LUCIEN SZPIRO

# Degrés, intersections, hauteurs

*Astérisque*, tome 127 (1985), p. 11-28

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__127__11_0>

Exposé I

# DEGRÉS, INTERSECTIONS, HAUTEURS

Lucien SZPIRO



*Société Mathématique de France*
*Astérisque 127 (1985)*

## 0.- INTRODUCTION

Nous présentons ici le point de vue d'Arakelov : "Une structure entière à l'infini est la donnée de métriques hermitiennes". Cette façon de voir permet, entre autres, d'avoir une approche plus géométrique de la notion de hauteur, d'introduire les métriques ad-hoc pour un problème donné, et de simplifier la présentation.

Le premier paragraphe reprend la théorie élémentaire des corps de nombres du point de vue d'Arakelov. Il couvre essentiellement le sujet du livre de P. Samuel sur ce sujet avec en plus,la formule du produit et en moins,le "second calcul de volume" de Minkowski.

Le second paragraphe traite suscintement de la théorie des intersections d'Arakelov sur une surface arithmétique. Les démonstrations se trouvent dans les exposés 2 et 3. Cette théorie des intersections est essentielle dans l'exposé 11.

Le dernier paragraphe reprend la notion de hauteur via Arakelov. On y montre que la métrique différentielle-modulaire pour une famille de variétés abéliennes a des singularités logarithmiques.

§1 : vocabulaire, notations : Dans cet exposé $K$ sera un corps de nombres, $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers, $[K:\mathbb{Q}] = n$ son degré sur $\mathbb{Q}$, $D_K$ la valeur absolue de son discriminant, $\mu_K$ l'ensemble des racines de l'unité dans $K$. Nous nous permettrons d'écrire $\mathcal{O}$, $D$, $\mu$, quand aucune confusion ne nous semble en résulter. Pour un corps $K$ nous noterons par $\emptyset_K$ (parfois par $\emptyset$ seulement) un ensemble de places à l'infini de $K$ contenant toutes les places réelles et "la moitié" des places complexes de telle façon que pour une place complexe $\sigma$ on ait : $\sigma$ ou bien $\overline{\sigma}$ est dans $\emptyset_K$. Le nombre de places réelles (resp. complexes) dans $\emptyset$ sera noté $r_1$ (resp.$r_2$). Si $\sigma \in \emptyset$ $\varepsilon_\sigma = 1$ (resp. 2) si $\sigma$ est réelle (resp. si $\sigma$ est complexe). Nous noterons par $.^\times$ l'ensemble des éléments inversibles d'un anneau ".".

---

(*) Je remercie L. Moret-Bailly pour une lecture critique du manuscrit.

§2 : Par surface arithmétique de genre g sur un corps de nombres K nous entendons un schéma régulier X projectif sur $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ , de fibre générique $X_K$ géométriquement connexe et de genre g sur K .

§3 : Un schéma en groupes commutatif, lisse et séparé $G \longrightarrow S$ (S normal) est appelé semi-abélien si, ses fibres sont extension de variétés abéliennes par des tores. Si tel est le cas et si la fibre générique est abélienne, on dit qu'elle a réduction semi-stable (Si S est un trait, il revient au même de dire que la monodromie est unipotente).

## 1.- FAISCEAUX INVERSIBLES AVEC MÉTRIQUES A L'INFINI

### 1.1.- Diviseurs compactifiés

Un diviseur compactifié de $\mathcal{O}_K$ est une somme formelle :

(i) $\sum_{v \in \mathrm{Spec\,max}\,\mathcal{O}} n_v[v] + \sum_{\sigma \in \emptyset} \lambda_\sigma[\sigma] = D$ où $n_v \in \mathbb{Z}$ $n_v = 0$ pour presque tout v et $\lambda_\sigma \in \mathbb{R}$ .

Le degré de D est égal, par définition, à :

$$\Sigma\, n_v \log N(v) + \Sigma\, \lambda_\sigma$$

Si $f \in K^\times$ , le diviseur principal associé à f est :

$$(f) = \Sigma\, \mathrm{ord}_v(f)\ [v] - \sum_{\sigma \in \emptyset} \varepsilon_\sigma \log|f|_\sigma\ [\sigma] \quad .$$

Notant $\mathrm{Div}_c(\mathcal{O}_K)$ (resp. $\mathrm{Pr}_c(\mathcal{O}_K)$ le groupe des diviseurs compactifiés (resp. des diviseurs compactifiés principaux) la formule du produit permet de définir le degré sur le quotient :

$$\text{degré} : \mathrm{Div}_c(\mathcal{O}_K)/\mathrm{Pr}_c(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \mathbb{R} \quad .$$

### 1.2.- Le groupe de Picard compactifié

Un faisceau inversible compactifié sur $\mathcal{O}_K$ est un module projectif de rang un sur $\mathcal{O}_K$ : L , muni pour chaque $\sigma$ dans $\emptyset$ d'une forme hermitienne définie positive sur :

$$L_\sigma = L \otimes_\sigma K_\sigma$$

où $K_\sigma$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ selon que $\sigma$ est réelle ou complexe.

Notons $\mathrm{Pic}_c(\mathcal{O}_K)$ le groupe des classes d'isométries de faisceaux inversibles hermitiens sur $\mathcal{O}_K$ . Deux ensembles de formes hermitiennes $\langle\ ,\ \rangle_{1,\sigma}$ et $\langle\ ,\ \rangle_{2,\sigma}$ sur L sont isomètres si et seulement si on peut trouver une unité u dans $\mathcal{O}_K^\times$ telle que pour tout $s \in L$ on ait

$$|s|_{1,\sigma} = |u|_\sigma \, |s|_{2,\sigma} \quad .$$

On a ainsi la suite exacte :

(ii) $$0 \longrightarrow \mathbb{R}^{r_1+r_2}/\log \mathcal{O}_K^\times \longrightarrow \mathrm{Pic}_c(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \mathrm{cl}(\mathcal{O}_K) \longrightarrow 0$$

Soit $\varphi : \mathrm{Div}_c(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \mathrm{Pic}_c(\mathcal{O}_K)$ l'application définie par :
$\varphi(\Sigma\, n_v[v] + \Sigma\, \lambda_\sigma[\sigma]) =$ le module projectif de rang un $\Pi\, \mathfrak{m}_v^{-n_v}$ muni des formes hermitiennes suivantes : $\Pi\, \mathfrak{m}_v^{n_v}$ est un idéal fractionnaire donc canoniquement contenu dans $K$, on donnera à $\|1\|_\sigma$ la valeur $\exp(-\lambda_\sigma/\varepsilon_\sigma)$ .

<u>PROPOSITION 1.1</u>.- *L'application* $\varphi : \mathrm{Div}_c(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \mathrm{Pic}_c(\mathcal{O}_K)$ *définie ci-dessus induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Div}_c(\mathcal{O}_K)/\mathrm{Pr}_c(\mathcal{O})_K \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}_c(\mathcal{O}_K) \quad .$$

<u>Idée de la démonstration</u> : Soit $L \in \mathrm{Pic}_c(\mathcal{O}_K)$ et $0 \neq s \in L$ . L'élément $s$ définit une application $\mathcal{O}_K \longrightarrow L$ , et donc identifie $L^{-1}$ à un idéal $\mathfrak{a}_s$ de $\mathcal{O}_K$ . Définissons $\Psi(L,s) = \Sigma\, \mathrm{ord}_v(\mathfrak{a}_s)[v] - \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \log |s|_\sigma$ . Le lecteur vérifiera que $\varphi \circ \Psi(L,s) = L$, $\Psi(L,s)$ a une image, dans $\mathrm{Div}_c(\mathcal{O}_K)/\mathrm{Pr}_c(\mathcal{O}_K)$ , indépendante de $s$, et enfin l'énoncé.

<u>COROLLAIRE</u>.- *On a un homomorphisme :*

$$\deg : \mathrm{Pic}_c(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \mathbb{R}$$

*qui, avec les notations ci-dessus, est défini par :* (iii) $\deg(L) = \mathrm{Log}\, \dfrac{N(\mathfrak{a}_s)}{\Pi |s|_\sigma^{\varepsilon_\sigma}}$

1.3.- <u>Le Marabout-Flash de théorie des nombres algébriques</u>

Les objets ci-dessus introduits suivent de près la théorie des diviseurs sur une courbe algébrique projective. Nous continuons dans cette même veine.

Soit $L \in \mathrm{Pic}_c(\mathcal{O}_K)$, définissons l'ensemble des sections de $L$ :

(iv) $$H^0(L) = \{s \in L \mid |s|_\sigma \leqq 1 \text{ pour tout } \sigma \in \emptyset\} \quad .$$

On a aussi une "caractéristique d'Euler-Poincaré"

(v) $$\chi(L) = -\log \mathrm{vol}(\oplus L_\sigma/L) \quad .$$

Cette dernière définition se justifie car :

a) $L$ est un réseau dans $\oplus L_\sigma$ $(\simeq \mathbb{R}^{[K:\mathbb{Q}]})$

b) les formes hermitiennes aux places à l'infini induisent un élément de volume sur $\bigoplus_{\sigma\in\emptyset} L_\sigma$ (l'élément de volume sur $\mathbb{C}$ est $dx \wedge dy$ avec

$z = x + iy)$ .

Par exemple, si $\mathcal{O}_K$ est muni de sa métrique canonique $|1|_\sigma = 1 \ \forall \sigma$ ($\mathcal{O}_K$ est alors appelé le faisceau trivial) on a :

$$H^0(\mathcal{O}_K) = \{0\} \cup \mu_K$$

$$\chi(\mathcal{O}_K) = \log(2^{r_2} D^{-1/2}) .$$

On a l'interprétation "géométrique" suivante de $H^0$ et $\chi$ :

PROPOSITION 1.2 : (cf. Lang [L]).- *Si* $L \in \mathrm{Pic}_c(\mathcal{O}_K)$ *et* $t \in \mathbb{R}$ , *notant* $L_t$ *l'élément de* $\mathrm{Pic}_c(\mathcal{O}_K)$ *où on a multiplié les métriques à l'infini par* $t$ , *on a :*

$$\chi(L) = -\log(2^{r_1}\pi^{r_2}) + \log\left[\lim_{t\to 0} \frac{\# H^0(L_t)}{t^{[K:\mathbb{Q}]}}\right]$$

Nous introduisons une caractéristique modifiée

(vi) $$\chi'(L) = -\log \frac{2^n \operatorname{vol}(\oplus L_\sigma/L)}{2^{r_1}\pi^{r_2}} , \quad \chi'(\mathcal{O}_K) = -\log[(\tfrac{2}{\pi})^{r_2} D^{1/2}]$$

Son intérêt se révèlera au lemme 3 ci-dessous.

LEMME 1.0 (Riemann-Roch !).-

$$\chi(L) = \deg L + \chi(\mathcal{O}_K) , \quad \chi'(L) = \deg L + \chi'(\mathcal{O}_K) .$$

LEMME 1.1.- *Si* $\deg L < 0$ *alors* $H^0(L) = 0$ .

LEMME 1.2.- *Si* $\deg L = 0$ *et* $H^0(L) \neq 0$ *alors* $L$ *est isomorphe au faisceau trivial* $\mathcal{O}_K$ .

LEMME 1.3 (Minkowski).- *Si* $\deg(L) \geqq -\chi'(\mathcal{O}_K)$ *alors* $H^0(L) \neq 0$ .

Les lemmes 0 à 2 sont de démonstration immédiate, le lemme 3 est une reformulation du célèbre énoncé de Minkowski sur les points d'un réseau dans un convexe compact symétrique.

Remarques

a) les quatre lemmes ci-dessus sont pratiquement les mêmes pour les faisceaux inversibles sur une courbe algébrique projective et lisse sur un corps.

b) On a aussi "une suite exacte de Hurwitz" où les faisceaux des différentielles sont remplacés quand c'est nécessaire par les faisceaux dualisants (classe de la différente inverse). En effet soit

$$\omega_{\mathcal{O}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{O}, \mathbb{Z}) .$$

La trace fournit une "section" canonique de $\omega_\sigma$ , notons la Tr , pour donner des formes hermitiennes à l'infini il suffit de spécifier la valeur de $|\mathrm{Tr}|_\sigma$ . Posons

$$|\mathrm{Tr}|_\sigma = \varepsilon_\sigma$$

LEMME 1.4.- *On a la suite exacte suivante :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_K \xrightarrow{1 \leadsto \mathrm{Tr}} \omega_{\mathcal{O}_K} \longrightarrow \Omega^1_{\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}} \longrightarrow 0$$

*De plus* $\deg(\omega_{\mathcal{O}_K}) = -2\chi(\mathcal{O}_K)$ .

Les lemmes 1.1 à 1.3 sont le secret de la démonstration des quatre théorèmes de base de la théorie des nombres algébriques. Nous indiquons brièvement les démonstrations de ces théorèmes par la méthode ainsi introduite. Le quatrième théorème est d'un usage constant dans ce séminaire.

THÉORÈME 1.1 (Hermite-Minkowski).- *Si* $[K:\mathbb{Q}] > 1$ *alors* $D_K > 1$ (i.e $\pi_1(\mathbb{Z}) = 0$).

Démonstration : le lemme 3 contre le lemme 1 indique $\chi'(\mathcal{O}_K) \leqq 0$ . Donc si $r_2 \neq 0$ on conclut de suite par les formules (v)' (remarquer l'économie). Si $r_2 = 0$ et $r_1 > 1$ choisissons $\underline{\alpha} = (\alpha_\sigma) \in \mathbb{R}^{r_1}$ qui ne soit pas dans l'image (discrète) de $\log \mathcal{O}_K^\times$ et telle que $\Sigma\, \alpha_\sigma = 0$ . Notons $\mathcal{O}_{\underline{\alpha}}$ l'élément de $\mathrm{Pic}_c(\mathcal{O}_K)$ qui "à distance finie" est égal à $\mathcal{O}_K$ et qui est muni de métriques telles que $|1|_\sigma = \exp(\alpha_\sigma)$ . Nous avons tout fait pour que $\mathcal{O}_{\underline{\alpha}}$ soit différent de $\mathcal{O}_K$ dans $\mathrm{Pic}_c(\mathcal{O}_K)$ , donc, par le lemme 2 ($\deg \mathcal{O}_{\underline{\alpha}} = 0$) $H^0(\mathcal{O}_{\underline{\alpha}}) = 0$ . Donc par le lemme 3 $-\chi'(\mathcal{O}_K) > 0$ , ce qui conclut.

THÉORÈME 1.2 (Dirichlet).- *Le groupe des classes d'idéaux de* $\mathcal{O}_K$ *est fini.*

En effet tout $L \in \mathrm{cl}(\mathcal{O}_K)$ peut être muni de métriques hermitiennes à l'infini tel que $\deg(L) = -\chi'(\mathcal{O}_K)$ . La classe de $L^{-1}$ est donc représentée par un idéal $\mathfrak{a}$ de norme au plus $(\exp - \chi'(\mathcal{O}_K))$ (lemme 3, formule (iii)). Il reste à appliquer le lemme évident suivant :

LEMME 5.- *L'ensemble des idéaux de* $\mathcal{O}_K$ *de norme inférieure à un nombre donné, est fini.*

THÉORÈME 1.3 (dit des unités : Dirichlet).- *Soit* W *le sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$ *formé des éléments* $(\alpha_\sigma)$ *tels que* $\Sigma\, \alpha_\sigma = 0$ *(noyau du degré), alors l'image de* $\mathcal{O}_K^\times$ *par l'application* $\underset{\sigma}{\oplus} \log|\ |_\sigma^{\varepsilon_\sigma}$ *est un réseau dans* W .

Idée de la démonstration : Soit $\alpha_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$ de degré $-\chi'(\mathcal{O}_K)$ (i.e $\sum_{\sigma\in\emptyset} \alpha_{\sigma,n}\varepsilon_\sigma = -\chi'(\mathcal{O}_K)$) et soit $\mathcal{O}_{\underline{\alpha}_n} \in \mathrm{Pic}_c(\mathcal{O}_K)$ construit comme dans la preuve du théorème 1. Il nous suffit de montrer (car l'image de $\mathcal{O}_K^\times$ est discrète) qu'une sous suite des $\mathcal{O}_{\underline{\alpha}_n}$ est convergente dans $\mathrm{Pic}_c(\mathcal{O}_K)$ . Chaque $H^0(\mathcal{O}_{\underline{\alpha}_n})$ est différent de zéro par le lemme 3, donc il existe des idéaux $\mathfrak{a}_n$ , principaux, de norme inférieure $\exp(-\chi'(\mathcal{O}_K))$.

Soit $\underline{\alpha}_{n_i}$ une sous suite de $\alpha_n$ tels que les idéaux $\mathfrak{a}_{n_i}$ soient tous égaux. On a $\mathfrak{a}_{n_i} = x_i\mathcal{O}_K = \mathfrak{a}_{n_j} = x_j\mathcal{O}_K$ .
Il existe donc des unités $u_j \in \mathcal{O}_K^\times$ telles que $x_j = u_j x_o$ . On a par hypothèse $|x_j|_\sigma \quad \alpha_{\sigma,n_j} \leq 1$ et donc $\alpha_{\sigma,n_j} |u_j|_\sigma \leq \frac{1}{|x_o|_\sigma}$. Posons $\alpha'_{\sigma,j} = \alpha_{\sigma,n_\sigma} |u_\sigma|_\sigma$ , on a $\mathcal{O}_{\underline{\alpha}_{n_j}} = \mathcal{O}_{\underline{\alpha}'_j}$ dans $\mathrm{Pic}_c(\mathcal{O}_K)$ . Les $\alpha'_{\sigma,j}$ sont bornés, donc on peut en extraire une suite convergente dans $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$ . C.Q.F.D.

THÉORÈME 1.4 (Hermite).- *L'ensemble des corps de nombres algébriques de degré donné* $n$ , *et qui ne sont ramifiés qu'en un ensemble fini de places donné* $S$ , *est fini.*

Ce n'est pas l'énoncé classique du théorème de Hermite (si $D_K$ est fixé, il n'y a qu'un nombre fini de $K$ ) mais cela en est une variante qui servira surtout sous la forme suivante :

COROLLAIRE.- *Soient* $g$ *un entier,* $S$ *un ensemble fini de places de* $K$ , *alors il existe une extension finie* $K'$ *de* $K$ , *effectivement calculable, telle que : si* $A_K$ *est une variété abélienne sur* $K$ *de dimension* $g$ , *dont le modèle de Néron a bonne réduction en dehors de* $S$ , *alors* $A_{K'}$ *est à réduction semi-stable.*

En effet, on sait qu'en rendant rationnels sur $K'$ les points de division par 12 (par exemple) de $A_K$, $A_{K'}$ est semi-stable. L'effectivité vient de ce qu'on verra plus bas que la démonstration du théorème 4 est effective.

Démonstration du théorème 1.4 : elle se fait en deux parties :

a) quand $n$ et $S$ sont fixés $D_K$ est borné

b) quand $n$ et $D_K$ sont fixés il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour $K$ .

a) C'est un problème local; soit $K \longrightarrow L$ une extension galoisienne de corps locaux de degré $n$ et de groupe $G$ . Soit $G_i$ le sous-groupe de $G$ qui agit trivialement sur $\mathcal{O}_L/\mathfrak{M}_L^{i+1}$ . On vérifie assez facilement les faits suivants :

- valuation $(D) = \sum_{0}^{\infty} (\# G_i - 1)$
- $G_i/G_{i+1}$ est un sous-groupe de $\mathcal{Y}_L^i/\mathcal{Y}_L^{i+1}$

- $G_i = (1)$ pour $i > e/(p-1)$ où $e$ est l'indice de ramification absolue $(e = v_K(p),\ p = \mathrm{car}(\mathcal{O}_K/\mathcal{Y}_K)$ ([S] IV §2 ex.3 a) b) c)).

On a donc une borne effective pour les exposants des idéaux premiers qui rentrent dans la décomposition de $D$ ($n$ et $S$ fixés).

b) Montrons que si $n$ et $D$ sont fixés il y a un élément primitif dont les différentes valeurs absolues sont bornées. Soit $L \simeq \mathcal{O}_K$ avec pour métriques à l'infini :

$$|1|_{\sigma_1} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2/2} D^{-1/4}\ 2^{1-r_2}$$

$$|1|_{\sigma_i} = 2 \qquad i > 1$$

alors $\deg L = -\chi'(\mathcal{O}_K)$ .

Il existe donc (lemme 1.3) $x \in \mathcal{O}_K$ tel que $|\sigma_1(x)| \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{-r_2/2} D^{1/4}\ 2^{r_2-1}$ ; $|\sigma_i(x)| \leq \frac{1}{2}$, $i > 1$ .

Un tel élément est primitif car $|\sigma_1(x)| > 1$ $(\Pi |\sigma_i(x)|^{\varepsilon_{\sigma_i}} \geq 1)$ et $|\sigma_i(x)| < 1$, $i \neq 1$ . Il est borné par hypothèse, on a donc gagné.

## 2.- INTERSECTIONS SUR LES SURFACES ARITHMÉTIQUES

Arakelov a construit une théorie des intersections, pour les diviseurs "compactifiés" sur une surface arithmétique, qui s'approche le plus possible de celle des diviseurs sur une surface algébrique. Nous en donnons ici la définition et les propriétés. Les démonstrations quand elles ne sont pas indiquées se trouvent dans les exposés 2 et 3 de ce séminaire. Faltings, et partiellement Hriljac, ont donné des compléments sur la théorie d'Arakelov qui la rapprochent encore plus de la théorie géométrique. Ces développements se trouvent dans les exposés 2 et 3.

### 2.1.- Diviseurs et groupe de Picard compactifiés

Soit $X \xrightarrow{f} \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$ une surface arithmétique régulière. Pour chaque $\sigma$ place à l'infini de $K$ choisissons une (1-1)-forme $\mathcal{C}^\infty$ $d\mu_\sigma$ telle que $\int_{X_\sigma(\mathbb{C})} d\mu_\sigma = 1$ .

DÉFINITION 2.1.- *Le groupe de Picard compactifié* $\mathrm{Pic}(X,d\mu_\sigma)$ *d'une surface arithmétique* $X$ *, munie d'éléments de volume* $d\mu_\sigma$ *, comme plus haut, est le groupe de classes d'isométries de faisceaux inversibles* $L$ *sur* $X$ *munis pour chaque* $\sigma$ *d'une métrique hermitienne positive* $\mathcal{C}^\infty$ $<\ ,\ >_\sigma$ *sur* $L_\sigma$ *telle que :*

$$\boxed{-\frac{1}{2i\pi}\partial\bar\partial \log|s|_\sigma = (\deg L)\, d\mu_\sigma}$$

Bien sûr, $\deg L$ est le degré de $L_K$ sur $X_K$ .

THÉORÈME 2.1 (Arakelov).- *Pour chaque choix de métriques* $(d\mu_\sigma)$ *sur les* $X_\sigma$ *satisfaisant à* $\int_{X_\sigma(\mathbb{C})} d\mu_\sigma = 1$ *on a la suite exacte suivante*

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^{r_1+r_2}/\log \mathcal{O}^\times \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Pic}(X,d\mu_\sigma) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow 0$$

*où* $\beta$ *est la flèche "oubli" des structures hermitiennes à l'infini, et* $\alpha(a_1,\dots,a_{r_1+r_2})$ *est la structure hermitienne sur le faisceau inversible* $\mathcal{O}_X$ *telle que :*

*pour chaque* $\sigma$ , $|1|_\sigma(P) = \exp(a_\sigma)$ *pour tout point* $P$ *de* $X_\sigma(\mathbb{C})$ .

La seule difficulté de ce théorème est la surjectivité de $\beta$ (existence de métriques permises) : elle est résolue dans l'exposé 2 (R. Elkik). Notons que l'exactitude de la partie gauche de la suite signifie exactement que deux métriques permises sur le même fibré, diffèrent par la multiplication par un nombre réel positif.

DÉFINITION 2.2.- *Un diviseur compactifié sur* $X$ *est une somme formelle finie* $\sum_v n_v [v] + \sum_{\sigma\in\emptyset} \lambda_\sigma [\sigma]$ *où* $v$ *parcourt les cycles irréductibles de codimension un dans* $X$ , $n_v$ *est un entier et* $\lambda_\sigma$ *un réel. Le groupe des diviseurs compactifiés sera noté* $\mathrm{Div}_c(X)$ .

DÉFINITION 2.3.- *Soient* $(d\mu_\sigma)$ *des éléments de volume sur les* $X_\sigma$ *satisfaisant* $\int_{X_\sigma(\mathbb{C})} d\mu_\sigma = 1$ , *et soit* $f$ *une fonction rationnelle sur* $X$ . *Le sous-groupe des diviseurs compactifiés principaux* $P(X,d\mu_\sigma)$ *est le sous-groupe de* $\mathrm{Div}_c(X)$ *des éléments de la forme* $\sum v(f)\,[v] - \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \int_{X_\sigma(\mathbb{C})} \log|f|_\sigma\, d\mu_\sigma$

PROPOSITION 2.1.- *L'application* $\varphi$ *qui a un diviseur compactifié :* $\sum n_v [v] + \sum \lambda_\sigma [\sigma]$ , *associe le faisceau inversible métrisé :* $(\Pi\, m_v^{-n_v}$ , $|1|_\sigma = \exp(-\lambda_\sigma/\varepsilon_\sigma)$ ) *induit un isomorphisme :*

$\mathrm{Div}_c(X)/P(X,d\mu_\sigma) \simeq \mathrm{Pic}(X,d\mu_\sigma)$ .

La démonstration est évidente. Mettons néanmoins en évidence l'application inverse : soit $L$ un élément de $\mathrm{Pic}_c(X,d\mu_\sigma)$, $s$ une section méromorphe de $L$ , $D_s$ le diviseur à distance finie associé à $s$ , on fait correspondre à $(L,s)$ le diviseur $\sum v(D_s)\,[v] - \sum \varepsilon_\sigma(\int_{X_\sigma(C)} \log|s|_\sigma\, d\mu_\sigma)[\sigma]$ . On vérifie que la classe de ce diviseur modulo $P(X,d\mu_\sigma)$ ne change pas quand on change la section $s$ de $L$ .

Si $D$ est dans $\mathrm{Div}_c(X)$ on note $\mathcal{O}_X(D) = \varphi(D)$ .

2.2.- Intersections

THÉORÈME 2.2 (Arakelov).- *Soit* $X$ *une surface arithmétique munie de métriques* $d\mu_\sigma$ *à l'infini telles que* $\int_{X_\sigma(\mathbb{C})} d\mu_\sigma = 1$ . *Alors il existe un et un seul accouplement bilinéaire* $(\ ,\ ) : \mathrm{Pic}(X,d\mu_\sigma) \times \mathrm{Pic}(X,d\mu_\sigma) \longrightarrow \mathbb{R}$ *ayant les propriétés suivantes :*

(I) *Si* $D$ *est un diviseur irréductible et réduit horizontal (i.e fini sur* $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$) $(L,\mathcal{O}_X(D)) = \deg_{\tilde{D}} \varepsilon_D^* L$ *(au sens du corollaire de la proposition , où* $\tilde{D}$ *est le normalisé de la partie finie de* $D$ *et* $\varepsilon_D : \tilde{D} \longrightarrow X$ *l'application canonique).*

(II) *Si* $D$ *est un diviseur dans la fibre de* $v \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$

$$(L,\mathcal{O}_X(D)) = (\text{degré géométrique de } L_{/D}).\ \log N(v) \quad .$$

(III) $(.,.)$ *est symétrique.*

On prend bien entendu (I) et (II) comme définition ; le seul problème est de montrer (III). Ce dernier point se vérifie facilement à l'aide de la formule de Green-Riemann.

Il est bon d'expliciter le cas de sections : supposons que le *genre des fibres est au moins un* :

Soit $E$ une section de $X \xrightarrow{f} \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ , $g = \mathrm{genre}(X_K) \geq 1$ , $\mathcal{O}_X(E)$ a une section canonique $s_E$ . Nous noterons toujours $\mathcal{O}_X(E)$ l'élément de $\mathrm{Pic}(X,d\mu_\sigma)$ tel que $\varphi(E) = \mathcal{O}_X(E)$ i.e $\int_{X_\sigma(\mathbb{C})} \log|s_E(P)|_\sigma\, d\mu_\sigma = 0$ . Si $E_1$ et $E_2$ sont deux sections distinctes on a

$$(E_1.E_2) = N(E_1 \cap E_2) - \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \log|s_{P_1}(P_2)|_\sigma$$

où $E_1 \cap E_2$ est l'intersection schématique des $E_i$, et, $P_i$ le point de $X_K$ correspondant à $E_i$ .

La fonction $X_\sigma(\mathbb{C}) \times X_\sigma(\mathbb{C}) \xrightarrow{G_\sigma} \mathbb{R}^+$ définie par $G_\sigma(P_1,P_2) = |s_{P_1}(P_2)|_\sigma = |s_{P_2}(P_1)|_\sigma$ est dite *fonction de Green* associée à $d\mu_\sigma$ .

Remarques : a) l'intersection d'Arakelov commute bien au changement de base fini : $K \longrightarrow K'$ : elle devient multipliée par $[K':K]$ .

b) A l'aide de a) on peut ramener tout calcul d'intersection au cas de sections et de diviseurs verticaux.

c) On voit facilement que les termes locaux à l'infini de l'intersection d'Arakelov ne sont pas tous positifs dans $(E_1.E_2)$ . C'est une différence majeure avec la situation géométrique.

2.3.- La formule d'adjonction

Pour chaque système de métriques $d\mu_\sigma$ telles que $\int_{X_\sigma(\mathbb{C})} d\mu_\sigma = 1$ on a une théorie des intersections d'Arakelov. Il en est un plus naturel que nous appellerons canonique :

$$d\mu_\sigma = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^{g} \omega_i \wedge \overline{\omega}_i \quad \text{où} \quad (\omega_i) \text{ est une base orthonormale de}$$

$H^0(X, \Omega^1_{X_\sigma})$ pour $\langle\alpha,\beta\rangle = \int_{X_\sigma(\mathbb{C})} \alpha \wedge \overline{\beta}$ .

On montrera essentiellement dans l'exposé 2 (L. Moret-Bailly) que ces métriques ont l'avantage suivant :

THÉORÈME 2.3 (Arakelov).- *Soit* $X$ *une surface arithmétique sur* $K$ *de genre* $g \geq 1$ . *Soit* $\Delta$ *la diagonale de* $X \times_{\mathcal{O}_K} X$ *et* $s_\Delta$ *la section canonique de* $\mathcal{O}_{X\times X}(\Delta)$ . *Définissons une métrique hermitienne sur* $(\mathcal{O}_{X\times X}(\Delta))_\sigma$ *par* $|s_\Delta(P,Q)|_\sigma = G_\sigma(P,Q)$ . *Alors* $(\omega_{X/\mathcal{O}_K})_\sigma = \Omega^1_{X_\sigma}$ *qui est le faisceau normal à* $\Delta_\sigma$ *est muni d'une métrique dite canonique, qui est permise pour les* $d\mu_\sigma$ *canoniques. Autrement dit si* $E$ *est une section de* $X \longrightarrow \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ *on a* $(\omega_X/\mathcal{O}_K . \mathcal{O}_X(E)) = -E^2$ .

Remarque : la formule d'adjonction pour les diviseurs horizontaux possède des termes non triviaux à l'infini : par exemple si $D = E_1 + E_2$ est somme de deux sections distinctes et $\delta_{D/\mathcal{O}}$ est la différente de $D$ sur $\mathcal{O}$ on a :

$$(\omega_{X/\mathcal{O}} . \mathcal{O}_X(D)) + (D.D) = \log N(\delta_{D/\mathcal{O}}) - 2 \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \log |s_{P_1}(P_2)|_\sigma$$

3.- HAUTEURS

3.1.- Intersection d'un cycle de codimension un et d'un cycle de dimension un dans une variété arithmétique compacte

Soit $X_K$ une variété propre sur $K$ . Pour construire des "hauteurs" il nous faut une structure entière sur $\mathcal{O}_K$ (à distance finie) et des métriques hermitiennes aux places à l'infini ("structure entière à l'infini"). Soit donc $X$ un modèle propre de $X_K$ sur $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ (i.e la fibre générique de $X$ est $X_K$) . Soit $L_K$ un fibré inversible sur $X_K$ , $L$ un prolongement de $L$ à $X$ , nous supposerons de plus que $L_\sigma$ sur $X_\sigma$ est muni d'une métrique hermitienne $\mathcal{C}^0$ , $|\cdot|_\sigma$ , pour chaque $\sigma$ . Soit $P \in X_K(K)$ il lui correspond biunivoquement une section $\varepsilon_P$ de $X \xrightarrow{f} \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ . Le faisceau inversible $\varepsilon_P^*(L)$ sur $\mathcal{O}_K$ est muni de métriques à l'infini et donc possède un degré au sens du §1. On pose

$$\boxed{h_{L,|.|_\sigma}(P) = \frac{1}{[K(P):\mathbb{Q}]} \deg \varepsilon_P^* L}$$

C'est la hauteur de $P$ associée à $L$ et $|.|_\sigma$. Par abus de notation, nous la noterons $h_L$ quand les métriques seront clairement fixées. Par exemple on a :

$$h_{L^{\otimes m}}(P) = m\, h_L(P) \quad .$$

<u>LEMME 1</u>.- *La hauteur est invariante par changement de corps de base.*

C'est clair.

<u>LEMME 2</u>.- (Changement de structure entière sur le faisceau inversible).
*Si* $L'$ *est une autre extension de* $L_K$ *à* $X$ *il existe une constante* $C$ *telle que :* $\left|h_L(P) - h_{L'}(P)\right| < C$ *pour tout* $P \in X_K(\overline{K})$ .

En effet, il existe un entier $m$ tel que $\frac{1}{m} L \hookrightarrow L' \hookrightarrow mL$ .

<u>LEMME 3</u>.-(Changement de métriques). *Soient* $|\,.\,|_\sigma$ *d'autres métriques hermitiennes sur les* $L_\sigma$ *, alors il existe une constante* $C$ *tel que*

$$\left|h_{L,|\ |}(P) - h_{L,|\ |'}(P)\right| < C \quad \textit{pour tout} \quad P \in X_K(\overline{K}) \quad .$$

Les $X_\sigma$ étant compactes la fonction $\varphi_\sigma$ définie par : $|\,.\,|_\sigma = \varphi_\sigma|\,.\,|'_\sigma$ est bornée. D'autre part, si $K'$ contient $K$ et $\rho$ est une place à l'infini divisant $\sigma$ , $\sup \varphi_\rho = \sup \varphi_\sigma$ .

<u>LEMME 4</u>.- (changement de modèle entier). *Si* $(X,L)$ *et* $(X',L')$ *sont deux modèles entiers de* $(X_K,L_K)$ *alors il existe une constante* $C$ *telle que*

$$|h_{L'}(P) - h_L(P)| < C \quad \textit{pour tout} \quad P \in X_K(\overline{K}) \quad .$$

Par le lemme 2, et par produit fibré on se ramène au cas où on a un morphisme birationnel

$$\pi : X' \longrightarrow X$$

et

$$L' = \pi^* L \quad .$$

Dans ce cas, on a : $h_{L'}(P) = h_L(P)$ pour tout $P \in X_K(\overline{K})$ .

<u>Exemple</u> : a) <u>hauteur naïve</u> : Soit $\underline{X}$ un point de $\mathbb{P}_K^r$ , choisissons une base de $K^{r+1}$ et soient $(X_0,\dots,X_r)$ les coordonnées de $\underline{X}$ associées à cette base (à $K^\times$ près !) . Munissons $K_\sigma^{r+1}$ de la métrique hermitienne telle que la base choisie soit orthornormale. Munissons $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$ de la métrique de Fubini-Study associée,

i.e, pour tout point $P$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_\sigma}(1)_{/P}$ est muni de la métrique quotient par : $K_\sigma^{r+1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_\sigma}(1)_{/P} \longrightarrow 0$ . Si $s \in H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1))$ , $s = \Sigma\, \lambda_i s_i$ ($s_i$ base orthonormale) et $P \in \mathbb{P}^r$ de coordonnées $X_0 \dots X_r$ on a :

$$|s(P)|^2 = \frac{|\Sigma\, \lambda_i X_i|^2}{\Sigma |X_i|^2}$$

Nous avons donc une hauteur de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^r : h_{FS}(P)$ .

On vérifie facilement que

$$h_{FS}((X_0 \dots X_r)) = \frac{1}{K:\mathbb{Q}} \log \frac{\prod_\sigma (\Sigma\, X_i^2)^{(\varepsilon_\sigma/2)}}{N(\Sigma\, \mathcal{O}_K\, x_i)}$$

On notera l'inversion numérateur-dénominateur par rapport à la formule (iii) du §1. Cette inversion est due à la dualité sections-coordonnées.

b) La hauteur naïve est positive. On en déduit (lemme 3) que pour tout $(L, |\cdot|_\sigma)$ où $L$ est *ample* il existe une constante $C$ telle que : $h_{L,|\cdot|}(P) \geq C$ pour tout $P \in X_K(\bar{K})$ .

c) Si $\varphi_0 \dots \varphi_\ell$ sont des polynômes homogènes de degré $m$ en les variables $X_0, \dots, X_r$ et si $X$ est un point de $\mathbb{P}^r$ où les $\varphi_i$ ne sont pas tous nuls on a la comparaison suivante entre les hauteurs naïves sur $\mathbb{P}^r$ et sur $\mathbb{P}^\ell$ :

$$h(\varphi(x)) \leq m\, h(x) + h(\varphi)$$

où $h(\varphi) = \log N + \sum_\sigma \log \sup |\text{coefficients des } \varphi_i|$

avec $N$ = nombre maximum de monomes dans les $\varphi_i$ .

THÉORÈME 3.1 (Northcott).- *Soit* $f : X \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ *une variété projective sur* $\mathcal{O}_K$ *et* $L$ *un fibré inversible sur* $X$ *tel que :* $L_K$ *soit ample et* $L_\sigma$ *muni d'une métrique hermitienne non nulle, pour chaque* $\sigma$ *. Alors :*

(i) *Il existe une constante* $C$ *telle que* $h_L(P) \geq C$ *pour tout* $P$ *dans* $X_K(\bar{K})$

(ii) *Pour tout nombre réel* $A$ *et tout entier* $d$ *, l'ensemble des points de* $X_K(\bar{K})$ *, définis sur un corps de degré au plus* $d$ *sur* $\mathbb{Q}$ *, et de hauteur inférieure à* $A$ *est fini.*

Par les lemmes précédents on se ramène à la hauteur naïve sur $\mathbb{P}^r$ . Alors (i) est évident. Pour (ii) considérons l'ensemble $E_{r,d}$ des points de $\mathbb{P}^r$ rationnels sur un corps de nombres $K$ tel que $[K:\mathbb{Q}] = d$ . Soit $\sigma : E_{r,d} \longrightarrow (\mathbb{P}^r(\bar{\mathbb{Q}}))^d$ qui à $P \in \mathbb{P}^r(K)$ , $[K(P) : \mathbb{Q}] = d$ associe le point

$(\sigma_i(P))_{i=1..d}$ où les $\sigma_i(P)$ sont ses différents conjugués. Soit $X_{r,d}$ le quotient de $\mathbb{P}^r\times\ldots\times\mathbb{P}^r$ par l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$. On a tout fait pour que : si $P\in\mathbb{P}^r(K)$, $[K:\mathbb{Q}]\leq d$ alors $q\circ\sigma(P)\in X_{r,d}(\mathbb{Q})$ où $q:\mathbb{P}^r\times\ldots\times\mathbb{P}^r\longrightarrow X_{r,d}$. Notons que la partie (ii) est évidente pour la hauteur naïve $h$ quand $d=1$. Il nous suffit donc de vérifier qu'on a une hauteur $h'$ sur $X_{r,d}$ associée à un faisceau ample telle que

$$h'(q\circ\sigma(P))\leq m\,h(P)+C \qquad m\in\mathbb{N}\ ,\ C \text{ constante},\ P\in E_{r,d}\ .$$

On plonge pour ceci $X_{n,d}$ dans un projectif par des polynomes homogènes en chaque système de variables et invariants par $\mathfrak{S}_d$. L'exemple c) permet alors de conclure.

3.2.- Hauteurs à singularités logarithmiques

L'avantage d'avoir introduit des métriques à l'infini, et les hauteurs associées, sur les méthodes pré-arakeloviennes (hauteur naïve et ses variantes) réside dans le choix ad-hoc de métriques pour chaque situation. Un des gadgets essentiels de la démonstration de la conjecture de Tate par Faltings est la hauteur modulaire introduite plus bas. On verra dans l'exposé 7 de M. Raynaud qu'elle a été choisie pour se comporter de façon naturelle à l'infini. Par contre le schéma de modules des variétés abéliennes polarisées n'est pas projectif et les considérations de 3.1 sont insuffisantes. On est donc amené à considérer des hauteurs sur des variétés ouvertes qui ont un comportement raisonnable "à l'infini".

DÉFINITION 1.- *Soient* $X$ *une variété algébrique sur* $\mathbb{C}$ , $L$ *un faisceau inversible sur* $X$ , $\overline{X}$ *une compactification de* $X$ *et* $\overline{L}$ *un prolongement de* $L$ *à* $\overline{X}$ *Soit* $|.|$ *une métrique hermitienne sur* $L$. *On dit qu'elle est à singularités logarithmiques s'il existe une métrique* $|.|$ *sur* $\overline{L}$ *et un entier positif* $r$, *tels que localement sur* $\overline{X}$ :

$$\sup_{P\in X}\left(\frac{|s(P)|}{|s(P)|_0}\ ,\ \frac{|s(P)|_0}{|s(P)|}\right)\leq C(-\log\Sigma|f_i(P)|)^r$$

*où* $C$ *est une constante et* $f_i$ *sont des équations locales de* $\overline{X}-X=D$ .

Soit $X_K$ une variété algébrique sur $K$ et $\overline{X}_K$ une compactification de $X_K$. Avec une métrique sur $L_\sigma$ sur $X_\sigma$ pour chaque $\sigma$ et un modèle entier de $(\overline{X},\overline{L})$ de $(\overline{X}_K,\overline{L}_K)$ (où $\overline{L}_K$ est un prolongement de $L_K$ à $X_K$) on définit une hauteur pour les points de $X_K(\overline{K})$ avec la même formule qu'en 3.1.

THÉORÈME 3.1'.- *Avec les notations ci-dessus supposons que* $\overline{L}_K$ *soit ample et que les métriques sur les* $L_\sigma$ *soient à singularités logarithmiques alors :*

(i) *Il existe une constante* C *telle que* $h_L(P) \geq C$ *pour tout* $P \in X_K(\overline{K})$ .

(ii) *Pour nombre réel* A *et tout entier* d *, l'ensemble des points de* $X_K(\overline{K})$ *définis sur un corps de degré au plus* d *sur* $\mathbb{Q}$ *, et de hauteur plus petite que* A *, est fini.*

Pour montrer ces deux énoncés, par le théorème de Northcott (Th.1), il suffit de trouver un faisceau inversible ample L' sur $\overline{X}_K$ , muni de tout le nécessaire, un entier m , et une constante $C_1$ tels que

$$(*)\ h_L(P) \geq \frac{1}{m} h_{L'}(P) + C_1 \qquad \text{pour tout } P \in X_K(\overline{K}) .$$

On se ramène sans peine au cas où $\overline{X}_K - X_K = D$ est un diviseur. Choisissons un entier m plus grand que l'exposant r de la définition 1 et tel que $L' = \overline{L}^{\otimes m}(-D)$ soit ample. Munissons L' des métriques $\dfrac{|\,.\,|_{\sigma}^{\otimes m}}{|f|_\sigma}$ où f est une équation locale de D . On vérifie facilement l'inégalité (*).

3.3.- <u>La hauteur modulaire (ou différentielle)</u>

Soit $A_K$ une variété abélienne de dimension g sur K et $A \xrightarrow{f} \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ son modèle de Néron. Le faisceau $\Omega^g_{A/\mathcal{O}}$ des différentielles de degré maximum sur A provient de $\mathcal{O}$ . Notons $\omega_A$ le faisceau inversible sur $\mathcal{O}_K$ tel que $f^*\omega_A = \Omega^g_{A/\mathcal{O}}$ .

On peut se mettre sur $\omega_{A,\sigma}$ une métrique naturelle, dite métrique modulaire, pour tout σ de la façon suivante :

$$\alpha \in \omega_{A,\sigma} = H^0(A_\sigma, \Omega^g_{A_\sigma/\mathbf{C}}) \qquad |\alpha|^2 = \left|\int_{A_\sigma(\mathbf{C})} \alpha \wedge \bar{\alpha}\right|$$

$\omega_A$ est donc canoniquement un élément de $\operatorname{Pic}_c(\mathcal{O}_K)$ et a un degré (certains auteurs disent : le degré d'Arakelov de $\omega_A$ , d'autres le degré différentiel de A). La hauteur modulaire (ou différentielle) de A est $\dfrac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \deg(\omega_A)$

<u>DÉFINITION 2</u>.- *Soit* $A_K$ *une variété abélienne sur* K *, et* K' *une extension de* K *où* $A_{K'}$ *a réduction semi-stable (par exemple on peut prendre pour* K' *un corps de rationalité des points de division par* 12 *de* $A_{\overline{K}}$*). On définit la* <u>*hauteur modulaire stable de*</u> $A_K$ *par la formule*

$$h(A_K) = \frac{1}{[K':\mathbb{Q}]} \deg \omega_{A'/\mathcal{O}_{K'}}$$

La composante neutre du modèle de Néron d'une variété abélienne semi-stable étant stable par changement de base, la définition ci-dessus ne dépend pas du corps $K'$ choisi. (Certains auteurs nomment $h(A_K)$ la hauteur stable). On a bien sûr tout de suite noté, que, $\deg(\omega_A)$ ne dépend que de la composante neutre du modèle de Néron. Par la propriété universelle du modèle de Néron il est clair que la hauteur modulaire d'une variété abélienne est plus grande que sa hauteur modulaire stable.

Remarque heuristique

Si la vie mathématique était belle, on aurait sur Spec $\mathbb{Z}$ un schéma de module fin $\overline{M}$ des variétés semi-abéliennes principalement polarisées , de dimension $g$ (une variété semi-abélienne est une extension d'un tore par une variété abélienne). Dans ce cas, si $A$ est l'objet universel sur $\overline{M}$, $\omega_A$ serait muni d'une métrique sur $M$ l'ouvert correspondant aux variétés abéliennes. Si on montrait de plus que $\omega_{A,\mathbb{Q}}$ est ample et que la hauteur modulaire est associée à des métriques à singularités logarithmiques, le théorème 1' nous fournirait l'énoncé de finitude qui est un des buts de cet harassant travail : l'ensemble des variétés abéliennes de $\dim g$ sur $K$ de hauteur modulaire bornée est fini. La situation n'est pas si simple. On montrera cependant ce dernier énoncé dans l'exposé 5. L'exposé 4 (le Lemme de Gabber par P. Deligne) fournit une sorte d'objet universel, l'exposé 5 (L. Moret-Bailly) essentiellement l'amplitude de $\omega_{A/\mathbb{Q}}$. Nous montrons ci-dessous la propriété de singularités logarithmiques.

THÉORÈME 3.2.- *Soit* $S$ *un schéma normal connexe de type fini sur* $\mathbb{C}$ *et soit* $f : A \longrightarrow S$ *un schéma semi-abélien sur* $S$ *qui soit abélien sur la fibre générique. Soit* $Z$ *le fermé de* $S$ *où* $A$ *n'est pas abélien, alors la métrique modulaire sur* $\omega_{A/S|S-Z}$ *est à singularités logarithmiques.*

Examinons d'abord le cas d'une jacobienne.

Soit $C$ une courbe connexe, lisse, projective, de genre $g \geq 1$ , sur $\mathbb{C}$ et soit $J$ la jacobienne de $C$ . Par dualité on a une identification canonique

$$H^0(C,\Omega^1_C) \xrightarrow{\sim} H^1(C,\mathcal{O}_C)^* \xrightarrow{\sim} H^0(J,\Omega^1_J) \quad .$$

Si $\omega^J$ est une forme différentielle sur $J$ nous noterons $\omega^C$ la forme différentielle sur $C$ obtenue par cette identification.

LEMME 3.2.1.- *Avec les notations ci-dessus si* $\omega^J_1,\ldots,\omega^J_g$ *sont des 1-formes différentielles sur* $J$ *on a :*

$$|\det(\int_C \omega^C_i \wedge \overline{\omega}^C_j)| = |\int_J \omega^J_1\wedge\ldots\wedge\omega^J_g\wedge\overline{\omega}^J_1\wedge\ldots\wedge\overline{\omega}^J_g|$$

Choisissons $g$ points $P_1,\ldots,P_g$ de $C$ , on a ainsi un morphisme fini de degré $g!$ :

$$\pi : C^g \longrightarrow J \ .$$

On a $\qquad \pi^* \omega_i^J = \pi_1^* \omega_i^J + \pi_2^* \omega_i^J + \ldots + \pi_g^* \omega_i^J$

où $\pi_j : C \longrightarrow J$ est l'application d'Abel associée au point $P_j$ . Il est clair que $\int_C \pi_j^* \omega_i^J \wedge \pi_j^* \bar{\omega}_k^J = \int_C \omega_i^C \wedge \bar{\omega}_k^C$

$$\left| \int_J \omega_1^J \wedge \ldots \wedge \omega_g^J \wedge \bar{\omega}_1^J \wedge \ldots \wedge \bar{\omega}_g^J \right| = \frac{1}{g!} \left| \sum_{\tau,\sigma \in \mathfrak{S}_g} \varepsilon(\sigma)\ \varepsilon(\tau) \ \prod_i \int_C \omega_{\sigma(i)}^C \wedge \bar{\omega}_{\tau(i)}^C \right|$$

$$= \frac{g!}{g!} \left| \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_g} \varepsilon(\sigma) \ \prod_i \int_C \omega_i^C \wedge \bar{\omega}_{\sigma(i)}^C \right|$$

$$= \left| \det \int_C \omega_i^C \wedge \bar{\omega}_j^C \right|$$

Supposons donc que $f : A \longrightarrow S$ soit la jacobienne d'une courbe semi-stable $X \longrightarrow S$ . Par le théorème 1.6 de [D-M] on se ramène à un nombre fini de cas de la forme $X \longrightarrow D$ où $D$ est le disque unité dans $\mathbb{C}$ , lisse sur le disque épointé et semi-stable à l'origine.

Soit $U_j$ $\quad j = 1 \ldots r, r+1 \ldots s$ , un recouvrement ouvert de $X$ tel que

- si $j > r : U_j \simeq D \times D = \{x,y \mid |x| \leq 1 \ , \ |y| \leq 1\}$ est un voisinage d'un point singulier dans $X_0$ d'équations locales $x.y = t$ (semi-stabilité)
- si $j \leq r$ $\quad U_j \longrightarrow D$ est lisse et $U_j \cap X_0$ n'est pas vide.

Posons $\|\omega\|_0(t) = \frac{1}{r} \sum_1^r \int_{U_j \cap f^{-1}(t)} \omega \wedge \bar{\omega}$ .

C'est une bonne métrique plus petite que $\|\omega\|(t) = \int_{X_t} \omega \wedge \bar{\omega} \qquad t \neq 0$ .

Il nous reste donc à estimer

$$\int_{U_j \cap f^{-1}(t)} \omega \wedge \bar{\omega} \qquad \text{pour} \quad r+1 \leq j \leq s$$

où $\omega$ est de la forme : (fonction holomorphe) $\dfrac{dx}{x}$ .

Il faut donc évaluer :

$$i \int_{1 \geq |x| \geq |\frac{1}{t}|} \frac{dx \wedge d\bar{x}}{(x)^2} = -2 \log|t| \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

(Cette démonstration est due à G. Faltings).

Pour en déduire le cas des variétés abéliennes quelconques, remarquons d'abord qu'en prenant une compactification désingularisée à la Hironaka et en intégrant sur le complémentaire de boules entourant les singularités des fibres, la métri-

que modulaire est plus grande qu'une métrique définie pour tout $t \in S$ .
On a donc facilement une des deux inégalités. Pour avoir l'autre $(|\alpha| = O((\log)^r)$
on prend une courbe lisse $X_\eta$ dans la fibre générique $A_\eta$ , $X$ un modèle
de $X_\eta$ et $J$ la jacobienne relative de $X$ sur $D$ , alors on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow J \longrightarrow A \longrightarrow 0 \quad .$$

Quitte à prendre un revêtement de $S$ , $J$ a réduction semi-stable : la métrique modulaire sur $J$ ayant des singularités logarithmiques et celles sur $A$ et $B$ étant minorées comme plus haut, on en déduit que la métrique modulaire sur $A$ (et même sur $B$ ) a des singularités logarithmiques.

## BIBLIOGRAPHIE


[Ar] S. Ju. ARAKELOV.- *Intersection theory of Divisors on an Arithmetic Surface*, Math. USSR Izvestija vol.8 (1974) n°6, 1167-1180.

[D-M] P. DELIGNE, D. MUMFORD.- *Irreducibility of the space of curves of given genus*, Publ. Math. I.H.E.S vol.36 (1969), 75-109.

[F] G. FALTINGS.- *Arakelov's Theorem for Abelian Varieties*, Invent. Math. 73, fasc.3 (1983), 337-348.

[L] S. LANG.- *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer Verlag (1983).

[Se] J-P.SERRE.- *Corps locaux*, Hermann, Paris. (1962).

[Sz] L. SZPIRO.- *Développements de la théorie d'Arakelov*, Notes d'un Séminaire à l'Université de Columbia New York (avril 1983).



Lucien SZPIRO

Ecole Normale Supérieure
Centre de Mathématiques
45, rue d'Ulm
75230 PARIS CEDEX 05