5]

A propos de ϕ_4^4 , Gallavotti et Rivasseau ont fait une suggestion très conservatrice. [3] Ils ont réexaminé les démonstrations de Fröhlich et de Aizenman et ont proposé l'alternative suivante: au lieu d'utiliser une construction de la mesure μ , obtenue comme limite de mesures ferromagnetiques sur des réseaux, ils considérent une limite de mesures anti-ferromagnetiques. Gallavotti et Rivasseau ont trouvé des indications dans la théorie perturbative en faveur de ce renversement de signe. La question de la convergence de ϕ_4^4 anti-ferromagnetique est apparemment completement ouverte actuellement.

George Baker et moi avons été conduits à étudier la même question dans des cas beaucoup plus simple: ϕ_0^4 et ϕ_1^4 . Peut on obtenir des solutions de la théorie avec $g > 2$ ou $g < 0$, alors violant les bornes $0 \leq g \leq 2$? Les remarques suivantes constituent un rapport préliminaire de notre tentative.

§3 ϕ_0^4

Dans cette théorie, l'espace-temps a une seul point, et la mesure est définie sur l'axe des réels, $\mathbb{R}$. Les fonctions de Schwinger sont des moments de μ

$$S_n = \int \phi^n \, d\mu(\phi) \qquad d\mu \geq 0 \qquad \int d\mu(\phi) = 1$$

Par raison de simplicité, nous considérons le cas symétrique:

$$d\mu(\phi) = d\mu(-\phi) \qquad S_{2n+1} = 0$$

A $\nu = 0$, la formule donnant la constante de couplage est la suivante:

$$g = -\frac{[S_4 - 3(S_2)^2]}{[S_2]^2} = 3 - \frac{S_4}{[S_2]^2} \leq 2$$

L'inegalité résulte de l'inégalité de Schwarz, selon C. Newman:

$$[S_2]^2 = (\int \phi^2 \cdot 1 \, d\mu(\phi))^2 \leq [\int \phi^4 d\mu(\phi)] \, [\int d\mu(\phi)] = S_4$$

On a l'egalité si et seulement si

$$d\mu(\phi) = \frac{1}{2} [\delta(\phi - c) + \delta(\phi + c)]$$

pour un certain c. C'est la mesure du <u>modèle d'Ising</u>, ou ϕ est une variable à deux valeurs, $\phi = \pm c$.

Le modèle ϕ_0^4, lui même, est donné par

$$d\mu_{\alpha,\lambda}(\phi) = \frac{1}{Z} \exp[-\alpha\phi^2 - \lambda\phi^4] d\phi \qquad \lambda > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

avec

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\alpha\phi^2 - \lambda\phi^4] d\phi$$

Une telle distribution satisfait à l'inégalité de Lebowitz:

$$S_4 - 3(S_2)^2 \leq 0$$

et, par consequent,

$$g \geq 0$$

Les fonctions de Schwinger S_{2n} peuvent s'exprimer en termes des fonctions hypergéomètriques de $\alpha/\sqrt{\lambda}$. Par exemple,

$$S_2(\alpha,\lambda) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{\left[\frac{1}{4}\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\,\Gamma(\frac{1}{4})\,{}_1F_1(\frac{5}{4},\frac{3}{2};\frac{\alpha^2}{4\lambda}) - \Gamma(\frac{3}{4})\,{}_1F_1(\frac{3}{4},\frac{3}{2};\frac{\alpha^2}{4\lambda}) - \frac{\alpha^2}{4\lambda}\,\Gamma(\frac{3}{4})\,{}_1F_1(\frac{7}{4},\frac{5}{2};\frac{\alpha^2}{4\lambda})\right]}{\left[\Gamma(\frac{1}{4})\,{}_1F_1(\frac{1}{4},\frac{1}{2};\frac{\alpha^2}{4\lambda}) - \Gamma(\frac{3}{4})\,\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\,{}_1F_1(\frac{3}{4},\frac{3}{2};\frac{\alpha^2}{4\lambda})\right]} \tag{1}$$

Les équations du mouvement pour ϕ_0^4 proviennent de l'identité

$$\int \frac{\partial}{\partial\phi}\{\phi^n \exp[-\alpha\phi^2-\lambda\phi^4]\}\, d\phi = 0 \, .$$

Pour chaque entier $n \geq 0$, on a

$$n\, S_{n-1} - 2\alpha\, S_{n+1} - 4\lambda\, S_{n+3} = 0$$

et, en particulier,

$$1 - 2\alpha\, S_2 - 4\lambda\, S_4 = 0 \tag{2}$$

Par consequent, tous les S_{2n} sont determinés en fonction de S_2 et les équations du mouvement sont satisfaites pour chaque valeur réel de S_2 . Bien entendu, la valeur de S_2 est determinée de facon unique par:

$$S_2^{Nor} = \int \phi^2 d\mu_{\alpha,\lambda}(\phi)$$

(Nor pour normal), mais les équations du mouvement ont une famille de solutions étiquetées par le paramètre réel, S_2 . Nous demandons: à quelle sorte de théories appartiennent les autres, qui ne satisfont pas à (1) ? Une chose est claire; ces théories peuvent donner des valeurs de g avec $g > 2$ ou $g < 0$, parce que, à cause de (2),

$$g = 3 - \frac{1}{4\lambda}(S_2)^{-2} + \frac{\alpha}{2\lambda}(S_2)^{-1}$$

fonction dont la courbe est représentée en Figure 3.

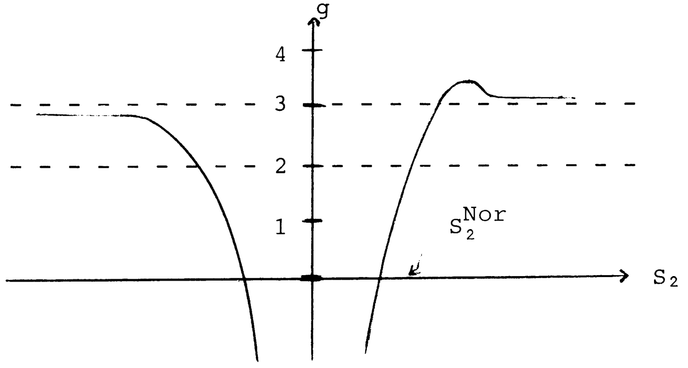

Figure 3. Dessin de $g = 3 - \frac{1}{4\lambda}(S_2)^{-2} + \frac{x}{2\lambda}(S_2)^{-1}$

De plus, on a un théorème d'unicité. Il existe une seule mesure de probabilité, à savoir, $d\mu_{\alpha,\lambda}$, dont les moments sont

$$S_{2n}^{Nor} = \int \phi^{2n}\, d\mu_{\alpha,\lambda}(\phi) \qquad n = 1,2,\ldots$$

$$S_{2n+1}^{Nor} = 0$$

Pour étudier les autres solutions, que nous appelons anormales, il est utile d'employer la fonction génératrice

$$F(h) = \int \exp[h\phi-\alpha\phi^2-\lambda\phi^4]\,d\phi \tag{3}$$

Exprimé en termes de F , les équations de mouvement sont

$$4\lambda \frac{d^3F}{dh^3} + 2\alpha\frac{dF}{dh} - hF = 0 \tag{4}$$

La solution générale de (4) est une combinaison lineaire de F^{Nor} et une solution anormale, F^{An}, obtenue en remplaçant le contour d'integration $\mathbb{R}$, par l'axe imaginaire:

$$F^{Nor}(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[h\phi-\alpha\phi^2-\lambda\phi^4]\,d\phi$$

$$F^{An}(h) = \int_{-i\infty}^{i\infty} \exp[h\phi-\alpha\phi^2-\lambda\phi^4]d\phi$$

La solution anormale donne comme fonctions de Schwinger

$$S_{2n}^{An} = i^{2n} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{2n} \exp[\alpha\phi^2-\lambda\phi^4]d\phi\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\alpha\phi^2-\lambda\phi^4)d\phi\Big]^{-1}$$

Les fonctions de Schwinger

$$S_{2n} = a\, S_{2n}^{Nor} + (1-a)S_{2n}^{A_n}$$

si $a \neq 1$, ne sont pas les moments d'une mesure de probabilité. En effet, elles ne sont pas non plus moments d'une distribution en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, parce que le comportement au point $\phi = 0$ est trop singulier. De plus, ces théories transgressent les conditions de positivité que characterisent les théories normales. Par exemple, $S_2^{A_n} < 0$.

§4 - ϕ_1^4

C'est la théorie d'un oscillateur anharmonique. On peut la développer d'une façon semblable à ϕ_0^4, en considérent l'ensemble fini de variables réeles $\{\phi(\delta n);\ n \in \Lambda \subset \mathbb{Z}\}$ sur le reseau $\delta\mathbb{Z}$, comme une approximation de la fonction $\phi(x)$ sur $\mathbb{R}$. Alors, l'expression

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^1x[\tfrac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m_0{}^2}{2}\phi^2 + \lambda\phi^4]$$

est remplacée par

$$\delta^2 \sum_{n\in\Lambda} [\frac{\delta^{-2}}{2}(\phi(\delta(n+1)) - \phi(\delta n))^2 + \frac{m_0{}^2}{2}\phi(\delta n)^2 + \lambda\phi(\delta n)^4]$$

La contribution

$$-\sum_{n\in\Lambda} \delta^{-2}\phi(\delta(n+1))\phi(\delta n)$$

est ferromagnetique: la probabilité est plus grande si $\phi(\delta(n+1))$ et $\phi(\delta n)$ ont le même signe. Il est bien établi que cette approximation par un système d'un nombre fini de degrés de liberté converge, dans la limite $\Lambda \to \mathbb{Z}$, $\delta \to 0$, vers la théorie de l'oscillateur anharmonique.

Ici le passage de la théorie normale à la théorie anormale s'effectué en remplaçant le contour $(-\infty, +\infty)$ par $(-i\infty, +i\infty)$, pour chaque variable $\phi(\delta n)$. L'application $\phi \to i\phi$ change le signe dans les termes quadratiques mais ne modifie pas les termes de degré quatre. En termes physiques, on a une interaction anti-ferromagnétique et une distribution pour un seul spin à double mimimum.

L'analogue de la fonction génératrice $F(h)$ donnée par (3) est ici la fonctionnelle

$$F(h) = \int \prod_{n\in\Lambda} d\phi(n\delta)\{\exp[-\frac{1}{2}\sum_{\ell,n\in\Lambda} K_{\ell n}\phi(\ell\delta)\phi(n\delta) - \sum_{n\in\Lambda}\phi(n\delta)^4 + \sum_{n\in\Lambda} h(n\delta)\phi(n\delta)]\} \tag{5}$$

où

$$\frac{1}{2}\sum_{\ell,n\in\Lambda} K_{\ell n}\,\phi(\ell\delta)\phi(n\delta) = [\frac{m_0^2}{2} + \frac{2\alpha}{\delta^2}]\sum_{n\in\Lambda}\phi(n\delta)^2 - \frac{2\alpha}{\delta^2}\sum_{n\in\Lambda}\phi(n\delta)\phi((n+1)\delta)$$

et les fonctions de Schwinger sont

$$S_k(\delta n\ ,\ldots\delta n_k) = \frac{\left.\dfrac{\delta^k}{\delta h(n_1\delta)\ldots\delta h(n_k\delta)}F(h)\right|_{h=0}}{Z(0)}$$

Les équations du mouvement proviennent de l'identité

$$\int \prod_{n\in\Lambda} d\phi(n\delta)\frac{\partial}{\partial\phi(\delta n)}\{\exp[\ldots]\} = 0 \tag{6}$$

Elles forment un système d'équations différentielles avec $h(n\delta)$ comme variables. Pour chaque choix de contour, l'intégrale (5) est une solution. En principe, on pourrait utiliser un contour pour $\phi(n\delta)$, qui varie avec n, mais nous choisissons toutes les variables $\phi(n\delta)$ reélles, ou toutes imaginaires, pour que les fonctions de Schwinger, S_k, soient réelles. Alors, comme dans la théorie ϕ_0^4, on peut prendre

$$a\,F^{Nor}(h) + (1-a)\,F^{An}(h)$$

comme fonction génératrice d'une famille de théories depéndent du parametre réel a, et satisfaisant aux équations du mouvement (6).

D'après la théorie générale des approximations sur un réseau, nous savons que la limite thermodynamique $\Lambda \to \mathbb{Z}$ existe pour les fonctions de Schwinger et la fonction génératrice. Reste la question cruciale de la limite $\delta \to 0$. Pour la solution normale l'éxistence de cette limite est également bien connue. Pour la solution anormale, le problème n'est pas résolu. C'est le problème analogue de celui posé par Gallavotti et Rivasseau pour ϕ_4^4. Cependent, je signale que les circonstances sont différentes. Nous cherchons ici une solution dans une théorie à metrique indefinie probablement une hyperfonction par rapport aux variables espace-temps. Gallavotti et Rivasseau proposent une solution distribution temperée dans un espace de Hilbert. On peut donner aux fonctions de Schwinger anormales une forme normale ferromagnétique:

$$S_{2k}^{An}(f_1,\ldots f_{2k};K,\lambda) = (-1)^k S_{2k}^{Nor}(f_1,\ldots f_k,-K,\lambda)$$
$$= \sum_{n_1\ldots n_{2k}} \prod_{j=1}^{2k} f_j(n_j\delta)(-1)^{n_j} S_{2k}^{Nor}(n_1\delta,\ldots n_{2k}\delta,\hat{K},\lambda)$$

où $\hat{K}$ est égal à K avec les signes sur le diagonal modifiés. Malheureusement, le problème de la limite singulière $\delta \to 0$ reste ouvert.

§5 - CONCLUSION

Je crois que ces résultats préliminaires justifient une investigation plus complète de ces théories au delà de la transition de phase ultraviolette.

On peut dire que l'interprétation physique de ces théories reste à faire. Il reste la possibilité que le formalisme de Gupta et Bleuler donne lieu à une théorie ne présentant pas les difficultés de probabilités negative, en depit de la métrique indefinie. Bien entendu, une telle proposition est un peu "hérétique", mais elle vaut la peine d'être explorée à cause de l'éclairage nouveau qu'elle pourrait donner à la théorie générale du champs quantifiés.

Arthur S. Wightman
Departments of Physics and Math.
Princeton University
Princeton, NJ 08544 USA

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Aizenman — Proof of the triviality of ϕ_d^4 field theory and mean field features of Ising models for d > 4 Phys. Rev. Letts. 47 (1981) 1-4 886(E).

Geometric Analysis of ϕ^4 fields and Ising models I,II Commun. Math. Phys. 86 (1982) 1-48.

[2] J. Fröhlich — On the triviality of ϕ_d^4 theories and the approach to the critical point in d $\geq$ 4 dimensions Nuclear Physics B200 (1982) 281-296.

[3] G. Gallavotti, V. Rivasseau — à apparaitre Ann. Inst. Henri Poincaré.

[4] C. Newman — Critical point dominance in one dimension Commun. Math. Phys. 79 (1981) 133-140.

Voir aussi [7]

[5] K. Pohlmeyer — Non-renormalizable quantum field theories pp 461-482 dans Renormalization Theory Ed. G. Velo and A.S. Wightman, D. Reidel Dordrecht 1976.

[6] A. Sokal — An alternate constructive approach to the ϕ_3^4 quantum field theory and a possible destructive approach to ϕ_4^4 Ann. Inst. Henri Poincaré XXXVII (1982) 317-398.

[7] A.S. Wightman — How to parametrize the solutions of Lagrangian field theories: Symmetry breaking, and dimensional interpolation and renormalization in the the ϕ_n^4 Model, pp 67-77 in New Developments in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics Cargèse 1976, Plenum Press, New York, 1977.

Looking back at quantum field theory Physica Scripta 24 (1981) 813-816.