P. A. MEYER

Géométrie différentielle stochastique

Astérisque, tome 131 (1985), p. 107-113

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__131__107_0>

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE STOCHASTIQUE

par P.A. Meyer

On cherche ici à donner une idée des travaux récents de L. Schwartz en probabilités, consacrés au perfectionnement du << calcul stochastique >> . On en présente un seul point, particulièrement agréable à exposer devant un public non spécialisé, puisqu'il peut se comprendre sans faire appel à aucune technique probabiliste : l'idée de Schwartz suivant laquelle la géométrie différentielle nécessaire pour étudier les semimartingales dans les variétés est naturellement d'ordre deux. Cela figure au § 3 , les deux premiers paragraphes présentant les semimartingales, puis le calcul stochastique.

I. LA NOTION D'INTÉGRALE STOCHASTIQUE

1. Partons d'un problème tout à fait classique : soit $x(t)$ une fonction continue à droite sur l'intervalle $[0,1]$. Sous quelles conditions peut on affirmer que, pour toute fonction continue $h(t)$ sur $[0,1]$, les sommes de Riemann dyadiques

(1) $$S_n(h\,;x) = \Sigma_i\, h(t_i^n)[x(t_{i+1}^n)-x(t_i^n)] \quad , \; t_i^n=i2^{-n}$$

ont une limite finie lorsque $n\to\infty$? La réponse est évidente (th. de Banach-Steinhaus) : x doit être à variation bornée, la limite est alors l'intégrale de Stieltjes $\int_0^1 f(s)dx(s)$. En particulier, la fonctionnelle $\lim_n S_n$ est prolongeable des fonctions continues aux fonctions boréliennes bornées.

Plutôt que d'invoquer Banach-Steinhaus, il vaut mieux faire l'exercice suivant suggéré par B.Weiss : supposant x à variation non bornée, construire une fonction h continue telle que $S_n(h\,;x)$ tende vers $+\infty$.

2. Maintenant, on va introduire un paramètre ω appartenant à un espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, supposer que $H(.,\omega)$ et $X(.,\omega)$ sont respectivement une fonction continue et une fonction continue à droite, dépendant mesurablement du paramètre ω , et poser le problème suivant :

A quelle condition $S_n(H\,;X)$ converge t'il en mesure sur Ω pour tout H comme ci-dessus ?

La réponse est essentiellement triviale : pour presque tout ω , $X(.,\omega)$ est à variation bornée, et la limite est l'intégrale de Stieltjes $\int_0^1 H(s,\omega)d_sX(s,\omega)$. La raison en est que la construction indiquée à la fin du 1. peut être rendue mesurable en ω , et si $S_n(H ; X)$ converge presque partout vers $+\infty$, elle ne peut converger en mesure vers une fonction finie.

3. Maintenant, on introduit l'une des notions fondamentales du calcul des probabilités : une <u>filtration</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$, c'est à dire une famille croissante de sous-tribus de $\underline{\underline{F}}$, indexée par $[0,1]$. On va supposer que X est une fonction (un " processus") continue à droite et <u>adaptée</u>, i.e. pour tout t , la fonction $X(t,.)$ sur Ω est $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable. On va poser la définition :

DÉFINITION. On dit que X est un <u>intégrateur</u> si, quelle que soit la fonction $H(t,\omega)$ continue <u>adaptée</u> uniformément bornée, les sommes de Riemann $S_n(H ; X)$ convergent en mesure.

Ici, la situation est entièrement différente : on sait depuis longtemps qu'il existe (dans certaines filtrations et pour certaines lois P) des intégrateurs <u>qui ne sont pas à variation bornée</u>.

En effet, on peut montrer que si X est une <u>martingale de carré intégrable</u>, c'est à dire, en posant $X_t(\omega)=X(t,\omega)$, si l'on a

(2) $\qquad X_t \in L^2 \quad , \quad E_s X_t = X_s$ pour $s \leq t$ (E_s : projecteur orthogonal sur $L^2(\underline{\underline{F}}_s)$)

alors, pour H continue adaptée bornée, les sommes de Riemann $S_n(H ; X)$ convergent dans L^2. Or dans certaines filtrations existent des martingales qui ne sont pas du tout à variation bornée (le mouvement brownien).

Il est intéressant de comprendre pourquoi le raisonnement du n°1 ne s'applique plus : dans toute construction associant à x une fonction h telle que $S_n(h ; x) \to \infty$, le calcul de $h(t)$ fait intervenir les valeurs de x sur $[0,1]$ entier, et non pas sur $[0,t]$ seulement . Il est donc impossible de construire h de manière <u>adaptée</u> à la filtration.

4. Le théorème suivant a été démontré indépendamment par Dellacherie (en collaboration avec Mokobodzki, qui a clarifié des points d'analyse délicats) et par Bichteler (s'appuyant sur des résultats analytiques de Maurey-Rosenthal). Il faut mentionner aussi les importants travaux d'approche de Métivier et Pellaumail.

Nous désignons par L^0 l'e.v.t. non localement convexe des classes de fonctions mesurables, pour la topologie de la convergence en mesure .

THÉORÈME. 1) Si X est un intégrateur, la fonctionnelle $\lim_n S_n(H ; X)$ se prolonge à toutes les fonctions bornées H , mesurables par rapport à la tribu engendrée par les fonctions $H(t,\omega)$ adaptées continues (il s'agit d'une tribu sur $[0,1]\times\Omega$). Ce prolongement fournit une mesure vectorielle à valeurs dans L^0 .

2) La classe des intégrateurs coïncide exactement avec une classe de processus connue depuis longtemps : celle des <u>semimartingales</u> (cf. plus bas).

La tribu sur $[0,1]\times\Omega$ décrite en 1) est appelée tribu <u>prévisible</u>. Signalons par exemple que si $H(t,\omega)$ est une fonction adaptée dont les trajectoires $H(.,\omega)$ sont continues à droite avec limites à gauche, H n'est pas prévisible en général, mais la fonction $H(t-,\omega)$ l'est.

II. LE CALCUL STOCHASTIQUE

Deux changements par rapport au paragraphe précédent : nous abandonnons l'intervalle $[0,1]$ pour travailler sur $[0,\infty[$, et nous allons nous borner aux intégrateurs <u>continus</u> .

1. On a vu plus haut qu'il y a deux << modèles >> d'intégrateurs : les intégrateurs triviaux (à variation bornée) et les martingales .

Le théorème suivant dit qu'essentiellement ce sont les seuls. Il faut cependant localiser la notion de martingale : on dit que $X(t,\omega)$ est une <u>martingale locale</u> s'il existe des martingales $X^n(t,\omega)$ qui coïncident avec X sur des intervalles de temps (aléatoires) très longs.

D'une manière intuitive, les martingales locales sont des fluctuations pures, qui s'éliminent dans les calculs de moyennes. Mais les fonctions <u>non linéaires</u> des martingales locales ne s'éliminent pas.

Dernière notation : si H est prévisible borné (pour simplifier) on peut intégrer H par rapport à l'intégrateur X sur $[0,t]$, et cela fournit (détails techniques omis) une nouvelle fonction de (t,ω), que l'on notera $H\cdot X$, ou $\int_0^t H_s(\omega)dX_s(\omega)$. C'est à nouveau un intégrateur.

THÉORÈME. Tout intégrateur X (continu) se décompose <u>uniquement</u> sous la forme $X=A+M$; A est un intégrateur à variation finie souvent noté $\tilde{X}$; M est une martingale locale (continue), nulle en 0.

La décomposition de l'intégrateur $H\cdot X$ est $H\cdot A+H\cdot M$, les deux classes étant stables par intégrale stochastique.

REMARQUES. Si l'on remplace la loi de probabilité P par une loi Q absolument continue, X reste un intégrateur (car la convergence en mesure est préservée), mais sa décomposition change. La manière dont la décomposition se transforme est appelée le << théorème de Girsanov >>.

Puisqu'il s'agit ici de présenter les travaux de Schwartz, mentionnons que celui-ci a étudié de manière approfondie certaines mesures sur la tribu prévisible, à valeurs dans L^0, qui ne peuvent se représenter par leurs << primitives >> $X(t,\omega)$: voir Schwartz [3].

Enfin, le théorème justifie partiellement le mot de << semimartingale >> utilisé pour les intégrateurs.

2. Les traits particuliers du calcul stochastique apparaissent dans la formule d'intégration par parties, que voici sous forme différentielle.

THÉORÈME. Soient X et Y deux intégrateurs. Alors leur produit est un intégrateur, et l'on a

(3) $$d(XY) = XdY + YdX + d\langle X,Y\rangle \quad .$$

(Rappelons que les intégrateurs sont supposés continus : sinon, la formule s'écrit de manière un peu différente). Voici (3) sous forme intégrale : $\int_0^t H_s d(XY)_s = \int_0^t (H_s X_s dY_s + H_s Y_s dX_s + H_s d\langle X,Y\rangle_s)$.

Bien sûr, tout cela ne constitue pas vraiment un théorème, mais la définition de $\langle X,Y\rangle$: le véritable théorème est l'énoncé suivant :

- $\langle X,Y\rangle$ est à variation finie,
- $\langle X,Y\rangle$ est bilinéaire symétrique, et la mesure $d\langle X,X\rangle$ est positive. Autrement dit, $\langle\ ,\ \rangle$ est une espèce de structure hilbertienne à valeurs dans les processus à variation finie,
- $\langle X,Y\rangle$ provient uniquement de l'interaction des parties "fluctuantes" de X et Y : dans tout intervalle où X ou Y est à variation finie, la mesure $d\langle X,Y\rangle$ est nulle.

EXEMPLE. Le mouvement brownien (B_t) satisfait à $d\langle B,B\rangle_t = dt$, donc $B_t^2 = B_0^2 + \int_0^t 2B_s dB_s + t$. C'est le " crochet" $\langle\ ,\ \rangle$ qui fait la spécificité (et le charme) du calcul stochastique.

La forme générale de (3) est la célèbre formule d'Ito, que nous écrivons aussi sous forme différentielle.

THÉORÈME. Soient $X^1,\dots,X^n$ des intégrateurs (continus), et soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$. Alors $Y=f(X)$ (où X représente l'intégrateur vectoriel $(X^1,\dots,X^n)$) est un intégrateur, et l'on a

(4) $$dY = \Sigma_i\, D_i f(X) dX^i + \tfrac{1}{2}\Sigma_{ij}\, D_{ij} f(X) d\langle X^i,X^j\rangle$$

(5) $$d\tilde{Y} = \Sigma_i\, D_i f(X) d\tilde{X}^i + \tfrac{1}{2}\Sigma_{ij}\, D_{ij} f(X) d\langle X^i,X^j\rangle$$

3. Avant de passer au langage de la géométrie différentielle stochastique, il faut mentionner que, depuis Ito (1945) l'essentiel du calcul stochastique est la théorie des équations différentielles stochastiques, théorie tout aussi excellente quant à ses résultats que la théorie déterministe : théorèmes d'existence et d'unicité, de stabilité et de différentiabilité des solutions... Voir par ex. [5].

III. CALCUL STOCHASTIQUE DANS LES VARIÉTÉS

1. Puisque les fonctions de classe C^2 opèrent sur les intégrateurs (semimartingales), il est bien clair que l'on dit pouvoir définir les semimartingales (continues) à valeurs dans une variété V de classe au moins 2 : on dira que X est une semimartingale si, pour toute fonction φ de classe C^2 sur la variété, $\varphi\circ X$ est une semimartingale réelle. Mais pour faire de la géométrie différentielle sur les semimartingales, on est gêné par l'allure inhabituelle des formules (4) ou (5), qui font intervenir des termes du second ordre.

C'est Schwartz qui a découvert la <u>signification géométrique de la formule d'Ito</u>. Supposons pour simplifier que V soit munie d'une carte globale (x^i), et soit X^i la semi-martingale réelle $x^i\circ X$. Alors la formule

$$df(X)_t = \Sigma_i D_i f(X_t) dX_t^i + \tfrac{1}{2}\Sigma_{ij} D_{ij} f(X_t) d\langle X^i,X^j\rangle_t$$

dans laquelle le côté gauche est indépendant de la carte, montre que l'opérateur différentiel formel d'ordre deux, sans terme constant

$$\Sigma_i\, dX_t^i D_i + \tfrac{1}{2}\Sigma_{ij}\, d\langle X^i,X^j\rangle_t D_{ij} \quad \text{au point } X_t \tag{6}$$

est intrinsèque, et de même pour l'opérateur analogue avec $d\tilde{X}_t^i$ au lieu de dX_t^i . Si l'on se rappelle qu'un vecteur tangent d'ordre 1 (vt_1) au point x est un opérateur différentiel d'ordre 1 en ce point , il est naturel d'appeler vecteurs tangents d'ordre 2 (vt_2) en x les opérateurs analogues d'ordre $\leqq 2$, et d'énoncer le << principe de Schwartz >> : <u>les éléments différentiels</u> dX_t <u>et</u> $d\tilde{X}_t$ <u>sont formellement des</u> vt_2 <u>au point</u> X_t .

Cela donne une image géométrique du comportement infinitésimal d'une semimartingale, qui est extrêmement attirante. On ne va pas décrire ici les problèmes assez raffinés abordés par Schwartz (nature géométrique d'une équation différentielle stochastique, relèvement d'une semimartingale dans un fibré...) mais seulement donner quelques exemples simples.

Auparavant, un dernier mot : Schwartz n'a pas créé la géométrie différentielle stochastique. Avant lui, de nombreux auteurs ont utilisé le mouvement brownien, les équations différentielles stochastiques, le transport parallèle stochastique... dans des questions d'analyse ou de probabilités sur les variétés. Mais Schwartz a été le premier à penser en termes de <u>semimartingales</u>, et non de mouvement brownien. On ne peut pas encore savoir si ce changement de langage est essentiel pour la compréhension du sujet. Pour ma part, je le crois.

2. Un vecteur tangent d'ordre 2 au point x n'a pas de << partie d'ordre 1 >> intrinsèque , mais il a une << partie bilinéaire >> intrinsèque. Du point de vue analytique, cela correspond à l'opération bien connue qui associe à un opérateur du second ordre L la << forme de Dirichlet >> $(f,g) \mapsto L(fg)-fLg-gLf$.

Traduisant cela par le principe de Schwartz, cela signifie que la forme bilinéaire symbolique sur le cotangent $\Sigma_{ij}\, d\langle X^i,X^j\rangle D_i \otimes D_j$ est intrinsèque. Par exemple, si V est munie d'une structure riemannienne, le processus à valeurs réelles

$$\int_0^t g_{ij}(X_s)d\langle X^i,X^j\rangle_s \;=\; \langle X,X\rangle_t$$

est intrinsèque, et représente une sorte de mesure des fluctuations de X (il est nul si X est à variation finie).

3. Si l'on veut pouvoir définir la notion de <u>dérive infinitésimale</u> d'une semimartingale X , on a besoin d'une structure supplémentaire : un opérateur linéaire Γ qui définisse, en chaque point , la << partie d'ordre 1 >> d'un vt_2 , celle-ci n'étant pas déterminée par la structure différentiable seule. Cette structure supplémentaire est la donnée d'une <u>connexion</u> affine, sans torsion. Pour se donner Γ , il suffit de se le donner sur les vecteurs de base D_i et D_{ij} , et l'on peut écrire

$\Gamma(D_i)=D_i$ (la partie d'ordre 1 d'un vt_1 est lui même)

$\Gamma(D_{ij})= \Sigma_k\, \Gamma^k_{ij}D_k$ - les Γ^k_{ij} sont les symboles de Christoffel

Si maintenant X est une semi-martingale, les vt_1 symboliques

$$\Gamma(dX_t) = \Sigma_k\, (dX^k_t+ \tfrac{1}{2}\Sigma_{ij}\, \Gamma^k_{ij}(X_t)d\langle X^i,X^j\rangle_t)D_k \quad \text{au point } X_t$$

et le vt_1 analogue avec $d\tilde{X}^i_t$ au lieu de dX^i_t , ont une signification intrinsèque. C'est le <u>second</u> que l'on appellera la dérive infinitésimale. A cause de la présence du $\sim$, il dépend de la loi de probabilité utilisée, et pas seulement de la trajectoire considérée : c'est plutôt une tendance moyenne du << pinceau de trajectoires >> qui diverge à l'instant t du point X_t . En particulier, les fluctuations pures, ou martingales locales dans V, seront caractérisées par la propriété que $\Gamma(d\tilde{X}_t)=0$. Il me semble que c'est J.M. Bismut qui a pensé, le premier, à une telle définition.

Par exemple, le mouvement brownien d'une variété riemannienne est caractérisé, parmi les fluctuations pures, par le fait que

$$d\langle X^i,X^j\rangle_t = g^{ij}(X_t)dt \quad .$$

4. Les formes d'ordre 1 , ou 1-formes ordinaires, sont les objets naturels qui s'intègrent le long des courbes différentiables, ou plus généralement, des courbes à variation finie. Ici les objets naturels à intégrer

le long des semimartingales sont les formes d'ordre 2 (ce sont des 2-formes symétriques, tout à fait différentes des 2-formes extérieures usuelles). Des exemples de formes d'ordre 2 sont
- la différentielle seconde d^2f d'une fonction (sa valeur sur un vt_2 T au point x est tout simplement $T(f)$),
- le << produit >> $dfdg$ de deux différentielles premières, défini par la formule $d^2(fg)-fd^2g-gd^2f = 2dfdg$; sa valeur sur un vt_2 T est la << partie bilinéaire >> de T décrite plus haut.

Lorsqu'on intègre ces formes le long d'une semimartingale X, on obtient des formules du genre :

$$\int_{X_0}^{X_t} d^2f = f(X_t)-f(X_0) \quad , \quad \int_{X_0}^{X_t} 2dfdg = \langle f(X),g(X)\rangle_t \ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1]. L. SCHWARTZ. Semimartingales sur des variétés, et martingales conformes sur des variétés analytiques complexes. Lecture Notes in M. 780, Springer-Verlag 1980.

[2]. L. SCHWARTZ. Géométrie différentielle du 2e ordre, semi-martingales et équations différentielles stochastiques sur une variété différentielle. Sém. Prob. XVI (Azéma-Yor éd.), supplément << Géométrie Différentielle stochastique >>, Lecture Notes in M. 921, p.1-148. Springer-Verlag 1982.

[3]. L. SCHWARTZ. Semimartingales formelles. Sém. Prob. XV, p. 413-489. Lecture Notes in M. 850, Springer 1981.

[4]. P.A. MEYER. A differential geometric formalism for the Ito integral. Stochastic Integrals (D. Williams, ed.). Lecture Notes in M. 851, Springer 1981 (Proceedings of the LMS Durham Symposium 1980)

[5]. N.IKEDA, S. WATANABE. Stochastic differential equations and diffusion processes. North Holland/Kodansha, 1981.

NB. Pour le non spécialiste désireux d'aborder les semimartingales en général, la littérature des probabilistes est une forteresse imprenable, sauf peut être le livre tout récent de METIVIER (De Gruyter, 1983).

P.A.MEYER
Université Louis Pasteur
Département de Mathématiques
7 rue René Descartes
67084 STRASBOURG Cedex, France