Astérisque

V. Navarro Aznar

Sur la théorie de Hodge des variétés algébriques à singularités isolées

Astérisque, tome 130 (1985), p. 272-307

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__130__272_0>

SUR LA THÉORIE DE HODGE DES VARIÉTÉS
ALGÉBRIQUES À SINGULARITÉS ISOLÉES

V. Navarro Aznar

INTRODUCTION

Le but de cet article est d'étudier les structures de Hodge mixtes des groupes de cohomologie $H(X)$, $H_x(X)$ et $IH(X)$, d'une variété algébrique à singularités isolées X. Notre outil essentiel, mise à part la propre théorie de Hodge, étant la résolution des singularités, nous nous occupons aussi des groupes de cohomologie $H_E(\tilde{X})$, $H(E)$ et $H(\tilde{X})$, associés à une résolution $f:\tilde{X} \to X$ de X, avec sous-espace exceptionnel E.

Puisqu'on peut relier les groupes de cohomologie antérieurs aux faisceaux de cohomologie perverse de $\mathbb{R}f_*\mathbb{C}_{\tilde{X}}$ et au faisceau pervers $IC^{\bullet}_X$, la plupart des résultats qu'on établit dans cet article: théorèmes de pureté de $IH(X)$, de Lefschetz difficile,..., sont soit des cas particuliers soit des conséquences directes des théorèmes sur les faisceaux pervers de P.Deligne, O.Gabber, A.Beilinson et I.Bernstein ([1],[7],[12]) et, dans tous les cas, ils ont été suggérés par ces théorèmes. Toutefois, l'objectif principal de la présente note est de donner des démonstrations "purement transcendentes" de ces résultats, i.e. dans le même contexte où ceux-ci sont formulés (cf.[2]).

Afin d'apporter quelques éléments nouveaux à l'exposition, j'ai mis l'accent sur le complex de de Rham filtré $\underline{\Omega}_X$ de la variété X ([6]), pour montrer comme les résultats de [10] sur l'annulation des faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^q(\underline{\Omega}^p_X)$, permettent de prouver des variantes adéquates des théorèmes de décomposition de Hodge, d'annulation de Kodaira et de Lefschetz difficile, pour les variétés complexes fortement pseudoconvexes, dans la ligne des résultats obtenus auparavant par Nakano et Grauert-Riemenschneider.

Finalement, nous continuerons sur notre lancée et étudierons de plus près le complexe de de Rham filtré des singularités rationnelles des surfaces et des singularités isolées des hypersurfaces.

Je remercie vivement J.H.M.Steenbrink, qui m'a corrigé une erreur dans la preuve de (6.1), et F.Guillén avec qui j'ai eu au sujet de cet article de nombreuses conversations qui m'ont été très utiles.

1. FAISCEAUX PERVERS

(1.1) Tous les espaces algébriques qu'on considère dans cet article sont des espaces algébriques separés et de type fini sur $\mathbb{C}$. On les appellera simplement $\mathbb{C}$-schémas. Si X est un $\mathbb{C}$-schéma, on entendra par faisceau sur X un faisceau sur l'espace analytique associé X^{an}.

Soit X un $\mathbb{C}$-schéma et soit $D(X)_c$ la catégorie derivée des complexes bornés des faisceaux de $\mathbb{C}_X$-modules avec faisceaux de cohomologie constructibles.

Si $K^\cdot$ est un objet de $D(X)_c$, nous noterons $\mathcal{H}^i(K^\cdot)$ le i-ème faisceau de cohomologie de $K^\cdot$ et ${}^p\mathcal{H}^i(K^\cdot)$ le i-ème faisceau de cohomologie perverse de $K^\cdot$, qui est un objet de la catégorie abelienne des faisceaux pervers sur X, Perv(X) (voir [1] et ses références)

(1.2) Soit X un $\mathbb{C}$-schéma purement de dimension n, Σ un sous-schéma de X de dimension 0, $\tilde{X}$ un $\mathbb{C}$-schéma lisse et $f:\tilde{X} \to X$ un morfisme propre qui est un isomorphisme en dehors de Σ. Nous noterons dans ce qui suit $E=f^{-1}(\Sigma)$, $U=X-\Sigma$ et $j:U \to X$ le morphisme d'inclusion. Rappelons ([8]) que le complexe d'intersection de X, $IC^\cdot_X$, peut être défini par

$$IC^\cdot_X = \tau_{\leq -1}(\mathbb{R}j_*\mathbb{C}_U[n]),$$

et que ce complexe est pervers et autodual dans $D(X)_c$.

Dans ce travail nous étudierons le complexe d'intersection de X, $IC^\cdot_X$, ainsi que les faisceaux de cohomologie pervers de $\mathbb{R}f_*(\mathbb{C}_{\tilde{X}}[n])$. Par exemple, si X est lisse et $f:\tilde{X} \to X$ est l'éclatement d'un point $x \in X$, on sait que

$$\mathbb{R}f_*\mathbb{C}_{\tilde{X}}[n] = \mathbb{C}_X[n] \oplus \mathbb{C}_X[n-2] \oplus .. \oplus \mathbb{C}_X[-n+2]$$

et on obtient ainsi

$$
\begin{aligned}
{}^p\mathcal{H}^i(\mathbb{R}f_*\mathbb{C}_{\tilde{X}}[n]) &\cong \mathbb{C}_X, && \text{si } i=n-2d,\ 1\leq d\leq n-1,\ i\neq 0,\\
&\cong \mathbb{C}_X[n]\oplus\mathbb{C}_X, && \text{si } i=0, \text{ et } n \text{ est pair},\\
&\cong \mathbb{C}_X[n], && \text{si } i=0, \text{ et } n \text{ est impair},\\
&\cong 0, && \text{si } i \text{ est différent des antérieurs.}
\end{aligned}
$$

En général, on a

(1.3) <u>Proposition. Avec les notations précédentes, on a</u>

$$
{}^p\mathcal{H}^i(\mathbb{R}f_*\mathbb{C}_{\tilde{X}}[n]) \simeq R^{n+i}f_*(\mathbb{R}\underline{\Gamma}_E\mathbb{C}_{\tilde{X}}), \qquad \text{si } -n<i<0,
$$

$$
{}^p\mathcal{H}^0(\mathbb{R}f_*\mathbb{C}_{\tilde{X}}[n]) \simeq IC^{\bullet}_X\oplus R^nf_*(\mathbb{R}\underline{\Gamma}_E\mathbb{C}_{\tilde{X}}),
$$

<u>et</u>

$$
{}^p\mathcal{H}^i(\mathbb{R}f_*\mathbb{C}_{\tilde{X}}[n]) \simeq R^{n+i}f_*(\mathbb{C}_{\tilde{X}}), \qquad \text{si } 0<i<n.
$$

<u>Démonstration</u>. Dans le triangle

$$
\to \tau_{\leq 0}\,\mathbb{R}f_*\mathbb{C}_{\tilde{X}}[n] \to \mathbb{R}f_*\mathbb{C}_{\tilde{X}}[n] \to \tau^{>0}\,\mathbb{R}f_*\mathbb{C}_{\tilde{X}}[n] \to^{+1}
$$

on a que

$$
\tau_{\leq 0}\,\mathbb{R}f_*\mathbb{C}_{\tilde{X}}[n] \in \mathrm{Ob}\ {}^pD^{\leq 0}
$$

et

$$
\tau^{>0}\,\mathbb{R}f_*\mathbb{C}_{\tilde{X}}[n] \in \mathrm{Ob}\ {}^pD^{>0},
$$

ainsi on a que

$$
\begin{aligned}
{}^p\mathcal{H}^i\,\mathbb{R}f_*\mathbb{C}_{\tilde{X}}[n] &\simeq {}^p\mathcal{H}^i(\tau^{>0}\mathbb{R}f_*\mathbb{C}_{\tilde{X}}[n]), && \text{si } 0<i,\\
&\simeq R^{n+i}f_*(\mathbb{C}_{\tilde{X}}), && \text{si } 0<i.
\end{aligned}
$$

Considérons la suite exacte

$$
\cdots \to H_E^{n+i}(\tilde{X}) \to H^{n+i}(E) \to (R^{n+i}j_*\mathbb{C}_U)_\Sigma \to \cdots
$$

Puisque $(R^{n+i}j_*\mathbb{C}_U)_\Sigma \cong \underline{H}^i(IC^{\bullet}_X)_\Sigma$, pour $i<0$, d'après le théorème de pureté de Gabber $(R^{n+i}j_*\mathbb{C}_U)_\Sigma$ est de poids $\leqslant n+i$, pour $i<0$, et puisque $H_E^{n+i}(\tilde{X})$ est de poids $\geqslant n+i$, on obtient les suites exactes

$$
0 \to H_E^{n+i}(\tilde{X}) \to H^{n+i}(E) \to (R^{n+i}j_*\mathbb{C}_U)_\Sigma \to 0, \text{ si } i<0,
$$

et l'injectivité du morphisme $H^n_E(\tilde{X}) \to H^n(E)$, lequel sera un isomorphisme par dualité (cf. [7], § III et [12], (1.12). Dans le § 5 ci-dessous on donnera une preuve transcendente de ces résultats).
On obtient donc un triangle

$$\to \tau_{\leqq -1}\, \mathbb{R}f_*\, \mathbb{R}\underline{\Gamma}_E \mathbb{C}_{\tilde{X}}[n], \to \tau_{\leqq -1}\, \mathbb{R}f_* \mathbb{C}_{\tilde{X}}[n] \to \tau_{\leqq -1}\, \mathbb{R}j_* \mathbb{C}_U[n] \xrightarrow{+1}$$

Si on considère aussi le triangle

$$\to \tau_{\leqq -1}\, \mathbb{R}f_* \mathbb{C}_{\tilde{X}}[n] \to \tau_{\leqq 0}\, \mathbb{R}f_* \mathbb{C}_{\tilde{X}}[n] \to \tau^{\geqq 0} \tau_{\leqq 0}\, \mathbb{R}f_* \mathbb{C}_{\tilde{X}}[n] \xrightarrow{+1}$$

puisque

$$\tau_{\leqq -1}\, \mathbb{R}f_*\, \mathbb{R}\underline{\Gamma}_E \mathbb{C}_{\tilde{X}}[n] \in \mathrm{Ob}\ {}^pD^{<0},$$

$$\tau_{\leqq -1}\, \mathbb{R}j_* \mathbb{C}_U[n] \in \mathrm{Ob}\ \mathrm{Perv}(X),$$

et

$$\tau^{\geqq 0} \tau_{\leqq 0}\, \mathbb{R}f_* \mathbb{C}_{\tilde{X}}[n] \in \mathrm{Ob}\ {}^pD^{\geqq 0},$$

on obtient les isomorphismes

$$\begin{aligned} {}^p\!H^i(\mathbb{R}f_* \mathbb{C}_{\tilde{X}}[n]) &\simeq {}^p\!H^i(\tau_{\leqq -1}\, \mathbb{R}f_*\, \mathbb{R}\underline{\Gamma}_E \mathbb{C}_{\tilde{X}}[n]), \qquad \text{si } i<0, \\ &\simeq R^{n+i} f_*(\mathbb{R}\underline{\Gamma}_E \mathbb{C}_{\tilde{X}}), \end{aligned}$$

et la suite exacte

$$0 \to IC^\bullet_X \to {}^p\!H^0(\mathbb{R}f_* \mathbb{C}_{\tilde{X}}[n]) \to R^n f_*(\mathbb{C}_{\tilde{X}}) \to 0.$$

Du morphisme

$$\tau_{\leqq 0}\, \mathbb{R}f_*\, \mathbb{R}\underline{\Gamma}_E \mathbb{C}_{\tilde{X}}[n] \to \tau_{\leqq 0}\, \mathbb{R}f_* \mathbb{C}_{\tilde{X}}[n]$$

on obtient, par passage à ${}^p\!H^0$, un morphisme

$$R^n f_*(\mathbb{R}\underline{\Gamma}_E \mathbb{C}_{\tilde{X}}) \to {}^p\!H^0(\mathbb{R}f_* \mathbb{C}_{\tilde{X}}|n|)$$

qui permet d'obtenir la décomposition

$${}^p\!H^0(\mathbb{R}f_* \mathbb{C}_{\tilde{X}}[n]) \simeq IC^\bullet_X \oplus R^n f_*(\mathbb{R}\underline{\Gamma}_E \mathbb{C}_{\tilde{X}}),$$

d'après l'isomorphisme

$$H^n_E(\tilde{X}) \simeq H^n(E).$$

(1.4) Corollaire. Si $x\in\Sigma$ et on pose $E_x = f^{-1}(x)$, alors on a

$$^{p}\mathcal{H}^i(\mathbb{R}f_*\mathbb{C}_{\tilde{X}}[n])_x \cong H^{n+i}_{E_x}(X), \qquad \text{si } -n<i<0,$$

$$^{p}\mathcal{H}^0(\mathbb{R}f_*\mathbb{C}_{\tilde{X}}[n])_x \cong IC^{\cdot}_{X,x}\oplus H_{E_x}(X),$$

et

$$^{p}\mathcal{H}^i(\mathbb{R}f_*\mathbb{C}_{\tilde{X}}[n])_x \cong H^{n+i}(E_x), \qquad \text{si } 0<i<n.$$

(1.5) Remarque. Le résultat antérieur donne l'interprètation des $H^{n-i}_E(X)$ et $H^{n+i}(E)$, $i>0$, en termes des faisceaux de cohomologie perverse $^{p}H^i(\mathbb{R}f_*\mathbb{C}_{\tilde{X}}[n])$, $i\neq 0$, citée dans l'introduction. Nous n'utiliserons par la suite ces résultats que d'une manière complémentaire dans (6.3) après avoir vu donc que nous disposons d'une preuve transcendente de (1.3).

Note. Bien que ce ne soit pas ici en principe l'endroit le plus adéquat, je profite de cet espace pour exprimer ma profonde reconnaissance envers le referee pour ses critiques constructives et pertinentes.

2. THÉORIE DE HODGE

(2.1) Si X est un $\mathbb{C}$-schéma, Deligne ([4]) a prouvé qu'on peut munir les groupes de cohomologie de X d'une structure de Hodge mixte canonique et fonctorielle, ce qui généralise la classique décomposition de Hodge de la cohomologie quand X est une variété projective non singulière.

Dans ce travail nous étudierons les structures de Hodge mixtes qu'on peut introduire naturellement sur $^{p}\mathcal{H}^i(\mathbb{R}f_*\mathbb{C}_{\tilde{X}}[n])$ et $IH^{\cdot}(X)$, avec les notations de (1.2), et nous utiliserons ces structures pour obtenir des théorèmes de décomposition du type de celui de Hodge pour la cohomologie d'une varété complexe fortement pseudoconvexe. Pour cela nous aurons aussi besoin de quelques résultats sur le complexe de de Rham filtré d'un $\mathbb{C}$-schéma que nous rappelons à la suite.

(2.2) Soit X un $\mathbb{C}$-schéma et soit $(\Omega_X^\bullet, \sigma)$ le complexe de de Rham des différentielles de Grauert-Grothendieck sur X filtré par la filtration bête σ de $\Omega_X^\bullet$. Ph.Du Bois ([6]) a prouvé qu'il existe un complexe filtré de faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules $(\underline{\Omega}_X, F)$ dans une catégorie derivée convenable, tel que:

(i) $\underline{\Omega}_X$ est une résolution de $\mathbb{C}_X$,

(ii) il existe un morphisme naturel de complexes filtrés

$$(\Omega_X^\bullet, \sigma) \to (\underline{\Omega}_X, F)$$

qui est un quasi-isomorphisme filtré si X est lisse,

(iii) $Gr_F^p \, \underline{\Omega}_X$ est un complexe de faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules à cohomologie cohérente et bornée,

(iv) si X est complet, la suite spectrale d'hypercohomologie du complexe filtré $(\underline{\Omega}_X, F)$ dégénère dans le terme E_1 et la filtration qu'induit $(\underline{\Omega}_X, F)$ sur $H^k(X)$ coïncide avec la filtration de Hodge définie par Deligne.

Et nous avons prouvé ([10], voir aussi [13]) que les complexes $\underline{\Omega}_X^p := Gr_F^p \, \underline{\Omega}_X[p]$ vérifient

(v) $\mathcal{H}^q(\underline{\Omega}_X^p) = 0$, si $p+q > \dim X$,

ce qui peut être considéré comme une généralisation du théorème d'annulation de Grauert-Riemenschneider ([9]).

(2.3) Si M est une variété complexe fortement pseudoconvexe, on designera par $f : M \to S$ la réduction de Remmert de M, ainsi f est une modification propre de S, qui est un isomorphisme en dehors d'un sous-ensemble analytique discret Σ et S est un espace de Stein normal. On posera $E = f^{-1}(\Sigma)$.

Le résultat qui suit est motivé par le Satz 4.4 de [9].

(2.4) Proposition. Soit M une variété complexe fortement pseudoconvexe, alors:

(i) Il existe un isomorphisme canonique

$$\bigoplus_{p+q=k} H^q(M, \Omega_M^p) \xrightarrow{\sim} H^k(M), \qquad \text{pour } k > \dim M,$$

(ii) <u>Si les singularités de la réduction de Remmert de M sont des singularités toroïdales, il existe un isomorphisme</u>

$$\bigoplus_{\substack{p+q=k\\ p,q\geq 1}} H^q(M,\Omega^p_M) \xrightarrow{\sim} H^k(E), \qquad \text{pour} \quad k\geq 1.$$

(iii) <u>Si les singularités de la réduction de Remmert de M sont des singularités quotients, il existe un isomorphisme canonique</u>

$$\bigoplus_{\substack{p+q=k\\ p,q\geq 1}} H^q(M,\Omega^p_M) \xrightarrow{\sim} H^k(E), \qquad \text{pour} \quad k\geq 1.$$

<u>Démonstration</u>. Les isomorphismes canoniques

$$H^q(M,\Omega^p_M) \simeq \bigoplus_{x\in\Sigma} (R^q f_* \Omega^p_M)_x \ , \qquad \text{si} \quad q\geq 1$$

$$H^q(M) \simeq H^q(E) \ , \qquad \text{si} \quad q>\dim M,$$

et

$$H^q(E) \simeq \bigoplus_{x\in\Sigma} H^q(E_x) \ , \quad \text{si } E_x=f^{-1}(x), \quad x\in\Sigma \ ,$$

nous permettent de supposer que $\Sigma = \{x\}$ et que S est un voisinage de Stein de x arbitraire. Ainsi on peut aussi supposer d'après les théorèmes d'algébrisation d'Artin, que M et S sont des $\mathbb{C}$-schémas, et on est donc sous les hypothèses de (1.2).

Associée à la 2-résolution

$$\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{x\} & \rightarrow & S \end{array}$$

on a une suite exacte

$$\dots \rightarrow \mathcal{H}^q(\underline{\Omega}^p_S)_x \rightarrow H^q(M,\Omega^p_M) \rightarrow H^q(E,\underline{\Omega}^p_E) \rightarrow \dots$$

qui, sous les hypothèses de (i) (resp. (ii),(iii)), nous donne un isomorphisme canonique

$$H^q(M,\Omega^p_M) \simeq H^q(E,\underline{\Omega}^p_E)$$

si $p+q>\dim S$ (resp. si $q\geq 1$, resp. si $q\geq 1$), car d'après (2.2)(v) (resp. [10], resp. [6]) on a

$$\mathcal{H}^q(\underline{\Omega}^p_S) = 0,$$

si $p+q>\dim S$ (resp. si $q\geq 1$, resp. si $q\geq 1$).

La dégénérescence de la suite spectrale de Hodge dans le terme E_1, nous donne un isomorphisme

$$\bigoplus_{p,q\geq 0} H^q(E,\underline{\Omega}^p_E) \simeq H^{p+q}(E),$$

qui est canonique si la structure de Hodge de $H^{p+q}(E)$ est pure de poids p+q.

Donc pour terminer la preuve du théorème il suffit de montrer que:

(i) la structure de Hodge de $H^k(E)$ est pure de poids k, si k>n. Ceci sera prouvé dans (3.1),

(ii) si les singularités de S sont des singularités toroïdales, on a

$$H^k(E,\underline{\Omega}^0_E) = 0.$$

Ce qui résulte aussitôt de la suite exacte

$$\ldots \to \mathcal{H}^q(\underline{\Omega}^0_S)_x \to H^q(M,\mathcal{O}_M) \to H^q(E,\underline{\Omega}^0_E) \quad \ldots$$

si $q\geq 1$, puisque

$$\mathcal{H}^q(\underline{\Omega}^0_S) = 0 , \qquad \text{si} \quad q\geq 1,$$

et

$$H^q(M,\mathcal{O}_M) = 0, \qquad \text{si} \quad q\geq 1,$$

car les singularités toroïdales sont rationnelles.

(iii) si les singularités de S sont des singularités quotients, alors la structure de Hodge de $H^k(E)$, $k\geq 1$, est pure de poids k, et on a

$$H^k(E,\underline{\Omega}^0_E) = 0.$$

En effet, puisque les singularités quotients sont des "rational homology manifolds" on a

$$H^k_\Sigma(S) = 0 , \qquad \text{si} \quad k<2n$$

et on déduit de la suite exacte

$$\ldots \to H^k_\Sigma(S) \to H^k_E(M) \to H^k(E) \to \ldots \qquad , \quad 0<k$$

des isomorphismes

$$H^k_E(M) \xrightarrow{\sim} H^k(E) \quad , \qquad \text{si} \quad 0<k<2n-1$$

Or, puisque M est lisse et E est complète on a

$$Gr_r^W\ H_E^k(M) = 0\ , \qquad \text{si} \quad r<k$$

$$Gr_F^0\ H_E^k(M) = 0\ ,$$

et

$$Gr_r^W\ H^k(E) = 0\ , \qquad \text{si} \quad r>k,$$

d'où on conclut que

$$Gr_r^W\ H^k(E) = 0\ , \qquad \text{si } r\neq k \quad \text{et} \quad 0<k<2n$$

et

$$Gr_F^0\ H^k(E) = 0\ , \qquad \text{si} \quad 0<k<2n.$$

(2.5) <u>Proposition</u>. <u>Soit</u> M <u>une variété complexe fortement pseudoconvexe, et soit</u> E <u>son sous-espace compact maximal, on pose</u> d=dim E. <u>Alors, si</u> $2d+1 > \dim M$, <u>on a</u>

$$\dim H^d(M,\Omega_M^d) \geqq \dim H^{2d}(E).$$

<u>Démonstration</u>. Dans la suite exacte

$$\cdots \to H^d(M,\Omega_M^d) \to H^d(E,\underline{\Omega}_E^d) \to \mathcal{H}^{d+1}(\underline{\Omega}_S^d)_\Sigma \to \cdots$$

on a, d'après (2.2)(v),

$$\mathcal{H}^{d+1}(\underline{\Omega}_S^d)_\Sigma = 0\ ,$$

donc

$$\dim H^d(M,\Omega_M^d) \geqq \dim H^d(E,\underline{\Omega}_E^d)\ ,$$

ce qui prouve (2.5), car $H^{2d}(E)$ a une structure de Hodge pure de type (d,d), i.e. on a

$$H^{2d}(E) \simeq H^d(E,\underline{\Omega}_E^d).$$

<u>Remarque</u>. La proposition (2.5) est due à S.S.T.Yau [15] dans le cas où M est une surface.

3. LE THÉORÈME DE PURETÉ DE $IH^{\bullet}(X)$

(3.1) Proposition. Avec les notations de (1.2), supposons que X soit un $\mathbb{C}$-schéma quasi-projectif, alors:

(i) Si $k \geqq n$, la structure de Hodge de $H^k(E)$ est pure de poids k, et le morphisme naturel

$$H^k(\tilde{X}) \to H^k(E)$$

est surjectif.

(ii) Si $k \leqq n$, la structure de Hodge de $H_E^k(\tilde{X})$ est pure de poids k, et le morphisme naturel

$$H_E^k(\tilde{X}) \to H_c^k(\tilde{X})$$

est injectif.

Démonstration. Soit V un sous-schéma affin de X qui contient Σ, et soit $\tilde{V} = f^{-1}(V)$. Associée à la 2-résolution

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \tilde{V} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma & \to & V \end{array}$$

on a la suite exacte

$$\ldots \to H^k(V) \to H^k(\tilde{V}) \oplus H^k(\Sigma) \to H^k(E) \to \ldots$$

ainsi, pour $k \geqq n$ on a la suite exacte

$$H^k(\tilde{V}) \to H^k(E) \to 0$$

car V est affin.

Comme $\tilde{V}$ est lisse on a

$$Gr_r^W H^k(\tilde{V}) = 0 , \qquad \text{si } r<k ,$$

d'où on déduit que

$$Gr_r^W H^k(E) = 0 , \qquad \text{si } r \neq k, \text{ et } k \geqq n ,$$

car E est complète.

Puisque $\tilde{V}$ est un ouvert de $\tilde{X}$, le morphisme

$$Gr_k^W(H^k(\tilde{X})) \to Gr_k^W(H^k(\tilde{V}))$$

est surjectif ([4]), d'où il résulte que la composition

$$W_k(H^k(\tilde{X})) = Gr_k^W H^k(\tilde{X}) \to Gr_k^W H^k(\tilde{V}) \to Gr_k^W H^k(E) = H^k(E)$$

est surjective pour $k \geqq n$, et on a donc prouvé (i).

Pour prouver (ii) on peut supposer que X est complète, alors le morphisme

$$H_E^k(\tilde{X}) \to H^k(\tilde{X})$$

est duel du morphisme

$$H^{2n-k}(\tilde{X}) \to H^{2n-k}(E),$$

ce qui, d'après (i), prouve que

$$H_E^k(\tilde{X}) \to H^k(\tilde{X})$$

est injectif pour $k \leqq n$.

Finalement, puisque $\tilde{X}$ est complète et lisse on a

$$Gr_r^W H^k(\tilde{X}) = 0 , \qquad \text{si } r \neq k ,$$

d'où

$$Gr_r^W H_E^k(\tilde{X}) = 0 , \qquad \text{si } r \neq k \text{ et } k \leqq n.$$

(3.2) <u>Corollaire</u>. <u>Avec les notations de</u> (1.2), <u>supposons que</u> X <u>soit un</u> $\mathbb{C}$-<u>schéma projectif, alors</u>:

(i) <u>Si</u> $k>n$, <u>la structure de Hodge de</u> $H^k(X)$ <u>est pure de poids</u> k.

(ii) <u>Si</u> $k<n$, <u>la structure de Hodge de</u> $H^k(U)$ <u>est pure de poids</u> k.

<u>Démonstration</u>. Associée à la 2-résolution

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma & \to & X \end{array}$$

on a la suite exacte

$$\ldots \to H^k(X) \to H^k(\tilde{X}) \oplus H^k(\Sigma) \to H^k(E) \to \ldots$$

donc, d'après (3.1) (i), on a la suite exacte

$$0 \to H^k(X) \to H^k(\tilde{X}) , \qquad \text{pour } k>n.$$

Puisque $\tilde{X}$ est complète et lisse on a

$$Gr_r^W\ H^k(\tilde{X}) = 0\ , \qquad \text{si } r \neq k,$$

d'où on déduit que

$$Gr_r^W\ H^k(X) = 0\ , \qquad \text{si } r \neq k \quad \text{et} \quad k > n.$$

L'assertion (ii) résulte aussitôt de la suite exacte

$$\ldots \to H^k(\tilde{X}) \to H^k(U) \to H_E^{k+1}(\tilde{X}) \to H^{k+1}(\tilde{X}) \to \ldots$$

et de (3.1) (ii).

(3.3) Corollaire. *Si X est un $\mathbb{C}$-schéma projectif à singularités isolées, alors les groupes de cohomologie d'intersection $IH^k(X)$ ont une structure de Hodge pure de poids k, pour laquelle les morphismes naturels*

$$H^k(X) \to IH^k(X)$$

et

$$IH^k(X) \to H^k(U)$$

sont des morphismes de structures de Hodge.

Démonstration. La suite spectrale de hypercohomologie du complexe $IC_X^{\bullet}$ montre que l'on a

$$IH^k(X) \simeq H^k(U)\ , \qquad \text{si} \quad k < n\ ,$$

$$IH^n(X) \simeq Im(H^n(X) \to H^n(U))$$

et

$$IH^k(X) \simeq H^k(X), \qquad \text{si} \quad k > n.$$

Donc le corollaire résulte aussitôt de (3.2) et de [4].

(3.4) Remarque. La proposition (5.1), qu'on prouvera un peu plus tard, montre qu'on peut éliminer les hypothèses projectives faites dans (3.1), (3.2) et (3.3). Nous laisserons au lecteur le soin de remplir cette tâche.

4. LE THÉORÈME DE LEFSCHETZ FAIBLE

(4.1) Proposition. Avec les notations de (1.2), supposons que X soit un $\mathbb{C}$-schéma projectif, soit x un point de X et soit Y une section hyperplane de X assez générale entre celles qui passent par x. Alors, le morphisme naturel

$$H_x^k(X) \to H_x^k(Y)$$

est bijectif si $k<n-1$, et injectif si $k=n-1$.

Démonstration. Elle découle d'arguments bien connus qu'on laisse au lecteur le soin de rappeler.

(4.2) Proposition. Avec les notations de (1.2), supposons que le morphisme $f:\tilde{X} \to X$ soit projectif, soit L un faisceau inversible sur $\tilde{X}$ très ample pour f et soit $\tilde{Y}$ une section assez générale de L. Alors

(i) Le morphisme naturel

$$H_E^k(\tilde{X}) \to H_{E\cap\tilde{Y}}^k(\tilde{Y})$$

est bijectif si $k<n$, et injectif si $k=n$.

(ii) Le morphisme de Gysin

$$H^{k-2}(E\cap\tilde{Y}) \to H^k(E)$$

est bijectif si $k>n$, et surjectif si $k=n$.

Démonstration. Analogue à celle de (4.1). De fait (4.2) (ii) est un cas particulier d'un résultat de [10], et on peut déduire alors (4.2) (i) par dualité.

De (4.2) (ii) et d'une petite variante améliorée de (4.1) où l'on suppose seulement que X-Y est Stein, on peut deduire le résultat suivant qui est bien connu:

(4.3) Corollaire. Avec les notations de (4.2), supposons que E soit un diviseur de $\tilde{X}$. Alors le morphisme naturel

$$H^k(E) \to H^k(E\cap\tilde{Y})$$

est bijectif si $k<n-2$, et injectif si $k=n-2$.

Le théorème antérieur de Lefschetz faible pour les faisceaux de cohomologie perverse de $\mathbb{R}f_*\mathbb{C}_{\tilde{X}}[n]$ est équivalent (mod. la théorie de Hodge) au théorème d'annulation suivant à la Kodaira-Nakano:

(4.5) Proposition. Soit M une variété complexe fortement peudoconvexe, et soit L un faisceau inversible sur M tel que $L_{|E}$ es ample. Alors, on a

$$H^q(M,\Omega_M^p \otimes L) = 0, \qquad \text{pour } p+q > \dim M.$$

Démonstration. L'assertion résulte de (4.2) (ii) et des isomorphismes

$$H^q(M,\Omega_M^p) \simeq H^q(E,\underline{\Omega}_E^p)$$

de la preuve de (2.4), suivant la ligne de raisonnement de C.P.Ramanujam comme dans [10].

5. LE THÉORÈME DE PURETÉ DE $IC^{\cdot}_X$

Si on introduit une notion de complexe de faisceaux pur en théorie de Hodge, analogue à celle de [5], le résultat qui suit entraine la pureté de $IC^{\cdot}_X$.

(5.1) Proposition. Avec les notations de (1.2):

(i) Si $k<n$, la structure de Hodge mixte de $H^k_\Sigma(X)$ est de poids $<k$, et le morphisme naturel

$$H^k_E(\tilde{X}) \rightarrow H^k(E)$$

est injectif.

(ii) La structure de Hodge mixte de $H^n_\Sigma(X)$ est de poids $<n$, et le morphisme naturel

$$H^n_E(\tilde{X}) \rightarrow H^n(E)$$

est un isomorphisme.

(iii) <u>Si</u> $k>n$, <u>la structure de Hodge mixte de</u> $H^k_\Sigma(X)$ <u>est de poids</u> $\geq k$, <u>et le morphisme naturel</u>

$$H^k_E(\tilde{X}) \rightarrow H^k(E)$$

<u>est surjectif</u>.

<u>Démonstration</u>. Puisque Σ est fini on a

$$H^k_\Sigma(X) \simeq \bigoplus_{x\in\Sigma} H^k_x(X) \quad ,$$

et

$$H^k(E) \simeq \bigoplus_{x\in\Sigma} H^k(E_x) \quad , \qquad \text{où} \quad E_x=f^{-1}(x),$$

on peut donc supposer que Σ est réduit à un seul point $x\in X$, et que X et $\tilde{X}$ sont projectives.

Procédons par récurrence sur n et supposons $n>1$, la proposition étant triviale pour $n=1$. Alors l'assertion (i) résulte de (4.1), de l'hypothèse de récurrence et de la suite exacte

$$\ldots \rightarrow H^k_\Sigma(X) \rightarrow H^k_E(\tilde{X})\oplus H^k(\Sigma) \rightarrow H^k(E) \rightarrow \ldots .$$

Si $k>n$, le morphisme

$$H^k_E(\tilde{X}) \rightarrow H^k(E)$$

est le duel du morphisme injectif

$$H^{2n-k}_E(\tilde{X}) \rightarrow H^{2n-k}(E),$$

donc il est surjectif si $k>n$.

De la suite exacte

$$\ldots \rightarrow H^k_\Sigma(X) \rightarrow H^k_E(\tilde{X})\oplus H^k(\Sigma) \rightarrow H^k(E) \rightarrow \ldots$$

on déduit que

$$Gr^W_r\, H^k_\Sigma(X) = 0 \qquad \text{si} \quad r<k \quad \text{et} \quad k>n+1$$

et il ne nous reste qu'à prouver que

$$Gr^W_r\, H^n_\Sigma(X) = 0 \ , \qquad \text{si} \quad r\geq n$$

et

$$Gr^W_r\, H^{n+1}_\Sigma(X) = 0 \ , \qquad \text{si} \quad r\leq n,$$

car ceci est équivalent à que le morphisme

$$H^n_E(\tilde{X}) \to H^n(E)$$

soit un isomorphisme.

On peut donc supposer que E est un diviseur à croisements normaux dans $\tilde{X}$, reunion des diviseurs lisses E_i, et il nous suffit pour conclure de prouver, avec cette hypothèse, que le morphisme

$$H^n_E(\tilde{X}) \to H^n(E)$$

est injectif, car il sera aussi surjectif puisqu'il est autoduel.

Designons par $\tilde{E}^{(r)}$ la somme disjointe des intersections r à r des E_i, alors on a des suites spectrales

$$'E_1^{pq} = H^{2p+q-2}(\tilde{E}^{(-p+1)}) \Rightarrow H^{p+q}_E(\tilde{X}) \;, \qquad p \leqq 0$$

$$''E_1^{pq} = H^q(\tilde{E}^{(p+1)}) \Rightarrow H^{p+q}(E) \;, \qquad p \geqq 0,$$

qui dégénèrent dans le terme E_2. Or, puisque 'E est une suite spectrale du deuxième quadrant et "E est du premier quadrant, on déduit de cette dégénérescence et de (3.1), l'existence d'un morphisme surjectif

$$e' : H^{n-2}(\tilde{E}^{(1)}) \to H^n_E(\tilde{X})$$

et d'un morphisme injectif

$$e'' : H^n(E) \to H^n(\tilde{E}^{(1)}).$$

(L'argument qui suit m'a été aimablement communiqué par J.H.Steenbrink, mon argument initial était incorrect sur ce point).

On définit un morphisme

$$\gamma : H^{n-2}(\tilde{E}^{(1)}) \to H^n(\tilde{X})$$

comme la composition de e' et du morphisme

$$H^n_E(\tilde{X}) \longrightarrow H^n(\tilde{X}),$$

et on définit un morphisme

$$\beta : H^{n-2}(\tilde{E}^{(1)}) \to H^n(\tilde{E}^{(1)})$$

comme la composition de γ et du morphisme naturel

$$\rho : H^n(\tilde{X}) \to H^n(\tilde{E}^{(1)}).$$

Donc, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^{n-2}(\tilde{E}^{(1)}) \arrow[rr, two heads, "e'"] \arrow[dd, "\beta"'] \arrow[dr, "\gamma"] & & H^n_E(\tilde{X}) \arrow[dl, hook'] \arrow[dd] \\
& H^n(\tilde{X}) \arrow[dl, "\rho"] \arrow[dr] & \\
H^n(\tilde{E}^{(1)}) & & H^n(\tilde{E}) \arrow[ll, "e''"']
\end{tikzcd}$$

et l'injectivité du morphisme

$$H^n_E(\tilde{X}) \to H^n(E)$$

résultera du lemme suivant:

<u>Lemme</u> (Steenbrink). Ker $\beta \subset$ Ker γ.

<u>Preuve du lemme</u>: Soit L un faisceau inversible sur X très ample, et soient k et n_i des entiers tels que le faisceau inversible sur $\tilde{X}$

$$\tilde{L} = kf^*L \otimes \mathcal{O}(\Sigma n_i E_i)$$

soit très ample.

Soit λ (resp. ε, resp. δ) le morphisme de $H^n(\tilde{X})$ dans $H^{n+2}(\tilde{X})$ défini par le cup-produit avec la première classe de Chern de $\tilde{L}$ (resp. kf^*L, resp. $\mathcal{O}(\Sigma n_i E_i)$), et remarquons que, si $\gamma_i : H^n(E_i) \to H^{n+2}(\tilde{X})$ est le morphisme de Gysin associé à E_i, alors $\delta = (\Sigma n_i \gamma_i) \circ \rho$.

Si $v \in H^{n-2}(E^{(1)})$ est tel que $\beta(v) = 0$, on a

$$\begin{aligned}
\lambda(\gamma(v)) &= (\varepsilon+\delta)(\gamma(v)) \\
&= \delta(\gamma(v)) \qquad\qquad \text{car } \varepsilon(\gamma(v))=0, \\
&= ((\Sigma n_i \gamma_i) \circ \rho \circ \gamma)(v) \\
&= (\Sigma n_i \gamma_i)(\beta(v)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donc $\gamma(v)$ est primitif.

Or, si on désigne par C l'opérateur de Weil et par $\int_M : H^m(M) \to \mathbb{C}$ la forme linéaire "intégration sur la variété compacte et orientée M de dimension réelle m", puisque ρ est le morphisme duel de γ on a

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{X}} \gamma(v) \cup C\gamma(\bar{v}) &= \int_{\tilde{E}} (\rho \circ \gamma)(v) \cup C\bar{v} \\ &= \int_{\tilde{E}} \beta(v) \cup C\bar{v} \\ &= 0 ,\end{aligned}$$

ce qui implique $\gamma(v) = 0$, compte tenu que la forme bilinéaire $(x,y) \to \int_{\tilde{X}} x \cup C\bar{y}$ sur la partie primitive de $H^n(\tilde{X})$ est hermitienne définie.

(5.2) Remarque. La proposition (5.1) antérieure permet d'obtenir une preuve de (1.3) sans faire appel au théorème de pureté de Gabber, et donc sans avoir besoin de la réduction mod p. Rappelons à ce propos que (5.1) avait été obtenu dans [7], § III, et [12], (1.12), comme corollaire du théorème de décomposition de Deligne, Gabber, Beilinson et Bernstein.

6. LE THÉORÈME DE LEFSCHETZ DIFFICILE

(6.1) Proposition. *Avec les hypothèses de (1.2), supposons que le morphisme $f:\tilde{X} \to X$ soit projectif, soit L un faisceau inversible sur $\tilde{X}$ ample pour f, et soit η la première classe de Chern de L. Alors, pour tout $i \geq 0$, le cup-produit iteré*

$$\eta^i \cup : H_E^{n-i}(\tilde{X}) \to H^{n-i}(E)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Nous suivrons la preuve du théorème de Lefschetz difficile en cohomologie l-adique de Deligne ([5], (4.1)). Comme dans loc. cit. nous prouvons la proposition par récurrence sur n.

Il est immédiat qu'on peut supposer L très ample, et $n \geq 1$. Soit $\tilde{Y}$ une section assez générale de L.

Puisque pour i=0 la proposition se réduit à (5.1)(ii), remarquons tout d'abord qu'on peut se ramener au cas i=1. En effet, pour $i \geq 1$ on peut factoriser

$$\eta^i \cup : H_E^{n-i}(\tilde{X}) \to H^{n+i}(E)$$

en

$$\eta^i \cup : H_E^{n-i}(\tilde{X}) \to H_{E\cap\tilde{Y}}^{n-i}(\tilde{Y}) \xrightarrow{\eta^{i-1}\cup} H^{n-i-2}(E\cap\tilde{Y}) \to H^{n+i}(E)$$

donc, si $i>1$ $\eta^i \cup$ est une composition d'isomorphismes d'après (4.2) et l'hypothèse de récurrence.

Si $i=1$, on peut définir une forme bilinéaire non dégénérée sur $H_{E\cap\tilde{Y}}^{n-1}(\tilde{Y})$, à travers de la forme bilinéaire non dégénérée

$$H_{E\cap\tilde{Y}}^{n-1}(\tilde{Y}) \times H^{n-1}(E\cap\tilde{Y}) \to \mathbb{C} ,$$

et de l'isomorphisme de (5.1) (ii):

$$H_{E\cap\tilde{Y}}^{n-1}(\tilde{Y}) \xrightarrow{\sim} H^{n-1}(E\cap\tilde{Y}) .$$

Donc, puisque dans la factorisation antérieure de $\eta\cup$:

$$H_E^{n-1}(\tilde{X}) \to H_{E\cap\tilde{Y}}^{n-1}(\tilde{Y}) \to H^{n-1}(E\cap\tilde{Y}) \to H^{n+1}(E) ,$$

$H_E^{n-1}(\tilde{X}) \to H_{E\cap\tilde{Y}}^{n-1}(\tilde{Y})$ est injectif et son transposé $H^{n-1}(E\cap\tilde{Y}) \to H^{n+1}(E)$ est surjectif par (4.2), il suffit pour que $\eta\cup$ soit un isomorphisme que la forme bilinéaire qu'on vient de définir sur $H_{E\cap\tilde{Y}}^{n-1}(\tilde{Y})$ soit non dégénérée sur l'image de $H_E^{n-1}(\tilde{X})$. Comme dans loc. cit. on va prouver cette dernière assertion en interprétant l'image de $H_E^{n-1}(\tilde{X})$ dans $H_{E\cap\tilde{Y}}^{n-1}(\tilde{Y})$ en termes de monodromie associée à un pinceau de Lefschetz de sections hyperplanes de f.

Le résultat qu'on cherche étant local en X, nous pouvons supposer que X est projectif et qu'il existe une factorisation de f

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & X \times \mathbb{P} \arrow[dl, "pr_1"] \\ X & \end{tikzcd}$$

où $\mathbb{P}$ est un espace projectif, tel que $\tilde{X} \to X \times \mathbb{P} \xrightarrow{pr_2} \mathbb{P}$ est une immersion fermée.

Soit $(H_t)_{t\in\mathbb{P}^1}$ un pinceau d'hyperplans de $\mathbb{P}$ assez générale, on obtient alors un pinceau de sections hyperplanes de $\tilde{X}$: $(\tilde{Y}_t)_{t\in\mathbb{P}^1}$ et un sous-ensemble fini B de $\mathbb{P}^1$, tel que pour $t\in\mathbb{P}^1-B$ $\tilde{Y}_t$ est non singulière et les $H^{n-1}_{E\cap\tilde{Y}_t}(\tilde{Y}_t)$ sont les fibres d'une famille continue de structures de Hodge sur $\mathbb{P}^1$-B de poids n-1 qui, d'après (3.1) (ii) et (3.4), est algébrique ([4], (4.2)).

Si on pose $\tilde{Y} = \tilde{Y}_{t_0}$, $t_0 \in \mathbb{P}^1$-B, alors $\pi_1(\mathbb{P}^1\text{-}B, t_0)$ agit sur $H^{n-1}_{E\cap\tilde{Y}}(\tilde{Y})$ et laisse invariante la forme bilinéaire. Puisque d'après [4], (4.2.5) et (4.2.6), cette représentation de $\pi_1(\mathbb{P}^1\text{-}B, t_0)$ est semi-simple, on aura fini la preuve (cf. [5], (4.1)) si on montre le lemme suivant:

(6.2) <u>Lemme</u>. <u>L'image de</u> $H^{n-1}_E(\tilde{X})$ <u>dans</u> $H^{n-1}_{E\cap\tilde{Y}}(\tilde{Y})$ <u>est le sous-espace</u> $H^{n-1}_{E\cap\tilde{Y}}(\tilde{Y})^{\pi}$.

Pour la preuve de ce lemme on a besoin de quelques variantes à supports de SGA 7 II, Exp. XVIII.

La situation à considérer maintenant est la suivante: Soit X un $\mathbb{C}$-schéma lisse, projectif et purement de dimension n, E un sous-schéma fermé de X et $X \to \mathbb{P}$ un plongement fermé de X dans un espace projectif $\mathbb{P}$. Soit $\{H_t\}_{t\in\mathbb{P}^1}$ un pinceau d'hyperplans de $\mathbb{P}$, soit $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{P}^1}$ le pinceau de sections hyperplanes de X coupé par $\{H_t\}$ et soit $\Delta \subset X$ l'axe de ce pinceau. Si le pinceau $\{H_t\}_{t\in\mathbb{P}^1}$ est assez général, ce que nous supposons par la suite, alors Δ est non singulière, de codimension 2 dans X et coupe proprement E.

Soit $f:\tilde{X} \to X$ l'éclatement de Δ dans X. On pose $\tilde{E}=f^{-1}(E)$, $\tilde{\Delta} = f^{-1}(\Delta)$ et $Y = Y_{t_0}$, pour un $t_0 \in \mathbb{P}^1$ assez général. On obtient alors un diagramme commutatif (cf. loc.cit.):

$$\begin{tikzcd}
\tilde{E}\cap\tilde{\Delta} \arrow[rr, tail] \arrow[dr] \arrow[ddd] & & \tilde{\Delta} \arrow[rr, tail, "i"] \arrow[ddd, "g"] & & \tilde{X} \arrow[r, "\rho"] \arrow[ddd, "f"] & \mathbb{P}^1 \\
& \tilde{E} \arrow[urrr, tail] \arrow[ddd] & & & & \\
& & & Y \arrow[uur, "k"] \arrow[dr, "m"] & & \\
E\cap\Delta \arrow[rr, tail] \arrow[dr] & & \Delta \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, tail, "j"] & & X & \\
& E \arrow[urrr, tail] & & & &
\end{tikzcd}$$

(6.2.1) (cf. loc. cit. (4.2.2)) Il existe un isomorphisme

$$H^{\bullet}_E(X) \oplus H^{\bullet-2}_{E\cap\Delta}(\Delta) \xrightarrow{f^*+i_*g^*} H^{\bullet}_{\tilde{E}}(\tilde{X}).$$

En effet, on a un quasi-isomorphisme

$$\mathbb{C}_X \oplus \mathbb{C}_\Delta[-2] \xrightarrow{f^* + i_* g^*} \mathbb{R}f_* \mathbb{C}_{\tilde{X}} \ ,$$

donc on obtient (6.2.1) par application de $\mathbb{R}\Gamma_E$.

(6.2.2) (cf. loc. cit. (5.1.6)). Pour $i \leqq n-1$ les images de

$$m^* : H^i_E(X) \to H^i_{E\cap Y}(Y)$$

et de

$$k^* : H^i_{\tilde{E}}(\tilde{X}) \to H^i_{E\cap Y}(Y)$$

sont égales.

En effet, l'homomorphisme k^* s'exprime à travers de (6.2.1) par

$$H^i_E(X) \oplus H^{i-2}_{E\cap\Delta}(\Delta) \xrightarrow{m^* + h_*} H^i_{E\cap Y}(Y)$$

donc (6.2.2) résulte de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^i_E(X) \arrow[r, "m^*"] & H^i_{E\cap Y}(Y) \arrow[r] & H^i_{E\cap\Delta}(\Delta) \\
H^{i-2}_E(X) \arrow[r] \arrow[u] & H^{i-2}_{E\cap Y}(Y) \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ul, "m_*"'] & H^{i-2}_{E\cap\Delta}(\Delta) \arrow[u] \arrow[ul, "h_*"']
\end{tikzcd}$$

car les morphismes de la ligne inférieure sont des isomorphismes si $i \leqq n-1$, d'après le théorème de Lefschetz faible (cf. (4.2)).

(6.2.3) Soit V un ouvert de Zariski de $\tilde{X}$, alors le morphisme

$$Gr^W_i \, H^i_{\tilde{E}}(\tilde{X}) \to Gr^W_i \, H^i_{\tilde{E}\cap V}(V)$$

est surjectif pour tout $i \geqq 0$.

En effet, de la suite exacte de cohomologie locale

$$\ldots \to H^i_{\tilde{E}}(\tilde{X}) \to H^i_{\tilde{E}\cap V}(V) \to H^{i+1}_{\tilde{E}-V}(\tilde{X}) \to \ldots$$

on déduit la suite exacte

$$\ldots \to Gr^W_i \, H^i_{\tilde{E}}(\tilde{X}) \to Gr^W_i \, H^i_{\tilde{E}\cap V}(V) \to Gr^W_i \, H^{i+1}_{\tilde{E}-V}(\tilde{X}) \to \ldots$$

d'où il résulte (6.2.3), car

$$Gr^W_i \, H^{i+1}_{\tilde{E}-V}(\tilde{X}) = 0.$$

(6.2.4) Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{P}^1$, différent de $\mathbb{P}^1$ et tel que sur U les faisceaux de cohomologie de $\mathbb{R}\rho_* \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\tilde{E}}\mathbb{C}_{\tilde{X}}$ soient des systèmes locaux. On pose $\tilde{X}_U = \rho^{-1}(U)$, $\tilde{E}_U = \tilde{E} \cap \tilde{X}_U$, $Y = Y_{t_0}$ pour $t_0 \in U$ et $\pi = \pi_1(U, t_0)$. Alors, le morphisme

$$H^{n-1}_{\tilde{E}_U}(\tilde{X}_U) \to H^{n-1}_{\tilde{E}\cap Y}(Y)^{\pi}$$

est surjectif.

En effet, ceci résulte immédiatement de la suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^p(U, R^q\rho_* \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\tilde{E}}\mathbb{C}_{\tilde{X}}) \Rightarrow H^{p+q}_{\tilde{E}_U}(\tilde{X}_U)$$

compte-tenu que $E_2^{p,q} = 0$ pour $p \neq 0, 1$, puisque U est affin.

<u>Preuve du lemme (6.2)</u>: Il résulte de (6.2.2), (6.2.3), (6.2.4), (3.1)(ii) et [4] (2.3.5)(iii).

(6.3) <u>Corollaire</u>. <u>Avec les notations de</u> (1.2), <u>on a un isomorphisme dans</u> $D(X)_c$

$$\mathbb{R}f_*\mathbb{C}_{\tilde{X}}[n] \simeq \oplus\, {}^pH^i(\mathbb{R}f_*\mathbb{C}_{\tilde{X}}[n])[-i] .$$

<u>Démonstration</u>. Si f est projectif le corollaire résulte de (1.3), (6.1) et de la variante perverse de [3], §1, qui substitue H par ${}^pH$ dans tous les énoncés et démonstrations du loc. cit.

Le cas général se déduit de l'antérieur et de l'observation suivante:

Soit X un $\mathbb{C}$-schéma, $f: \tilde{X} \to X$ une résolution de X et $g: \hat{X} \to X$ une résolution projective de X qui domine f, et soit T un foncteur cohomologique sur $D(X)_c$. Si la suite spectrale

$$E_2^{pq} = T(H^q(K^\cdot)[p]) \Longrightarrow T(K^\cdot[p+q])$$

dégénère pour $K^\cdot = \mathbb{R}g_*\mathbb{C}_{\hat{X}}$, elle dégénère aussi pour $K^\cdot = \mathbb{R}f_*\mathbb{C}_{\tilde{X}}$.

(6.4) Corollaire. Avec les notations de (1.2) supposons que X soit complet, on a des isomorphismes de structures de Hodge.

$$H^k(\tilde{X}) \simeq IH^k(X) \oplus H^k_E(\tilde{X}), \qquad \text{si } k \leqslant n ,$$

et

$$H^k(\tilde{X}) \simeq IH^k(X) \oplus H^k(E), \qquad \text{si } k > n ,$$

Démonstration. Remarquons qu'il suffit de prouver le corollaire pour $k \leq n$, car pour $k > n$ il en résulte par dualité. En effet, il suffit de considérer les isomorphismes de structures de Hodge suivants

$$\mathrm{Hom}(H^{n-k}(\tilde{X}), \mathbb{Q}(-n)) \simeq H^{n+k}(\tilde{X}) ,$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(IH^{n-k}(X), \mathbb{Q}(-n) &\simeq \mathrm{Hom}(H^{n-k}(U), \mathbb{Q}(-n)) \\ &\simeq H^{n+k}_c(U) \\ &\simeq H^{n+k}(X) \\ &\simeq IH^{n+k}(X) \end{aligned}$$

et

$$\mathrm{Hom}(H^{n-k}_E(X), \mathbb{Q}(-n)) \simeq H^{n+k}(E) .$$

D'abord, supposons que f soit projectif, et soit η comme dans (6.1). Puisque

$$\eta^k \cup : H^{n-k}(\tilde{X}) \to H^{n+k}(E)$$

est un morphisme de structures de Hodge de type (k,k), son noyau, N, a une structure de Hodge pure de poids n-k, et, d'après (6.1), (3.4) et (5.1), on a des isomorphismes de structures de Hodge

$$H^{n-k}_E(\tilde{X}) \oplus N \to H^{n-k}(\tilde{X})$$

et

$$N \simeq IH^{n-k}(X).$$

Dans le cas général, d'après le lemme de Chow local de Hironaka, il existe une modification propre $\pi: X' \to \tilde{X}$ tel que X' est lisse et tel que le morphisme $g=f\pi:X' \to X$ est projectif et est un isomorphisme sur U. On pose $E'=g^{-1}(\Sigma)$. Puisque X' et $\tilde{X}$ sont lisses il existe un morphisme de Gysin

$$\pi_*: H^{n-k}_{E'}(X') \to H^{n-k}_{E}(\tilde{X}) \quad ,$$

qui est un morphisme de structures de Hodge mixtes ([10]). Ainsi on peut définir une rétraction de $H^{n-k}(\tilde{X})$ sur $H^{n-k}_E(\tilde{X})$ par la composition

$$H^{n-k}(\tilde{X}) \to H^{n-k}(X') \to H^{n-k}_{E'}(X') \to H^{n-k}_E(\tilde{X}) \ ,$$

qui évidemment est un morphisme de structures de Hodge. Cela suffit pour conclure la preuve de (6.4).

Avec le même schéma de démonstration de [5],(4.1), on prouve aussi le théorème suivant de Lefschetz difficile pour la cohomologie d'intersection.

(6.5) <u>Proposition</u>. <u>Avec les hypothèses de</u> (1.2), <u>supposons que</u> X <u>soit un</u> $\mathbb{C}$-<u>schéma projectif, soit</u> L <u>un faisceau inversible ample sur</u> X, <u>et soit</u> η <u>la première classe de Chern de</u> L. <u>Alors, pour tout</u> $i \geq 0$, <u>le cup-produit iteré</u>

$$\eta^i \cup \ : \ IH^{n-i}(X) \to IH^{n+i}(X)$$

<u>est un isomorphisme.</u>

<u>Remarque</u>. A partir des théorèmes de Lefschetz (6.1) et (6.5) on peut introduire, comme d'habitude, les espaces de cohomologie primitive

$$P^{n-k}_E(\tilde{X}) = \mathrm{Ker}(\eta^{k+1}\cup : H^{n-k}_E(\tilde{X}) \to H^{n+k+2}(E)) \ ,$$

$$IP^{n-k}(X) = \mathrm{Ker}(\eta^{k+1}\cup : IH^{n-k}(X) \to IH^{n+k+2}(X)) \ ,$$

et démontrer que ces espaces sont naturellement polarisables. A la suite, on peut aussi prouver un théorème de l'index de Hodge pour les formes bilinéaires définies sur $H^n_E(\tilde{X})$ et $IH^n(X)$. Nous ne poursuivrons pas içi sur ce sujet, bien que nous remarquons que le théorème de l'index pour $H^n_E(\tilde{X})$ qu'on obtient généralise le lemme bien connu de Du Val-Mumford sur la négativité de la forme d'intersection du diviseur exceptionnel d'une résolution d'une surface normale.

De (6.1) et (2.4) on déduit le corollaire suivant pour les variétés complexes fortement pseudoconvexes.

(6.6) Corollaire. Soit M une variété complexe fortement pseudoconvexe, soit L un faisceau inversible sur M tel que $L_{|E}$ est ample et soit η la première classe de Chern de L. Alors:

(i) Pour tout $i\geq 0$, le cup-produit iteré

$$\eta^i \cup : H^q(M,\Omega_M^p) \to H^{q+i}(M,\Omega_M^{p+i})$$

est surjectif si $p+q \geq n-i$ et $p,q\geq 1$.

(ii) Si les singularités de la réduction de Remmert sont des singularités quotients, pour tout $i\geq 0$, le cup-produit iteré

$$\eta^i \cup : H^q(M,\Omega_M^p) \to H^{q+i}(M,\Omega_M^{p+i})$$

est bijectif si $p+q = n-i$ et $p,q\geq 1$

7. APPLICATION AUX SINGULARITÉS RATIONELLES DE SURFACES

Dans tout ce paragraphe les hypothèses de (1.2) sont en vigeur et, en plus, on suppose que X est une surface qui n'a d'autres singularités que des singularités rationelles.

La proposition suivante est sûrement connue des spécialists.

(7.1) Proposition. X est une "rational homology manifold", i.e. pour tout $x\in X$, $H_x^i(X) = 0$ si $i\neq 4$ et $H_x^4(X) = \mathbb{C}$.

Demonstration. Evidemment, il suffit de prouver l'assertion de la proposition pour tout $x\in\Sigma$, et on peut supposer que $\Sigma = \{x\}$.

De la suite exacte

$$\cdots \to H_x^k(X) \to H_E^k(\tilde{X}) \oplus H^k(x) \to H^k(E) \to \cdots$$

et de (5.1), on obtient la suite exacte

$$0 \to H^0(X) \to H^0(E) \to H_x^1(X) \to 0$$

et les isomorphismes

$$H^1(E) \xrightarrow{\sim} H_x^2(X) \ ,$$

$$H_E^2(X) \xrightarrow{\sim} H^2(E) \ ,$$

$$H^3_x(X) \xrightarrow{\sim} H^3_E(\tilde{X}) \quad ,$$

et

$$H^4_x(X) \xrightarrow{\sim} H^4_E(\tilde{X}).$$

Puisque X est normal, on a

$$H^0_x(X) = 0, \quad H^1_x(X) = 0 \quad \text{et} \quad H^4_x(X) = \mathbb{C} \ ,$$

et puisque, par dualité sur le noeud, on a

$$\dim H^2_x(X) = \dim H^3_x(X) \ ,$$

la proposition résultera du lemme suivant:

(7.2) Lemme. $H^1(E) = 0$.

Démonstration. Le groupe de cohomologie $H^1(E)$ a une structure de Hodge mixte de poids $\leqq 1$, car E est complète. Donc, on a

$$\dim H^1(E) = h^{1,0} + h^{0,1} + h^{0,0},$$

avec

$$h^{0,1} + h^{0,0} = \dim Gr^0_F \ H^1(E) \ ,$$

et

$$h^{0,1} = h^{1,0} \ .$$

Or, on a

$$Gr^0_F \ H^1(E) = H^1(E, \underline{\Omega}^0_E),$$

et, dans la suite exacte

$$\cdots \to H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) \to H^1(E, \underline{\Omega}^0_E) \to \mathcal{H}^2(\underline{\Omega}^0_X)_x \to \cdots$$

on a

$$H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 0, \text{ et } \ \mathcal{H}^2(\underline{\Omega}^0_X)_x = 0,$$

car X est rationnelle ([12], (3.7)), ainsi il résulte que

$$Gr^0_F \ H^1(E) = 0,$$

et, en conséquence, on a

$$H^1(E) = 0.$$

Les propositions (7.3) et (7.5) qui suivent sont dues à Pinkham-Wahl ([11]). Nous montrons içi que ces résultats, ainsi que les démonstrations que nous proposons ci-dessous, entrent naturellment dans l'étude du complexe $\underline{\Omega}_X$.

(7.3) Proposition. dim $H^1(\tilde{X},\Omega^1_{\tilde{X}})$ = dim $H^2(E)$.

Démonstration. On peut supposer que $\Sigma = \{x\}$ et que X est un voisinage de Stein contractile de x.

Dans la suite spectrale de Hodge-de Rham

$$E_1^{pq} = H^q(\tilde{X},\Omega^p_{\tilde{X}}) \Rightarrow H^{p+q}(\tilde{X})$$

on a que

$$E_1^{01} = 0 , \qquad \text{car X est rationnelle ,}$$

$$E_1^{21} = 0 \text{ , d'après le théorème de Grauert-Riemensch-}$$

neider, et, évidemment,

$$E_1^{p0} = 0 \qquad \text{si } p > 2 \text{ , et } \quad E_1^{02} = 0.$$

Il en résulte des isomorphismes

$$E_1^{11} \simeq E_2^{11} \simeq \dots \simeq E_\infty^{11},$$

et donc un morphisme surjectif

$$H^2(\tilde{X}) \rightarrow E_1^{11}.$$

Alors, on obtient

$$\dim H^2(E) \geqq \dim H^1(\tilde{X},\Omega^1_{\tilde{X}}),$$

car X est contractile.Ceci, joint à (2.5), démontre la proposition.

(7.4) Proposition. Pour tout $p\geqq 0$, on a des quasi-isomorphismes

$$H^0(\underline{\Omega}^p_X) \xrightarrow{\sim} \underline{\Omega}^p_X ,$$

$$H^0(\underline{\Omega}^p_X) \xrightarrow{\sim} f_*\Omega^p_{\tilde{X}}.$$

Démonstration. Pour p=0 l'assertion résulte de [12], (3.7), et pour p=2 elle résulte du théorème de Grauert-Riemeneschneider (voir aussi (2.2)(v)).

Pour p=1, on a la suite exacte

$$0 \to \mathcal{H}^0(\underline{\Omega}^1_X) \to f_*\Omega^1_{\tilde{X}} \to H^0(E,\underline{\Omega}^1_E) \to \mathcal{H}^1(\underline{\Omega}^1_X) \to H^1(\tilde{X},\Omega^1_{\tilde{X}}) \to H^1(E,\underline{\Omega}^1_E) \to 0$$

or, d'après (7.2), on a

$$H^0(E,\underline{\Omega}^1_E) = 0,$$

et, d'après (7.3), on a un isomorphisme

$$H^1(\tilde{X},\Omega^1_{\tilde{X}}) \xrightarrow{\sim} H^1(E,\underline{\Omega}^1_E) \quad ,$$

donc, on a

$$\mathcal{H}^1(\underline{\Omega}^1_X) = 0,$$

et, finalement, on a

$$\mathcal{H}^q(\underline{\Omega}^1_X) = 0 \quad , \qquad \text{si} \quad q>0,$$

d'après (2.2)(v).

(7.5) <u>Proposition</u>. prof $f_*\Omega^p_{\tilde{X}} = 2$, <u>pour</u> p=0,1,2.

<u>Démonstration</u>. Puisque pour p=0,2 le résultat est bien connu, il ne reste qu'à le prouver pour p=1.

D'après (2.2)(i) on a un quasi-isomorphisme $\mathbb{C}_X \xrightarrow{\sim} \underline{\Omega}_X$, et ainsi on a des isomorphismes

$$H^k_x(X) \simeq H^k_x(X,\underline{\Omega}_X) \quad , \qquad \text{pour tout} \quad k\geq 0.$$

Or, de la filtration de Hodge de $\underline{\Omega}_X$ il résulte une suite spectrale

$$E^{pq}_1 = H^q_x(X,\underline{\Omega}^p_X) \Rightarrow H^{p+q}_x(X)$$

laquelle, d'après (7.4), a pour termes E^{pq}_1

$$E^{pq}_1 = H^q_x(X,f_*\Omega^p_{\tilde{X}}),$$

et,ainsi, on obtient

$$E^{01}_1 = 0 \; , \qquad \text{car X est normal,}$$
$$E^{21}_1 = 0 \; , \qquad \text{car X est rationnelle ,}$$

et, évidemment,

$$E_1^{p0} = 0 \qquad \text{si } p>2, \text{ et } \quad E_1^{20} = 0.$$

Il en résulte des isomorphismes

$$E_1^{11} = E_2^{11} = \ldots = E_\infty^{11} \ ,$$

et donc un morphisme injectif

$$E_1^{11} \to H_x^2(X) \quad ,$$

ce qui prouve la proposition, car

$$H_x^2(X) = 0,$$

d'après (7.1).

Introduisons, d'après Steenbrinck, le complexe filtré $(\tilde{\Omega}_X^{\bullet},\sigma)$, où $\tilde{\Omega}_X^p = j_*\Omega_U^p$, pour tout $p\geq 0$, et σ est la filtration bête du complexe $\tilde{\Omega}_X^{\bullet}$, et soit $D_{diff}(X)$ la catégorie derivée des complexes filtrés d'opérateurs différentiels d'ordre ≤ 1. La proposition suivante généralise à toutes les singularités rationnelles de surface les résultats de [6] et [10] sur les singularités quotients et toroïdales.

(7.6) Proposition. Il existe un isomorphisme dans $D_{diff}(X)$

$$(\underline{\Omega}_X,F) \xrightarrow{\sim} (\tilde{\Omega}_X^{\bullet},\sigma).$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de (7.4) et (7.5).

8. APPLICATION AUX SINGULARITÉS ISOLÉES DES INTERSECTIONS COMPLÈTES

Dans tout ce paragraphe les hypothèses de (1.2) sont en vigueur, et on suppose, en plus, que X est localement intersection complète.

(8.1) Proposition. Pour tout couple d'entiers $p,q\geq 0$, tel que $p+q\leq n-2$, on a

$$\mathcal{H}^q(\underline{\Omega}_X^p) = 0 \ , \qquad \text{si } q>0 \ ,$$

et

$$\mathcal{H}^0(\underline{\Omega}_X^p) = \Omega_X^p.$$

Démonstration. Puisque l'assertion est locale, nous pouvons supposer que X est une intersection complète affine qui n'a d'autre singularité que $x \in X$. Nous utilisons pour la preuve de (8.1) les lemmes qui suivent

(8.1.1) Lemme. Le morphisme naturel

$$H^k_c(\tilde{X}) \to H^k(E)$$

est bijectif si $0 < k \leqq n-2$.

En effet, si $k > 0$ on a une suite exacte

$$\dots \to H^k_c(X) \to H^k_c(\tilde{X}) \to H^k(E) \to \dots$$

et puisque X est une intersection complète affine, on a

$$H^k_c(X) = 0 \ , \qquad \text{si} \quad k \leqq n-1 \ ,$$

d'où il résulte (8.1.1).

(8.1.2) Lemme. Si $p+q \leqq n-2$ le morphisme naturel

$$H^q_c(\tilde{X}, \Omega^p_{\tilde{X}}) \to H^q(\tilde{X}, \Omega^p_{\tilde{X}})$$

est bijectif pour $q > 0$, et

$$H^0_c(\tilde{X}, \Omega^p_{\tilde{X}}) = 0.$$

En effet, de la suite spectrale de Leray

$$H^s_c(X, R^t f_* \Omega^p_{\tilde{X}}) \Rightarrow H^{s+t}_c(\tilde{X}, \Omega^p_{\tilde{X}})$$

on déduit, si $q > 0$, une suite exacte

$$\dots \to H^q_c(X, f_* \Omega^p_{\tilde{X}}) \to H^q_c(\tilde{X}, \Omega^p_{\tilde{X}}) \to H^q(\tilde{X}, \Omega^p_{\tilde{X}}) \to \dots$$

et l'isomorphisme

$$H^0_c(X, f_* \Omega^p_{\tilde{X}}) \xrightarrow{\sim} H^0_c(\tilde{X}, \Omega^p_{\tilde{X}}).$$

Or, d'après [14] on a

$$\text{prof } f_* \Omega^p_{\tilde{X}} \geqq n-p \ , \qquad \text{si} \quad p \leqq n-2 \ ,$$

d'où il résulte que

$$H^q_c(X, f_* \Omega^p_{\tilde{X}}) = 0 \ , \qquad \text{si} \quad q \leqq n-p-1 \quad \text{et} \quad p \leqq n-2,$$

car X est affine, ce qui suffit pour prouver (8.1.2).

(8.1.3) Lemme. Si $0<p\leq n-2$, on a

$$H^0(E,\underline{\Omega}^p_E) = 0.$$

En effet, puisque X est une intersection complète on a

$$H^k_X(X) = 0 \;, \qquad \text{si} \quad k\leq n-1 \;,$$

et on obtient,ainsi, des isomorphismes

$$H^k_E(X) \xrightarrow{\sim} H^k(E) \;, \qquad \text{si} \quad 0< k\leq n-2.$$

Donc, on déduit que la structure de Hodge de $H^k(E)$ est pure de poids k, si $0<k\leq n-2$, et que

$$H^k(E,\underline{\Omega}^0_E) = 0,$$

car il est isomorphe à $Gr^0_F \; H^k_E(\tilde{X})$, d'où il résulte (8.1.3).

(8.1.4) Lemme. Si $0<k\leq n-2$, on a

$$\sum_{\substack{p+q=k\\ q>0}} \dim H^q(\tilde{X},\Omega^p_{\tilde{X}}) = \sum_{\substack{p+q=k\\ q>0}} \dim H^q(E,\underline{\Omega}^p_E)$$

En effet, de (8.1.2) on déduit que, si $0<k\leq n-2$ on a

$$\sum_{\substack{p+q=k\\ q>0}} \dim H^q(\tilde{X},\Omega^p_{\tilde{X}}) = \sum_{p+q=k} \dim H^q_c(\tilde{X},\Omega^p_{\tilde{X}})$$

Or, d'après la dualité de Serre on a

$$\dim H^q_c(\tilde{X},\Omega^p_{\tilde{X}}) = \dim H^{n-q}(\tilde{X},\Omega^{n-p}_{\tilde{X}}) \;,$$

car les espaces $H^{n-q}(\tilde{X},\Omega^{n-p}_{\tilde{X}})$ sont separés et de dimension finie si $p+q<n$, par (2.4)(i), et d'après la dualité de Poincaré on a

$$\dim H^k_c(\tilde{X}) = \dim H^{2n-k}(\tilde{X}).$$

Donc, on déduit de (2.4)(i) que

$$\sum_{p+q=k} \dim H^q_c(\tilde{X},\Omega^p_{\tilde{X}}) = \dim H^k_c(\tilde{X})$$

On conclut la preuve de (8.1.4) en notant que

$$\dim H^k_c(\tilde{X}) = \dim H^k(E) \ , \qquad \text{si } 0<k\leqq n-2 \ ,$$

d'après (8.1.1), et que

$$\dim H^k(E) = \sum_{p+q=k,\, q>0} \dim H^q(E,\underline{\Omega}^p_E)$$

d'après la dégénérescence dans le terme E_1 de la suite spectrale de Hodge et (8.1.3).

(8.1.5) Lemme. Le morphisme naturel

$$H^q(\tilde{X},\Omega^p_{\tilde{X}}) \to H^q(E,\underline{\Omega}^p_E)$$

est bijectif si $p+q \leqq n-2$ et $q > 0$.

En effet, remarquons tout d'abord que d'après (8.1.4), il suffit de prouver la surjectivité du morphisme en question.

Soit V une compactification de X et soit $\tilde{V}$ la modification de V obtenue avec l'aide de $\tilde{X}$. Puisque la composition

$$H^k_E(\tilde{V}) \to H^k(\tilde{V}) \to H^k(E)$$

est un isomorphisme si $0<k\leqq n-2$, par la preuve de (8.1.3), et puisque la filtration de Hodge est stricte, on obtient la surjectivité du morphisme

$$H^q(\tilde{V},\underline{\Omega}^p_{\tilde{V}}) \to H^q(E,\underline{\Omega}^p_E) \ , \qquad 0<p+q\leqq n-2$$

d'où il résulte (8.1.5), car on a une factorisation

$$H^q(\tilde{V},\underline{\Omega}^p_{\tilde{V}}) \to H^q(\tilde{X},\Omega^p_{\tilde{X}}) \to H^q(E,\underline{\Omega}^p_E).$$

Fin de la preuve de (8.1): De la suite exacte

$$0 \to \mathcal{H}^0(\underline{\Omega}^p_X) \to f_*\Omega^p_{\tilde{X}}\oplus\Omega^p_\Sigma \to H^0(E,\underline{\Omega}^p_E) \to \mathcal{H}^1(\underline{\Omega}^p_X) \to H^1(\tilde{X},\Omega^p_{\tilde{X}}) \to H^1(E,\underline{\Omega}^p_E) \to \dots$$

et, d'après (8.1.3) et (8.1.5), il résulte aussitôt que

$$\mathcal{H}^0(\underline{\Omega}^p_X) = f_*\Omega^p_{\tilde{X}} \ , \qquad \text{si } p\leqq n-2$$

$$\mathcal{H}^q(\underline{\Omega}^p_X) = 0 \ , \qquad \text{si } p+q\leqq n-2 \text{ et } q>0$$

L'existence du isomorphisme

$$\Omega_X^p \xrightarrow{\sim} f_*\Omega_{\tilde{X}}^p , \qquad \text{si } p \leqq n-2,$$

qui résulte de [14], permet de conclure la preuve.

A titre d'exemple, nous donnons une preuve basée sur (8.1) du théorème de Brieskorn-Sebastiani-Greuel.

(8.2) <u>Proposition</u>. <u>Si</u> $q \leqq n-1$, <u>les faisceaux de cohomologie du complexe de de Rham</u> $(\Omega_X^\bullet, d)$, $\mathcal{H}^q(\Omega_X^\bullet)$, <u>sont</u>

$$\mathcal{H}^0(\Omega_X^\bullet) = \mathbb{C}_X ,$$

<u>et</u>

$$\mathcal{H}^q(\Omega_X^\bullet) = 0 , \qquad \text{si } 0 < q \leqq n-1$$

<u>Démonstration</u>. Le morphisme de complexes filtrés

$$(\Omega_X^\bullet, \sigma) \xrightarrow{\sim} (\underline{\Omega}_X, F)$$

induit, d'après (8.1), des isomorphismes

$$\mathcal{H}^q(\mathrm{Gr}_\sigma^p \, \Omega_X^\bullet[p]) = \mathcal{H}^q(\mathrm{Gr}_F^p \, \underline{\Omega}_X[p]) , \qquad \text{si } p+q \leqq n-2.$$

Donc, si $(\mathcal{M}^\bullet, F)$ est le cône dans $D_{\mathrm{diff}}(X)$ du morphisme antérieur, on a

$$\mathcal{H}^q(\mathrm{Gr}_F^p \, \mathcal{M}^\bullet[p]) = 0 , \qquad \text{si } p+q \leqq n-2,$$

et ainsi de la suite spectrale

$$\mathcal{H}^q(\mathrm{Gr}_F^p \, \mathcal{M}^\bullet[p]) \Rightarrow \mathcal{H}^{p+q}(\mathcal{M}^\bullet)$$

on déduit que

$$\mathcal{H}^{p+q}(\mathcal{M}^\bullet) = 0 , \qquad \text{si } p+q \leqq n-2.$$

La conclusion résulte alors de la suite exacte de cohomologie du triangle

$$\to \Omega_X^\bullet \to \underline{\Omega}_X \to \mathcal{M}^\bullet \xrightarrow{+1} .$$

<u>Remarque</u>. On peut démontrer aussi par un argument parallèle à celui de (8.2) que, sous les hypothèses de (1.2) en général, les fibres des faisceaux $\mathcal{H}^q(\Omega_X^\bullet)$, $q>0$, sont de dimension finie, résultat qui

est du à Bloom-Herrera.

Notons finalement le corollaire suivant à (4.2), (6.1) et (8.1).

(8.3) Corollaire. Soit M une variété complexe fortement pseudoconvexe telle que sa réduction de Remmert est localement intersection complète, soit L un faisceau inversible sur M tel que $L_{|E}$ est ample, et soit η la première classe de Chern de L, alors:

(i) Il existe un isomorphisme canonique

$$\bigoplus_{\substack{p+q=k \\ p,q\geq 1}} H^q(M,\Omega^p_M) \simeq H^k(E) \,, \qquad \text{pour} \quad 0<k\leq n-2.$$

(ii) On a

$$H^q(M,\Omega^p_M\otimes L^{-1}) = 0 \,, \qquad \text{pour} \quad p+q\leq n-2 \quad \text{et} \quad p,q\geq 1$$

(iii) Pour tout $i\geq 2$, le cup-produit iteré

$$\eta^i \cup : H^q(M,\Omega^p_M) \to H^{q+i}(M,\Omega^{p+i}_M)$$

est bijectif si $p+q=n-i$ et $p,q\geq 1$.

RÉFÉRENCES

1. Brylinski,J.L.:(co)-Homologie d'intersection et faisceaux pervers, Séminaire Bourbaki, Exp. 585.

2. Cheeger,J.-Goresky,M.-MacPherson,R.: L^2 cohomology and intersection homology of singular algebraic varieties. Seminar on differential geometry, Yau S.T.(ed.). Princeton U.P. 1982.

3. Deligne,P.: Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales, Publ. Math. I.H.E.S. 35 (1968), 107--126.

4. Deligne,P. Théorie de Hodge II, Publ. Math. I.H.E.S. 40 (1971) 5-58; III, Publ. Math. I.H.E.S. 44 (1974), 5-77.

5. Deligne,P. La conjecture de Weil II, Publ. Math. I.H.E.S., 52 (1980), 137-252.

6. Du Bois,P.: Complexe de de Rham filtré d'une variété singulière, Bull.Soc.Math.France, 109 (1981), 41-81.

7. Elzein,F. Mixed Hodge structures, pp. 345-352, dans "Singularities", Proceedings of Symposia in Pure Math. vol 40 Part 1, 1983.

8. Goresky,M.-MacPherson,R.: Intersection homology II, Invent.math. 71 (1983), 77-129.

9. Grauert,H.- Riemenschneider,O.: Verschwindungssätze fur analytische Kohomologiegruppen auf Komplexen Raumen, Invent. math. 11 (1970), 262-292.

10. Guillén,F.-Navarro Aznar,V.-Puerta,F.: Théorie de Hodge via schémas cubiques, prepublication, 1982.

11. Pinkham,H.: Singularités rationnelles de surfaces, pp.147-178 dans "Séminaire sur les Singularités des Surfaces", Lecture Notes nº 777, Springer Verlag, 1980.

12 Steenbrink, J.H.M. Mixed Hodge structures associated with isolated singularities, pp. 531-536, dans "Singularities" Proceedings of Symposia in Pure Mathematic, vol 40, Part 2 1983.

13. Steenbrink, J.H.M.: article dans ce volume.

14. Vetter,U.: Außere Potenzen von Differentialmoduln reduzierter vollständiger Durchschnitte. Manuscripta math. 2 (1970) 67-75.

15. Yau, Stephen S.T.: Various numerical invariants for isolated singularities, Amer.J.Math., 104 (1982), 1063-1110.

Vicente NAVARRO AZNAR
Departamento de Matemáticas, ETSIIB,
Universidad Politécnica de Barcelona
Diagonal, 647
Barcelona -28
ESPAGNE