A. Galligo
M. Granger
Ph. Maisonobe

$\mathcal{D}$-Modules et faisceaux pervers dont le support singulier est un croisement normal II

Astérisque, tome 130 (1985), p. 240-259
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__130__240_0>

$\mathcal{D}$-MODULES ET FAISCEAUX PERVERS DONT LE SUPPORT SINGULIER EST UN CROISEMENT NORMAL II

A. GALLIGO M. GRANGER Ph. MAISONOBE

Soit X un polydisque ouvert centré en zéro de $\mathbb{C}^n$ et T le croisement normal d'équation $z_1z_2\ldots z_n = 0$. Notons $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X , $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathcal{O}_X$. Le foncteur : $\mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{Sol}(\mathcal{M}) = \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ établit ([K_1], [M], [B],et [K] pour une autre démonstration) une équivalence de catégorie entre les $\mathcal{D}_X$-Modules holonomes réguliers et la catégorie Perv(X) des faisceaux pervers. On obtient ainsi une équivalence entre d'une part $(\mathcal{D}^T_X)_{hr}$ la catégorie des $\mathcal{D}_X$-Modules holonomes réguliers dont le support singulier (c'est-à-dire la projection sur X de la variété caractéristique) est contenu dans T et d'autre part $\mathrm{Perv}^T(X)$, catégorie des faisceaux pervers relativement à la stratification naturelle de T .

Soit $\mathcal{C}_n$ la catégorie dont les objets sont les n-hypercubes de $\mathbb{C}$ espaces vectoriels de dimension finie $\{ F_I \ ; \ I \subset \{ 1,2,\ldots,n \}\}$ où les F_I sont reliés par des applications linéaires $F_I \underset{v_i}{\overset{u_i}{\rightleftarrows}} F_{I \cup \{i\}}$ assujetties aux conditions

$$u_iu_j = u_ju_i \ , \ v_iv_j = v_jv_i \ , \ u_iv_j = v_ju_i \ , \ v_iu_i + 1d \ \text{ inversible.}$$

Dans les deux premiers chapitres, nous donnons les grandes lignes de la démonstration de l'équivalence de catégorie entre $\mathrm{Perv}^T(X)$ et $\mathcal{C}_n$ détaillée dans [G.G.M] . Cette démonstration est obtenue par la construction effective de de deux foncteurs quasi-inverses : $\mathrm{Perv}^T(X) \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}_n$. Au Chapitre III, nous décrivons les objets simples de $\mathcal{C}_n$ et de $\mathrm{Perv}^T(X)$ et caractérisons les objets de $\mathcal{C}_n$ qui correspondent aux complexes d'intersection au sens de [G.M.] .

Au Chapitre IV nous donnons une interprétation en termes de $\mathcal{D}$-Modules de nos résultats. Notons $\mathcal{D}_X^T$ la catégorie des $\mathcal{D}_X$-Modules holonomes sur X dont le support singulier est contenu dans T . $\mathrm{Sol}(\mathcal{M}) = \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$, où $\mathcal{M} \in \mathcal{D}_X^T$ est toujours un élément de $\mathrm{Perv}^T(X)$. La commutativité des foncteurs $R\Gamma_K$ et $\mathbb{R}\,\mathrm{Hom}(\mathcal{M}, .)$ permet de décrire le foncteur $\alpha \circ \mathrm{Sol} : \mathcal{D}_X^T \longrightarrow \mathcal{C}_n$. En utilisant l'équivalence de catégorie $\alpha \circ \mathrm{Sol} : (\mathcal{D}_X^T)_{hr} \longrightarrow \mathcal{C}_n$, on obtient une série de propriétés sur $(\mathcal{D}_X^T)_{hr}$ qu'il suffit de vérifier sur les objets simples. Les théorèmes généraux sur les $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^{\infty}$ -Modules nous autorisent à étendre ces résultats à $\mathcal{D}_X^T$.

NOTATIONS

X	variété analytique complexe
$\mathbb{C}_X$	catégorie des faisceaux d'espaces vectoriels
$K(\mathbb{C}_X)$	catégorie des complexes d'objets de $\mathbb{C}_X$ avec morphisme défini à homotopie près
$D(\mathbb{C}_X)$	catégorie dérivée associée
$D^b(\mathbb{C}_X)$	sous-catégorie pleine des objets bornés
	Pour $\mathcal{F}^\cdot$ objet de $K(\mathbb{C}_X)$ (ou $D(\mathbb{C}_X)$) , on note :
$h^i(\mathcal{F}^\cdot)$	son $i^{\text{ème}}$ faisceau de cohomologie
$\mathcal{F}^\cdot_x$	sa fibre en un point x de X
$\mathcal{F}^\cdot[k]$	complexe égal à $\mathcal{F}^{k+n}$ en degré n dont la différentielle est celle de $\mathcal{F}^\cdot$ multipliée par $(-1)^k$
Γ_A	foncteur de $\mathbb{C}_X \to \mathbb{C}_X$ égal pour A fermé au foncteur section à support A et pour A ouvert à $i_* i^{-1}$, où $i : A \to X$ est l'inclusion ouverte
Γ_A	est aussi défini pour les localement fermés, de façon que $\Gamma_A \Gamma_B = \Gamma_{A \cap B}$
$R\Gamma_A$	foncteur dérivé de Γ_A ($R\Gamma_A R\Gamma_B = R\Gamma_{A \cap B}$)

. Dans tout ce travail, les triangles dans $D(\mathbb{C}_X)$ sont notés " à plat "

$$\begin{tikzcd} A^\cdot \arrow[r] & B. \arrow[r] & C^\cdot \arrow[ll, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

, ou simplement $A^\cdot \to B^\cdot \to C^\cdot$.

I . TRADUCTION DES CONDITIONS DE PERVERSITÉ

Soit X une variété analytique complexe lisse de dimension n et Σ une stratification analytique complexe de Whitney de X :

$$X = \bigcup_{0 \leq j \leq n} \Sigma_j \quad .$$

Σ_j est la strate lisse de dimension complexe j .

Un complexe $\mathcal{F}^{\cdot}$ de $D(\mathbb{C}_X)$ est dit à cohomologie constructible relativement à Σ , si pour tout entier i , $h^i(\mathcal{F}^{\cdot})$, le $i^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie de $\mathcal{F}^{\cdot}$, vérifie :

$$\forall\, j \in \{0,1,\dots,n\} \quad h^i(\mathcal{F}^{\cdot})_{|\Sigma_j} \text{ est un système local.}$$

I.1. <u>DÉFINITION</u> . Un élément $\mathcal{F}^{\cdot}$ de $D(\mathbb{C}_X)$ à cohomologie constructible relativement à Σ est dit pervers relativment à Σ , si les conditions Aa, Ab, B sont vérifiées :

Aa) $\forall i \notin \{0, 1, \dots, n\} \quad h^i(\mathcal{F}^{\cdot}) = 0$

Ab) le support du faisceau $h^i(\mathcal{F}^{\cdot})$ est contenu dans

$$\overline{\Sigma}_{n-i} = \bigcup_{o \leq j \leq n-i} \Sigma_j$$

B) mêmes conditions que Aa et Ab , en remplaçant $\mathcal{F}^{\cdot}$ par $\mathbb{R}\,\mathrm{Hom}\,(\mathcal{F}^{\cdot}, \mathbb{C}_X) = \mathcal{F}^{\vee}$.

I.2. <u>PROPOSITION</u> . Un complexe $\mathcal{F}^{\cdot}$ de $D(\mathbb{C}_X)$ à cohomologie constructible relativement à Σ est pervers relativement à Σ si les conditions Aa et Ab de la définition I.1 sont vérifiées ainsi que :

B) $(R\Gamma_{\Sigma_{n-j}} \mathcal{F}^{\cdot})_{|\Sigma_{n-j}}$ est concentré en degré $\geq j$.

<u>Preuve</u> . voir [G.G.M.]

Soit T le croisement normal de $X = \mathbb{C}^n$ d'équation $z_1 z_2 \dots z_n = 0$, S une variété analytique complexe lisse qui jouera le rôle d'un ensemble de paramètres. Stratifions X x S par

$$\Sigma_{n+\dim S} = (\mathbb{C}^n - T) \times S,\ \Sigma_{n-1+\dim S} = (T - \mathrm{Sing}\ T) \times S,\ \dots\dots,$$
$$\Sigma_{\dim S} = \{0\} \times S \quad .$$

I.3. <u>NOTATION</u> . $\mathrm{Perv}^{T \times S}(X \times S)$ désignera la sous-catégorie pleine de $D(\mathbb{C}_{X\times S})$ formée des complexes pervers relativement à cette stratification de X x S .

II . FAISCEAUX PERVERS RELATIVEMENT A UN CROISEMENT NORMAL

II.1. NOTATIONS .

Soit $X = \mathbb{C}^n = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{C}_i$

$$K_i = \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{C}_i \ , \ V_i = \mathbb{C}_i - K_i \ , \ K'_i = K_i - \{ 0 \}$$

$\{ I,J,L \}$ désignant une partition de $\{ 1,2,\dots,n \}$, on considère les sous-espaces localement fermés de $\mathbb{C}^n$:

$$Z_{I,J,L} = \prod_{i=1}^{n} W_i \quad \text{où } W_i = K_i \text{ si } i \in I \ , \ W_i = \mathbb{C}_i \text{ si } i \in J$$
$$W_i = V_i \text{ si } i \in L \ .$$

$\{ A, B, C \}$ désignant une partition de $\{ 1, 2,\dots, n \}$, on considère la stratification réelle de $\mathbb{C}^n$:

$$S_{A,B,C} = \prod_{i=1}^{n} W_i \quad \text{où } W_i = K'_i \text{ si } i \in I \ , \ W_i = \{ 0 \} \text{ si } i \in B$$
$$W_i = V_i \text{ si } i \in C \ .$$

Soit $\mathcal{F}^\cdot$ un objet de $\mathrm{Perv}^T(X)$ (voir notation I.3) , on note :

$$\mathcal{F}^\cdot_{I,J,L} = R\Gamma_{Z_{I,J,L}} \mathcal{F}^\cdot$$

Ces complexes sont à cohomologies constructibles relativement à la stratification réelle $S_{A,B,C}$.

L'objet de l'étude qui suit est le diagramme du type hypercube à 3^n termes reliant les $\mathcal{F}^\cdot_{I,J,L}$ constitué par les triangles $\mathcal{C}_{I,J,L,i}$ suivant de $D^b(\mathbb{C}_X)$, où $\{ I,J,L, \{ i \}\}$ est une partition de $\{ 1,2,\dots,n \}$:

$$\begin{tikzcd}\mathcal{F}^\cdot_{I \cup \{i\},J,L} \arrow[r] & \mathcal{F}^\cdot_{I,J \cup \{i\},L} \arrow[r] & \mathcal{F}^\cdot_{I,J,L \cup \{i\}}\end{tikzcd}$$

Le centre de cet hypercube est $\mathcal{F}^\cdot$ et ses sommets sont :

$$\mathcal{F}^\cdot_I = R\Gamma_{Z_I} \mathcal{F}^\cdot \ , \text{ où } Z_I = Z_{I,\phi,\{1,2,\dots,n\} - I} \ .$$

On note $|I|$ le cardinal de I .

II.2. CONSTRUCTION DES FONCTEURS α ET β .

II.2.1. PROPOSITION . Le complexe $\mathcal{F}^\cdot_I$ est concentré en degré $|I|$.

NOTATION . $\tilde{\mathcal{F}}_I$ désignera le faisceau $R^{|I|}\Gamma_{Z_I} \mathcal{F}^\cdot$.

On a ainsi un isomorphisme dans $D^b(C_X)$:

$$\mathcal{F}^{\cdot}_I \cong \tilde{\mathcal{F}}_I [- |I|] \quad .$$

Les triangles $\mathcal{C}_{I,\phi,J,i}$ fournissent des morphismes de faisceaux :

$$\Delta_i : \tilde{\mathcal{F}}_I \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{I \cup \{i\}} \quad .$$

En remplaçant Δ_i par $U_i = (-1)^{n_{I,i}} \Delta_i$, où $n_{I,i}$ est le cardinal de l'ensemble $\{ j \in I \ , j \geq i \}$, on obtient un diagramme commutatif (l'hypercube des faisceaux $\tilde{\mathcal{F}}_I$).

NOTATION . $F_I = (\tilde{\mathcal{F}}_I)_0$ (fibre en 0)

$u_i = (U_i)_0 : F_I \longrightarrow F_{I \cup \{i\}}$.

II.2.2. PROPOSITION . La restriction de $\tilde{\mathcal{F}}_I$ à $S_{A,B,C}$ est isomorphe à un faisceau constant du type $(F_{I'})^N$. La restriction de $\tilde{\mathcal{F}}_{1,2,\dots,n}$ à la strate $K_I = S_{I',I,\phi}$ de $K_1 \times K_2 \times \dots \times K_n$ est le faisceau constant F_I .

Comme $K_{I \cup \{i\}} \subset \bar{K}_I$, on en déduit des morphismes de recollement du faisceau $\tilde{\mathcal{F}}_{1,2,\dots,n}$:

$$v_i : F_{I \cup \{i\}} \longrightarrow F_I \quad .$$

Ces morphismes dépendent du choix d'un isomorphisme $\tilde{\mathcal{F}}_{1,2,\dots,n|K_I} \cong F_I$; mais on a précisément :

II.2.3. PROPOSITION . On peut choisir dans II.2.2 des isomorphismes dépendant fonctoriellement de $\tilde{\mathcal{F}}^{\cdot}$ de façon que (F_I,u_i,v_i) soit un objet de $\mathcal{C}_n$.

On a ainsi obtenu un foncteur $\alpha : \mathrm{Perv}^T(X) \longrightarrow \mathcal{C}_n$.

De plus, à tout objet $\underline{F}$ de $\mathcal{C}_n$, on peut associer un diagramme de faisceaux $(\bar{\mathcal{F}}_I,U_i)$ isomorphe à $(\tilde{\mathcal{F}}_I, U_i)$ lorsque $\underline{F} = \alpha(\mathcal{F}^{\cdot})$. Ceci résulte des deux propositions suivantes :

II.2.4. PROPOSITION . Les restrictions des morphismes $U_i : \tilde{\mathcal{F}}_I \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{I \cup \{i\}}$ à chaque strate $S_{A,B,C}$ et les morphismes de recollement de $\tilde{\mathcal{F}}_I$ entre strate s'expriment à l'aide des formules universelles ne dépendant que des u_i,v_i :

$$(F_{I'_1})^{N_1} \xrightarrow{\varphi(\{u_i,v_i\})} (F_{I'_2})^{N_2} \quad .$$

Pour le détail des ces formules et les valeurs exactes de $(F_{I'})^N$ dans la proposition II.2.2. , on se reportera à [G.G.M.] .

Elles permettent d'assurer les résultats suivants :

II.2.5. PROPOSITION . A tout objet de $\mathcal{C}_n$ on peut associer un diagramme $\bar{\mathcal{F}}_I$ de faisceaux et de morphismes $U_i : \bar{\mathcal{F}}_I \longrightarrow \bar{\mathcal{F}}_{I \cup \{i\}}$, où $I \subset \{1,2,\dots,n\}$ et $i \notin I$, tels que :

$$\bar{\mathcal{F}}_{I|S_{A,B,C}} = (F_{I'})^N \qquad (I', N \text{ étant donné dans } II.2.2) .$$

Les restrictions de U_i aux strates et les morphismes de recollement sont donnés par les formules de la Proposition II.2.4.

Pour obtenir un diagramme dont chaque carré soit anticommutatif, on note $\Delta_i = (-1)^{n_{I,i}} U_i$ et on considère le complexe simple associé $\beta(\underline{F})$:

$$\beta(\underline{F})_k = \bigoplus_{|I|=k} \bar{\mathcal{F}}_I \qquad \text{muni des différentielles}$$

$$d_k = \sum_{i \in I, |I|=k} \Delta_i$$

II.2.6. PROPOSITION . Pour tout objet de $\mathcal{C}_n$, $\beta(\underline{F})$ est un complexe pervers relativement à T .

On peut énoncer le théorème :

II.2.7. THÉORÈME . Les foncteurs α et β sont quasi inverses.

II.3. INDICATION SUR LES DÉMONSTRATIONS

Pour les propositions II.2.2. à II.2.6. de nature assez technique, nous renvoyons le lecteur à [G.G.M.] .

Pour démontrer la proposition II.2.1. , on utilise une récurrence sur n dans une version " avec paramètres " de cette proposition : soit S une variété analytique complexe lisse et $\mathcal{F}^{\bullet}$ un élément de $\mathrm{Perv}^{T \times S}(X \times S)$ (voir notation I.3) , on remplace $Z_{I,J,L}$ et $S_{A,B,C}$ par $Z_{I,J,L} \times S$ et $S_{A,B,C} \times S$. Les F_I deviennent des systèmes locaux sur S et les u_i, v_i des morphismes de faisceaux. Les étapes de la preuve de II.2.1 sont les suivantes :

1) On considère la restriction de $\mathcal{F}^{\bullet}$ à $\mathbb{C}_1 \times \dots \times \mathbb{C}_i - \{0\} \times \dots \times \mathbb{C}_n \times S$ comme un faisceau pervers à n-1 variables paramétré par $(\mathbb{C}_i - \{0\}) \times S$. L'hypothèse de récurrence permet d'obtenir le résultat de la proposition II.2.1. pour

$\mathcal{F}^\bullet_I$ quand $I \neq \{1, 2, \ldots, n\}$ et pour $\mathcal{F}^\bullet_{1,2,\ldots,n}|_{\mathbb{C}^n - \{0\}}$. En particulier si $k \neq n$ $h^k(\mathcal{F}^\bullet_{1,2,\ldots,n})$ est à support $\{0\}$.

2) Dans l'hypercube des $\mathcal{F}^\bullet_{I,J,L}$ les degrés des faisceaux de cohomologie éventuellement non nuls sont connus pour les sommets $\mathcal{F}^\bullet_I$, $I \neq \{1,2,\ldots,n\}$ d'après la première étape et au centre $\mathcal{F}^\bullet$. Une chasse aux degrés dans les $\mathcal{C}_{I,J,L}$ donne alors :

$$h^k(\mathcal{F}^\bullet_{1,2,\ldots n}) = 0 , \quad k > n \text{ et } k < 0$$

3) La perversité de $\mathcal{F}^\bullet$ implique (voir Proposition I.2., B) : $R^i \Gamma_{\{0\}} \mathcal{F}^\bullet = 0$, si $i < n$; par ailleurs :

$$R\Gamma_{\{0\}} \mathcal{F}^\bullet = R\Gamma_{\{0\}} \mathcal{F}^\bullet_{1,2,\ldots,n}$$

et $\Gamma_{\{0\}} (h^k(\mathcal{F}^\bullet_{1,2,\ldots n})) = h^k(\mathcal{F}^\bullet_{1,2,\ldots n})$, si $k < n$.

Il en résulte aisément que :

$$h^k(\mathcal{F}^\bullet_{1,2,\ldots,n}) = 0 \qquad \text{si} \qquad i < n .$$

Pour démontrer le théorème II.2.7., on remarque que les propositions II.2.1. à II.2.6 demeurent encore valables avec paramètres. Si $\mathcal{C}_n(S)$ désigne la catégorie dont les objets sont les F_I, u_i, v_i avec :

$$F_I \text{ système local sur } S$$

$$F_I \underset{v_i}{\overset{u_i}{\rightleftarrows}} F_{I \cup \{i\}} \quad \text{morphismes de faisceaux}$$

avec les mêmes conditions que dans $\mathcal{C}_n$ pour ces u_i, v_i, on doit démontrer la version avec paramètres du théorème II.2.7, soit :

II.3.1. <u>THÉORÈME</u> . $\alpha : \mathrm{Perv}^{T\times S}(X \times S) \longrightarrow \mathcal{C}_n(S)$ établit une équivalence de catégorie.

<u>PREUVE DU THÉORÈME II.3.1.</u> Il s'agit de construire des transformations naturelles de foncteurs $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}_n(S)} \longrightarrow \alpha \circ \beta$

$$\mathrm{Id}_{\mathrm{Perv}^{T\times S}(X\times S)} \longrightarrow \beta \circ \alpha$$

telles que pour tout objet $\underline{F}$ de $\mathcal{C}_n(S)$ et $\mathcal{F}^\bullet$ de $\mathrm{Perv}^{T\times S}(X\times S)$, on ait des isomorphismes :

$$\underline{F} \xrightarrow{\varphi_F} \alpha(\beta\ (\underline{F}))$$

$$\mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{\psi_{\mathcal{F}^\bullet}} \mathcal{G}^\bullet = \beta(\alpha(\mathcal{F}^\bullet) \quad .$$

On remarque en premier lieu un isomorphisme naturel entre $R\Gamma_{Z_I}(\beta(\underline{F}))$ et $\tilde{\mathcal{F}}^\bullet_I$. Le premier isomorphisme φ_F se construit assez facilement à partir de remarques de ce type. Pour ce qui est de $\psi^\bullet_{\mathcal{F}^\bullet}$, on obtient d'abord l'existence de morphismes :

$$h_I : \mathcal{F}^\bullet_I \longrightarrow \mathcal{G}^\bullet_I$$

commutant avec les morphismes bord U_i relatifs à $\mathcal{F}^\bullet$ et $\mathcal{G}^\bullet$. La deuxième partie du théorème est alors une conséquence du lemme suivant :

II.3.2. <u>LEMME</u> . Soient $\mathcal{F}^\bullet$ et $\mathcal{G}^\bullet$ des complexes pervers et $h_I : \tilde{\mathcal{F}}_I \longrightarrow \tilde{\mathcal{G}}_I$ des morphismes commutant avec les U_i . Alors il existe un unique morphisme $h : \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{G}^\bullet$, tel que $h_I = R^{|I|}\ \Gamma_{Z_I}\ h$.

Si on remplace $\mathcal{F}^\bullet$ et $\mathcal{G}^\bullet$ par leurs résolutions injectives canoniques, les triangles $\mathcal{T}_{I,J,L,\{i\}}$ deviennent des suites exactes courtes scindées de complexes dont chaque terme est injectif.

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}^\bullet_{I\cup\{i\},J,L} \longrightarrow \mathcal{J}^\bullet_{I,J\cup\{i\},L} \longrightarrow \mathcal{J}^\bullet_{I,J,L\cup\{i\}} \longrightarrow 0$$

Les morphismes bords des triangles sont alors réalisés par des morphismes de complexes définis dans $K(\mathbb{C}_X)$ (c'est-à-dire à homotopie près) :

$$\delta : \mathcal{J}^\bullet_{I,J,L\cup\{i\}} \longrightarrow \mathcal{J}^\bullet_{I\cup\{i\},J,L}[+1] \quad .$$

D'autre part, pour les complexes d'objets injectifs, on a :

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathbb{C}_X)} = \mathrm{Hom}_{D(\mathbb{C}_X)} \quad .$$

Enfin, on remarque que les morphismes de triangles de type $(R\Gamma_K\varphi, \varphi, R\Gamma_U\varphi)$, où $K \subset X$ est fermé et $U = X - K$, deviennent des morphismes de suites exactes courtes $(\Gamma_K\varphi, \varphi, \Gamma_U\varphi)$, où

$$\varphi : \mathcal{J}^\bullet_{I,J\cup\{i\},L} \longrightarrow \mathcal{J}^\bullet_{I,J\cup\{i\},L} \quad .$$

La preuve du lemme III.3.2. résulte alors d'applications répétées du lemme qui suit dans le cas où $\mathrm{Hom}(C^\bullet, A^{\bullet\prime}) = 0$.

$\mathcal{A}$ désignant une catégorie abélienne, considérons un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi_1"] & B^{\cdot} \arrow[r, "\pi"] & C^{\cdot} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'^{\cdot} \arrow[r, "i'"] & B'^{\cdot} \arrow[r, "\pi'"] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

tel que les lignes horizontales sont des suites exactes courtes scindées d'objets de $\mathcal{A}$. Notons

$$\delta \ : \ C^{\cdot} \longrightarrow A^{\cdot} [+1] \qquad\qquad \delta' \ : \ C'^{\cdot} \longrightarrow A'^{\cdot} [+1]$$

les morphismes bords de ces suites exactes. Et notons enfin $\bar{\varphi}$ le représentant dans K($\mathcal{A}$) d'un morphisme de complexe φ .

II.3.3. <u>LEMME</u> . Si dans la situation ci-dessus on a $\bar{\varphi}_1 \delta = \delta' \bar{\varphi}_3$ dans K($\mathcal{A}$) , il existe un morphisme $\varphi_2 : B \to B'^{\cdot}$, tel que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ soit un morphisme de suites exactes courtes. De plus $\bar{\varphi}_2$ est unique modulo Hom($C^{\cdot}$,$A'^{\cdot}$) (c'est-à-dire $\overline{\varphi'_2} - \overline{\varphi_2} = \overline{i' \circ h \circ \pi}$) .

III . OBJETS SIMPLES ET COMPLEXES D'INTERSECTION

III.1. $\mathcal{C}_n$ est une catégorie abélienne dont tous les objets sont de longueur finie, précisément $\underline{F} = (F_I, u_i, v_i)$ est de longueur inférieure ou égale à $\sum_i \dim_{\mathbb{C}} F_I$.

Les objets simples de $\mathcal{C}_n$ sont décrits par la proposition suivante, dont la démonstration est laissée au lecteur :

III.1.1. PROPOSITION . Un objet de $\mathcal{C}_n$ est simple si et seulement si il est est isomorphe à l'un des objets suivants de $\mathcal{C}_n$ noté $\underline{F}^{I,J}$, indexé par les couples de sous-ensembles disjoints I et J de $\{1,\dots,n\}$ et $(\lambda_j)_{j \in J} \in (\mathbb{C} - \{0\})^J$

$$\begin{aligned} F^{I,J} &= \mathbb{C} \quad \text{si} \quad I \subset I' \subset I \cup J \\ &= 0 \ ; \ \text{sinon} \\ u_j &= Id \ , \ \text{si} \quad I \subset I' \subset I' \cup \{j\} \subset I \cup J \\ v_j &= \lambda_j Id \quad \text{avec} \quad \lambda_j = e^{2i\pi\alpha_j} - 1 \quad \text{et} \quad \alpha_j \notin Z \ . \end{aligned}$$

III.2. D'après [G. M.] , on a une équivalence de catégories entre les systèmes locaux $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{C}^n - T$ et les complexes de faisceaux constructibles $\mathcal{F}^\bullet$ satisfaisant aux propriétés suivantes :

i) $\mathcal{F}^\bullet$ est pervers relativement à T

ii) $h^j(\mathcal{F}^\bullet)_x = 0$ si $x \in \Sigma_{n-j}$ et $j > 0$

iii) $(R^j \Gamma_{\Sigma_{n-j}} \mathcal{F}^\bullet)|_{\Sigma_{n-j}} = 0$ si $j > 0$

Ces propriétés sont équivalentes aux axiomes [ax 1] de [G M] pour le complexe $\mathcal{F}^\bullet(2n) = IC^\cdot(\mathcal{E})$, avec la perversité moyenne. La proposition suivante décrit ces complexes d'intersection :

III.2.1. PROPOSITION . Soit $\mathcal{E}$ le système local sur $\mathbb{C}^n - T$ défini par un espace vectoriel de dimension finie E et des monodromies partielles $M_j : E \longrightarrow E$, $j = 1,\dots,n$. On note $v_j = M_j - Id$. Le complexe d'intersection décalé $IC(\mathcal{E})(-2n) = \mathcal{F}^\bullet$ est représenté dans $\mathcal{C}_n$ par $\alpha(\mathcal{F}^\bullet)$ isomorphe à l'objet $\underline{F}(\mathcal{E})$ de $\mathcal{C}_n$ décrit par : $F(\mathcal{E})_I = E_{/\ker(\prod_{j \in J} v_j)}$, u_j étant le passage au quotient et v_j défini par $v_j(\dot{x}) = \dot{\overline{v_j(x)}}$.

PREUVE . On constate sans difficulté que $\underline{F}(\mathcal{E})$ est un objet bien défini de $\mathcal{C}_n$ et que la restriction de $\beta(\underline{F}(\mathcal{E}))$ à $\mathbb{C}^n - T$ est isomorphe à $\mathcal{E}$. Le foncteur inverse de $IC^\bullet(-2n)$ étant précisément fourni par cette restriction, il suffit donc de s'assurer que le complexe pervers $\mathcal{F}^\bullet = \beta(\underline{F}(\mathcal{E}))$ satisfait aux propriétés ii) et iii) ci-dessus :

Pour tout $I \subset \{1,\dots, n\}$, on note $m = |I|$ et :

$$\Sigma = \mathbb{C}^{\{1,\dots,n\} - I} = \{(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n \; ; \; z_j = 0 \quad \text{si} \quad j \in I\}$$

$$\Sigma' = \mathbb{C}^I = \{(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n \; ; \; z_j = 0 \quad \text{si} \quad j \notin I\}$$

et $\Sigma'' = \Sigma - T \cap \Sigma$: Σ'' est une strate de codimension m .

Le complexe pervers $\mathcal{F}^\bullet|_{\Sigma'' \times \Sigma'}$ peut être étudié du point de vue du Théorème II.3.1. avec Σ'' comme variétés de paramètre et $\Sigma'' \times T_I$ comme support singulier, où T_I est le croisement normal standard de $\mathbb{C}^I$. Il est représenté par les systèmes locaux sur Σ'' définis par les $F_{I'}$, où $I' \subset I$, munis des monodromies M_j ou $j \notin I$, avec les morphismes $F_{I'} \underset{v_i}{\overset{u_i}{\rightleftarrows}} F_{I' \cup \{i\}}$ qui commutent aux M_j : il en résulte, d'après la définition de β (§ II 2) , que la fibre de $\mathcal{F}^\bullet$ en x est isomorphe au complexe simple associé à $(F_{I'}, I' \subset I, u_i, i \in I)$. La surjectivité des u_i implique alors :

$$h^m(\mathcal{F}^\bullet)_x = 0 \quad ; \quad \text{d'où} \quad \text{ii)} \; .$$

Par ailleurs, en considérant les inclusions fermées :

$$\Sigma'' \subset Z'_I = \Big(\prod_{j \in I} K_j\Big) \times \Sigma'' \subset \mathbb{C}^n - \Sigma'$$

et en utilisant le fait que $R\Gamma_{Z'_I}(\mathcal{F}^\bullet|_{\mathbb{C}^I \times \Sigma''})$ est concentré en degré m , on trouve :

$$\begin{aligned} (R^m \Gamma_{\Sigma_{n-m}} \mathcal{F}^\bullet)|_{\Sigma''} &= R^m \Gamma_{\Sigma''}(\mathcal{F}^\bullet|_{\Sigma''}) \\ &= \Gamma_{\Sigma''}(R^m \Gamma_{Z'_I} \mathcal{F}^\bullet)|_{\Sigma''} \end{aligned} \tag{1}$$

Les restrictions de $R^m \Gamma_{Z'_I} \mathcal{F}^\bullet$ aux strates de Z'_I sont les systèmes locaux $(F_{I'}, I' \subset I \; ; \; M_j, j \notin I)$, la restriction à la strate minimale Σ'' étant F_I et les morphismes de recollement les v_j , $j \in I$ (cf Proposition II.2.2 et [G.G.M.]) . De l'injectivité des morphismes v_j , il résulte que les sections à support Σ'' sont nulles d'où ii) , d'après l'égalité (1) .

On retrouve à partir des propositions III.1.1. , III.2.1. le fait que les objets simples de $\mathrm{Perv}^T(\mathbb{C}^n)$ sont le prolongement par zéro, convenablement décalés, des complexes d'intersection sur les adhérences des strates Σ_I des systèmes locaux de rang un sur ces strates $\Sigma_I = \left\{ z \in \mathbb{C}^n, \begin{array}{ll} z_i = 0 & \text{si } i \in I \\ z_i \neq 0 & \text{si } i \notin I \end{array} \right\}$.

III.2.2. COROLLAIRE . L'image par β de l'objet simple de $\mathcal{C}_n$ décrit dans III.1.1 est :

$$\beta(\underline{F}^{I,J}) = \tau_*(I\ C(\mathcal{E}))\ (-\ 2n - |I|)\ ,$$

où τ est l'inclusion $\mathbb{C}^{\{1,\dots,n\} - I} = \mathbb{C}^{I'} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ et $\mathcal{E}$ est le système local sur $\mathbb{C}^{I'} - T_{I'}$, défini par $\mathbb{C}$ muni des monodromies $e^{2i\pi\alpha_j} = 1 + \lambda_j$, si $j \in I$ $e^{2i\pi\alpha_j} = 1$, si $j \notin I \cup J$.

IV . $\mathcal{D}$ - MODULES DONT LA VARIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE SE PROJETTE SUR UN CROISEMENT NORMAL

IV.1. ÉTUDE DE L'HYPERCUBE $R\Gamma_{Z_{I,J,L}} \mathcal{O}_X$.

Cet hypercube est obtenu à partir des triangles

$$\begin{tikzcd} * \quad R\Gamma_{Z_{I \cup \{i\},J,L}} \mathcal{O}_X \arrow[r] & R\Gamma_{Z_{I,J \cup \{i\},L}} \mathcal{O}_X \arrow[r] & R\Gamma_{Z_{I,J,L \cup \{i\}}} \mathcal{O}_X \arrow[ll, bend left, "\Delta_i"] \end{tikzcd}$$

IV.1.1. PROPOSITION . Le complexe $R\Gamma_{Z_{I,J,L}} \mathcal{O}_X$ est concentré en degré $|I|$.

PREUVE . Remarquons que $Z_{I,J,L}$ est contenu dans le fermé $Z_{I,J \cup L,\phi}$.

En appliquant un résultat classique (voir par exemple remarque p. 276 [S.K.K.]) , on obtient que $R\Gamma_{Z_{I,J \cup L,\phi}} \mathcal{O}_X$ n'a de cohomologie qu'en degré $\geq |I|$. Il en est donc de même de $R\Gamma_{Z_{I,J,L}} \mathcal{O}_X$.

Pour $I = \phi$, la proposition provient du fait que $Z_{\phi,J,L}$ est un ouvert de Stein ; on obtient alors la proposition pour tous les I par une " chasse aux degrés " dans les triangles. Cela nous permet d'établir par récurrence :

IV.1.2. PROPOSITION . L'hypercube formé à partir des triangles * est fonctoriellement isomorphe à celui formé à partir des triangles :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{I \cup \{i\},J,L} \left[- |I| - 1\right] \arrow[r] & \mathcal{O}_{I,J \cup \{i\},L} \left[- |I|\right] \arrow[r] & \mathcal{O}_{I,J,L \cup \{i\}} \left[- |I|\right] \arrow[ll, bend left, "(-1)^{N_{I,i}} U_i"]
\end{tikzcd}$$

où

$$\mathcal{O}_{I,J,L} = \frac{\Gamma_{\prod\limits_{k \in I \cup L} V_k \times \prod\limits_{k \in J} \mathbb{C}_k} \mathcal{O}_{X}}{\sum\limits_{k \in I} \Gamma_{\mathbb{C}_k \times \prod\limits_{j \in I \cup L - \{k\}} V_j \times \prod\limits_{j \in J} \mathbb{C}_j} \mathcal{O}_X} .$$

U_i étant le morphisme de passage au quotient.

NOTATION . $$\mathcal{O}_I = \mathcal{O}_{I,\phi,\{1,2,\dots,n\} - I} = \frac{\Gamma_{\prod\limits_{i=1}^{n} V_i} \mathcal{O}}{\sum\limits_{k \in I} \Gamma_{\mathbb{C}_k \times \prod\limits_{i \neq k} V_i} \mathcal{O}}$$

IV.2. DESCRIPTION DU FONCTEUR $\alpha \circ \mathrm{SOL} : \mathcal{D}^T_X \longrightarrow \mathcal{C}_n$

Les $\mathcal{D}$ - Modules considérés dans ce paragraphe ne sont pas nécessairement réguliers.

Les foncteurs $R\Gamma_Z$ et $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M, .)$ commutent. Si M appartient à $\mathcal{D}^T_X$ l'hypercube associé au complexe pervers $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_X) = \mathrm{Sol}(M)$ de la façon décrite au chapitre II est donc fonctoriellement isomorphe à celui bâti sur les complexes :

$$\mathbb{R}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M, R\Gamma_{Z_{I,J,L}} \mathcal{O}_X) .$$

LEMME . $\mathbb{R}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M, R\Gamma_{Z_I} \mathcal{O}_X) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_I) \left[- |I|\right]$.

PREUVE . Il suffit d'utiliser les propositions II.2.1. , IV.1.1. , IV.1.2. .

LEMME . Les solutions $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_I)_o$ sont multiformes de détermination finie ($\forall(\varphi, m) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_I)_o \times M_o$, $\varphi(m)$ est représentable par une fonction analytique multiforme en dehors de l'hypersurface $z_1 \dots z_n = 0$.

PREUVE . Le lemme se déduit de la consructibilité de $\mathbb{R}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(M, \mathcal{O})$ et d'une chasse dans l'hypercube $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(M, \mathcal{O}_{I,J,L}) \left[- |I|\right]$. De plus, en reprenant de façon détaillée la construction de l'objet de $\mathcal{C}_n$ $\alpha(\mathbb{R}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_X))$, on établit la proposition :

IV.2.1. PROPOSITION . $\alpha(\mathbb{R}\mathcal{H}om(M, \mathcal{O}))$ est fonctoriellement isomorphe à l'objet de $\mathcal{C}_n$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M_o, \mathcal{O}_{I,o}) \underset{v_i}{\overset{u_i}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M_o, \mathcal{O}_{I \cup \{i\},o}) ,$$

où u_i est la flèche canonique de passage au quotient entre solutions à valeurs dans $\mathcal{O}_{I,O}$ et à valeurs dans $\mathcal{O}_{I \cup \{i\},O}$ et v_i la variation partielle autour de $z_i = O$:

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M_O, \mathcal{O}_{I \cup \{i\},O}) \qquad (v_i \varphi)(m) = (M_i \varphi - \varphi)(m) \quad ,$$

$M_i \varphi(m)$ étant la classe d'un représentant multiforme de $\varphi(m)$ obtenu après un tour autour de l'axe $z_i = O$.

IV. 2.2. PROPOSITION . Soit M un objet de $\mathcal{D}_X^T$, x un point de X , l'indice du complexe $\mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{X,x}}(M_{,x}, \mathcal{O}_{X,x})$ est égal à

$$\sum_{I \subset \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\ X,x}(M_{,x}, \mathcal{O}_{I,x})$$

PREUVE . Elle est immédiate à partir de la description du foncteur $\beta \circ \alpha$ équivalent à l'identité.

IV.3. DICTIONNAIRE $(\mathcal{D}^T_{\mathbb{C}^n})_{hr} \longrightarrow \mathcal{C}_n$

La proposition IV.2.1. permet, en utilisant le théorème d'équivalence de catégorie $(\mathcal{D}_X^T)_{hr} \longrightarrow \mathrm{Perv}^T(X)$ démontré dans [B] , [K] , [M] , d'obtenir :

IV.3.1. PROPOSITION . $M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{X,o}}(M_{,o}, \mathcal{O}_{I,o}) \underset{v_i}{\overset{u_i}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{X,}}(M_{,o}, \mathcal{O}_{I\cup\{i\},o})$

est une équivalence de catégorie entre $(\mathcal{D}_X^T)_{hr}$ et $\mathcal{C}_n$.

IV.3.2. PROPOSITION . Les objets simples de $(\mathcal{D}_X^T)_{hr}$ sont isomorphes aux $\mathcal{D}_X$-Modules : $\dfrac{\mathcal{D}_X}{D_{I,J,\alpha_J}}$, où

I et J sont deux parties de $\{1, 2, \ldots, n\}$ disjointes ,

$\alpha_J = (\alpha_i)_{i \in J}$ et $\alpha_i \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$,

D_{I,J,α_J} étant l'idéal de $\mathcal{D}_X$ engendré par

$$(\ (z_i)_{i \in I}\ ,\ (D_i)_{i \notin I \cup J}\ ,\ (z_i D_i - \alpha_i)_{i \in J}\ ) \quad .$$

PREUVE . Les objets simples se correspondent par l'équivalence de catégorie. On vérifie que les $\dfrac{\mathcal{D}_X}{D_{I,J,\alpha_J}}$ sont des éléments de $(\mathcal{D}_X^T)_{hr}$. Il reste alors à montrer que $\alpha \circ \mathrm{Sol}\,\left(\dfrac{\mathcal{D}_X}{D_{I,J,\alpha_J}}\right) \cong (F^{I,J,\lambda_j}, u_i, v_i)$. Cet isomorphisme s'établit par la proposition IV.2.1. en résolvant des équations très simples aux dérivées partielles. ($\lambda_j = e^{2i\pi\alpha_j} + 1$) .

DÉFINITION . (voir [S. Gre] exposé 3) . Soit M un $\mathcal{D}_Y$-Module cohérent, x^* un point de T^*Y dans la variété caractéristique de M . Nous savons que M admet une bonne filtration locale à laquelle nous associons $(\mathrm{gr}\ M)_{x,\xi}$.

La multiplicité de ce $\mathbb{C}\{x\}\,[\xi]$ - module ne dépend que de M et est appelé multiplicité de M en x^* , que l'on note $\mathrm{mult}_{x^*} M$.

Rappelons que si M est un $\mathcal{D}_Y$-Module holonome, la dimension de $(\mathrm{gr}\ M)_{x,\xi}$ est égale à $\dim_{\mathbb{C}} Y$ et que si

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de $\mathcal{D}_Y$ - Module holonome, on a :

$$\mathrm{mult}_{x^*} M = \mathrm{mult}_{x^*} M' + \mathrm{mult}_{x^*} M'' \quad .$$

IV.3.3.3 PROPOSITION . Soit M un élément de $(\mathcal{D}_X^T)_{hr}$, sa variété caractéristique est donc contenue dans Δ_T :

$$\Delta_T = \{(z_1,\dots,z_n ; \xi_1,\dots,\xi_n) \in T^* X ; \forall i \in \{1,2,\dots,n\}\ z_i\,\xi_i = 0\} .$$

Soit $z_I^* = (z_1,\dots,z_n,\xi_1,\dots,\xi_n)$ vérifiant :

$$i \in I \Leftrightarrow z_i = 0 \quad \text{et} \quad j \in I \Leftrightarrow \xi_j \neq 0 \quad .$$

On a : $\mathrm{mult}_{z_I^*}(M) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D},0}(M_{,0}, \mathcal{O}_{I,0})$

$$\mathrm{mult}_{(0,0)}(M) = \sum_{I \subset \{1,2,\dots n\}} \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D},0}(M_{,0}, \mathcal{O}_{I,0}) \quad .$$

PREUVE . L'application de $\mathcal{C}_n$ dans $\mathbb{N}$: $\left(F_J \underset{v_i}{\overset{u_i}{\rightleftarrows}} F_{J \cup \{i\}}\right) \longrightarrow \dim_{\mathbb{C}} F_I$ se comporte de façon additive pour les suites exactes de la catégorie abélienne $\mathcal{C}_n$. Il suffit donc de vérifier la proposition sur les objets simples, ce qui est facile.

<u>NOTATION</u> . Soit $\mathfrak{I}$ un idéal de $\mathcal{D}_{X,0}$ tel que $\frac{\mathcal{D}_{X,0}}{\mathfrak{I}}$ appartienne à $(\mathcal{D}^T_{X,0})_{hr}$.(D'après [Bjo] chap I , tout élément de $(\mathcal{D}^T_{X,0})_{hr}$ est isomorphe à un tel $\mathcal{D}_{X,0}$-module). On appelle solution de $\frac{\mathcal{D}_{X,0}}{\mathfrak{I}}$ à valeurs dans $\mathcal{O}_I$, un élément f de $\mathcal{O}_{I,0}$ tel que :

$$\forall Q \in \mathfrak{I} \qquad Qf = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{O}_{I,0} \quad .$$

Ces solutions d'identifient aux éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{X,0}}(\frac{\mathcal{D}_{X,0}}{\mathfrak{I}}, \mathcal{O}_{I,0})$ et forment donc un $\mathbb{C}$ - espace vectoriel de dimension finie .

IV.3.4. <u>COROLLAIRE</u> . $\mathfrak{I}$ vérifiant les hypothèses précédentes, si $P \in \mathcal{D}_{X,0}$ s'annule pour tout $I \subset \{1,2,\ldots, n\}$ sur les solutions de $\frac{\mathcal{D}_{X,0}}{\mathfrak{I}}$ à valeurs dans $\mathcal{O}_I$, alors P appartient à l'idéal $\mathfrak{I}$.

<u>PREUVE</u> . Il suffit de considérer la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \frac{\mathfrak{I} + \mathcal{D}_{X,0} P}{\mathfrak{I}} \longrightarrow \frac{\mathcal{D}_{X,0}}{\mathfrak{I}} \longrightarrow \frac{\mathcal{D}_{X,0}}{\mathfrak{I} + \mathcal{D}_{X,0} P} \longrightarrow 0$$

Vu l'hypothèse sur P , la proposition IV.3.3. et le fait que

$$\frac{\mathcal{D}_{X,0}}{\mathfrak{I} + \mathcal{D}_{X,0} P} \in (\mathcal{D}^T_{X,0})_{hr} \quad , \quad \mathrm{mult}_{(0,0)} \frac{\mathcal{D}_{X,0}}{\mathfrak{I}} = \mathrm{mult}_{(0,0)} \frac{\mathcal{D}_{X,0}}{\mathfrak{I} + \mathcal{D}_{X,0} P}$$

On en déduit que $\mathrm{mult}_{(0,0)} \frac{\mathfrak{I} + \mathcal{D}_{X,0} P}{\mathfrak{I}} = 0$; d'où $P \in \mathfrak{I}$.

Citons également une proposition qu'il suffit de vérifier sur les objets simples de $(\mathcal{D}^T_{X,0})_{hr}$.

IV.3.5. <u>PROPOSITION</u> . Soit M un élément de $(\mathcal{D}^T_{X,0})_{hr}$; supposons que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{X,0}}(M_{,0}, \mathcal{O}_{I,0}) = 0$, alors la variété caractéristique de M ne contient pas la variété de dimension n d'équations :

$$\xi_i = 0 \quad \text{pour} \quad i \in I \quad \text{et} \quad x_i = 0 \quad \text{pour} \quad i \notin I \quad .$$

IV.4. SANS L'HYPOTHÈSE DE RÉGULARITÉ

Dans [M_1] et [L.M.2.] est expliqué comment à un $\mathcal{D}$ - Module holonome M est associé un unique $\mathcal{D}$ - Module régulier M_r (à isomorphe près) tel que :

$$\mathcal{D}^\infty \underset{\mathcal{D}}{\otimes} M \cong \mathcal{D}^\infty \underset{\mathcal{D}}{\otimes} M_r \quad .$$

Ce $\mathcal{D}$ - Module est caractérisé par $\mathrm{Sol}(M) = \mathrm{Sol}(M_r)$.

IV.4.1. LEMME . La variété caractéristique de M est égale à la variété caractéristique de M_r . Les multiplicités des composantes de la variété caractéristique de M et de M_r sont les mêmes.

PREUVE . Comme Z.Mebkhout nous l'a signalé (voir [L.M.1]), le premier point provient du fait que la variété caractéristique de M est le support de $\mathcal{E}_X^\infty \underset{\pi^{-1}(\mathcal{D}_X)}{\otimes} M$. Le deuxième point se démontre en utilisant le théorème de l'indice de Kashiwara [K_2] .

IV.4.2. COROLLAIRE . Les propositions IV.3.3., IV.3.4., IV.3.5. sont encore vérifiées pour un élément de $\mathcal{D}_X^T$.

REMARQUE . Des preuves élémentaires des ces propositions sont données dans le cas n = 1 , par une toute autre méthode dans [Bri-Mai].

BIBLIOGRAPHIE

[Bjo] J.E. BJORK Rings of differential operators, North Holland, Mathematical Library (1979)

[Bri - Mai] J. BRIANÇON et Ph. MAISONOBE "Idéaux de germes d'opérateurs différentiels à une variable" à paraître dans l'Enseignement Mathématique (1984)

[B] J.L. BRYLINSKI "Modules holonomes à singularité régulière et filtration de Hodge", Proceedings, La Rabida, Lecture Notes in Mathematics n° 961

[G.G.M.] A. GALLIGO, M. GRANGER et Ph. MAISONOBE " $\mathcal{D}$- Modules et faisceaux pervers dont le support singulier est un croisement normal", à paraître aux Annales de l'Institut Fourier. (1985)

[G.M.] M. GORESKY et R. MAC PHERSON "Intersection Homology II", Inventiones Math, vol 72, fasc. 1, (1983)

[K] M. KASHIWARA "The Riemann Hilbert problem for holonomic systems" R.I.M.S. preprint 437 (1983)

[K 1] M. KASHIWARA " On the maximally overdetermined system of linear differential equations I " Publ. RIMS, Kyoto Univ. n° 10 (1975), 563-579.

[K_2] M. KASHIWARA "Systems of Microdifferential Equations" (Notes and translation by Teresa Monteiro Fernandes. Introduction by Jean Luc Brylinski)
Birkhaüser, Progress in Mathematics, Vol. 34, (1983)

[L.M.1.] LE DUNG TRANG et Z. MEBKHOUT "Variétés caractéristiques et variétés polaires." C.R. Acad. Paris, t. 296 (Janv. 1983)

[L.M.2.] LE DUNG TRANG et Z. MEBKHOUT "Introduction to linear differential systems", Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 40, (1982) (Conférences à Arcata, 1981)

[M] Z. MEBKHOUT Thèse d'Etat, Université de Paris VII, Février (1979)
Z. MEBKHOUT "Une équivalence de catégorie." "Une autre équivalence de catégorie", Compositio Mathematica, Vol 51 n° 1, pp. 51-62 et pp. 63-88 (1984)

[M$_1$] Z. MEBKHOUT Sur le Problème de Hilbert-Riemann, Proc. Les Houches (1979), Lecture Notes in Phys, vol. 126, Springer-Verlag.

[S.Gre] Séminaire de Grenoble (1975-1976) : " Opérateurs différentiels et pseudo-différentiels ". Preprint Univ. de Grenoble

[S.K.K.] M. SATO, T. KAWAI et M. KASHIWARA Microfonctions and pseudo-differentials equations, Springer Lectures Notes, n° 287, (1973)