

# *Astérisque*

YVES LAURENT

**Calcul d'indices et irrégularité pour les systèmes holonomes**

*Astérisque*, tome 130 (1985), p. 352-364

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1985\\_\\_130\\_\\_352\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__130__352_0)

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CALCUL D'INDICES ET IRRÉGULARITÉ  
POUR LES SYSTÈMES HOLONOMES

*par Yves LAURENT*

Dans ce papier (qui résume un article en préparation [8]), nous énonçons un théorème d'indice pour les solutions formelles d'un système d'équations aux dérivées partielles holonôme.

En fait, nous avons un théorème d'indice pour toute une famille d'espaces de fonctions (les séries formelles à croissance Gevrey  $r$ ,  $1 \leq r \leq +\infty$ ) qui vont du cas  $r = 1$  des séries convergentes (et dans ce cas le résultat est dû à Kashiwara [2]) au cas  $r = \infty$  des séries formelles.

Dans le cas d'un espace de dimension 1, nous retrouvons des résultats de Ramis [12].

Par ailleurs étant donnés deux modules holonomes  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sur une variété  $X$  nous savons calculer l'indice local en un point  $x$  des solutions de  $\mathcal{M}$  à valeur dans  $\mathcal{N}$ , i.e. la caractéristique d'Euler-Poincaré du complexe  $\mathbb{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})_x$ . Si  $\mathcal{D}_X^\infty$  est le faisceau des opérateurs différentiels analytiques d'ordre infini on peut remplacer  $\mathcal{N}$  par  $\mathcal{N}^\infty = \mathcal{D}_X^\infty \otimes \mathcal{D}_X \mathcal{N}$  et aussi comme précédemment par toute une famille  $\mathcal{N}(r)$ ,  $1 \leq r \leq +\infty$ , qui va de  $\mathcal{N}^\infty$  à  $\mathcal{N}$ . (Le cas le plus simple est celui où  $\mathcal{N}$  est le faisceau  $\mathcal{B}_{\{x\}}|_X$  des distributions à support ponctuel  $\{x\}$ , dans ce cas  $\mathcal{N}^\infty$  est le faisceau des hyperfonctions à support en  $\{x\}$  tandis que  $\mathcal{N}(r)$  est le faisceau des ultradistributions Gevrey  $r$  à support en  $\{x\}$ ).

Pour énoncer ces résultats nous rappelons dans un premier paragraphe la définition des variétés microcaractéristiques que nous avons introduites dans [7]. La présentation que nous donnons ici est assez différente de celle de [7] et si elle

est plus simple, elle est moins générale et les méthodes de [7] sont certainement indispensables pour une bonne partie des démonstrations.

1. Définition des cycles microcaractéristiques.

1. 1. Polygône de Newton d'un opérateur.

Soient  $X$  une variété analytique complexe et  $Y$  une sous-variété analytique de  $X$ . Soient  $T^*X$  le fibré cotangent à  $X$  et  $\Lambda = T_Y^*X$  le fibré conormal à  $Y$ .

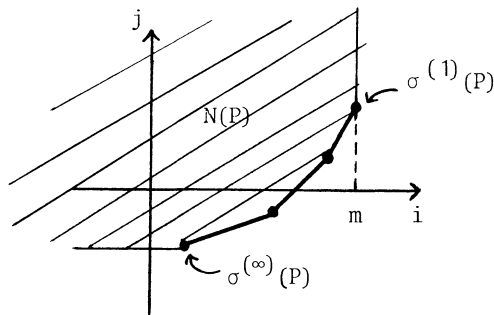
Soit  $P$  un opérateur différentiel défini au voisinage de  $Y$ . Si  $P = \sum_{0 < j < m} P_j$  est le symbole de  $P$  dans un système de coordonnées locales, notons  $v_j$  l'ordre d'annulation de  $P_j$  sur  $\Lambda$  ( $P_j$  est considéré comme fonction sur  $T^*X$ ).

Si  $(i, j)$  est un point de  $\mathbb{Z}^2$ , on note  $Q(i, j) = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \lambda \leq i, \mu \geq j\}$ . Par définition, le polygône de Newton  $N(P)$  de  $P$  est l'enveloppe convexe de la réunion des  $Q(j, v_j - j)$  pour  $0 \leq j < m$ .

Il est indépendant du choix des coordonnées locales dans lesquelles on écrit  $P$  [7].

Le "bord distingué" de  $N(P)$  est l'ensemble des points  $(i, j) \in N(P)$  tels que  $\{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \lambda \geq i, \mu \leq j\} \cap N(P) = \{(i, j)\}$ .

En fait le bord de  $N(P)$  est constitué d'un nombre fini de segments de droites compacts et de deux demi-droites (une verticale et une horizontale). Le bord distingué de  $N_j(P)$  est la réunion de ces segments compacts.



Remarques : 1) Si  $X = \mathbb{C}$  et  $Y = \{0\}$  on retrouve la définition classique (Ramis [12], [13]).

2) Plus généralement on peut prendre pour  $\Lambda$  une sous-variété involutive homogène quelconque de  $T^*X$  et pour  $P$  un opérateur microdifférentiel défini au voisinage de  $\Lambda$  ([7]).

1.2. Symboles "principaux" d'un opérateur.

Soit  $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$  un système de coordonnées locales de  $X$  pour lesquelles  $Y = \{(x, y)\} \in X / x=0$  et donc  $\Lambda = \{(x, y, \xi, \eta) \in T^*X / x=0, \eta=0\}$ .

Soit  $P = \sum_{0 \leq j \leq m} P_j(x, y, \xi, \eta)$  le symbole de  $P$  dans ce système de coordonnées.

On peut développer  $P_j$  en série de Taylor le long de  $\Lambda$  :

$$P_j(x, y, \xi, \eta) = \sum_{|\alpha|+|\beta| \geq v_j} P_{j, \alpha, \beta}(y, \xi) x^\alpha \eta^\beta .$$

Soit  $T^*\Lambda$  le fibré cotangent à  $\Lambda$ , muni des coordonnées  $(y, \xi, y^*, \xi^*)$ . On définit les fonctions  $P_{ij}$  sur  $T^*\Lambda$  par :

$$(1.2.1) \quad P_{ij}(y, \xi, y^*, \xi^*) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=i} P_{j, \alpha, \beta}(y, \xi) (-\xi^*)^\alpha y^{*\beta}$$

Si le point  $(j, i-j)$  appartient au bord distingué du polygone de Newton de  $P$ , la fonction  $P_{ij}$  considérée comme fonction sur  $T^*\Lambda$  ne dépend pas du choix des coordonnées  $(x, y)$ .

Soit  $r$  un nombre rationnel,  $1 \leq r \leq +\infty$ . Soit  $D_r$  la droite d'appui de  $N(P)$  de pente  $\frac{1}{r-1}$ .

Pour  $1 < r < +\infty$ , on note  $\sigma^{(r)}(P)$  (resp<sup>t</sup>.  $\sigma^{\{r\}}(P)$ ) la fonction  $P_{ij}(y, \xi, y^*, \xi^*)$  où  $(j, i-j)$  est le point du segment  $N(P) \cap D_r$  pour lequel  $j$  est minimum (resp<sup>t</sup>. maximum).

Pour  $r = 1$ ,  $\sigma^{(1)}(P) = \sigma^{\{1\}}(P)$  désigne la fonction  $P_{ij}$  pour laquelle  $(j, i-j)$  est l'extrémité de la demi-droite  $D_1 \cap N(P)$  (donc  $j = m$  et  $i$  minimal tel que  $P_{i, m} \neq 0$ ) tandis que pour  $r = \infty$ ,  $\sigma^{(\infty)}(P) = \sigma^{\{\infty\}}(P)$  désigne la fonction  $P_{ij}$  pour laquelle  $(j, i-j)$  est l'extrémité de la demi-droite  $D_\infty \cap N(P)$ .

(Remarquons qu'il n'y a qu'un nombre fini de  $r$  pour lesquels  $\sigma^{(r)}(P) \neq \sigma^{\{r\}}(P)$ , ce sont les pentes du polygone de Newton de  $P$ ).

Exemple :  $X = \mathbb{C}$ ,  $Y = \{0\}$ ,  $P = x^2 D_x + 1$  (opérateur d'Euler) alors :

$$\text{si } 1 \leq r < 2 \quad \sigma^{(r)}(P) = \sigma^{\{r\}}(P) = x^2 x^*$$

$$\text{si } r = 2 \quad \sigma^{(2)}(P) = x^2 x^* \quad , \quad \sigma^{\{2\}}(P) = 1$$

$$\text{si } r > 2 \quad \sigma^{(r)}(P) = \sigma^{\{r\}}(P) = 1.$$

1.3. Bifiltrations des  $\mathcal{D}_X$ -modules cohérents.

Soit  $\mathcal{D}_X$  le faisceau d'anneaux des opérateurs différentiels définis sur la variété  $X$ . Pour chaque  $r$  on munit le faisceau  $\mathcal{D}_X|_Y$  des opérateurs différentiels définis au voisinage de  $Y$  d'une filtration :

Si  $r \in \mathbb{Q} \cap [1, \infty[$ , on pose  $r = \frac{s}{t}$  ou  $s$  et  $t$  sont deux entiers tels que  $(t, s) = 1$ ; si  $r = \infty$  on pose  $s = 1, t = 0$ .

Pour  $k \in \mathbb{Z}$  on définit  $F_r^k \mathcal{D}_X$  comme le sous-faisceau de  $\mathcal{D}_X|_Y$  des opérateurs dont le polygône de Newton est contenu dans  $\{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / (s-t)\mu - t\lambda \geq -k\}$ .

① Si  $r = 1$ , la filtration est la filtration usuelle par l'ordre des opérateurs.

Le gradué associé  $\text{gr}_{F_1} \mathcal{D}_X$  s'identifie donc au faisceau des fonctions holomorphes sur  $T^*X$  polynômiales dans les fibres de la projection  $T^*X \rightarrow X$ .

② Si  $1 < r < +\infty$

Notons  $\mathcal{O}_{T^*\Lambda}[i, j]$  le faisceau d'anneaux des fonctions holomorphes sur  $T^*\Lambda$  qui dans les coordonnées  $(y, \xi, y^*, \xi^*)$  sont polynômiales homogènes de degré  $i$  en  $(y^*, \xi^*)$  et de degré  $j$  en  $(y, \xi)$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$   $\text{gr}_{F_r}^k \mathcal{D}_X$  s'identifie à  $\bigoplus_{sj+(t-s)i=k} \mathcal{O}_{T^*\Lambda}[i, j]$  et donc  $\text{gr}_{F_r} \mathcal{D}_X$  s'identifie à  $\bigoplus_{(i, j) \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{O}_{T^*\Lambda}[i, j]$ . (Cette identification se fait par la formule 1.2.1).

③ Si  $r = +\infty$

On vérifie (cf. Kashiwara [3], Laurent-Schapira [9], T. Monteiro-Fernandes [11]) que  $\text{gr}_{F_\infty}^k (\mathcal{D}_X)$  s'identifie au faisceau d'anneaux des opérateurs différentiels sur  $\Lambda = T_Y^*X$  homogènes de degré  $k$  en la variable de la fibre  $\Lambda \rightarrow Y$  et donc  $\text{gr}_{F_\infty} \mathcal{D}_X$  s'identifie au faisceau  $\mathcal{D}_{[\Lambda]}$  des opérateurs différentiels sur  $\Lambda$  polynômiaux suivant les fibres du fibré vectoriel  $\Lambda$ .

Nous allons maintenant définir une filtration sur le gradué  $\text{gr}_{F_r} \mathfrak{D}_X$  pour tout  $r$  :

- ① Si  $r = \infty$  on prend la filtration par l'ordre des opérateurs différentiels sur  $\Lambda$ .
- ② Si  $1 < r < +\infty$

Identifiant  $\text{gr}_{F_r} \mathfrak{D}_X$  à  $\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{sj+(t-s)i=k} \mathcal{O}_{T^*\Lambda}[i,j]$  on définit deux filtrations (suivant  $j$  croissant ou décroissant) :

$$G^\ell \text{gr}_{F_r} \mathfrak{D}_X = \bigoplus_{j \leq \ell} \mathcal{O}_{T^*\Lambda}[i,j]$$

$$H^\ell \text{gr}_{F_r} \mathfrak{D}_X = \bigoplus_{j \geq \ell} \mathcal{O}_{T^*\Lambda}[i,j].$$

(Elles correspondent respectivement aux symboles  $\sigma^{\{r\}}$  et  $\sigma^{(r)}$  que nous avons définis pour les opérateurs).

Ces filtrations induisent des filtrations sur  $\text{gr}_{F_r}^k \mathfrak{D}_X$  pour tout  $k$ .

- ③ Si  $r = 1$

On filtre les fonctions sur  $T^*X$  par leur ordre d'annulation sur  $\Lambda = T_Y^*X$  ce qui induit une filtration sur  $\text{gr}_{F_1} \mathfrak{D}_X$ .

On peut aussi remarquer que la formule (1.2. 1) permet d'identifier  $\text{gr}_{F_1}^k \mathfrak{D}_X$  à un sous-faisceau de  $\prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_{T^*\Lambda}[k,j]$  et la filtration précédente n'est autre que :

$$G^\ell \text{gr}_{F_1}^k \mathfrak{D}_X = (\text{gr}_{F_1}^k \mathfrak{D}_X) \cap \left( \prod_{j \geq \ell} \mathcal{O}_{T^*\Lambda}[i,j] \right).$$

Remarque 1.3.1. : Nous venons de définir, pour  $1 < r < +\infty$ , deux filtrations  $G$  et  $H$  sur le gradué  $\text{gr}_{F_r} \mathfrak{D}_X$ . (Tandis que pour  $r=1$  et  $r=\infty$  nous n'en avons qu'une). Dans toute la suite nous ne considérerons plus qu'une seule filtration pour chaque  $r$  (à savoir  $G$ ), étant entendu que tous les résultats que nous énoncerons pour  $G$  seraient encore vrais pour  $H$ .

Remarque 1.3.2. : Toutes les définitions et identifications précédentes sont canoniques à cause des propriétés d'invariance des symboles principaux d'un opérateur que nous avons données au paragraphe précédent.

Pour tout  $r$ , nous noterons  $\text{gr}_{\{r\}} \mathcal{D}_X = \text{gr}_G \text{gr}_F \mathcal{D}_X$  et nous dirons que c'est le bigradué de  $\mathcal{D}_X$ . Il s'identifie canoniquement à  $\bigoplus_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{O}_{T^*\Lambda}[i,j]$  et donc à un sous-faisceau d'anneaux du faisceau  $\mathcal{O}_{T^*\Lambda}$  des fonctions holomorphes sur  $T^*\Lambda$ .

Considérons maintenant un  $\mathcal{D}_X$ -module cohérent  $\mathcal{M}$  défini au voisinage de  $Y$ .

Une  $r$ -bifiltration de  $\mathcal{M}$  est la donnée d'une filtration  $(F_r^k \mathcal{M})_{k \in \mathbb{Z}}$  de  $\mathcal{M}$  compatible avec la filtration  $F_r$  de  $\mathcal{D}_X$  et sur  $\text{gr}_F \mathcal{M}$  d'une filtration  $(G^\ell \text{gr}_F \mathcal{M})$  compatible avec la filtration  $G$  de  $\text{gr}_F \mathcal{D}_X$ .

Le bigradué de  $\mathcal{M}$  est par définition  $\text{gr}_{\{r\}} \mathcal{M} = \text{gr}_G \text{gr}_F \mathcal{M}$ .

Une bifiltration sera dite "bonne" si c'est localement la bifiltration quotient définie par un morphisme surjectif  $(\mathcal{D}_X)^N \rightarrow \mathcal{M}$ .

On démontre ([7]) que si un  $\mathcal{D}_X$ -module cohérent  $\mathcal{M}$  est muni d'une bonne  $r$ -bifiltration, le bigradué associé est cohérent comme  $\text{gr}_{\{r\}} \mathcal{D}_X$ -module et donc que  $\widetilde{\text{gr}}_{\{r\}} \mathcal{M} = \mathcal{O}_{T^*\Lambda} \otimes_{\text{gr}_{\{r\}} \mathcal{D}_X} \text{gr}_{\{r\}} \mathcal{M}$  est un  $\mathcal{O}_{T^*\Lambda}$ -module cohérent.

#### 1.4. Cycles microcaractéristiques d'un $\mathcal{D}_X$ -module holonôme.

Comme espace cotangent à  $\Lambda$ ,  $T^*\Lambda$  est muni d'une structure canonique de variété symplectique et de deux actions de  $\mathbb{C}$ .

On montre que l'espace analytique défini par  $\widetilde{\text{gr}}_{\{r\}} \mathcal{M}$  est indépendant de la bonne bifiltration que l'on a mise sur  $\mathcal{M}$  (pour un  $r$  donné) ; on le note  $\text{Ch}_\Lambda^2\{r\}(\mathcal{M})$  et on dit que c'est la variété 2-microcaractéristique de type  $\{r\}$  de  $\mathcal{M}$ .

C'est un sous-ensemble analytique involutif bihomogène de  $T^*\Lambda$  ([7]).

Remarque 1.4.1: En fait, on montre (cf. [7]), qu'il existe sur  $T^*\Lambda$  un faisceau d'anneau  $\mathcal{E}_\Lambda^2(r,r)$  et un morphisme injectif  $\pi^{-1} \mathcal{D}_X \hookrightarrow \mathcal{E}_\Lambda^2(r,r)$  ( $\pi : T^*\Lambda \rightarrow X$ ) tel que

$$\text{Ch}_\Lambda^2\{r\}(\mathcal{M}) = \text{supp}^t (\mathcal{E}_\Lambda^2(r,r) \otimes_{\pi^{-1} \mathcal{D}_X} \pi^{-1} \mathcal{M}).$$

Ce résultat permet de montrer le théorème suivant.

Théorème 1.4.2. : Si  $\mathcal{M}$  est holonôme,  $\text{Ch}_\Lambda^2\{r\}(\mathcal{M})$  est, pour tout  $r$  ( $1 \leq r \leq +\infty$ ), un sous-ensemble lagrangien de  $T^*\Lambda$ .

Si  $V$  est une composante irréductible de  $\text{Ch}_\Lambda^2\{r\}(\mathcal{M})$ , la multiplicité de

$\widetilde{gr}_{\{r\}}(\mathcal{M})$  le long de  $V$  est indépendante du choix de la bonne bifiltration que l'on a mise sur  $\mathcal{M}$ .

On peut donc attacher à  $\mathcal{M}$  et à  $r$ , non seulement un ensemble analytique réduit mais encore un cycle analytique, le cycle microcaractéristique de type  $\{r\}$  de  $\mathcal{M}$  le long de  $\Lambda$  que l'on note  $\text{Car}_{\Lambda}\{r\}(\mathcal{M})$ .

Remarque 1.4.3. : 1) Si  $r = 1$ ,  $\text{Ch}_{\Lambda}^2\{r\}(\mathcal{M})$  est la variété microcaractéristique de  $\mathcal{M}$  au sens de Kashiwara - Schapira [6], elle n'est autre que le cône tangent  $C_{\Lambda}(\text{Ch } \mathcal{M})$  à la variété caractéristique de  $\mathcal{M}$  le long de  $\Lambda$ .

De même  $\text{Car}_{\Lambda}\{1\}(\mathcal{M})$  peut être défini comme le cône tangent au cycle caractéristique de  $\mathcal{M}$  le long de  $\Lambda$ .

2) Si  $r = \infty$ ,  $\text{Car}_{\Lambda}\{\infty\}(\mathcal{M})$  est le cycle caractéristique du  $\mathcal{D}_{\Lambda}$ -module engendré par  $\text{gr}_{F_{\infty}} \mathcal{M}$ . Ce  $\mathcal{D}_{\Lambda}$ -module a déjà été défini par Kashiwara [3] et T. Monteiro-Fernandès [11] (Kashiwara considère essentiellement ce module dans le cas où  $\mathcal{M}$  est régulier et dans ce cas il en donne une définition intrinsèque alors qu'ici il dépend de la bonne filtration  $F_{\infty} \mathcal{M}$ ).

Remarque 1.4.4. : Comme nous l'avons déjà signalé, on peut poser toutes ces définitions en remplaçant la filtration  $G$  par la filtration  $H$ . On note le cycle obtenu  $\text{Car}_{\Lambda}(r)(\mathcal{M})$ .

## 2. Théorèmes d'indice.

### 2. 1. Indice local et obstruction d'Euler. Formule de Kashiwara.

Soit  $X$  une variété analytique complexe,  $T^*X$  son fibré cotangent et  $\Sigma$  un cycle analytique lagrangien de  $T^*X$ , stable par homothétie complexe.

Il existe une stratification de Whitney de  $X$ ,  $X = \bigcup_{\alpha} X_{\alpha}$  telle que :

$$\Sigma = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\Gamma_{X_{\alpha}}^* X].$$

On peut alors définir l'obstruction locale d'Euler de ce cycle en un point  $x$  de  $X$  par :

$$E_{\Sigma}(x) = \sum_{\alpha} (-1)^{\text{codim } X_{\alpha}} E_{X_{\alpha}}(x) m_{\alpha}$$

où  $E_{X_{\alpha}}(x)$  désigne l'obstruction locale d'Euler de  $X_{\alpha}$  en  $x$  (cf. [1]).

Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X$ -module holonôme de cycle caractéristique  $\Sigma = \text{Car } \mathcal{M}$ .



Kashiwara a démontré dans [2], que si  $\mathcal{O}_X$  désigne le faisceau des fonctions holomorphes sur  $X$ , si  $x \in X$ , et si  $\chi_x(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) = \sum_j (-1)^j \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_X}^j(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_x$  est l'indice local de  $\mathcal{M}$  en  $x$  on a :

$$\chi_x(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) = E_{\Sigma}(x).$$

2.2. Séries formelles à croissance Gevrey. Faisceaux  $\mathcal{B}_{Y|X}$ .

a) Soit  $x$  un point de  $X$  variété analytique complexe. On note  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$  l'anneau des séries formelles en  $x$ .

Si  $(x_1, \dots, x_n)$  est un système de coordonnées locales d'origine  $x$ , les éléments de  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$  sont les séries formelles  $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_{\alpha} x^{\alpha}$ .

On note, pour  $1 < r < +\infty$ ,  $\mathcal{O}_{X,x}\{r\}$  (resp.  $\mathcal{O}_{X,x}(r)$ ) le sous-ensemble de  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$  des séries  $\sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}$  telles que  $\sum_{\alpha} a_{\alpha} \frac{x^{\alpha}}{(\alpha!)^{r-1}}$  ait un rayon de convergence non nul (resp. ait un rayon de convergence infini).

On note encore  $\mathcal{O}_{X,x}^{(\infty)} = \mathcal{O}_{X,x}\{\infty\} \stackrel{\text{déf}}{=} \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$  et  $\mathcal{O}_{X,x}\{1\} = \mathcal{O}_{X,x}$ .

b) Rappelons que si  $Y$  est une sous-variété (lisse) de  $X$  de codimension  $d$  on définit :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{Y|X}^{\infty} &= \mathcal{H}_Y^d(\mathcal{O}_X) \\ \mathcal{B}_{Y|X} &= \mathcal{H}_{[Y]}^d(\mathcal{O}_X). \end{aligned}$$

Si on choisit un système de coordonnées locales pour lesquelles

$Y = \{(x_1, \dots, x_n) \in X / x_1 = \dots = x_d = 0\}$ , si on note  $x' = (x_1, \dots, x_d)$  et  $x'' = (x_{d+1}, \dots, x_n)$ , si  $U$  est un ouvert de  $Y$ ,  $\Gamma(U, \mathcal{B}_{Y|X}^{\infty})$  s'identifie à l'ensemble des séries  $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_{\alpha}(x'') \delta^{(\alpha)}(x')$  ou  $(a_{\alpha})$  est une suite de fonctions holomorphes sur  $U$  qui vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall K \subset\subset U, \exists C_{\varepsilon} > 0, \sup_K |a_{\alpha}(x'')| \leq C_{\varepsilon} \varepsilon^{|\alpha|} \frac{1}{|\alpha|!}.$$

On définit les faisceaux  $\mathcal{B}_{Y|X}(r)$  et  $\mathcal{B}_{Y|X}\{r\}$  pour  $1 < r < +\infty$  comme les sous-faisceaux de  $\mathcal{B}_{Y|X}^{\infty}$  des séries  $\sum_{\alpha} a_{\alpha}(x'') \delta^{(\alpha)}(x')$  qui vérifient :

$$(2.2.1) \quad \forall K \subset\subset U, \exists C > 0, \sup_K |a_{\alpha}(x'')| \leq C^{|\alpha|} \frac{1}{(|\alpha|!)^{r-1}}$$

(resp. (2.2.2)  $\forall \varepsilon > 0, \forall K \subset \subset U, \exists C_\varepsilon > 0, \sup_K |a_\alpha(x'')| \leq C_\varepsilon \varepsilon^{|\alpha|} \frac{1}{|\alpha|! r^{-1}}$ )

On pose  $\mathcal{P}_{Y|X}\{1\} = \mathcal{P}_{Y|X}^\infty$  et  $\mathcal{P}_{Y|X}^{(\infty)} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \mathcal{P}_{Y|X}$  est form\u00e9 des s\u00e9ries  $\sum a_\alpha(x'') \delta^{(\alpha)}(x')$  finies.

c) Les faisceaux  $\mathcal{O}_{X,x}^{(r)}$  et  $\mathcal{P}_{\{x\}|X}^{(r)}$  d'une part et  $\mathcal{O}_{X,x}^{\{r\}}$  et  $\mathcal{P}_{\{x\}|X}^{\{r\}}$  d'autre part sont, pour  $1 \leq r \leq +\infty$ , en dualit\u00e9 topologique ce qui rend \u00e9quivalent les calculs d'indice pour  $\mathcal{O}_{X,x}$  et  $\mathcal{P}_{\{x\}|X}$ .

### 2.3. R\u00e9sultats

Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X$ -module holon\u00f4me,  $Y$  une sous-vari\u00e9t\u00e9 de  $X$  et  $x$  un point de  $Y$ .

Identifiant  $Y$  \u00e0 la section nulle de  $\Lambda = T_Y^*X$ , on peut consid\u00e9rer  $x$  comme un point de  $\Lambda$ .

Les cycles microcaract\u00e9ristiques de  $\mathcal{M}$  sont lagrangiens dans  $T^*\Lambda$  donc on peut d\u00e9finir leur obstruction d'Euler locale en  $x$ .

#### Th\u00e9or\u00e8me 2.3.1.

1) Pour tout  $r, 1 \leq r \leq +\infty$ ,  $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{P}_{Y|X}^{(r)})$  et  $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{P}_{Y|X}^{\{r\}})$  sont des complexes \u00e0 cohomologie constructible (ce sont m\u00eame des faisceaux pervers).

$\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_X}^j(\mathcal{M}, \mathcal{P}_{Y|X}^{(r)})$  et  $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_X}^j(\mathcal{M}, \mathcal{P}_{Y|X}^{\{r\}})$  sont non nuls seulement pour  $0 \leq j \leq n = \dim X$ .

2) On a la formule d'indice local :

$\forall r, 1 \leq r \leq +\infty$

$$\chi_x(\mathcal{M}, \mathcal{P}_{Y|X}^{(r)}) = E_{\text{Car}_\Lambda^{(r)}}(\mathcal{M})(x)$$

$$\chi_x(\mathcal{M}, \mathcal{P}_{Y|X}^{\{r\}}) = E_{\text{Car}_\Lambda^{\{r\}}}(\mathcal{M})(x)$$

(avec toujours  $\chi_x(\mathcal{M}, \mathcal{F}) = \sum_j (-1)^j \dim \mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_X}^j(\mathcal{M}, \mathcal{F})_x$  pour  $x \in Y \hookrightarrow \Lambda = T_Y^*X$ ).

Corollaire 2.3.2. : Si  $\Lambda_x = T_{\{x\}}^*X$  on a par dualit\u00e9 :

$\forall r, 1 \leq r \leq +\infty$

$$\chi_x(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{X,x}^{(r)}) = (-1)^n E_{\text{Car}_{\Lambda_x}^{(r)}}(\mathcal{M})(x)$$

$$\chi_x(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{X,x}^{\{r\}}) = (-1)^n E_{\text{Car}_{\Lambda_x}^{\{r\}}}(\mathcal{M})(x).$$

Remarque 2.3.3. : Si  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont deux modules holonômes on a les formules :

$$\mathbb{R}\mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \approx \mathbb{R}\mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{D}_{X \times X}}(\mathcal{M} \hat{\otimes} \mathcal{N}^*, \mathcal{B}_{X|X \times X})$$

et 
$$\mathbb{R}\mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}^\infty) \approx \mathbb{R}\mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{D}_{X \times X}}(\mathcal{M} \hat{\otimes} \mathcal{N}^*, \mathcal{B}_{X|X \times X}^\infty)$$

avec 
$$\mathcal{N}^\infty = \mathcal{D}_X^\infty \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{N} \text{ et } \mathcal{N}^* = \mathbb{R}\mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{N}, \mathcal{D}_X)[n].$$

On peut aussi définir les faisceaux  $\mathcal{D}_X(r)$  et  $\mathcal{D}_X\{r\}$  comme les sous-faisceaux de  $\mathcal{D}_X^\infty$  des opérateurs différentiels d'ordre infini qui vérifient les majorations (2.2.1) et (2.2.2) respectivement. On a alors la formule :

$$\mathbb{R}\mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X(r) \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{N}) \approx \mathbb{R}\mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{D}_{X \times X}}(\mathcal{M} \hat{\otimes} \mathcal{N}^*, \mathcal{B}_{X|X \times X}(r))$$

(et de même avec  $\{r\}$  au lieu de  $(r)$ )

qui permet de calculer les indices  $\chi_x(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X(r) \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{N})$  et  $\chi_x(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X\{r\} \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{N})$ .

#### 2.4. Irrégularité. Cas de la dimension 1.

Lorsque  $X$  est de dimension 1, Malgouyres a défini l'irrégularité d'un système d'équations différentielles comme la différence entre les indices formels et convergents [10].

On peut de même définir, pour un  $\mathcal{D}_X$ -module holonôme, son irrégularité en un point  $x$  par :

$$\text{Irr}_x(\mathcal{M}) = (-1)^n E_{\text{Car}_{\Lambda_x}^{(\infty)}}(\mathcal{M})(x) - (-1)^n E_{\text{Car}_{\Lambda_x}^{\{1\}}}(\mathcal{M})(x).$$

D'après les résultats de Kashiwara - Kawai ([4]), si sur un ouvert de  $X$ , l'irrégularité de  $\mathcal{M}$  est nulle en tout point,  $\mathcal{M}$  est singulier régulier sur cet ouvert.

Plus généralement on peut définir l'irrégularité de  $\mathcal{M}$  par rapport à une sous-variété  $Y$  de  $X$  en remplaçant  $\Lambda_x = T_{\{x\}}^* X$  par  $\Lambda = T_Y^* X$ .

Dans le cas de la dimension 1, avec  $\Lambda = T_{\{x\}}^* X$ ,  $T^*\Lambda$  est de dimension 2 et

à cause de la bihomogénéité, les seules composantes irréductibles possibles pour les variétés microcaractéristiques sont  $\sum_1 = T_\Lambda^* \Lambda$  (section nulle de  $T^*\Lambda$ ) et

$$\sum_2 = T_{\{X\}}^* \Lambda.$$

Pour un opérateur les indices se calculent facilement :  $\sigma^{(r)}(P)$  est de la forme  $x^{*\alpha} x^\beta$  et  $E_{\text{Car}_\Lambda(r)}(P)(x)$  est égal à  $\alpha - \beta$  (et de même pour  $\{r\}$ ).

On retrouve ainsi les résultats de Ramis ([12], [13]) (déjà montrés par Malgrange pour  $r = 1$  et  $r = \infty$ ).

### 3. b-fonction

Si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{D}_X$ -module holonôme, nous avons vu que  $\text{Ch}_\Lambda(\infty)(\mathcal{M})$  est lagrangien. On en déduit facilement l'existence d'une b-fonction relative à  $Y$  pour  $\mathcal{M}$  :

Théorème 3.1. : Si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{D}_X$ -module holonôme et  $Y$  une sous-variété de  $X$ ,  $\mathcal{M}$  admet une b-fonction, i.e. il existe  $b(\theta)$  polynôme en  $\theta$  et  $\mathcal{M}_0$   $\mathcal{O}_X$ -module cohérent tels que

- a)  $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X \mathcal{M}_0$
- b)  $b(\theta) \mathcal{M}_0 \subset F_\infty^{-1} \mathcal{D}_X \mathcal{M}_0$

( $F_\infty \mathcal{D}_X$  est la filtration du §.1.3 tandis que si  $Y$  est d'équation  $\{x \in X / x_1 = \dots x_d = 0\}$ ,  $\theta$  est l'opérateur  $\sum_{i=1}^d x_i D_{x_i}$  ;  $\theta$  est canonique dans  $F_\infty^0 \mathcal{D}_X / F_\infty^{-1} \mathcal{D}_X$ ).

Corollaire 3.2. : Si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{D}_X$ -module holonôme, il existe  $r_0$ ,  $1 \leq r_0 < +\infty$  tel que :

$$\mathbb{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X} (\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}) = \mathbb{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X} (\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X} \{r_0\}).$$

Remarque 3.3. : Kashiwara et Kawai avaient démontré dans [5], un résultat plus fort dans le cas où  $\mathcal{M}$  est singulier régulier ; dans ce cas la b-fonction du théorème 3.1. vérifie :

$$b(\theta) \mathcal{M}_0 \subset (F_\infty^{-1} \mathcal{D}_X) \cap (\mathcal{D}_X^{(m)} \cdot \mathcal{M}_0)$$

où  $m$  est le degré en  $\theta$  de  $b$  et  $\mathcal{D}_X^{(m)}$  le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre inférieur ou égal à  $m$  (ordre au sens usuel).

On en déduit que dans le Corollaire 3.2. on peut prendre  $r_0 = 1$  ce qui redémontre le résultat de [4] à savoir que si  $\mathcal{M}$  est singulier régulier on a :

$$\mathbb{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X} (M, \mathcal{B}_{Y|X}) = \mathbb{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X} (M, \mathcal{B}_{Y|X}^\infty) .$$

Bibliographie

- [1] J.L. BRYLINSKY, A. DUBSON, M. KASHIWARA :  
*Formule de l'indice pour les modules holonomes et obstruction d'Euler locale* ,  
C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, Math, 293 (1981), p. 573-576.
- [2] M. KASHIWARA : *Systems of Microdifferential Equations* ,  
Progress in Mathematics Vol. 34, Birkhäuser (1983).
- [3] M. KASHIWARA :  
*Vanishing cycle sheaves and holonomic systems of differential equations* ,  
Conf. Franco-Japonaise - Oct. 82 - A paraître (in Lect. Notes in Math. Springer).
- [4] M. KASHIWARA, T. KAWAI :  
*On the holonomic systems III. Systems with regular singularities* ,  
Publ. R.I.M.S. 17 (1981), p. 813-979.
- [5] M. KASHIWARA, T. KAWAI :  
*Second microlocalization and asymptotic expansions* ,  
Lecture Notes in Physics, 126, p. 21-76, Springer.
- [6] M. KASHIWARA, P. SCHAPIRA :  
*Problème de Cauchy dans le domaine complexe* ,  
Inv. Math. 46, (1978), p. 17-38.
- [7] Y. LAURENT :  
Thèse à l'Université Paris-Sud (1982), à paraître.
- [8] Y. LAURENT :  
Article en préparation.
- [9] Y. LAURENT, P. SCHAPIRA :  
Article en préparation.
- [10] B. MALGRANGE :  
*Sur les points singuliers des équations différentielles* ,  
L'Enseignement Mathématique, t. XX, 1-2, (1974), p. 147-176.
- [11] T. MONTEIRO - FERNANDES :  
*Constructibilité des solutions des systèmes microdifférentiels* ,  
Journées "Equations aux dérivées partielles", St Jean de Monts 1982.  
Publ. Ecole Polytechnique, Paris.

- [12] J.P. RAMIS :  
*Déviissage Gevrey* ,  
Astérisque S.M.F. 59-60 (1978), p. 173-204.
- [13] J.P. RAMIS :  
*Gevrey pour les équations différentielles ordinaires* ,  
Publication de l'IRMA, Strasbourg (1982).