Astérisque

RENÉE ELKIK

Fonctions de Green, volumes de Faltings. Application aux surfaces arithmétiques

Astérisque, tome 127 (1985), p. 89-112

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__127__89_0>

Exposé III

FONCTIONS DE GREEN, VOLUMES DE FALTINGS
APPLICATION AUX SURFACES ARITHMÉTIQUES

Renée ELKIK

I.- Fonctions de Green.

II.- Volumes de Faltings : le théorème de comparaison.

III.- Application aux surfaces arithmétiques : positivité du faisceau dualisant relatif.

Société Mathématique de France
Astérisque 127 (1985)

Tous les résultats démontrés ici se trouvent dans l'article de Faltings "Calculus on arithmetic surfaces". La seule différence notable, quoique mineure, est qu'on établit de façon plus complète l'existence de la fonction de Green G.

I.- FONCTIONS de GREEN

0.- Introduction

Soit X une surface de Riemann compacte de genre $g \geqq 1$ munie d'une forme de Kähler μ. On montre l'existence sur $X \times X$ d'une fonction G, réelle positive s'annulant exactement le long de la diagonale D de $X \times X$, à l'ordre 1, et telle que la restriction à chaque fibre $X \times \{a\}$ ou $\{a\} \times X$ de la fonction $\mathcal{G} = \operatorname{Log} G$ ait un laplacien constant sur $X - \{a\}$ (cette constante étant indépendante de $\{a\}$). On en déduit que
$-\mathcal{G}$ est un noyau pour l'opérateur de Green $\tilde{G}$ sur $C^{\infty}(X,\mathbb{C})$. On obtient donc ici (i.e. dans le cas des fonctions sur une surface de Riemann) le fait que $\tilde{G}$ est un opérateur à noyau en utilisant seulement le théorème de décompostion de Hodge (sur lequel repose le lemme 2 de I.1)). L'aspect résolution d'une équation différentielle à coefficients distribution se trouve ici masqué.
Cette première partie est indépendante du reste du séminaire.

1.- Rappels sur les fibrés hermitiens

Pour plus de détails sur ces quelques rappels on renvoie à [G.H., chap. 0, I] dont on a respecté les conventions et notations.

Soit V une variété kählerienne compacte et soit $\mathcal{L}$ un fibré holomorphe inversible sur V, muni d'une structure hermitienne. On associe à ces donnés une 2-forme fermée de type $(1,1)$ sur V, Θ, appelée forme de courbure du fibré hermitien $\mathcal{L}$ qu'on peut définir comme suit : soit s une section locale holomorphe ne s'annulant pas de $\mathcal{L}$, alors

$$\Theta = -\partial\,\bar{\partial}\,\log \|s\|^2 .$$

(c'est indépendant de la section holomorphe choisie, et définit donc une 2-forme globale sur V).

On note $[\omega]$ la classe dans $H^1_{DR}(V)$ d'une forme fermée ω, et on désigne par $c_1(\mathcal{L})$ la classe de Chern de $\mathcal{L}$. On a alors [G.H. p. 141 et p. 148].

LEMME 1.- : $c_1(\mathcal{L}) = \frac{-1}{2\pi i}[\Theta]$ *dans* $H^2_{DR}(V)$.

LEMME 2.- : *Soit* ω *une forme réelle fermée de type* $(1,1)$ *vérifiant* $[\omega] = c_1(\mathcal{L})$. *Alors il existe sur le fibré* $\mathcal{L}$ *une métrique hermitienne dont la courbure est égale à* $-2\pi i\,\omega$.

On notera qu'une telle métrique est définie à une constante multiplicative réelle positive près.

2.- La fonction de Green - Définition

Soient X une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 1$, T_X son fibré tangent, Ω_X son fibré cotangent et μ une forme de Kähler sur X vérifiant $\int_X \mu = 1$. L'espace $H^0(X,\Omega_X)$ des 1-formes holomorphes est muni du produit hermitien :

$$\langle\omega,\omega'\rangle = \frac{-1}{2\pi i}\int_X \omega\wedge\bar{\omega}'.$$

Soit $(\omega_1,\ldots,\omega_g)$ une base orthonormée de cet espace.

On désigne par D la diagonale de $X \times X$ et par p_1 et p_2 les 2 projections et on considère sur $X \times X$ la 2-forme fermée réelle de type $(1,1)$:

$$\Phi = p_1^*\mu + p_2^*\mu + \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g} p_1^*\,\omega_j \wedge p_2^*\,\bar{\omega}_j + \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g} p_2^*\,\omega_j \wedge p_1^*\,\bar{\omega}_j.$$

LEMME 3.- : *On a dans* $H^2_{DR}(X \times X)$: $[\Phi] = c_1(\mathcal{O}_{X\times X}(D))$.

Démonstration : On montre que pour toute 2-forme fermée α sur $X \times X$ on a :

$$\int_D \alpha = \int_{X\times X} \alpha\wedge\Phi.$$

Si α est de type (2,0) ou (0,2) les deux membres sont nuls.

Si $\alpha = \overset{*}{p_1}\,\omega_j \wedge \overset{*}{p_1}\,\bar{\omega}_k$ on a $\int_D \alpha = \int_X \omega_j \wedge \bar{\omega}_k$ et

$$\alpha \wedge \Phi = \overset{*}{p_1}\,\omega_j \wedge \overset{*}{p_1}\,\bar{\omega}_k \wedge \overset{*}{p_2}\,\mu,$$

donc

$$\int_{X \times X} \alpha \wedge \Phi = \int_X \omega_j \wedge \bar{\omega}_k \cdot \int_X \mu = \int_X \omega_j \wedge \bar{\omega}_k.$$

Si $\alpha = \overset{*}{p_1}\,\omega_j \wedge \overset{*}{p_2}\,\bar{\omega}_k$ on a $\int_D \alpha = \int_X \omega_j \wedge \bar{\omega}_k = -2\pi i\ \delta_{jk}$ et

$$\alpha \wedge \Phi = \alpha \wedge \left(\frac{1}{2\pi i} \sum_{\ell=1}^{g} \overset{*}{p_2}\,\omega_\ell \wedge \overset{*}{p_1}\,\bar{\omega}_k\right)$$

donc :

$$\int_{X \times X} \alpha \wedge \Phi = \frac{-1}{2\pi i} \sum_{\ell=1}^{g} \left(\int_X \omega_j \wedge \bar{\omega}_\ell \cdot \int_X \omega_\ell \wedge \bar{\omega}_k\right)$$

$$= \frac{-1}{2\pi i} \sum_{\ell=1}^{g} (-2\pi i\ \delta_{j\ell})\ (-2\pi i\ \delta_{\ell k})$$

$$= -2\pi i\ \delta_{jk}.$$

Compte tenu de l'invariance de la situation par l'involution
$i : X \times X \longrightarrow X \times X$, $i(P,Q) = (Q,P)$ ceci termine la démonstration du lemme.

<u>COROLLAIRE</u> : *Il existe sur* $\mathcal{O}_{X \times X}(D)$ *une métrique hermitienne dont la forme de courbure est* $-2\pi i\ \Phi$.

Cette métrique est a priori définie à une constante multiplicative près. Soit σ la section canonique de $\mathcal{O}_{X \times X}(D)$. On normalise la métrique sur ce fibré par la condition supplémentaire

$$(1) \qquad \int_{X \times X} \log\|\sigma\|\ \overset{*}{p_1}\mu \wedge \overset{*}{p_2}\mu = 0$$

et on pose $G = \|\sigma\|$.

La fonction G^2 est une fonction C^∞ réelle positive sur $X \times X$ s'annulant exactement le long de D. On peut noter que la fonction G est invariante par l'involution $i : X \times X \longrightarrow X \times X$ donnée par $i(P,Q) = (Q,P)$. En effet, on a

$$G \circ i = a \cdot G \qquad a \in \mathbb{R}^{+*}, \quad a^2 = 1 ;$$

En outre on a sur $X \times X - D$: $\quad - \delta \overline{\delta} \log G^2 = -2\pi i \, \Phi$.

Soit, avec $\mathcal{G} = \log G$:

(2) $\qquad \frac{1}{\pi i} \delta \overline{\delta} \mathcal{G} = \Phi \qquad$ sur $X \times X - D$.

On montre après quelques rappels sur le laplacien Δ que $-\mathcal{G}$ est un noyau pour l'opérateur de Green.

3.- Rappels sur Δ :

On considère sur $C^\infty(X,\mathbb{C})$ l'opérateur laplacien Δ défini par la condition :

$$\Delta f \cdot \mu = \frac{1}{\pi i} \partial \overline{\partial} f.$$

(On a pris $\Delta = \frac{1}{\pi} \Delta_\partial$ où Δ_∂ est le laplacien complexe usuel).

On désigne par H le sous-espace de $C^\infty(X,\mathbb{C})$ formé des fonctions harmoniques, c'est-à-dire des fonctions constantes et par $H^\perp$ son orthogonal pour le produit scalaire $\mathbb{L}^2$ i.e. :

$$H^\perp = \{f \in C^\infty(X,\mathbb{C}) \ / \int_X f\mu = 0\}.$$

On utilisera dans la suite les résultats suivants

$\Delta(C^\infty(X,\mathbb{C})) = H^\perp$

$\Delta / H^\perp$ est inversible.

Les valeurs propres de Δ sont réelles positives et peuvent être ordonnées

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_m \leq \ldots \quad \text{et} \quad \lim_{m \to \infty} \lambda_m = +\infty.$$

En outre on peut choisir les fonctions propres, $\phi_o = 1$, $\phi_1,\dots\phi_m,\dots$ dans $C^\infty(X,\mathbb{R})$ de telle sorte que la famille $(\phi_o,\dots,\phi_m,\dots)$ soit une base hilbertienne orthonormée de l'espace $\mathbb{L}^2(X,\mu)$.
L'opérateur de Green $\tilde{G}$: $C^\infty(X,\mathbb{C}) \longrightarrow C^\infty(X,\mathbb{C})$ est défini par :

$$\tilde{G}/H^\perp = (\Delta/H^\perp)^{-1}, \quad \tilde{G}/H^\perp = 0.$$

On a en particulier dans $\mathbb{L}^2(X,\mu)$:

$$(3) \qquad \tilde{G}\cdot f = \sum_{m>0} \frac{1}{\lambda_m} \langle f,\phi_m\rangle\ \phi_m$$

et donc quelque soient f et h dans $C^\infty(X,\mathbb{C})$:

$$(4) \qquad \int_X h(x)\cdot\tilde{G}f(x)\mu_x = \sum_{m>0} \frac{1}{\lambda_m} \langle f,\phi_m\rangle\ \langle h,\phi_m\rangle$$

THÉORÈME 1.- *Pour tout* f *dans* $C^\infty(X,\mathbb{C})$ *on a* $(\tilde{G}f)(P) = \int_X -\mathcal{G}(P,Q)\ f(Q)\mu_Q$.

Cet énoncé se découpe en les deux lemmes suivants, qui traitent, le premier, le cas d'une fonction f dans $H^\perp$, l'autre le cas d'une fonction dans H.
Le premier repose sur l'égalité (2) et la forme de la singularité de $\mathcal{G}$ au voisinage de D, le second dépend de la normalisation choisie (1).

LEMME 4.- *Soit* $f\in C^\infty(X,\mathbb{C})$ *vérifiant* $\int_X f\mu = 0$. *Alors*

$$\forall P \in X \qquad f(P) = \int_X -\ \mathcal{G}(P,Q)\ \Delta f(Q)\mu_Q.$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\int_X -\mathcal{G}(P,Q)\ \Delta f(Q)\mu_Q &= \frac{-1}{\pi i}\int_X \mathcal{G}(P,Q)\partial\ \bar{\partial}\ f(Q)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-1}{\pi i}\int_{X-K_\varepsilon} \mathcal{G}(P,Q)\ \partial\ \bar{\partial}\ f(Q)\end{aligned}$$

où K_ε est un disque de rayon $\varepsilon > 0$ assez petit.

Appliquons une première fois la formule de Stokes

$$-\int_{\partial K_\varepsilon} \mathcal{G}(P,Q)\ \bar\partial f(Q) = \int_{X-K_\varepsilon} \partial_Q\ G(P,Q) \wedge \bar\partial f(Q) + \int_{X-K_\varepsilon} \mathcal{G}(P,Q) \partial\ \bar\partial f(Q).$$

Le premier membre tend vers 0 quand ε tend vers 0. Donc

$$\int_X -\mathcal{G}(P,Q)\ \Delta f(Q)\mu_Q = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi i} \int_{X-K_\varepsilon} \partial_Q\ G(P,Q) \wedge \bar\partial f(Q).$$

Une nouvelle application de la formule de Stokes donne

$$\int_X -\mathcal{G}(P,Q)\ \Delta f(Q)\mu_Q = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi i} \left[\int_{X-K_\varepsilon} f(Q)\bar\partial_Q\ \partial_Q\ \mathcal{G}(P,Q) + \int_{\partial K_\varepsilon} f(Q)\ \partial_Q\ G(P,Q)\right].$$

Mais $\bar\partial_Q\ \partial_Q\ \mathcal{G}(P,Q)$ est proportionnel à μ sur $X - \{P\}$ et $\int_X f\mu = 0$.

On obtient donc :

$$\int_X -\mathcal{G}(P,Q)\ \Delta f(Q)\mu_Q = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi i} \int_{\partial K_\varepsilon} f(Q)\ \partial_Q\ \mathcal{G}(P,Q).$$

Si z est une uniformisante en P la fonction $\mathcal{G}(P,Q)$ se comporte au voisinage de P comme $\log|z|$ à l'addition d'une fonction C^∞ près d'où

$$\int_X -\mathcal{G}(P,Q)\ \Delta f(Q)\mu_Q = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi i} f(P) \int_{|z|=\varepsilon} \delta \log|z|$$

$$= f(P).$$

<u>LEMME 5</u>.- *Quel que soit* $P \in X$ *on a :* $\int_X -\mathcal{G}(P,Q)\mu_Q = 0.$

Soit $f \in H^\perp$, il existe une unique fonction $u \in H^\perp$ telle que $\Delta u = f$ et d'après ce qui précède

$$u(P) = \int_X -\mathcal{G}(P,Q)\ f(Q)\mu_Q.$$

On a donc, quel que soit f vérifiant $\int_X f\mu = 0$:

$$\int_X \int_X -\mathcal{G}(P,Q)\ f(Q)\mu_Q\ \mu_P = 0.$$

Donc

$$\int_X f(Q)\mu_Q = 0 \Rightarrow \int_X f(Q) \left(\int_X - \mathcal{G}(P,Q)\mu_P\right)\mu_Q = 0$$

La fonction de Q, $\int_X \mathcal{G}(P,Q)\mu_P$ est donc constante, et donc identiquement nulle, étant donné le choix fait en (1).

(et $\int_X \mathcal{G}(P,Q)\mu_Q = 0$ car $\mathcal{G}$ est symétrique en P et Q)

Compte tenu du théorème 1, la formule (4) se traduit par : Quelles que soient les fonctions f et h dans $C^\infty(X,\mathbb{C})$

$$(5) \qquad \int_{X\times X} -\mathcal{G}(P,Q)\ f(P)\ h(Q)\mu_P \wedge \mu_Q = \sum_{m>0} \frac{1}{\lambda_m}\left(\int_X f(P)\phi_m(P)\mu_P\right)\left(\int_X h(P)\phi_m(P)\mu_P\right)$$

4.- <u>La capacité de G est bornée.</u>

Soit r un entier et soient $P_1,P_2,\ldots,P_r$ points deux à deux distincts de X. Le produit $\prod_{i\neq j} G(P_i,P_j)$ est majoré par une expression de la forme A^{r^2} puisque la fonction G est bornée supérieurement sur $X \times X$. On montre que si on fait tendre r vers $+\infty$ et varier $P_1,\ldots,P_r$ dans X^r, ce produit est majoré par une expression de la forme $e^{o(r^2)}$: intuitivement si on prend beaucoup de points sur X ils sont assez proches les uns des autres.

<u>THÉORÈME 2</u>.- *Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier r_0 tel que, quel que soit $r \geq r_0$, et quel que soient $P_1,\ldots,P_r$, r points deux à deux distincts de X on ait*

$$\prod_{i\neq j} G(P_i,P_j) \leq e^{\varepsilon r^2}.$$

<u>Démonstration</u> : On établit en fait $\sum_{i\neq j} \mathcal{G}(P_i,P_j) \leq \varepsilon r^2$.

Dans un premier temps on régularise $\mathcal{G}$ en la convolant avec des fonctions en cloche à support dans un voisinage de D. Et on établit le résultat pour ces convolées. Puis on montre que ces convolées sont proches de $\mathcal{G}$.

Munissons X d'une distance convenable, par exemple de la distance associée à la métrique définie par $\mu_{\bullet}$ et soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur $X \times X$ vérifiant les conditions suivantes

1) K_n est C^∞ réelle positive à support dans le $\frac{1}{n}$-voisinage de la diagonale

2) pour tout $P \in X$, on a $\int_X K_n(P,Q)\mu_Q = 1$

3) il existe une constante C telle que $\sup\limits_{X\times X} K_n \leq Cn^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Posons $\mathcal{G}_n(R,Q) = \mathcal{G} * K_n\ (R,Q) = \int_X \mathcal{G}(R,S)\ K_n(S,Q)\mu_S$

$$\tilde{\mathcal{G}}_n(P,Q) = K_n * \mathcal{G}_n(P,Q) = \int_X K_n(R,P)\ \mathcal{G}_n(R,Q)\mu_R$$

$$= \int_{X\times X} \mathcal{G}(R,S)\ K_n(R,P)\ K_n(S,Q)\mu_R\ \mu_S.$$

Compte tenu de la décomposition d'une convolution avec $\mathcal{G}$ en termes des valeurs propres de Δ (4) on a donc

$$\tilde{\mathcal{G}}_n(P,Q) = -\sum_{m>0} \frac{1}{\lambda_n} \int_X \phi_m(R)\ K_n(R,P)\mu_R \cdot \int_X \phi_m(R)\ K_n(R,Q)\mu_R.$$

Etant donnés r points distincts $P_1,\dots,P_r$ de X on a

$$\sum_{i\neq j} \tilde{\mathcal{G}}_n(P_i,P_j) = \sum_{m>0} \frac{-1}{\lambda_m} \sum_{i\neq j} \left(\int_X \phi_m(R)\ K_n(R,P_i)\mu_R\right) \left(\int_X \phi_m(R)\ K_n(R,P_j)\mu_R\right)$$

$$= \sum_{m>0} \frac{-1}{\lambda_m} \left[\left(\sum_i \int_X \phi_m(R)K_n(R,P_i)\mu_R\right)^2 - \sum_i \left(\int_X \phi_m(R)K_n(R,P_i)\mu_R\right)^2\right]$$

$$\leq \sum_{m>0} \frac{+1}{\lambda_m} \sum_i \left(\int_X \phi_m(R)\ K_n(R,P_i)\mu_R\right)^2$$

$$\leq \sum_i \left(\sum_{m>0} \frac{1}{\lambda_m} \left(\int_X \phi_m(R)\ K_n(R,P_i)\mu_R\right)^2\right.$$

$$\leq \sum_i \frac{1}{\lambda_1} \left(\sum_{m>0} \left(\int_X \phi_m(R)\ K_n(R,P_i)\mu_R\right)^2\right..$$

En outre puisque les $(\phi_m)_{m>0}$ forment une partie d'une base orthonormée de $\mathbb{L}^2(X,\mu)$ on a :

$$\sum_{m>0} \left(\int_X \phi_m(R)\; K_n(R,P_i)\mu_R\right)^2 \leqq \int_X K_n^2(R,P_i)\mu_R.$$

Donc

$$\sum_{i\neq j} \tilde{\mathcal{G}}_n(P_i,P_j) \leqq \frac{1}{\lambda_1} \sum_i \int_X K_n^2(R,P_i)\mu_R$$

$$\leqq \frac{r}{\lambda_1} \sup_{P\in X} \int_X K_n^2(R,P)\mu_R$$

$$\leqq A\cdot r$$

où A est une constante (dépendant de n).

Fin de la démonstration du Théorème 2

On a posé

$$K_n * \mathcal{G}(P,Q) = \int_X K_n(R,P)\; \mathcal{G}(R,P)\mu_R$$

$$\mathcal{G}_n(P,Q) = \mathcal{G} * K_n(P,Q) = \int_X \mathcal{G}(P,R)K_n(R,Q)\mu_R$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_n(P,Q) = K_n * \mathcal{G}_n(P,Q) = \int_X K_n(R,P)\, \mathcal{G}_n(R,Q)\mu_R.$$

Pour finir la démonstration du théorème il suffit de montrer qu'il existe une constante A telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geqq n_0$ on ait :

(i) $\quad \mathcal{G}(P,Q) \leqq (1-\varepsilon)\; \tilde{\mathcal{G}}_n(P,Q) + \varepsilon A. \quad \forall (P,Q) \in X \times X$

On montre en fait qu'il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que

(ii) $\quad \mathcal{G}(P,Q) \leqq (1-\varepsilon)\; \mathcal{G} * K_n(P,Q) + \varepsilon B$

(iii) $\quad \mathcal{G}(P,Q) \leqq (1-\varepsilon)\; K_n * \mathcal{G}(P,Q) + \varepsilon B.$

Comme K_n est $\geqq 0$ la convolution avec K_n est monotone et on déduit de (ii)

$$K_n * \mathcal{G}(P,Q) \leq (1-\varepsilon)\ \tilde{\mathcal{G}}_n(P,Q) + \varepsilon B$$

et de (iii)

$$\mathcal{G}(P,Q) \leq (1-\varepsilon)\ ((1-\varepsilon)\ \tilde{\tilde{\mathcal{G}}}_n(P,Q) + \varepsilon B) + \varepsilon B$$

et donc une inégalité du type (i).

On donne quelques indications sur la démonstration de (ii) (ou (iii)) [cf [F]].

a) La fonction $\mathcal{G}$ est continue sur $X \times X - D$, donc uniformément continue sur tout fermé F de $X \times X$ disjoint de D. Un argument standard permet alors d'établir que quel que soit $\varepsilon > 0$, et quel que soit ce fermé F, il existe n_o tel que pour $n \geqq n_o$ on ait

$$\sup_{(P,Q)\in F} |\mathcal{G}(P,Q) - \mathcal{G}_n(P,Q)| < \varepsilon$$

et donc

$$\mathcal{G}(P,Q) < (1-\varepsilon)\ \mathcal{G}_n(P,Q) + \varepsilon\ (\sup_{X\times X}\ \mathcal{G}(P,Q) + 2).$$

Il suffit donc d'établir que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage U de D et un entier n_o, tel qu'une inégalité du type (ii) soit vérifiée pour $(P,Q) \in \mathcal{U}$, $n \geq n_o$ (avec la constante B de (ii) indépendante de ε,... etc).

b) On peut trouver un recouvrement ouvert fini $(U_i)_{i\in I}$ de X des isomorphismes analytiques $\phi_i : U_i \longrightarrow \Omega_i \subset \mathbb{C}$ tels que

$$\mathcal{G}(\phi_i^{-1}(P), \phi_i^{-1}(Q)) = \log|P,Q| + f_i(P,Q)$$

où f_i est uniformément continue sur tout compact de $\Omega_i \times \Omega_i$.

Après quelques calculs, dont les détails, fastidieux, sont omis, on déduit la proposition souhaitée du lemme suivant :

iii) <u>*LEMME 6*</u>.- *On désigne maintenant par* $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions* C^∞ *réelles positives sur* $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ *vérifiant les trois conditions suivantes :*

1) $K_n(P,Q) = 0$ si $|P-Q| \geq 1/n$;

2) *pour tout* $Q\in\mathbb{C}$, $\int_{\mathbb{C}} K_n(P,Q)\mu_P = 1$, *où* μ *désigne la mesure de Lebesgue ;*

3) *il existe* $C\in\mathbb{R}$ *tel que* $\sup K_n \leq C n^2$.

Alors pour tout $\varepsilon>0$, *il existe* n_0 *tel que pour tout* $n>n_0$ *et tout* (P,Q) *tel que* $|P-Q|< 2^{-1/\varepsilon}$, *on ait*

$$\log|P-Q| \leq (1-\varepsilon)\int_{\mathbb{C}} K_n(z,P)\log|z-Q|\mu_z \quad . \tag{1}$$

<u>Démonstration</u> : L'inégalité (1) peut se réécrire sous la forme

$$(1-\varepsilon)\int_{\mathbb{C}} \log\frac{|z-Q|}{|P-Q|} K_n(z,P)\mu_z \geq \varepsilon \log|P-Q|.$$

Fixons n et étudions séparément les deux cas

$$|P-Q| \geq 2/n, \quad \text{et} \quad |P-Q| \leq 2/n.$$

• Si $|P-Q| \geq 2/n$ alors $|z-P| \leq 1/n \Rightarrow |z-Q| \geq \frac{1}{2}|P-Q|$ et donc

$$\log\left|\frac{z-P}{P-Q}\right| \geq -\log 2 \quad \text{si} \quad K_n(z,P) \neq 0$$

on a donc

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)\int_{\mathbb{C}} \log\left|\frac{z-P}{P-Q}\right| K_n(z,P)\mu_z &\geq (1-\varepsilon)\,(-\log 2)\int_{\mathbb{C}} K_n(z,P)\mu_z \\ &\geq -\log 2 + \varepsilon\log 2 \\ &\geq -\log 2 \\ &\geq \varepsilon\log|P-Q|\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité provenant de l'hypothèse $|P-Q| \leqq 2^{1/\varepsilon}$.

•• Si $|P-Q| \leqq 2/n$ introduisons $s = \frac{z-Q}{P-Q}$

$$z = Q + s(P-Q).$$

Le premier membre de (1) est donc égal à

$$(1-\varepsilon)\ |P-Q|^2 \int_{\mathbb{C}} \log|s|\ K_n(Q + s(P-Q),P)\mu_s.$$

Pour $|s| \geqq 1$ $\log|s| \geqq 0$ donc ce premier membre est supérieur ou égal à

$$\geqq (1-\varepsilon)\ |P-Q|^2 \int_{|s|\leqq 1} \log|s|\ K_n(Q + s(P-Q),P)\mu_s.$$

Comme $\log|s| \leqq 0$ si $|s| \leqq 1$ on a encore

$$\geqq (1-\varepsilon)\ \frac{4}{n^2} \int_{|s|\leqq 1} \log|s|\ C\ n^2\ \mu_s$$

$$\geqq 4\ C \int_{|s|\leqq 1} \log|s|\mu_s$$

Il est maintenant clair que si $n >> 0$, l'hypothèse $|P-Q| \leqq 2/n$ implique

$$\varepsilon \log|P-Q| \leqq 4\ C \int_{|s|\leqq 1} \log|s|\mu_s$$

II.- LES VOLUMES DE FALTINGS

On désigne toujours par X une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 1$ qu'on munit désormais de la forme de Kähler

$$\mu = \frac{1}{2\pi i g} \sum_{j=1}^{g} \omega_j \wedge \overline{\omega}_j$$

[$(\omega_1,\dots,\omega_g)$ est comme précédemment une base orthonormée de l'espace $H^0(X,\Omega_X)$].

La forme μ est la forme canonique considérée au chapitre II [M.B.].

On rappelle qu'une métrique hermitienne sur un fibré inversible holomorphe sur X est dite μ-admissible si sa forme de courbure Θ vérifie l'égalité

$$\Theta = -2\pi i(\deg\mathcal{L})\mu \quad .$$

Deux telles métriques sur $\mathcal{L}$ ont un rapport constant et si P est un point de X, il y a une métrique hermitienne μ admissible canonique sur $\mathcal{O}_X(P)$ pour laquelle la section canonique σ_P a pour norme $||\sigma_P||(Q) = G(P,Q)$ (G est la fonction de Green définie au paragraphe précédent).

Si $\delta = \Sigma n_k P_k$ est un diviseur, le faisceau $\mathcal{O}_X(\delta)$ a donc une métrique admissible canonique pour laquelle la section marquée σ_δ a pour norme

$$||\sigma_\delta||(Q) = \prod_k G(P_k,Q)^{n_k}.$$

On sous-entend toujours que $\mathcal{O}_X(\delta)$ est muni de cette métrique.

On rappelle que si $\mathcal{L}$ est un faisceau sur X on désigne par $\operatorname{Det} R\Gamma(X,\mathcal{L})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dim 1

$$\det R\Gamma(X,\mathcal{L}) = \Lambda^{h_0} H^0(X,\mathcal{L}) \otimes (\Lambda^{h_1} H^1(X,\mathcal{L}))^{\otimes -1}$$

($h_i = \dim_{\mathbb{C}} H^i(X,\mathcal{L})$).

Choisissons une métrique hermitienne sur $\det R\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$. Il a été établi à (Exposé II)([MB] Theor. 4.13]) le Théorème suivant :

<u>THÉORÈME</u> : *On peut d'une manière et d'une seule définir pour tout faisceau inversible hermitien μ-admissible, $\mathcal{L}$ sur X, une métrique hermitienne qu'on appelle métrique de Faltings sur $\det R\Gamma(X,\mathcal{L})$ de telle sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées :*

a) la métrique de Faltings sur $\det R\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ *est celle choisie précédemment si* $\mathcal{O}_X$ *est muni de sa métrique naturelle* ($\|1\| = 1$).

b) Une isométrie $u : \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}'$ *induit une isométrie de* $\det R\Gamma(X,\mathcal{L})$ *sur* $\det R\Gamma(X,\mathcal{L}')$.

c) Pour tout faisceau inversible hermitien μ *admissible* $\mathcal{L}$ *sur* X *et tout point* P *de* X *l'isomorphisme* $\det R\Gamma(X,\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \det R\Gamma(X,\mathcal{L}(-P)) \otimes \mathcal{L}_P$ *déduit de la suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(-P) \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}_P \longrightarrow 0$$

est une isométrie.

(La notation $\mathcal{L}_P$ désigne la fibre de $\mathcal{L}$ en P).

On notera dans la suite $V_{\mathrm{Falt};\det R\Gamma(X,\mathcal{L})}$ ou simplement V_{Falt}) la forme volume correspondante.

Une extension de la propriété c).

Soit $r \in \mathbb{N}$ et soient $P_1,P_2,\ldots,P_r$, r points 2 à 2 distincts de X, et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible hermitien sur X. L'espace vectoriel de rang 1 sur $\mathbb{C}$ $\bigotimes_{i=1}^{r} \mathcal{L}_{P_i} = \Lambda^r(\bigoplus_i \mathcal{L}_{P_i})$ est un produit de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels hermitiens de rang 1. Il a donc une métrique hermitienne "naturelle", $\|\ \|_{\mathrm{nat}}$ (celle qu'on obtient en considérant $\bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{L}_{P_i}$ comme somme directe orthogonale des $\mathcal{L}_{P_i}$: $\|a_1 \otimes a_2 \otimes\ldots\otimes a_r\|_{\mathrm{nat}} = \prod_i \|a_i\|$).

On appelle métrique de Faltings sur $\bigotimes_{i=1}^{r} \mathcal{L}_{P_i}$ la métrique

$$\|\ \|_{\mathrm{Falt}} = \|\ \|_{\mathrm{nat}} \times \frac{1}{\prod_{i<j} G(P_i,P_j)}.$$

Si on désigne par V_{Falt} (resp V_{nat}) les éléments de volume on a donc :

$$V_{\mathrm{Falt}} = V_{\mathrm{nat}} \times \frac{1}{\prod_{i\neq j} G(P_i,P_j)}$$

Considérons alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(-P_1,\dots -P_r) \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^{r} \mathcal{L}_{P_i} \longrightarrow 0$$

Elle induit un isomorphisme

$$\det R\Gamma(X,\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \det R\Gamma(X,\mathcal{L}(-P_1,-P_2,\dots,-P_r)) \otimes (\bigotimes_{i=1}^{r} \mathcal{L}_{P_i}).$$

Cet isomorphisme est une isométrie si chacun des termes est muni de sa métrique de Faltings.

Démonstration : Nous nous limitons à $r = 2$ pour alléger l'écriture. Considérons les deux suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(-P_1,-P_2) \longrightarrow \mathcal{L}(-P_1) \longrightarrow \mathcal{L}(-P_1)_{P_2} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(-P_1) \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}_{P_1} \longrightarrow 0.$$

On en déduit en appliquant à chacune, la propriété c), une isométrie :

$$\det R\Gamma(X,\mathcal{L}) = \det R\Gamma(X, \mathcal{L}(-P_1,-P_2)) \otimes \mathcal{L}(-P_1)_{P_2} \otimes \mathcal{L}_{P_1}$$

$$= \det R\Gamma(X, \mathcal{L}(-P_1,-P_2)) \otimes \mathcal{L}_{P_1} \otimes \mathcal{L}_{P_2} \otimes \mathcal{O}(-P_1)_{P_2}$$

et le $\mathbb{C}$-espace hermitien de dimension 1, $\mathcal{O}(-P_1)_{P_2}$ est identifié à $\mathbb{C}$ grâce à sa base marquée mais la norme de celle-ci est $\frac{1}{G(P_1,P_2)}$.

Le Théorème de Comparaison

Dans la suite $\mathcal{L}$ désigne toujours un faisceau inversible hermitien sur X de degré $d \geq 2g-1$, de sorte que $H^1(X,\mathcal{L}) = 0$. On dispose donc d'une métrique de Faltings sur $\det H^0(X,\mathcal{L})$ et on désigne par V_{Falt} l'élément de volume correspondant sur $H^0(X,\mathcal{L})$. Par ailleurs l'espace vectoriel $H^0(X,\mathcal{L})$ a une métrique hermitienne $\mathbb{L}^2$

$$\|\sigma\|^2 = \int_X \|\sigma(P)\|^2 \mu_P$$

et on désigne par $V_{\mathbb{L}^2}$ l'élément de volume correspondant sur $H^0(X,\mathcal{L})$.

THÉORÈME 3.- (Faltings)

Quel que soit $\varepsilon > 0$ *il existe* d_0 *tel que pour tout faisceau inversible hermitien* $\mathcal{L}$ *sur* X *de degré* $d \geq d_0$ $(\geq 2g-1)$, *les éléments de volume* V_{Falt} *et* $V_{\mathbb{L}^2}$ *sur* $H^0(X,\mathcal{L})$ *vérifient l'inégalité*

$$V_{\text{Falt}} \geq e^{-\varepsilon d^2} V_{\mathbb{L}^2}.$$

Démonstration : Soit $\mathcal{L}$ un faisceau de degré d $(\geq 2g-1)$ et posons

$$r = d + 1-g = \operatorname{Dim} H^0(X,\mathcal{L})$$

Il existe un ouvert dense U de X^r défini par les conditions $P = (P_1,\dots,P_r) \in U$ ssi

1°) $P_i \neq P_j \quad \forall i \neq j$

2°) la suite exacte

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{L}(-P_1,-P_2-\dots -P_r) \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \bigoplus_i \mathcal{L}_{P_i} \longrightarrow 0$$

induit un isomorphisme

$$\phi_P : H^0(X,\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_i \mathcal{L}_{P_i} \ ;$$

cette condition équivaut à $H^0(\mathcal{L}(-P_1-\dots-P_r)) = 0$, ou à $H^1(\mathcal{L}(-P_1-\dots-P_r)) = 0$ puisque $\chi(\mathcal{L}(-P_1-\dots-P_r)) = 0$.

Soient $\mathcal{E}$ sur $\operatorname{Pic}^{g-1}(X) \times X$ le faisceau universel et $p : \operatorname{Pic}^{g-1}(X) \times X \longrightarrow \operatorname{Pic}^{g-1}(X)$ la projection. On a vu au chapitre II [M.B] que $\det Rp_*\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}(-\theta)$, et qu'il existe une métrique hermitienne sur $\mathcal{O}(-\theta)$ tel que pour tout point $x \in \operatorname{Pic}^{g-1}(X)$ l'isomorphisme précédent induise une isométrie de $\mathcal{O}(-\theta)/_x$ sur $\det R\Gamma(X, \mathcal{E}_x)$.

Soit alors $\quad \psi : X^r \longrightarrow \operatorname{Pic}^{g-1}(X)$

$$(Q_1,\dots,Q_r) \longmapsto \mathcal{L}(-Q_1-\dots-Q_r).$$

L'ouvert U introduit précédemment est inclus dans $\psi^{-1}(\mathrm{Pic}^{g-1}(X) - \Theta)$. Si $(P_1,\dots,P_r) \in U$, $\det R\Gamma(X, \mathcal{L}(-P_1-\dots-P_r))$ s'identifie comme espace métrique à la fibre en $\psi(P_1,\dots,P_r)$ de $\mathcal{O}(-\theta)$. Soit σ_θ la section canonique de $\mathcal{O}(-\theta)$ sur $\mathrm{Pic}^{g-1}(X) - \Theta$ et désignons par $\lambda(P_1,\dots,P_r)$ la fonction sur U :

$$\lambda(P_1,\dots,P_r) = \|\sigma_\theta(\psi(P_1,\dots,P_r))\|^2.$$

L'espace vectoriel métrique $\det R\Gamma(X,\mathcal{L}(-P_1-\dots-P_r))$ s'idenfie donc à $\mathbb{C}$ muni de la métrique $\|1\|^2 = \lambda(P_1,\dots,P_r)$. Reprenons la suite (*). On obtient

$$V_{\mathrm{Falt};\det H^0(X,\mathcal{L})} = \lambda(P_1,\dots,P_r)\ \phi^*\ V_{\mathrm{Falt};\ \otimes \mathcal{L}_{P_i}}$$

$$= \lambda(P_1,\dots,P_r)\ \frac{1}{\prod_{i\neq j} G(P_i,P_j)}\ \phi^*\ V_{\mathrm{nat}}\ .$$

Fixons maintenant une base orthonormée $\mathbb{L}^2$, soit $(f_1,\dots,f_r)$ de $H^0(X,\mathcal{L})$ on a :

$$\phi^*\ V_{\mathrm{nat}} = V_{\mathbb{L}^2/H^0(X,\mathcal{L})} \times \|\phi(f_1)\wedge\dots\wedge\phi(f_2)\|^2_{\mathrm{nat}}$$

on obtient donc l'égalité suivante entre les deux volumes sur $H^0(X,\mathcal{L})$:

$$V_{\mathrm{Falt}} = V_{\mathbb{L}^2} \times \lambda(P_1,\dots,P_r)\ \frac{1}{\prod_{i\neq j} G(P_i,P_j)}\ \|\phi(f_1)\wedge\dots\wedge\phi(f_2)\|^2_{\mathrm{nat}}$$

Donc

$$\frac{V_{\mathrm{Falt}} \times \prod_{i\neq j} G(P_i,P_j)}{V_{\mathbb{L}^2} \times \lambda(P_1,\dots,P_r)} = \|\phi(f\ )\wedge\dots\wedge\phi(f_2)\|^2_{\mathrm{nat}}$$

$$\frac{V_{\mathrm{Falt}}}{V_{\mathbb{L}^2}} \times \int_U \frac{\prod_{i\neq j} G(P_i,P_j)}{\lambda(P_1,\dots,P_r)}\mu_{P_1}\cdots\mu_{P_r} = \int_U \|\phi(f_1)\wedge\dots\wedge\phi(f_2)\|^2_{\mathrm{nat}}\ \mu_{P_1}\cdots\mu_{P_r}$$

$$= \int_X \|\phi(f_1)\wedge\dots\wedge\phi(f_r)\|^2_{\mathrm{nat}}\ \mu_{P_1}\cdots\mu_{P_r}$$

Calcul de $\int_{X^r} \|\phi(f_1)\wedge\ldots\wedge\phi(f_r)\|^2\ \mu_{P_1},\ldots,\mu_{P_r}$.

On désigne par p_i la $i^{\text{ème}}$ projection de X^r sur X^r et on considère les r sections,

$$F_i = p_1^* f_i + p_2^* f_i + \ldots + p_r^* f_i \qquad (i = 1,\ldots,r)$$

du fibré $\bigoplus_{j=1}^{r} p_j^*\mathcal{L}$, muni de la métrique somme orthogonale des métriques sur les r facteurs.

Désignons par $(i) = (i_1,\ldots,i_r)$ la permutation $(1,2,\ldots,r) \longmapsto (i_1,\ldots,i_r)$ de l'ensemble $\{1,2,\ldots,r\}$, et par $\varepsilon(i)$ sa signature. On a

$$\phi(f_1)\wedge\ldots\wedge\phi(fr) = (F_1\wedge\ldots\wedge F_r)(P_1,\ldots,P_r)$$

$$= \sum_{(i)} p_{i_1}^* f_1 \wedge p_{i_2}^* f_2 \wedge\ldots\wedge p_{i_r}^* f_r$$

$$= \sum_{(i)} (-1)^{\varepsilon(i)}\ p_1^* f_{i_1}\wedge\ldots\wedge p_r^* f_{i_r}$$

$$\|\phi(f_1)\wedge\ldots\wedge\phi(f_r)\|^2 = \sum_{(i),(j)} (-1)^{\varepsilon(i)+\varepsilon(j)}\ \langle p_1^* f_{i_1}\wedge\ldots\wedge p_r^* f_{i_r}, p_1^* f_{j_1}\wedge\ldots\wedge p_2^* f_{j_2}\rangle$$

$$= \sum_{(i),(j)} (-1)^{\varepsilon(i)+\varepsilon(j)}\ \prod_k \langle p_k^* f_{i_k}, p_k^* f_{j_k}\rangle ,$$

$$\int_{X^r} \|\phi(f_1)\wedge\ldots\wedge\phi(f_r)\|^2 = \sum_{(i),(j)} (-1)^{\varepsilon(i)+\varepsilon(j)}\ \prod_k \int_X \langle f_{i_k}, f_{j_k}\rangle\mu .$$

Par hypothèse on a $\int_X \langle f_{i_k}, f_{j_k}\rangle\mu = \delta_{i_k j_k}$, donc

$$\prod_k \int_X \langle f_{i_k}, f_{j_k}\rangle\mu = \delta_{(i),(j)}$$

et par suite

$$\int_{X^r} \|\phi(f_1)\wedge\ldots\wedge\phi(f_r)\|^2 \mu_{P_1}\ldots\mu_{P_r} = \sum_{(i)} 1 = r\ !$$

d'où

$$\frac{V_{Falt}}{V_{\mathbb{L}^2}} = r\,! \times \frac{1}{\displaystyle\int_U \frac{\prod_{i\neq j} G(P_i,P_j)}{(P_1,\dots,P_r)}\, \mu_{P_1} \cdots \mu_{P_r}}.$$

La norme de σ_θ est bornée inférieurement sur $\mathrm{Pic}^{g-1}(X)$ (et tend vers $+\infty$ au voisinage de θ) il existe donc une constante positive A indépendante de r et de $P_1,\dots,P_r$ telle que

$$\lambda(P_1,\dots,P_r) \geqq A.$$

Donc

$$\frac{V_{Falt}}{V_{\mathbb{L}^2}} \geqq A\, r\,! \frac{1}{\displaystyle\int_U \prod_{i\neq j} G(P_i,P_j)\mu_{P_1} \cdots \mu_{P_r}}$$

D'après le théorème , quel que soit $\varepsilon' > 0$ il existe r_o tel que pour tout $r \geqq r_o$ on ait $\prod_{i\neq j} G(P_i,P_j) \leqq e^{\varepsilon' r^2}$ et donc pour $d \geqq r_o + g-1$ on obtient

$$V_{Falt} \geqq A\cdot r\,!\; e^{-\varepsilon' r^2}\, V_{\mathbb{L}^2}$$

et donc pour un choix convenable de ε'

$$V_{Falt} \geqq e^{-\varepsilon d^2}\, V_{\mathbb{L}^2}.$$

III.- APPLICATION AUX SURFACES ARITHMÉTIQUES

Ce paragraphe est la suite du paragraphe 6 de l'exposé II [MB] et nous ne ne rappelons que le minimum de notations indispensables. On désigne désormais par X_K une courbe projective lisse de genre $g \geq 1$ sur un corps de nombres K et par X un modèle régulier de X_K, projectif sur $C = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ ($\mathcal{O}_K$ = anneau des entiers de K).

Pour toute place à l'infini v de K on désigne par K_v le complété de K en v et on choisit un isomorphisme de $\overline{K}_v$ avec $\mathbb{C}$. On désigne par X_v la surface de Riemann obtenue à partir de X_K par le changement de base $K \longrightarrow K_v \longrightarrow \mathbb{C}$ et par μ_v la forme de Kähler canonique sur X_v.

On rappelle qu'un faisceau inversible hermitien admissible $\mathcal{L}$ sur X est un faisceau inversible sur X dont toutes les fibres à l'infini $\mathcal{L}_v$ sur X_v sont munies d'une métrique μ_v admissible. Le degré de $\mathcal{L}$ est le degré de $\mathcal{L}_K$ sur X_K. Si ce degré est supérieur à $2g-1$, le $\mathcal{O}_K$-module $H^1(X,\mathcal{L})$ est de torsion et on dispose grâce aux volumes de Faltings définis au paragraphe précédent d'une mesure de Haar sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel

$$\prod_v H^0(X,\mathcal{L}) \underset{\mathcal{O}_K}{\otimes} K_v = H^0(X,\mathcal{L}) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{R}$$

qu'on désigne dans la suite par mesure de Faltings.

THÉORÈME 4.- *Soit* $\mathcal{L}$ *un faisceau inversible hermitien admissible sur* X *vérifiant* $\deg(\mathcal{L}) > 0$ *et* $\langle \mathcal{L},\mathcal{L} \rangle > 0$. *Alors il existe un entier* n_0 *tel que pour* $n \geq n_0$ *il existe un diviseur d'Arakelov effectif* D_n *tel que* $\mathcal{L}^{\otimes n} \simeq \mathcal{O}(D_n)$.

Démonstration : On doit montrer qu'il existe $\sigma \in H^0(X,\mathcal{L}^{\otimes n})$ tel que

$$\forall v : \int_{X_v} \log\|\sigma_v\| \mu_v \leq 0$$

et il suffit pour cela qu'on ait :

$$\forall v : \int_{X_v} \|\sigma_v\|^2 \mu_v \leq 1.$$

On suppose toujours n assez grand pour avoir $\deg \mathcal{L}^{\otimes n} \geq 2g-1$. Le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $H^0(X,\mathcal{L}) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{R} = \prod_v H^0(X,\mathcal{L}) \underset{\mathcal{O}_K}{\otimes} K_v$ étant muni de sa mesure de Faltings on compare le volume du réseau $H^0(X,\mathcal{L}^{\otimes n})$ et celui de

$$B_n = \{\sigma = (\sigma_v) \ / \int_{X_v} \|\sigma_v\|^2 \mu_v \leq 1 \quad \text{pour tout } v\}.$$

D'après les résultats du paragraphe 3 :

$\forall \varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait $\mathrm{vol}(B_n) \geq e^{-\varepsilon n^2}$.

D'autre part d'après le théorème de Riemann Roch ([M.B])

$$\log \mathrm{vol}(H^0(X,\mathcal{L}^{\otimes n}) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{R} / H^0(X,\mathcal{L}^{\otimes n})) =$$

$$= -\frac{1}{2} \langle \mathcal{L}^{\otimes n}, \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \omega_X^{-1} \rangle - \chi(X,\mathcal{O}_X) - \log \# H^1(X,\mathcal{L}^{\otimes n})$$

Et donc pour $n \gg 0$

$$\mathrm{vol}(H^0(X,\mathcal{L}^{\otimes n}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / H^0(X,\mathcal{L}^{\otimes n}) \leq e^{-n^2/2 \langle \mathcal{L},\mathcal{L} \rangle + An}$$

pour une certaine constante A.

Et l'énoncé résulte alors du théorème de Minkowski.

<u>THÉORÈME 5</u>.- *Supposons le genre* g *de* $X_K \geq 2$ *et la fibration* $X \longrightarrow C = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$ *semi-stable. Alors*

a) $\langle \omega_{X/C}, \omega_{X/C} \rangle \geq 0$

b) Quel que soit le diviseur d'Arakelov effectif D ,

$$\langle \omega_{X/C}, D \rangle \geq \frac{\langle \omega_{X/C}, \omega_{X/C} \rangle}{4g\,(g-1)} .$$

On établit d'abord b), dont la démonstration repose sur le théorème de l'indice de Hodge [MB] et est calquée sur celle donnée par Szpiro, dans un cadre géométrique [S].

• Si D est inclus dans une fibre on a

$$\langle D,\omega_{X/C}\rangle + \langle D,D\rangle = 2g(D) - 2$$

et $D^2 \leqq 0$. Donc $\langle D,\omega_{X/C}\rangle \geqq 0$ avec $\langle D,\omega_{X/C}\rangle = 0$ si et seulement si D est une droite de self intersection -2 contenue dans une fibre singulière de $X \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$.

• Si D est horizontal, on peut en faisant une extension du corps de base se ramener au cas où D est une section de $X \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ et

$$\langle \omega_{X/C},D\rangle = -\langle D,D\rangle.$$

Soit F la classe d'une fibre verticale, alors pour $n \gg 0$ $\langle nF + D,nF + D\rangle > 0$ car $F^2 = 0$, $\langle F,D\rangle = 1$.

Il résulte du théorème de l'indice de Hodge que le déterminant

$$\begin{vmatrix} F^2 & \langle D,F\rangle & \langle \omega_{X/C},F\rangle \\ \langle D,F\rangle & D^2 & \langle \omega_{X/C},D\rangle \\ \langle \omega_{X/C},F\rangle & \langle \omega_{X/C},D\rangle, & \omega^2_{X/C} \end{vmatrix}$$

est $\geqq 0$, d'où en explicitant les termes :

$$-\omega^2_{X/C} - 4g(g-1)D^2 \geqq 0$$

et par adjonction

$$4g(g-1)\langle \omega_{X/C},D\rangle \geqq \langle \omega_{X/C},\omega_{X/C}\rangle \quad .$$

<u>Démonstration de a)</u> : Posons

$$r_o = \frac{-\langle \omega_{X/C},\omega_{X/C}\rangle}{2(2g-2)}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, (choisi tel que $r_o + \varepsilon \in \mathbb{Q}$) $\omega_{X/C} + (r_o + \varepsilon)F$ a une self intersection strictement positive. Il existe donc n_ε tel que pour $n \geq n_\varepsilon$ $n(\omega_{X/C} + (r_o + \varepsilon)F)$ soit équivalent a un diviseur d'Arakelov effectif (Théorème 4) et donc d'après b)

$$<\omega_{X/C}, \omega_{X/C} + (r_o + \varepsilon)F> \geq \frac{<\omega_{X/C}, \omega_{X/C}>}{4g(g-1)} 2g-2.$$

Donc

$$\omega^2_{X/C} + (r_o + \varepsilon)2g-2 \geq \frac{\omega^2_{X/C}}{2g}.$$

Puisque ceci est vrai pour tout ε, on obtient en remplaçant r_o par sa valeur

$$\omega^2_{X/C} \quad (1 - \frac{1}{2}) \geq \frac{\omega^2_{X/C}}{2g}.$$

Et donc $\omega^2_{X/C} \geq 0$ puisque $g \geq 2$.

BIBLIOGRAPHIE

[F] G.FALTINGS : *Calculus on arithmetic surfaces*. Annals of Maths. 199, 1984 387-424.

[G.H.] P. GRIFFITHS and J. HARRIS : *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley Interscience, 1978.

[M B] L. MORET-BAILLY : *Exposé 2, ce séminaire*.

[S] L. SZPIRO : *Séminaire sur les pinceaux de courbe de genre au moins 2*. Astérisque n° 86, 1981.

RENÉE ELKIK
Université PARIS XI - Bat.425
Département de Mathématiques
91405 ORSAY CEDEX