Astérisque

BERNARD MALGRANGE

Variations généralisées

Astérisque, tome 130 (1985), p. 237-239
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__130__237_0>

VARIATIONS GÉNÉRALISÉES *

B. MALGRANGE

Sur $X = \mathbb{A}^n$ (ou, plus généralement, une variété complexe lisse 2-connexe), on considère $F \xrightarrow{u} G$, avec F et G pervers et u un isomorphisme modulo faisceaux constants, i.e $\ker u$ et $\operatorname{coker} u$ sont constants (je prends la normalisation bête où $H^i F$ est nul sauf en degrés $(0,\dots n)$). Soit $j : U \hookrightarrow X$ le plus grand ouvert où F (donc G) est localement constant ; $Y = X - U$ est la projection de $\overline{\operatorname{car} F - \{0\}} \subset T^* X - \{0\}$; soit $a \in U$, et $\pi = \pi_1(U,a)$; on a une action équivariante de π sur $j^* F \xrightarrow{u} j^* G$ et on veut définir, $\forall \alpha \in \pi$ un morphisme $\operatorname{var}(\alpha)$ en sens inverse.

Appelons factorisation (resp. factorisation pleine) de $F \xrightarrow{u} G$ un diagramme commutatif $F \xrightarrow{v} H \xrightarrow{w} G$ (avec $w \circ v = u$), avec H pervers, et v, w des isomorphismes mod. constants (resp. tels que de plus v soit injectif et w surjectif). On a le résultat suivant

LEMME 1.- 1) *Il existe des factorisations pleines*

2) *Si l'on a deux factorisations pleines* $F \xrightarrow{v} H \xrightarrow{w} G$ *et* $F \xrightarrow{u'} H' \xrightarrow{w'} G$, *il en existe une troisième* $F \xrightarrow{v''} H'' \xrightarrow{w''} G$ *qui s'applique surjectivement sur les deux précédentes ; i.e il existe* λ (resp. λ') *surjective* $H'' \xrightarrow{\lambda} H$ (resp. $H'' \xrightarrow{\lambda'} H'$) *tels que les diagrammes évidents soient commutatifs.*

(*) Extrait d'une lettre adressée à J.L VERDIER, le 23 décembre 1982. L'idée de considérer de telles variations m'a été suggérée par O. Gabber.

Démonstration : 1) On considère les suites exactes

$$\begin{cases} 0 \longrightarrow \ker u \longrightarrow F \longrightarrow \operatorname{im} u \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow \operatorname{im} u \longrightarrow G \longrightarrow \operatorname{coker} u \longrightarrow 0 \end{cases}$$

La deuxième donne un élément de $\operatorname{Ext}^1(\operatorname{coker} u, \operatorname{im} u)$;

comme $\operatorname{Ext}^i(\operatorname{coker} u, \ker u) = 0, i = 1,2$, cet élément se relève de manière unique en un élément de $\operatorname{Ext}^1(\operatorname{coker} u, F)$, d'où une extension $0 \longrightarrow F \xrightarrow{v} H \longrightarrow \operatorname{coker} u \longrightarrow 0$ qui s'envoie sur la deuxième suite exacte ci-dessus ; ceci donne une factorisation pleine "canonique".

2) On prend $H'' = H \times_G H'$ i.e $H'' = \ker(H \oplus H' \xrightarrow[w - w']{} G)$ et on envoie F dans H'' et H'' dans G de la manière évidente. (Le fait que v'' et w'' soient des isomorphismes mod. constants se voit en traduisant en $\mathcal{D}$-modules et en vérifiant que ce sont des isomorphismes des microlocalisés hors de la section nulle ; il doit aussi y avoir moyen de s'en sortir sans $\mathcal{D}$-modules).

Ceci dit, pour définir les $\operatorname{var}(\alpha)$, $\alpha \in \pi$, on prend une factorisation pleine $F \xrightarrow{v} H \xrightarrow{w} G$ de u ; on restreint à $U : j^*F \xrightarrow{v} j^*H \xrightarrow{w} j^*G$, et on considère $(\alpha - 1) | (j^*H)_a$. D'une part, il s'annule sur $\operatorname{Ker} w$, d'autre part, il est à valeurs dans $\operatorname{Im} v$; donc il provient d'une flèche unique $\operatorname{var}(\alpha) : (j^*G)_a \longrightarrow (j^*F)_a$, on a évidemment $(\alpha - 1) | (j^*H)_a = v.\operatorname{var}(\alpha).w$ et les formules analogues pour $(\alpha - 1) | (j^*F)_a$, $(\alpha - 1) | (j^*G)_a$; pour $\alpha, \beta \in \pi$, on a

$$(*) \quad \operatorname{var}(\alpha\beta) = \operatorname{var}(\alpha) + \operatorname{var}(\beta) + \operatorname{var}\alpha.u.\operatorname{var}\beta \quad (\text{et } \operatorname{var}(1) = 0) \quad .$$

Enfin, ceci ne dépend pas de la factorisation pleine choisie (lemme 1,2)).

PROPOSITION.- *Soit* $F \xrightarrow{v} H \xrightarrow{w} G$ *une factorisation de* u *; soient* $\operatorname{var}'(\alpha)$ (resp. $\operatorname{var}''(\alpha)$) *les flèches de variation associées au diagramme* $F \xrightarrow{v} H$ (resp. $H \xrightarrow{w} G$) ; *on a* $\operatorname{var}'(\alpha) = \operatorname{var}\alpha.w$ *et* $\operatorname{var}''\alpha = v.\operatorname{var}\alpha$.

Pour démontrer la première assertion, on se ramène (en remplaçant $F \xrightarrow{v} H$ par une factorisation pleine) au cas où v est injectif ; en remplaçant alors $H \longrightarrow G$ par une factorisation pleine, on se ramène finalement au cas où la factorisation donnée est pleine ; alors cela résulte de ce qui précède.

La proposition montre que l'action de groupe de π sur $(j^*H)_a$ se calcule donc en connaissant v,w et les $\mathrm{var}\,\alpha$ sur $(j^*F)_a$, $(j^*H)_a$, $(j^*G)_a$, (a le point-base choisi), car on a $\alpha|j^*H = 1 + v.\mathrm{var}'\alpha = 1 + v.\mathrm{var}\alpha.w$; l'identité (*) revérifie que l'on a bien une loi de groupe.