Astérisque

FOUAD EL ZEIN

Suites spectrales de structures de Hodge mixtes

Astérisque, tome 130 (1985), p. 308-329
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__130__308_0>

SUITES SPECTRALES DE STRUCTURES DE HODGE MIXTES

Fouad EL ZEIN

I.- Complexe de Hodge mixte filtré (CHMF)

II.- La filtration τ sur l'homologie.

III.- Structures de Hodge mixte (SHM) d'une singularité isolée.

Abstract

We are concerned with the mixed Hodge structure (MHS) on the cohomology of an algebraic variety. First we define the notion of filtered mixed Hodge complex (FMHC) giving rise to spectral sequences in the category of MHS [E I]. Then we show that the filtration τ on the dualizing complex (resp. intersection complex) of an algebraic variety with isolated singularities gives rise to a spectral sequence of MHS. Finally we recall an interpretation of the purity theorem ([DI] , [D II]) for an isolated singularity [MHS II] , [MHS III].

INTRODUCTION

Dans cet article, nous exposons divers résultats récents dans la théorie des structures de Hodge mixtes (SHM). D'abord, nous présentons une version simplifiée de la notion de complexe de Hodge mixte filtré (CHMF) qui permet d'obtenir des suites spectrales de (SHM). Rappelons qu'à l'origine, ce travail [E I] a permis de démontrer que la dégénérescence des variations de SHM d'origine géométrique est diagonale [E] , [E II] et [E III] .

Dans le deuxième paragraphe nous reprenons l'étude de la filtration canonique τ sur l'homologie [M] , [N] et [MHS III, §III] , à l'aide des techniques de [MHS III] et [MHS II] .

A l'origine Verdier a suggéré de comparer τ avec le poids W.

Dans le cas d'une singularité isolée, τ est une filtration par des sous-SHM. Au paragraphe 3, nous revenons sur l'étude de la SHM sur la cohomologie locale d'une singularité isolée, où les applications des résultats de [MHS II] ont été les plus intéressantes pour traiter la théorie de pureté.

1.- COMPLEXE DE HODGE MIXTE FILTRÉ (CHMF)

Dans la définition de la catégorie dérivée bifiltrée ([H II], [H III]), les deux filtrations jouent un rôle symétrique grâce au lemme de Zassenhaus ([H II], 12.1). Cela n'est pas possible pour trois filtrations.

1.1.- Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, $F_3\mathcal{A}$ la catégorie des objets trifiltrés de filtrations finies de $\mathcal{A}$, et $K^+F_3\mathcal{A}$ la catégorie des complexes trifiltrés bornés inférieurement d'objets de $\mathcal{A}$, à homotopie respectant les filtrations près.

DÉFINITION 1.2.- i) Un morphisme dans $K^+F_3\mathcal{A}$

$$f : (K,F_1,F_2,F_3) \longrightarrow (K',F'_1,F'_2,F'_3)$$

est appelé un quasi-isomorphisme s'il vérifie la propriété suivante :

(1.2.1) Pour tous entiers $i \leq j$ les morphismes

$$f^i_j : (F^i_1K/F^j_1K,\ F_2,\ F_3) \longrightarrow (F'^i_1K'/F'^j_1K',\ F'_2,\ F'_3)$$

sont des quasi-isomorphismes bifiltrés.

(ii) La catégorie obtenue en inversant les quasi-isomorphismes ci-dessus dans $K^+F_3\mathcal{A}$, est la catégorie dérivée trifiltrée $D^+F_3\mathcal{A}$.

Remarque 1.3.- i) La propriété (1.2.1) implique en particulier que le morphisme $f : (K, F_2, F_3) \longrightarrow (K', F'_2, F'_3)$ est un quasi-isomorphisme bifiltré, car les filtrations considérées sont finies sur tout objet de $\mathcal{A}$.

(ii) Soit T un foncteur exact à gauche d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ dans une catégorie abélienne $\mathcal{B}$. Un raisonnement analogue à celui dans ([H II], 1.4.2 et 1.4.3), montre que le foncteur dérivé $\mathbb{T}: D^+F_3\mathcal{A} \longrightarrow D^+F_3\mathcal{B}$ est bien défini. On prouve, si $Gr_{F_3} Gr_{F_2} F^i_1A/F^j_1A$ est un objet T-acyclique.

(1.3.1) $$Gr_{TF_3} Gr_{TF_2} ((T F_1)^i TA/(T F_1)^j TA) \simeq Gr_{TF_3} (T\, Gr_{F_2} (F^i_1A/F^j_1A)) \simeq T\, Gr_{F_3} Gr_{F_2} (F^i_1A/F^j_1A)$$

DÉFINITION 1.4.- Un complexe de Hodge mixte filtré (CHMF) consiste en α) Un complexe $K_{\mathbb{Z}} \in \mathrm{Ob}\, D^+(\mathbb{Z})$ tel que $K^k(K_{\mathbb{Z}})$ soit un $\mathbb{Z}$-module de type fini pour tout k .

β) Un complexe bifiltré $(K_{\mathbb{Q}}, W^f, W) \in \mathrm{Ob}\, D^+F_2(\mathbb{Q})$ et un isomorphisme $K_{\mathbb{Q}} \simeq K_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$ dans $D^+\mathbb{Q}$(W est une filtration croissante par le poids et W^f est une filtration croissante par le "poids fini").

γ) Un complexe trifiltré $(K_{\mathbb{C}}, W^f, W, F) \in \mathrm{Ob}\, D^+F_3(\mathbb{C})$ et un isomorphisme $\alpha : (K_{\mathbb{C}}, W^f, W) \simeq (K_{\mathbb{Q}}, W^f, W) \otimes \mathbb{C}$ dans $D^+F_2(\mathbb{C})$
(F est une filtration décroissante de "Hodge").

L'axiome suivant devant être vérifié :

(1.4.1) Pour tous entiers $j \leq i$, le système suivant est un CHM

$$(W_i^f K_{\mathbb{Q}}/W_j^f K_{\mathbb{Q}}, W),\ (W_i^f K_{\mathbb{C}}/W_j^f K_{\mathbb{C}}, W, F),\ (W_i^f K_{\mathbb{Q}}/W_j^f K_{\mathbb{Q}}, W) \otimes \mathbb{C} \overset{\alpha_j^i}{\simeq} (W_i^f K_{\mathbb{C}}/W_j^f K_{\mathbb{C}}, W)$$

1.5.- De même on définit un CHMCF (cohomologique filtré) sur un espace topologique X. Avec les notations de 1.4, on prend
$K_{\mathbb{Z}} \in \mathrm{Ob}\, D^+(X, Z)$, $(K_{\mathbb{Q}}, W^f, W) \in \mathrm{Ob}\, D^+F_2(X, \mathbb{Q})$ et $(K_{\mathbb{C}}, W^f, W, F) \in \mathrm{Ob}\, D^+F_3(X, \mathbb{C})$
en exigeant que le quotient W_i^f/W_j^f soit un CHMC sur X.

LEMME 1.6.- *Le foncteur dérivé* Γ *des sections globales sur* X *fait correspondre à un* CHMCF *un* CHMF.

En effet, d'après (1.3.1) et pour $j \leq i$

$$Gr_{\Gamma F}\, Gr_{\Gamma W}\, (\Gamma W_i^f A/\Gamma W_j^f A) \simeq Gr_{\Gamma F}\, Gr_{\Gamma W}(\Gamma(W_i^f A/W_j^f A)) \simeq \Gamma Gr_F\, Gr_W(W_i^f A/W_j^f A) \quad .$$

LEMME 1.7.- *Soit* (K, W^f, W, F) *un* CHMF.

i) *Pour tous entiers* n, i et $j \leq i$, *les filtrations* W[n] *et* F *sur* $H^n(K)$ (resp. sur $H^n(W_i^f K)$ et $H^n(W_i^f K/W_j^f K)$) *définissent une* SHM.

ii) *La suite exacte courte*

$$0 \longrightarrow W_j^f K \longrightarrow W_i^f K \longrightarrow W_i^f K/W_j^f K \longrightarrow 0$$

engendre une suite exacte longue de SHM.

$$(1.7.1) \qquad \dots \to H^n(W_j^f K) \to H^n(W_i^f K) \to H^n(W_i^f K/W_j^f K) \to H^{n+1}(W_j^f K) \to \dots$$

Preuve : Pour tous entiers n et i , il existe j assez petit tel que $W_j^f K^r = 0$ en degré $r \in [n-1, n+1]$, alors le morphisme canonique $H^n(W_i^f K) \xrightarrow{\sim} H^n(W_i^f K/W_j^f K)$ est un isomorphisme bifiltré. Le terme de droite étant la cohomologie d'un CHM (1.4.1), les filtrations W[n] et F définissent une SHM qui se transporte sur le terme de gauche. En particulier, pour i assez grand, $H^n(K)$ est aussi muni d'une SHM.

Pour démontrer (1.7.1) on considère le cône $C(i^f)$ de l'injection $i^f : W_j^f K \longrightarrow W_i^f K$ et on vérifie par un calcul simple que la projection

$$\pi : C(i^f) = T W_j^f K \oplus W_i^f K \longrightarrow W_i^f K / W_j^f K \quad , \ (T = \text{translaté à gauche})$$

bien que n'étant peut-être pas un quasi-isomorphisme bifiltré pour W et F, est toutefois un quasi-isomorphisme filtré pour W et F séparément. L'isomorphisme sur la cohomologie, induit par π, est alors nécessairement bifiltré.

Considérons le morphisme canonique $\gamma : C_M(i^f) \longrightarrow C(i^f)$ qui respecte W et F

$$W_k C_M(i^f) = W_{k-1} \cap T W_j^f \oplus W_k \cap W_i^f \longrightarrow W_k C(i^f) = W_k \cap T W_j^f \oplus W_k \cap W_i^f$$

Le morphisme composé $\pi \circ \gamma$ induit un isomorphisme respectant les filtrations, et par conséquent un isomorphisme de SHM : $H^n(C_M(i^f)) \longrightarrow H^n(W_i^f K / W_j^f K)$.

La suite exacte (1.7.1) se déduit alors de celle associée au cône mixte $C_M(i^f)$ (MHS II, §0,3.4).

THÉORÈME 1.8.- *Soit* (K, W^f, W, F) *un* CHMF. *Alors la cohomologie* $H^n(K)$ *possède les propriétés suivantes :*

i) *Les filtrations* $W[n]$ *et* F *définissent une* SHM.

ii) *Sur les termes de la suite spectrale définie par* $(K_{\mathbb{Q}}, W^f)$

(1.8.1) $$E_r^{pq} = Gr_{-p}^{W^f} H^{p+q}(W_{-p+r-1}^f K / W_{-p-r}^f K)$$

La filtration récurrente W_{rec} *et la filtration* W *induite par la formule* (1.8.1) *coïncident; de même, sur* $E_r^{pq}(K_{\mathbb{C}}, W^f)$ *la filtration récurrente* F_{rec} *et la filtration* F *induite par* (1.8.1) *coïncident. Alors pour* $r \geq 1$, $(E_r^{pq}, W[p+q], F)$ *forme une* SHM *et les différentielles* d_r *sont des morphismes de* SHM .

iii) *La filtration* W^f *est une filtration par des sous-*SHM *et l'on a*

(1.8.2) $$(Gr_{-p}^{W^f} H^{p+q}(K), W[p+q], F) \simeq (E_\infty^{pq}, W[p+q], F).$$

Preuve : i) On a vu dans (1.7.1(i)) que les filtrations $W[n]$ et F définissent une SHM sur $H^n(K)$, $H^n(W_i^f K)$ et $H^n(W_i^f K / W_j^f K)$ pour tous entiers i et $j \leq i$. De plus la filtration W_i^f sur $H^n(K)$, égale à l'image par un morphisme de SHM de $H^n(W_i^f K)$, est une filtration par des sous-SHM. ii) On vérifie (1.8.1) en explicitant la définition de E_r^{pq} dans (H II, 1.3.1). Les filtrations $W[p+q]$ et F, induites sur E_r^{pq} par (1.8.1), définissent une SHM, car la filtration W^f sur $H^{p+q}(W_{-p+r-1}^f)K / W_{-p-r}^f K)$ est une filtration par des sous-SHM. Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow W_{-p-r}^f K / W_{-p-2r}^f K \longrightarrow W_{-p+r-1}^f K / W_{-p-2r}^f K \longrightarrow W_{-p+r-1}^f K / W_{-p-r}^f K \longrightarrow 0$$

Le morphisme de connexion

$$H^{p+q}(W^f_{-p+r-1}K/W^f_{-p-r}K) \xrightarrow{\partial} H^{p+q+1}(W^f_{-p-r}K/W^f_{-p-2r}K)$$

est un morphisme de SHM (1.7.1) qui envoie le sous-espace W^f_{-p} dans W^f_{-p-r} égal à l'espace d'arrivée.

La différentielle :

$$d_r : E^{pq}_r \longrightarrow E^{p+r,q-r+1}_r = Gr^{W^f}_{-p-r} H^{p+q+1}(W^f_{-p-1}K/W^f_{-p-2r}K)$$

est induite par le morphisme de SHM composé :

$$W^f_{-p}H^{p+q}(W^f_{-p+r-1}/W^f_{-p-r}K) \xrightarrow{\partial} H^{p+q+1}(W^f_{-p-r}K/W^f_{-p-2r}K) \xrightarrow{\varphi} E^{p+r,q-r+1}_r$$

où φ est induit par l'injection $W^f_{-p-r}K \longrightarrow W^f_{-p-1}K$. La projection

$$H(E^{pq}_r, d_r) \longrightarrow E^{pq}_{r+1} = Gr^{W^f}_{-p}(W^f_{-p+r}K/W^f_{-p-r-1}K)$$

est induite par l'injection $W^f_{-p+r-1}K \longrightarrow W^f_{-p+r}K$, et respecte donc les filtrations W et F. D'où, les filtrations récurrentes sur E^{pq}_{r+1}, induites par W et F sur E^{pq}_r, coïncident avec W et F sur E^{pq}_{r+1}. Le raisonnement s'applique aussi pour E^{pq}_∞ et donne (1.8.2).

1.9.- Appendice.- Rappelons qu'à l'origine nous avons adopté dans [EI] une version légèrement différente de la notion de CHMF. Nous présentons ici les démonstrations de [EI].

DÉFINITION 1.10.- i) *Avec les notations de* 1.2 *un morphisme dans* $K^+F_3\mathcal{A}$

$$f : (K,F_1,F_2,F_3) \longrightarrow (K',F'_1,F'_2,F'_3)$$

est appelé ici un quasi-isomorphisme s'il vérifie les propriétés suivantes

1) la restriction $f_1 : (K,F_2,F_3) \to (K',F'_2,F'_3)$ de f est un quasi-isomorphisme bifiltré.
2) Les gradués $Gr^i_{F_1}(f) : Gr^i_{F_1}(K,F_2,F_3) \to Gr^i_{F'_1}(K',F'_2,F'_3)$ sont des quasi-isomorphismes bifiltrés.

ii) *On note* $D^+F'_3\mathcal{A}$ *la catégorie dérivée obtenue de* $K^+F_3\mathcal{A}$ *en inversant les quasi-isomorphismes ci-dessus.*

1.11.- La filtration décalée .- Soit (K,F) un complexe filtré. La filtration $\operatorname{Dec} F$ décalée de F ([H II] 1.3.3) est définie ainsi

$$(\operatorname{Dec} F)^p K^n = Z_1^{p+n,-p} = \ker d : F^{p+n}K^n \longrightarrow K^{n+1}/F^{p+n+1}K^{n+1}$$

on a une inclusion $(\operatorname{Dec} F)^p K^n \xhookrightarrow{i_n} F^{p+n}K^n$.

Soit $Z^p(F)K^n = \ker d : F^pK^n \longrightarrow F^pK^{n+1}$ pour toute filtration F.

On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Z^p(\mathrm{Dec}\,F)\,K^n & \xrightarrow{i_n} & Z^{p+n}(F)K^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathrm{Dec}\,F)^p\,H^n(K) & \longrightarrow & F^{p+n}\,H^n(K) \end{array}$$

qui montre que l'on a une inclusion $(\mathrm{Dec}\,F)^p \subset F^{p+n}$ dans $H^n(K)$.

Par ailleurs i_n induit un morphisme $Gr^p_{\mathrm{Dec}\,F}(K^n) \longrightarrow H^n(Gr_F^{p+n} K)$, soit $E_o^{p,n-p}(\mathrm{Dec}\,K) \longrightarrow E_1^{p+n,-p} K$, et de proche en proche des isomorphismes $E_r^{p,n-p}(\mathrm{Dec}\,K) \xrightarrow{\sim} E_{r+1}^{p+n,-p}(K)$ pour $r \geqq 1$. ([H II] , Prop. 1.3.4).

On en déduit, si la filtration F est birégulière, des isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} E_\infty^{p,n-p}(\mathrm{Dec}\,K) & \simeq & Gr^p_{\mathrm{Dec}\,F}\,H^n(K) \\ \wr\!\shortparallel & & \wr\!\shortparallel \\ E_\infty^{p+n,-p}(K) & \simeq & Gr_F^{p+n}\,H^n(K) \end{array}$$

d'où $\mathrm{Dec}\,F = F[n]$ sur $H^n(K)$.

Pour une filtration croissante W birégulière, les propriétés précédentes deviennent

$$(\mathrm{Dec}\,W)_p = \ker d : W_{p-n}\,K^n \longrightarrow (K^{n+1}/W_{p-n-1}\,K^{n+1}),\quad \mathrm{Dec}\,W)_p\,K^n \subset W_{p-n}\,K^n$$

et l'on a de proche en proche des isomorphismes

$$E_r^{p,n-p}\ (\mathrm{Dec}\,K) \simeq E_{r+1}^{p+n,-p}(K)$$

d'où

$$\mathrm{Dec}\,W = W\,[n] \quad \text{sur} \quad H^n(K) \quad .$$

Ainsi :

(1.11.1) Le poids de la SHM sur la cohomologie d'un CHM est le degré de la filtration induite par $\mathrm{Dec}\,W$, et non W .

<u>DÉFINITION 1.12</u>.- *Un* CHMF *consiste en la donnée* (α), (β) et (γ) *de* (1.4) *où cependant* $(K_{\mathbb{C}},W^f,W,F) \in \mathrm{Ob}\,D^+\,F_3'\mathbb{C}$ *et non* $D^+F_3\mathbb{C}$, *vérifiant les axiomes suivants :*

(AI)) *Le complexe obtenu en oubliant* W^f *est un* CHMC.

(AII) *Pour tout entier* n , *le système suivant est un* CHMC *sur* $\mathbb{Q}$,

$$(Gr_n^{W^f} K_{\mathbb{Q}},W),\ (Gr_n^{W^f} K_{\mathbb{C}},W,F),\ (Gr_n^{W^f}\,K_{\mathbb{Q}},W) \otimes \mathbb{C} \overset{Gr\alpha}{\simeq} (Gr_n^{W^f}\,K_{\mathbb{C}},W) \quad .$$

(AIII) $$(Gr_n^{W^f} K_{\mathbb{Q}},(\mathrm{Dec}\,W)_{ind}) \simeq (Gr_n^{W^f}\,K_{\mathbb{Q}},\mathrm{Dec}(W_{ind})).$$

Dans (AIII) la filtration $(\mathrm{Dec}\,W)_{ind}$ induite par $\mathrm{Dec}\,W$ sur Gr^{W^f} est égale à :

$$((\mathrm{Dec}\,W)_{ind})_p\, Gr_n^{W^f} K^m = \mathrm{Im}((\mathrm{Dec}\,W)_p \cap W_n^f \longrightarrow Gr_n^{W^f} K^m)$$

$$= \mathrm{Im}(W_n^f \cap (\ker d : W_{p-m} K^m \longrightarrow K^{m+1}/W_{p-m-1})$$

$$= \mathrm{Im}(\ker d : (W_n^f \cap W_{p-m})K^m \longrightarrow K^{m+1}/W_{p-m-1}) \quad \text{dans} \quad Gr_n^{W^f} K^m \quad .$$

La filtration $\mathrm{Dec}(W_{ind})$ décalée dans Gr^{W^f} de la filtration induite est égale à :

$$((\mathrm{Dec}(W_{ind})_p\, Gr_n^{W^f} K^m = \ker d : (W_{ind})_{p-m} Gr_n^{W^f} K^m \longrightarrow Gr_n^{W^f} K^{m+1}/(W_{ind})_{p-m-1}$$

$$= \ker d : (\mathrm{Im}((W_{p-m} \cap W_n^f) \longrightarrow Gr_n^{W^f} K^m) \longrightarrow (Gr_n^{W^f} K^{m+1})/\,\mathrm{Im}(W_{p-m-1}) \cap W_n^f))$$

$$= \mathrm{Im}(\ker d : (W_{p-m} \cap W_n^f) \longrightarrow W_n^f K^{m+1} / W_{n-1}^f K^{m+1} + (W_{p-m-1} \cap W_n^f)) \text{ dans } Gr_n^{W^f} K^m.$$

On voit alors que l'on a un morphisme canonique :

$$(\mathrm{Dec}\,W)_{ind} \longrightarrow \mathrm{Dec}(W_{ind}) \quad .$$

On exige dans l'axiome (A III) qu'il soit un quasi-isomorphisme.

<u>THÉORÈME 1.13</u>.- *Soit* (K,W^f,W,F) *un* CHMF. *La cohomologie* $H^n(K)$ *possède les propriétés suivantes :*

i) *Les filtrations* W *et* F *définissent une* SHM.

ii) *Sur les termes* ${}_{W^f}E_r$ *de la suite spectrale définie par* $(K_{\mathbb{Q}},W^f)$ *la filtration récurrente et les deux filtrations directes définies par* Dec W *coïncident ; de même, sur les* ${}_{W^f}E_r(K_{\mathbb{C}})$ *la filtration récurrente et les deux filtrations directes définies par* F *coïncident. On notera ces filtrations* $W[p+q]$ *et* F *sur* $E^{p,q}$ *; alors pour* $r \geqq 1$, $({}_{W^f}E_r^{p,q}.\ W[p+q],\ F)$ *forme une* SHM *et les différentielles* d_r *sont des morphismes de* SHM .

iii) *La filtration* W^f *est une filtration par des sous-*SHM *et on a*

$$Gr_{-p}^{W^f} H^{p+q}(K,W[p+q].F) \simeq ({}_{W^f}E_\infty^{p,q},\ W[p+q],F) \quad .$$

<u>Démonstration</u> : La SHM sur $H^n(K,W,F)$ se déduit de la théorie des CHM de Deligne en appliquant ([H III] , 8.1.9) à (1.12,(AI)). On va déduire (ii) de (1.3, A II et A III) à l'aide du lemme des deux filtrations ([H II] ,1.3.16) appliqué aussi bien à $(W^f,\mathrm{Dec}\,W)$ qu'à (W^f,F). Etudions ${}_{W^f}E_\circ^{p,\cdot} = Gr_{-p}^{W^f} K[p]$.

La suite spectrale $E_r(Gr_{-p}^{W^f} K,W_{ind})$ dégénère en $E_2(E_2 = E_\infty)$ car W_{ind} est la filtration par le poids d'un CHM (1.12,A II) et ([H III] .8.1.9). Donc, la suite spectrale $E_r(Gr_{-p}^{W^f} K,\mathrm{Dec}(W_{ind}))$ dégénère en $E_1(E_1 = E_\infty)$ ([H II] 1.3.4 ou n°1. 11).

d'après le quasi-isomorphisme filtré (1.12,A III)

$$(Gr^{W^f}_{-p} K, (\mathrm{Dec}\, W)_{ind}) \xrightarrow{\approx} (Gr^{W^f}_{-p} K. \mathrm{Dec}(W_{ind}))$$

la suite spectrale $E_r(Gr^{W^f}_{-p} K, (\mathrm{Dec}\, W)_{ind})$ est isomorphe à $E_r(Gr^{W^f}_{-p} K, \mathrm{Dec}(W_{ind}))$ et dégénère aussi en E_1. On déduit que les différentielles de ${}_{W^f}E_o(K)$ sont strictement compatibles avec la filtration $(\mathrm{Dec}\, W)_{ind}$ ([H II]. 1.3.2).

Elles le sont aussi pour F car la suite spectrale $E_r(Gr^{W^f}_{-p} K,F)$ dégénère en E_1 ([H III] .8.1.9) et (1.12,A I)) . Les deux filtrations directes et la filtration récurrente définies par Dec W (resp. F) coïncident aussi bien sur ${}_{W^f}E_o$ ([H II] , 1.3.10,1.3.11 i) que sur ${}_{W^f}E_1$ ([H II] 1.3.10, 1.3.13 iii).
Etudions ${}_{W^f}E_1^{p,q} = H^{p+q}(Gr^{W^f}_{-p} K)$.

Les termes ${}_{W^f}E_1$ s'identifient à la cohomologie du CHM $Gr^{W^f}_{-p}$ (1.12,A II) .
Sur ${}_{W^f}E_1^{p,q}$ les filtrations $W[p+q] = \mathrm{Dec}\, W$ (1.2) et F définissent donc une SHM ([H III] , 8.1.9). Les différentielles de ${}_{W^f}E_1$ qui sont compatibles avec ces filtrations ([H II] ,1.3.13 i), le sont nécessairement strictement.
Le raisonnement de récurrence devient clair. Supposons que les deux filtrations directes et la filtration récurrente déduites de Dec W (resp. F) coïncident sur ${}_{W^f}E_r^{p,q}$ qui se trouve muni ainsi d'une SHM et que les différentielles d_r , respectant les filtrations, sont strictes.

D'après ([H II] 1.3.16) les trois filtrations déduites de Dec W (resp. F) coïncident sur ${}_{W^f}E_{r+1}^{p,q}$, qui se trouve muni ainsi d'une SHM déduite de celle des termes E_r ([H II] 2.3.5). Les différentielles d_{r+1} respectent ces filtrations ([H II] 1.3.13 i) et en tant que morphismes de SHM, les d_{r+1} sont strictes.
iii) Sur les termes ${}_{W^f}E_\infty$, la filtration induite par Dec W (resp F) de $H^*(K)$, les deux filtrations directes et la filtration récurrente définies par Dec W (resp. F) coïncident ([HII]) corol. 1.3.17) :

$$(Gr^{W^f} H^*(K_{\mathbb{Q}}), \mathrm{Dec}\, W) = ({}_{W^f}E_\infty(K_{\mathbb{Q}}), \mathrm{Dec}\, W)$$
$$(Gr^{W^f} H^*(K), F) = ({}_{W^f}E_\infty(K), F)$$

Sur un groupe de cohomologie $H^n(K)$ les filtrations Dec W et W [n] coïncident (1.2). Le lemme suivant ([HIII]) 8.1.18) permet de conclure la démonstration.

<u>LEMME 1.14</u>.- *Soit* H = (H,W,F) *une* SHM. *Pour qu'une filtration* W^f *de* H *provienne d'une filtration de* H *dans la catégorie abélienne des* SHM , *il faut et il suffit que pour tout* n , $(Gr^{W^f}_n H , Gr^{W^f}_n W , Gr^{W^f}_n F)$ *soit une* SHM.

1.15.- Pour définir un CHMCF sur un espace topologique X, on adapte la définition

(1.12) d'un CHMF, en énonçant l'axiome (A III) comme suit

(1.15.1) Pour tout entier n : $(Gr_n^{W^f}\Gamma(X,K_{\mathbb{Q}}),(\mathrm{Dec}\,W)_{ind}) \simeq (Gr_n^{W^f}\Gamma(X,K_{\mathbb{Q}}), \mathrm{Dec}(W_{ind}))$.

Alors si K est un CHMCF sur X, le complexe $\Gamma(X,K)$, sections globales dans la catégorie dérivée, est un CHMF.

PROPOSITION 1.15.- *Soient* $\varphi : (K,W^f,W,F) \longrightarrow (K',W'^f,W',F')$ *un morphisme de* CHMF *dans* $D^+F_3'\mathcal{A}$, *et* $C_M^m(\varphi)$, *pour tout entier* $m \geq 0$, *le cône sur* φ *mixte en* W *muni des filtrations*

$$W_n^f = C(W_{n-m}^f K \xrightarrow{\varphi} W_n'^f K'),\quad W_n = C(W_{n-1} K \xrightarrow{\varphi} W_n' K'),\quad F^n = C(F^n K \to F'^n K') .$$

Alors $C_M^m(\varphi)$ est un CHMF.

Preuve : L'axiome (A I) est simple à vérifier et (A II) se déduit de la formule

$$(Gr_n^{W^f} C_M^m, W, F) \simeq (Gr_{n-m}^{W^f} K[1], W[1], F) \oplus (Gr_n^{W'^f} K', W', F') .$$

La différentielle est la somme directe à droite pour $m > 0$ et celle du cône sur $Gr_n^{W^f}(\varphi)$ pour $m = 0$. Dans les deux cas on a un CHM. Vérifions l'axiome A III. On a

$$(\mathrm{Dec}\,W)_p\,(C_M^m)^n = \ker d : W_{p-n-1}K^{n+1} \oplus W'_{p-n} K'^n \longrightarrow K^{n+2}/W_{p-n-2} \oplus K'^{n+1}/W'_{p-n-1}$$

d'où

(1.15.1).- $(\mathrm{Dec}\,W)\ C_M^m = ((\mathrm{Dec}\,W)\,K)\ [1] \oplus (\mathrm{Dec}\,W')K'$

est une somme directe. De même :

$$\mathrm{Dec}(W_{ind})\ (Gr_n^{W^f} C_M^m) = (\mathrm{Dec}(W_{ind})\ Gr_{n-m}^{W^f} K)\ [1] \oplus \mathrm{Dec}(W_{ind})\ Gr_n^{W^f}\ K'$$

est une somme directe. D'où il suffit que l'axiome soit vrai sur chaque composante.

Remarque 1.16.- La filtration $\mathrm{Dec}\,W$ d'un cône mixte en W est la somme directe des filtrations $\mathrm{Dec}\,W$ des composantes ; ce qui éclaircit la suite exacte de SHM associée au cône mixte.

1.17.- Foncteur diagonal.- On définit un CHMFDG différentiel gradué K comme en ([H III] 8.1.10). Le complexe K peut être vu comme un double complexe : le premier degré est celui du complexe, le second est celui défini par la graduation des modules DG.
On exige que, pour chaque p, la composante $(K^{\cdot p}, W^f, W, F)$ de second degré p de K soit un CHMF.

1.18.- On construit un foncteur δ : CHMFDG $\longrightarrow$ CHMF qui associe à un complexe K le complexe simple associé sK. Soit L la filtration par le second degré de sK. On prend pour filtration W^f et W sur δK les filtrations diagonales

$\delta(W^f,L)$, $\delta(W,L)$ ([H III] 7.1.6) et pour F la filtration évidente. On appelle δK la diagonale de K. Désignons par $(K,W)[i,j]$ un décalage i fois à gauche de K et j fois à droite de W.

PROPOSITION 1.19.-

i) *Avec les notations ci-dessus, on a les formules*

1) $(Gr_n^{\delta(W^f,L)}(\delta K,\delta(W,L)) \simeq \oplus_p (Gr_{n+p}^{W^f} K^{\cdot p}, W)\ [-p,-p]$

2) $Gr_n^{\delta(W,L)}(\delta K,\delta(W^f,L)) \simeq \oplus_p (Gr_{n+p}^{W} K^{\cdot p}, W^f)\ [-p,-p]$,

ii) *La diagonale d'un* CHMFDG *est un* CHMF.

iii) *Supposons que la suite exacte suivante est un triangle bifiltré pour tout*

$$(W_i^f K^{\cdot,p}, W, F) \longrightarrow (W_{i+1}^f K^{\cdot,p}, W, F) \longrightarrow (Gr_{i+1}^{W^f} K^{\cdot,p}, W, F)$$

alors la suite correspondante pour $\delta(W^f,L)$ *sur* δK *l'est aussi.*

Démonstration : L'assertion i) peut être facilement vérifiée. Pour obtenir ii) on vérifie les différents axiomes de (1.12) pour δK. L'axiome A I se déduit de i)2) et l'axiome A II de i)1). On prouve A III.

Désignons par $Dec_1 W$ la décalée de W sur K ([H III] 8.1.10). Elle induit une filtration notée aussi $Dec_1 W$ sur δK qui est la somme disjointe $\oplus_b (K^{\cdot,b}, Dec(W/K^{\cdot b}))$. On a $(\delta K, Dec\delta(W,L)) \simeq (\delta K, Dec_1 W)$ ([H III] 8.1.16.1).

En effet on a

$(Dec\delta(W,L))_p\ K^{a,b} =$

$\ker d : \delta(W,L)_{p-(a+b)} K^{a,b} \longrightarrow K^{a,b+1}/\delta(W,L)_{p-a-b-1} \oplus K^{a+1,b}/\delta(W,L)_{p-a-1-b}$

$= \ker d : W_{p-a} K^{a,b} \longrightarrow K^{a,b+1}/W_{p-a} \oplus K^{a+1,b}/W_{p-a-1}$

$= \ker d : W_{p-a} K^{a,b} \longrightarrow K^{a+1,b}/W_{p-a-1} = Dec(W/K^{\cdot,b})_p K^{a,b}$

car la différentielle $K^{a,b} \longrightarrow K^{a,b+1}$ préserve W_{p-a} .

On a $(Gr_n^{\delta(W^f,L)} \delta K, (Dec\delta(W,L)_{ind}) \simeq (Gr_n^{\delta(W^f,L)} \delta K, (Dec_1 W)_{ind})$

$\simeq \oplus_p (Gr_{n+p}^{W^f} K^{\cdot,p}, (Dec(W/K^{\cdot,p})_{ind})\ [-p,-p]$

$\simeq \oplus_p (Gr_{n+p}^{W^f} K^{\cdot,p}, Dec((W/K^{\cdot,p})_{ind}))\ [-p,-p] \simeq (Gr_n^{\delta(W^f,L)} \delta K, Dec(W_{ind}))$.

On déduit iii) du lemme suivant :

LEMME 1.20.- *Désignons pour toute filtration croissante* M , *le quotient*

M_{i+j}/M_i par $Gr^M_{i,j}$ *et considérons pour un* CHMF K' *le triangle d'objets bifiltrés*

$$(W^f_i\, K',\, W,\, F) \longrightarrow (W^f_{i+j}\, K',\, W,\, F) \longrightarrow (Gr^{W^f}_{i,j}\, K',\, W,\, F) \quad .$$

Soit K un CHMFDG. Si ce triangle bifiltré est exact pour les composantes $K^{\cdot p}$ de K alors il l'est pour K .

Démonstration : Il faut vérifier que le triangle filtré suivant est exact

$$(Gr^W_n(W^f_i\, \delta K),\, F) \longrightarrow (Gr^W_n(W^f_{i+j}\, \delta K),\, F) \longrightarrow (Gr^W_n(Gr^{W^f}_{i,j}\, \delta K),\, F)$$

On a

$$(Gr^W_n(W^f_m\, \delta K),\, F) \simeq \oplus_p\ (Gr^W_{n+p}(W^f_{m+p}\, K^{\cdot,p}),\, F)\ [-p]$$

$$(Gr^W_n\ Gr^{W^f}_{i,j}\, \delta K,\, F) \simeq \oplus_p\ (Gr^W_{n+p}\ Gr^{W^f}_{i+p,j}\, K^{\cdot,p},\, F) \quad [-p]$$

D'où il suffit de vérifier l'exactitude pour toute composante $K^{\cdot,p}$.

2.- LA FILTRATION τ SUR L'HOMOLOGIE

Nous allons étudier la filtration τ ([H II] , 1.4.6) sur l'homologie d'une variété algébrique sur $\mathbb{C}$. Nous donnons à titre d'exemple la suite spectrale de SHM associée à la filtration τ sur le complexe dualisant (resp. le complexe d'intersection) d'une variété algébrique à singularité isolée.

2.1.- Pour tout espace analytique X un complexe dualisant $K^{\mathbb{Z}}_X$ existe dans $D^+(X,\mathbb{Z})$ (resp. $D^+(X,\mathbb{Q})$, $D^+(X,\mathbb{C})$) . Pour X lisse de dimension n , il est égal à $\mathbb{Z}_X[2n]$, et pour toute sous-variété $i : Y \longrightarrow X$, on a [V]

$$i_* K^{\mathbb{Z}}_Y \simeq \mathbb{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}\,(i_*\, \mathbb{Z}_Y, K^{\mathbb{Z}}_X) \simeq \Gamma_Y\, K^{\mathbb{Z}}_X \quad \text{dans} \quad D^+(X,\mathbb{Z}) \quad .$$

DÉFINITION 2.2.- *Soit* X *un espace analytique. La filtration* τ *sur l'homologie sans support* $H_i(X,\mathbb{Z})$ *est la filtration croissante induite par* τ *sur* $K^{\mathbb{Z}}_X$ (2.1) *via l'isomorphisme* $H_i(X,\mathbb{Z}) \simeq H^{-i}(X,K^{\mathbb{Z}}_X)$.

Elle définit une filtration τ *sur* $H_i(X,\mathbb{Q})$ *et* $H_i(X,\mathbb{C})$ *par extension des scalaires.*

PROPOSITION 2.3.- *Soit* Y *un diviseur à croisements normaux* (DCN) *dans une variété algébrique* X *propre et lisse sur* $\mathbb{C}$. *La filtration canonique* τ (2.2) *et la filtration par le poids* W *coïncident sur* $H_i(Y,\mathbb{Q})$ *à un décalage d'indices près.*

Preuve : Nous avons considéré dans ([MHS II] , II.3) un complexe $\mathbb{H}_Y = s\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\Pi_* \Omega^*_Y(\cdot)\,,\,K^\bullet_X)$ construit à partir du schéma simplicial strict $\Pi : Y^{(\cdot)} \longrightarrow Y$ associé à Y , et qui est isomorphe au complexe dualisant $K^\bullet_Y$ dans la catégorie dérivée $D^+(Y,\mathbb{C})$. De plus, pour la filtration W sur $\mathbb{H}_Y$ duale de celle de $\Omega^*_Y(\cdot)$ à valeur dans $K^\bullet_X$ pur de poids zéro, on a construit un quasi-isomorphisme filtré ([MHS II] ,II.3)

$$\varphi : (\Omega^*_X(\mathrm{Log}\,Y)\,/\,\Omega^*_X)\,[-1],\ W[-1]) \longrightarrow \mathbb{H}_Y[-2n],W) \ .$$

Il est aussi, nécessairement, filtré pour τ . Les filtrations τ et W coïncident à un décalage d'indices près, sur la cohomologie du complexe de gauche ([H II] ,3.1.8). On en déduit qu'elles coïncident sur la cohomologie du complexe de droite à un décalage d'indices près.

Remarque 2.4.- La filtration τ ci-dessus, a été étudiée sous le nom de filtration de Zeeman dans [M] , où (2.3) a été démontrée.

PROPOSITION 2.5.- *Soit* Y *une variété algébrique de dimension* n *sur* $\mathbb{C}$. *Il existe un complexe* $\mathbb{A}^\bullet_Y$, *sous-jacent à un* CHM *qui calcule la* SHM *sur l'homologie* $H_i(Y,\mathbb{C})$, *et qui soit muni d'une filtration* W *tel que* :

$$\Sigma_{j\leq i}\, \mathbb{A}^j_Y \subset W_{i+2n}\, \mathbb{A}_Y$$

i.e W_{i+2n} contient toutes les "cellules" de degré $\leq i$.

Preuve : i) Supposons d'abord Y un DCN dans une variété lisse X , et considérons le complexe cosimplicial $\mathbb{A}^\bullet_Y(\cdot) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Pi_*\Omega^*_Y(\cdot),K^\bullet_X)$ ([MHS II] ,II,3) . Le complexe simple associé $\mathbb{A}^\bullet_Y$ est le complexe des sections de $\mathbb{H}_Y$ utilisé dans la preuve 2.3. Il est muni d'une filtration W duale de celle de $\Omega^*_Y(\cdot)$. Le complexe $\mathbb{A}^\bullet_{Y(k)}$ est concentré en degrés $i \in [-2n+2k,0]$, on en déduit comme dans ([MHS II] ,II.4.2) :

$$\Sigma_{j\leq i}\, \mathbb{A}^j_Y \subset W_{i+2n}\, \mathbb{A}^\bullet_Y = \Sigma_{k\leq 2n+i}\, \mathbb{A}^\bullet_{Y(k)}$$

ii) En général, soit S le lieu singulier de Y et considérons une désingularisée $f : Y' \longrightarrow Y$ tel que l'image réciproque S' de S soit un DCN d'immersion i' dans Y'.

2.5.1.- Admettons que l'on sache construire par récurrence un complexe filtré $(\mathbb{A}^\bullet_{S'},W)$ (resp. $(\mathbb{A}^\bullet_S,W)$) , sous-jacent à un CHM qui calcule la SHM sur l'homologie de S' (resp. S), tel que

$$\Sigma_{j\leq i}\, \mathbb{A}^j_{S'} \subset W_{i+2n-2}\, \mathbb{A}^\bullet_{S'}, \quad (\text{resp. } \Sigma_{j\leq i}\, \mathbb{A}^j_S \subset W_{i+2n-2}\, \mathbb{A}^\bullet_S) \ ,$$

et tel que les morphismes suivants soient définis

$$f_* : \mathbb{A}^\bullet_{S'} \longrightarrow \mathbb{A}^\bullet_S \quad \text{et} \quad i^!_* : \mathbb{A}^\bullet_{S'} \longrightarrow \mathbb{A}^\bullet_{Y'}$$

où $\mathbb{A}^\bullet_{Y'}$ est pur sur Y' lisse.

Alors, dualement à ([MHS II], IV.3.1), un complexe filtré $(\mathbb{A}^\bullet_Y, W)$, sous-jacent à un CHM qui calcule la SHM sur l'homologie de Y, est donné par le cône mixte

$\mathbb{A}^\bullet_Y = C_M(\mathbb{A}^\bullet_{S'} \xrightarrow{i^!_* - f_*} \mathbb{A}^\bullet_{Y'} \oplus \mathbb{A}^\bullet_S)$.

Alors on a $W_{i+2n}\, \mathbb{A}^\bullet_Y \supset \Sigma_{j\leq i}\, \mathbb{A}^j_Y$ comme suit

$$\begin{array}{ccccccc} W_{i+2n}\, \mathbb{A}^\bullet_Y & = & W_{i+2n-1}\, T\mathbb{A}^\bullet_{S'} & \oplus & W_{i+2n}\mathbb{A}^\bullet_{Y'} & \oplus & W_{i+2n}\,\mathbb{A}^\bullet_S \\ & & \cup & & \cup & & \cup \\ & & \Sigma_{j\leq i}(T\mathbb{A}^\bullet_{S'})^j & \oplus & \Sigma_{j\leq i}\mathbb{A}^j_{Y'} & \oplus & \Sigma_{j\leq i}\mathbb{A}^j_S = \Sigma_{j\leq i}\mathbb{A}^j_Y \end{array}$$

iii) Indiquons rapidement un cran de la récurrence ci-dessus (2.5.1).

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} S'_1 & \longrightarrow & S' & \longrightarrow & Y' \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ S''_1 & \longrightarrow & S'' & & \downarrow f \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ S_1 & \longrightarrow & S & \longrightarrow & Y \end{array}$$

où S" est une désingularisée de S et S' un DCN au-dessus de S" dans la désingularisée Y' de Y . On prend

$$\mathbb{A}_S = C_M(\mathbb{A}_{S''_1} \longrightarrow \mathbb{A}_{S''} \oplus \mathbb{A}_{S_1}) \quad .$$

Alors le morphisme $f_* : \mathbb{A}_S \longrightarrow \mathbb{A}_{S''} \longrightarrow \mathbb{A}_S$ est bien défini.

<u>COROLLAIRE 2.6.</u>- *Soit* Y *une variété algébrique de dimension* n , *alors les filtrations* τ *et* W *sur l'homologie vérifient l'inégalité*

$$\tau_i H_m(Y,\mathbb{Q}) \subset W_{2n+i-m} H_m(Y,\mathbb{Q}) \quad .$$

<u>Preuve</u> : D'après 2.5, on peut trouver un complexe filtré $(\mathbb{A}^\bullet_Y, W)$ tel que $\tau_i \mathbb{A}^\bullet_Y \subset \Sigma_{j\leq i}\, \mathbb{A}^j_Y \subset W_{i+2n}\, \mathbb{A}^\bullet_Y$ et qui calcule l'homologie de Y . On en déduit

$$\tau_i H_m(Y,\mathbb{C}) = \tau_i H^{-m}(Y,\mathbb{A}^\bullet_Y) \subset W_{i+2n} H^{-m}(Y,\mathbb{A}^\bullet_Y) = W_{i+2n-m} H_m(Y,\mathbb{C}) \quad .$$

<u>Remarque 2.7.</u>- Le résultat (2.6) ci-dessus, à un changement d'indices et notations près, a été obtenu dans [N] .

2.8.- Nous allons étudier la filtration τ sur l'homologie d'une variété algébrique X admettant un ensemble fini S de points singuliers. Soit $j : U = X-S \longrightarrow X$ l'immersion de l'ouvert lisse.

PROPOSITION 2.9.- *Considérons le complexe filtré* $(j_* \mathbb{Z}_U, \tau)$ (2.8) *dans* $D^+F(X,\mathbb{Z})$. *La suite spectrale*

(2.9.1) $\quad {}_\tau E_1^{pq} = H^{p+q}(X, Gr^\tau_{-p}\, j_* \mathbb{Z}_U) = H^{2p+q}(X, \underline{H}^{-p}(j_* \mathbb{Z}_U) \Longrightarrow Gr^\tau_{-p}\, H^{p+q}(U,\mathbb{Z})$

est une suite spectrale de SHM, *et la filtration induite par* τ , *sur* $H^*(U,\mathbb{Z})$ *est une filtration par des sous*-SHM.

Preuve : Considérons la suite exacte longue

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_X \longrightarrow j_* \mathbb{Z}_U \longrightarrow \underline{H}^1_S(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad R^i j_* \mathbb{Z}_U \simeq \underline{H}^{i+1}_S(X,\mathbb{Z}) \text{ pour } i \geqq 1.$$

Les faisceaux à support dans S étant concentrés sur un ensemble fini, on trouve

$$H^i(X, \underline{H}^j_S(X,\mathbb{Z})) = 0 \quad \text{pour } i > 0 \text{ et tout } j \ .$$

$$H^\circ(X, \underline{H}^j_S(X,\mathbb{Z}) \simeq H^j_S(X,\mathbb{Z}) \quad \text{pour tout } j \ .$$

On en déduit la suite exacte longue

(2.9.2) $\quad 0 \longrightarrow H^\circ(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^\circ(X, j_*\mathbb{Z}_U) \longrightarrow H^1_S(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X, j_*\mathbb{Z}_U) \longrightarrow 0$

et $\quad H^i(X,\mathbb{Z}) \simeq H^i(X, j_*\mathbb{Z}_U)$ pour $i \geqq 2$.

Nous munissons les groupes $H^i(X, j_*\mathbb{Z}_U)$ de la SHM définie par les isomorphismes suivants (2.9.2)

(2.9.3) $\quad H^\circ(X, j_*\mathbb{Z}_U) \simeq H^\circ(U,\mathbb{Z})$

$$H^1(X, j_*\mathbb{Z}_U) \simeq \mathrm{Coker}(H^1_S(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X,\mathbb{Z})$$

$$H^i(X, j_*\mathbb{Z}_U) \simeq H^i(X,\mathbb{Z}) \quad \text{pour } i \geqq 2 \ .$$

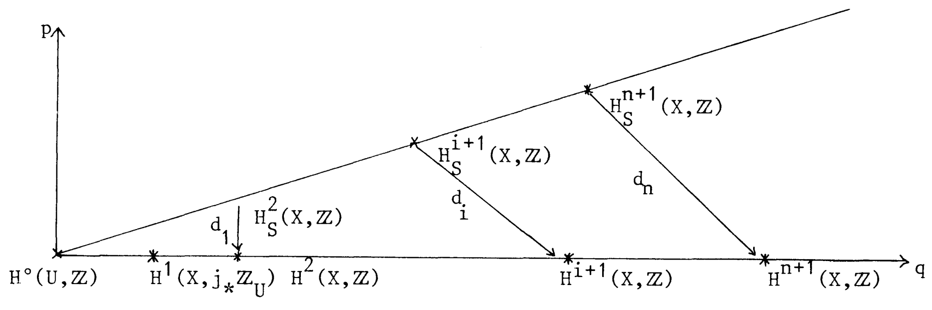
Les termes non nuls de la suite spectrale (2.9.1) sont

${}_\tau E_1^{0,q} = H^q(X, j_*\mathbb{Z}_U)$ et pour $p \leqq -1$ $\quad {}_\tau E_1^{p,-2p} = H^\circ(X, \underline{H}_S^{-p+1}(X,\mathbb{Z})) \simeq H_S^{-p+1}(X,\mathbb{Z})$.

Pour $i \geqq 2$, la suite spectrale se réduit à la suite exacte longue de SHM

(2.9.4) $\quad H^i_S(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i(U,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{i+1}_S(X,\mathbb{Z})$

$E_r^{pq}(j_*\mathbb{Z}_U, \tau)$ (2.9.1)



La filtration τ du groupe $H^i(U,\mathbb{Z})$ varie de o à i .

$\tau_o H^o(U,\mathbb{Z}) = H^o(U,\mathbb{Z})$; $i > 0$, $\tau_o H^i(U,\mathbb{Z}) = {}_\tau E_\infty^{o,i} = \mathrm{coker}(d_{i-1} : H^i_S(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i(X,\mathbb{Z}))$

$Gr^\tau_i H^i(U,\mathbb{Z}) = {}_\tau E_\infty^{-i,2i} = \ker(d_i : H^{i+1}_S(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{i+1}(X,\mathbb{Z}))$

et $Gr^\tau_j H^i(U,\mathbb{Z}) = 0$ pour $j \neq 0$ et i .

2.10.- La filtration τ sur le complexe d'intersection. Soit X dans (2.8) de dimension n . On appelle $\tau_{\leqq n-1}\, j_* \mathbb{Z}_{X-S}$ le complexe d'intersection et

$$I H^i(X,\mathbb{Z}) = H^i(X, \tau_{\leqq n-1}\, j_* \mathbb{Z}_{X-S}) \tag{2.10.1}$$

la cohomologie d'intersection de X . La suite spectrale du complexe filtré $(\tau_{\leqq n-1}\, j_* \mathbb{Z}_{X-S}, \tau)$ se déduit de celle de $(j_* \mathbb{Z}_{X-S}, \tau)$ (2.9.4) en remplaçant ${}_\tau E_1^{p,-2p} = H^{-p+1}_S(X,\mathbb{Z})$ par zéro pour $p \leqq -n$.

La suite spectrale se réduit alors pour $2 \leqq i \leqq n$ à la suite exacte longue

$$IH^{i-1}(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i_S(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow IH^i(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow \dots \longrightarrow IH^n(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

et pour $i > n$ $$IH^i(X,\mathbb{Z}) \simeq H^i(X,\mathbb{Z})$$

On en déduit une SHM sur $IH^i(X,\mathbb{Z})$ pour $i \geqq n$ (pour $i = n$, $IH^n(X,\mathbb{Z}) = \mathrm{coker}\, d^n$)
Pour $i < n$, la SHM sur $IH^i(X,\mathbb{Q})$ est, par définition, duale de celle de $IH^{2n-i}(X,\mathbb{Q})$.

PROPOSITION 2.11.- *La filtration* τ *sur* $IH^i(X,\mathbb{Z})$ (2.10.1) *est une filtration par des sous*-SHM.

$$\tau_o IH^i(X,\mathbb{Z}) = IH^i(X,\mathbb{Z}) \simeq (H^i(X,\mathbb{Z}) \quad \text{pour } i > n$$

$$\tau_o IH^i(X,\mathbb{Z}) = \mathrm{coker}(d_{i-1} : H^i_S(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i(X,\mathbb{Z})) \quad \text{pour } o < i \leqq n$$

$$\tau_o IH^o(X,\mathbb{Z}) = IH^o(X,\mathbb{Z}) = H^o(U,\mathbb{Z})$$

$$Gr^\tau_i IH^i(X,\mathbb{Z}) = \ker(d_i : H^{i+1}_S(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{i+1}(X,\mathbb{Z}) \quad \text{pour } o < i < n$$

2.12.- La filtration τ sur le complexe dualisant. Dans la catégorie dérivée de $\mathbb{Z}$-modules sur X , on a le triangle suivant [V]

$$0 \longrightarrow i_* \mathbb{Z}_S \longrightarrow K_X^{\mathbb{Z}} \longrightarrow j_* K_U^{\mathbb{Z}} \longrightarrow 0 \tag{2.12.1}$$

où $\mathbb{Z}_S$, concentré sur S , est quasi-isomorphe à $\underline{\Gamma}_S K_X^{\mathbb{Z}}$, et $K_U^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_U[2n]$ est égal à $\mathbb{Z}$ en degré $-2n$.

La classe fondamentale de X définit un morphisme

$$c_X : \mathbb{Z}_X[2n] \longrightarrow K_X^{\mathbb{Z}}$$

induisant le cap-produit, pour $i \in [0,2n]$

$$H^{2n-i}(X,\mathbb{Z}) \simeq R^{-i}\Gamma(X,\mathbb{Z}_X[2n]) \xrightarrow{\cup c_X} R^{-i}\Gamma(X,K_X^{\mathbb{Z}}) \simeq H_i(X,\mathbb{Z})$$

Le morphisme c_X induit sur l'ouvert lisse U un isomorphisme défini par c_U . On a d'après(2.12.1)

$Gr_p^{\tau} K_X^{\mathbb{Z}} \simeq Gr_p^{\tau} j_* K_U^{\mathbb{Z}} \simeq R^{2n+p} j_* \mathbb{Z}_U \simeq \underline{H}_S^{2n+p+1}(\mathbb{Z}_X)$ pour $-2n < p < -1$,

$Gr_{-2n}^{\tau} K_X^{\mathbb{Z}} \simeq j_*\mathbb{Z}_U$, $Gr_o^{\tau} K_X^{\mathbb{Z}} \simeq R^{2n} j_*\mathbb{Z}_U = 0$ et la suite exacte

(2.12.2) $$0 \longrightarrow Gr_{-1}^{\tau} K_X^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \underline{H}_S^{2n}(\mathbb{Z}_X) \xrightarrow{c_X} i_*\mathbb{Z}_S \longrightarrow 0 \quad .$$

On en déduit que la suite spectrale

$${}_{\tau}E_1^{pq}(K_X^{\mathbb{Z}}) = H^{p+q}(X, Gr_{-p}^{\tau} K_X^{\mathbb{Z}}) \Longrightarrow Gr_{-p}^{\tau} H_{-p-q}(X,\mathbb{Z})$$

est presque toujours égale à celle de $(j_* K_U^{\mathbb{Z}},\tau)$ et par conséquent, à un changement d'indices près, à celle de $(j_*\mathbb{Z}_U,\tau)$. On trouve pour les termes non nuls

${}_{\tau}E_1^{p,-2p} = H_S^{2n-p+1}(X,\mathbb{Z})$ pour $1 < p < 2n$, ${}_{\tau}E_1^{2n,q} = H^{q+4n}(X,j_*\mathbb{Z}_U)$ et d'après(2.12.2)

$${}_{\tau}E_1^{1,-2} = H^{-1}(X,Gr_{-1}^{\tau} K_X^{\mathbb{Z}}) \simeq \ker(c_X : H_S^{2n}(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_o(S,\mathbb{Z}))$$

où ce dernier morphisme c_X se calcule sur les voisinages V_S de S

$$H_S^{2n}(X,\mathbb{Z}) \simeq \varinjlim_{V_S} H^{2n-1}(V_S - S,\mathbb{Z}) \overset{c_{V_S - S}}{\simeq} \varinjlim_{V_S} H_1(V_S - S,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} H_o(S,\mathbb{Z})$$

c'est un morphisme de SHM. On obtient en résumé

<u>PROPOSITION 2.13</u>.- *La filtration* τ *sur le complexe dualisant* $K_X^{\mathbb{Z}}$ *de* X (2.8) *induit sur l'homologie* $H_i(X,\mathbb{Z})$ *une filtration* τ *variant de* $-2n$ *à* $-i$ *par des sous-* SHM .

2.14.- Plus précisément, considérons la suite exacte pour $i < 2n-1$ déduite de (2.9.4)

$$H_S^i(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{d_{i-1}} H^i(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{c_X} H_{2n-i}(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_S^{i+1}(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{d_i} H^{i+1}(X,\mathbb{Z})$$

On a

$$\tau_{-2n} H_{2n-i}(X,\mathbb{Z}) = {}_{\tau}E_{\infty}^{2n,-4n+i} = \operatorname{coker} d_{i-1} = \operatorname{Im} c_X \quad \text{pour} \quad 0 < i < 2n$$

$$\tau_{-2n} H_{2n}(X,\mathbb{Z}) = H_{2n}(X,\mathbb{Z}) \simeq H^{\circ}(U,\mathbb{Z})$$

$$\tau_{-2n} H_o(X,\mathbb{Z}) = H_o(X,\mathbb{Z}) = \operatorname{coker}(\ker(c_X : H_S^{2n}(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_o(S,\mathbb{Z})) \xrightarrow{d_{2n-1}} H^{2n}(X,\mathbb{Z}))$$

$$Gr^{\tau}_{-2n+i}\, H_{2n-i}(X,\mathbb{Z}) = {}_{\tau}E_{\infty}^{2n-i,-4n+2i} = \ker d_i \simeq \operatorname{coker} C_X \quad \text{pour} \quad o < i < 2n-1 \quad \text{, et}$$

$$Gr^{\tau}_{-1}\, H_1(X,\mathbb{Z}) = {}_{\tau}E_{\infty}^{1,-2} = \ker(H^{2n}_S(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{C_X+d_{2n-1}} H_o(S,\mathbb{Z}) \oplus H^{2n}(X,\mathbb{Z}))$$

2.15.- Questions. 1- Il est naturel de se poser la question de savoir si pour toute variété algébrique X sur $\mathbb{C}$, la suite spectrale du complexe dualisant filtré $(K^{\bullet}_X,\tau)$ est une suite spectrale de SHM, et si la filtration τ induite sur l'homologie $H_*(X,\mathbb{Q})$, est une filtration par des sous-SHM.
2- La même question pour le complexe d'intersection filtré $(IC^{\bullet}(X),\tau)$ et la filtration τ induite sur l'homologie d'intersection $IH_*(X,\mathbb{Q})$. Cette question demeure imprécise dans la mesure où les constructions de SHM sur les termes de la suite spectrale sont encore inconnues. Cependant, dans le cas d'une singularité isolée, nous allons obtenir l'interprétation du théorème de pureté (n°3).

Remarque 2.16.- Il est très difficile actuellement d'imaginer une axiomatique pour un système local $\mathcal{L}$ de variations de SHM sur une variété algébrique qui permet d'obtenir une SHM sur la cohomologie $H^*(X,\mathcal{L})$, et de construire celle-ci.
Nous rappelons que Deligne a formulé une notion précise de convergence d'un système local de variations de SHM ([W II] Pb 1.8.15).
C'est pour répondre à cette question dans le cas d'une variation d'origine géométrique [E],[EII] et [EIII] que nous avons développé la théorie des CHMF (n°1).
Ce problème a été étudié aussi dans [N] et [S-Z] .

3.- SHM D'UNE SINGULARITÉ ISOLÉE

Nous avons justifié dans les articles ([MHS I] et [MHS II]) l'utilisation des cônes mixtes dans la construction de la SHM sur la cohomologie d'une variété algébrique sur $\mathbb{C}$. En effet un point essentiel a été de vérifier que l'on obtient bien une SHM fonctorielle et qui coïncide avec celle de Deligne. L'application immédiate de ce travail sur la cohomologie locale d'une singularité isolée, a été de démontrer que la SHM ne dépend que du germe analytique de cette singularité ([MHS II], §IV). Les techniques de ce même travail (Prop. IV,1.2) permettent de déduire un théorème de demi-pureté (MHS [III] §III, corollary 1) du théorème de pureté de Gabber [D I] et du théorème de décomposition [D II] . Navarro présente dans ce colloque une démonstration directe qui peut être obtenue par ces méthodes.

THÉORÈME 3.1.- (Demi-pureté globale). *Soit* X *une variété algébrique propre de dimension* n *sur* $\mathbb{C}$ *admettant un ensemble fini de points singuliers ; alors pour* $i > n$, *la* SHM *sur* $H^i(X,\mathbb{C})$ *est pure de poids* i.

Preuve : Supposons X projective, et soit Y une section hyperplane lisse de X ne passant par aucun point singulier. Considérons le morphisme de SHM

$$H^i_Y(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^i(X,\mathbb{C}) \quad .$$

D'après la version du théorème de Lefschetz (SGA 4, XIV §3) par M. Artin, ce morphisme est surjectif pour $i > n$ ($H^i(X-Y,\mathbb{C}) = 0$ pour $i > n$ et $X-Y$ affine).
Puisque X est lisse au voisinage de Y , qui est aussi lisse, le morphisme de Gysin

$$G : H^{i-2}(Y,\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^i_Y(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^i(X,\mathbb{C})$$

est de type (1,1) et surjectif pour $i > n$. La SHM sur $H^{i-2}(Y,\mathbb{C})$ étant pure de poids $i-2$, on déduit l'énoncé de demi-pureté (3.1)
Le théorème reste vrai pour X propre car il est équivalent à un résultat local aux points singuliers comme on va le voir (3.2,iii), et on peut remplacer X par une variété projective sans modifier X au voisinage des points singuliers.

3.2.- Interprétation en termes de la désingularisée

PROPOSITION 3.2.- *Soit* $p : X' \longrightarrow X$ *une désingularisée de* X (3.1) *tel que* $p^{-1}(S) = S'$ *soit un* DCN *dans* X' , *et considérons la suite exacte*

(3.2.1) $\longrightarrow H^i(X,\mathbb{C}) \xrightarrow{p^*} H^i(X',\mathbb{C}) \xrightarrow{i'^*} H^i(S',\mathbb{C}) \xrightarrow{\gamma} H^{i+1}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow$ où i'^* *est la restriction pour* $i' : S' \hookrightarrow X$. *Alors il y a équivalence entre*

i) $H^i(X,\mathbb{C})$ *est pur de poids* i *pour* $i > n$

ii) *La suite* (3.2.1) *splitte en suites exactes courtes pour* $i > n$

$$0 \longrightarrow H^i(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^i(X',\mathbb{C}) \longrightarrow H^i(S',\mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

iii) $H^i(S',\mathbb{C})$ *est pur de poids* i *pour* $i \geqq n$.

La démonstration se fait par des considérations simples sur les poids dans (3.2.1).
Utiliser $\ker p^* = W_{i-1} H^i(X,\mathbb{C})$ (H III ,8.2.5) pour déduire (i) de (iii).

LEMME 3.3.- *Soit* X *une variété algébrique propre purement de dimension* n *admettant une singularité isolée* x . *Les assertions suivantes sont équivalentes*

i) $H^i(X,\mathbb{C})$ *est pur de poids* i *pour* $i > n$

ii) $H^i_x(X,\mathbb{C})$ *est de poids* $\geqq i-1$ *pour* $i > n$ *et* $Gr^W_{i-1} H^{i-1}(X-x,\mathbb{C}) \twoheadrightarrow Gr^W_{i-1} H^i_x(X,\mathbb{C})$ *est surjectif.*

iii) *Dualement* $H^i(X-x,\mathbb{C})$ *est pur de poids* i *pour* $i < n$.

iv) *Pour* $i \leqq n$, $H^i_x(X,\mathbb{C})$ *est de poids* $\leqq i$ *et*

$$Gr^W_i H^i_x(X,\mathbb{C}) \hookrightarrow Gr^W_i(H^i(X,\mathbb{C}) \quad \textit{est injectif.}$$

De plus, soient Y *le* DCN *au-dessus de* x *dans une désingularisée* X' *de* X *et* $Y^{(\cdot)}$ *le schéma simplicial strict associé à* Y . *Avec les notations de* ([MHS III] , §II.3)

v) *Le complexe suivant est exact pour* $p+q>n$ *(en particulier pour* $q \geq n$*)*

(3.3.1) $$H^q(X',\mathbb{C}) \xrightarrow{\rho} H^q(Y^{(o)},\mathbb{C}) \longrightarrow \dots \ (H^q(Y^{(p-1)},\mathbb{C}),\rho)_{p>0}$$

vi) *Le complexe suivant est exact pour* $p+q<n+1$ *(en particulier pour* $q \leq n$*)*

(3.3.2) $$H^{2p+q-2}(Y^{(-p)},\mathbb{C}),G)_{p\leq 0} \longrightarrow \dots \longrightarrow H^{q-2}(Y^{(o)},\mathbb{C}) \xrightarrow{G} H^q(X',\mathbb{C})$$

La démonstration utilise les suites exactes suivantes

(3.3.3) $$\forall j\ ,\ \longrightarrow Gr_j^W\ H^{i-1}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow Gr_j^W\ H^{i-1}(X-x,\mathbb{C}) \xrightarrow{\partial} Gr_j^W\ H_x^i(X,\mathbb{C})$$

(3.3.4) $$H_c^i(X-x,\mathbb{C}) \simeq (H^{2n-i}(X-x,\mathbb{C}))^* \quad \text{dualité de Poincaré.}$$

(3.3.5) $$H_c^i(X-x,\mathbb{C}) \simeq H^i(X,\mathbb{C}) \quad \text{pour } i>0$$

On trouve i)$\Longleftrightarrow$iii) par (3.3.4) et (3.3.5) ; i)$\Longleftrightarrow$ii) et iii)$\Longleftrightarrow$iv) par (3.3.3) ; i)$\Longleftrightarrow$v) (resp. iii) avec vi)) provient du fait que la cohomologie de (3.3.1) (resp. (3.3.2)) calcule $Gr_q^W\ H_c^i(X-x,\mathbb{C}) \simeq Gr_q^W\ H^i(X,\mathbb{C})$ pour $i=p+q>q$ (resp. $Gr_q^W\ H^i(X-x,\mathbb{C})$ pour $i=p+q-1<q$).

THÉORÈME 3.4.- (Demi-pureté locale). *Soit* (X,x) *un germe d'espace analytique purement de dimension* n *admettant une singularité isolée en* x .

i) $H_x^q(X,\mathbb{C})$ *est de poids* $<q$ *pour* $q \leq n$

ii) *Dualement,* $H_x^q(X,\mathbb{C})$ *est de poids* $\geq q$ *pour* $q>n$.

La première démonstration est déduite du théorème de décomposition [D II] et a été obtenue indépendamment dans [S] et [MHS III] . Elle utilise la construction de la SHM d'une singularité isolée à l'aide du cône mixte. On suppose implicitement dans [S] que cette SHM coïncide avec celle de Deligne. Navarro m'a informé qu'il publiera une preuve directe, évitant la difficile référence à [D II] dans ce colloque.

COROLLAIRE 3.5.- *Supposons la désingularisée* X' *du germe* (X,x) *se rétracte sur* Y' . *Alors* (3.4) *est équivalent à l'assertion suivante : le morphisme de restriction* $j^* : H^q(X',\mathbb{C}) \longrightarrow H^q(X'-Y,\mathbb{C})$ *est surjectif pour* $q<n$ *et nul pour* $q \geq n$.

Preuve : Considérons la suite exacte pour $i>0$

(3.5.1) $$H_x^i(X,\mathbb{C}) \xrightarrow{p_X^*} H_Y^i(X',\mathbb{C}) \xrightarrow{i^*\circ i_*} H^i(Y,\mathbb{C}) \xrightarrow{\partial} H_x^{i+1}(X,\mathbb{C})$$

où $i^*\circ i_*$ est le morphisme composé $H_Y^i(X',\mathbb{C}) \text{ —— } H^i(X',\mathbb{C}) \text{ —— } H^i(Y,\mathbb{C})$

Les assertions (3.2,iii) et (3.4,ii) impliquent $\partial = 0$ pour $i \geqq n$. Composant avec les isomorphismes $H^q(X',\mathbb{C}) \simeq H^q(Y,\mathbb{C})$ et $H^q(X'-Y,\mathbb{C}) \simeq H^{q+1}_x(X,\mathbb{C})$ pour $q > 1$, on trouve j^* nul pour $q \geqq n$. De même, p^*_x est nul dans (3.5.1) pour $i \leqq n$ puisque $H^i_x(X,\mathbb{C})$ est de poids $<i$ (3.4.i) et $H^i_Y(X',\mathbb{C})$ est de poids $\geqq i$, d'où j^* est surjectif pour $q < n$. Réciproquement (3.5) implique (3.4).

BIBLIOGRAPHIE

[SGA 4] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, par M. ARTIN, A. GROTHENDIECK, J.L VERDIER, Lecture notes in Math., 269,270, 305 Springer-Verlag 1972-1973.

[H II] P. DELIGNE - *Théorie de Hodge* II. Inst. Hautes Etudes Scient. Publ. Math. 40 (1972), 5-57.

[H III] P. DELIGNE - *Théorie de Hodge* III.Inst. Hautes Etudes Scient. Publ. Math. 44 (1975), 6-77.

[W II] P. DELIGNE - *La conjecture de Weil* II. Inst. Hautes Etudes Scient; Publ. Math. 52 (1980).

[D I] P. DELIGNE - *Théorème de pureté*, d'après un exposé de O. Gabber. Inst. Hautes Etudes Scient. Preprint (1981).

[D II] P. DELIGNE - Conférence "*Analyse et Topologie sur les espaces singuliers*" au C.I.R.M, Marseille-Luminy 1981, à paraître dans Astérisque N°100.

[MHS I] F. ELZEIN - *Structures de Hodge mixtes*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 292. (1981) Série I, 409-412.

[MHS II] F. ELZEIN - *Mixed Hodge structures*, Trans. Amer. Math. Soc. 275 (1983), 71-106.

[MHS III] F. ELZEIN - *Mixed Hodge structures*, Proceedings of Symposia in pure Math. (AMS) volume 40 (1983), 345-352.

[E] F. ELZEIN - *Dégénérescence diagonale*, preprint, Avril 1982.

[E I] F. ELZEIN - *Complexe de Hodge mixte filtré*, C.R Acad. Sci. Paris, t. 295 (1982) Série I, 669-672.

[E II] F. ELZEIN - *Dégénérescence diagonale* I, C.R Acad. Sci. Paris, t. 296 (1983) Série I, 51-54.

[E III] F. ELZEIN - *Dégénérescence diagonale* II, C.R Acad. Sci. Paris, t. 296 (1983) Série I, 199-202.

[N] F. GUILLEN, V. NAVARRO AZNAR et F. PUERTA - *Schémas cubiques*, Preprint Universidad Politecnica de Barcelona.

[S] J. STEENBRINK - *Mixed Hodge structures*, Proceedings of Symposia in pure Math. (AMS) volume 40 (1983).

[M] Mc CRORY - *On the topology of Deligne's weight filtration.* Proceeding of symposia in pure Math (AMS) 40.

[V] J.L VERDIER - Exposés VI et IX, Astérisque n°36-37 (1976).

[W] A. WEIL - *Variétés Kählériennes*, Publ. Inst. Math. Univ. Nancago VI, Paris, Hermann, 1958.

[S-Z] J. STEENBRINK, S. ZUCKER - *Variation of mixed Hodge structure* I - Preprint, Math. Inst. University of Leiden, Netherlands.

CNRS ERA 589

Fouad EL ZEIN

Math, Ecole Normale Supérieure

45, rue d'Ulm
75230 PARIS 05.