Astérisque

ARNAUD BEAUVILLE

Préliminaires sur les périodes des surfaces $K3$

Astérisque, tome 126 (1985), p. 91-97
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__126__91_0>

EXPOSÉ VII

PRÉLIMINAIRES SUR LES PÉRIODES DES SURFACES K3

Arnaud BEAUVILLE

1 . PÉRIODES

Nous rappelons ici, afin de fixer les notations, des définitions déjà introduites dans les exposés précédents.

Soit X une surface K3. Le cup-produit définit sur $H^2(X,\mathbb{Z})$ une forme quadratique entière unimodulaire, paire, de signature $(3,19)$. Le $\mathbb{Z}$-module quadratique $H^2(X,\mathbb{Z})$ est donc isomorphe au réseau $L = (-E_8)^2 \oplus H^3$ (Exposé IV). Pour tout corps K, on notera $L_K = L \otimes_{\mathbb{Z}} K$.

Définition . On appelle surface K3 marquée un couple (X,σ), où X est une surface K3 et $\sigma : H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow L$ une isométrie.

La droite $\sigma_{\mathbb{C}}(H^{2,0}(X)) \subset L_{\mathbb{C}}$ est la période de (X,σ). Elle définit un point du domaine des périodes $\Omega \subset \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}})$ défini par les équations

$$\omega^2 = 0 \ , \ \omega.\bar{\omega} > 0 \ .$$

C'est un ouvert d'une quadrique lisse de dimension 20 .

La donnée de la période équivaut à celle de la structure de Hodge de poids 2 sur $L_{\mathbb{C}}$ déduite via σ de celle de $H^2(X,\mathbb{C})$.

Nous utiliserons le plus souvent une autre interprétation de Ω . Disons qu'un sous-espace P de $L_{\mathbb{R}}$ est positif si la restriction à P de la forme quadratique est positive non dégénérée.

Lemme 1 . Le domaine des périodes Ω s'identifie canoniquement à la grassmannienne des 2-plans positifs orientés de $L_{\mathbb{R}}$.

A une droite complexe $D \subset L_{\mathbb{C}}$ on fait correspondre le 2-plan $(D \oplus \bar{D}) \cap L_{\mathbb{R}}$, orienté de façon que la base $(\mathrm{Re}(\omega)\ \mathrm{Im}(\omega))$ soit directe pour tout $\omega \in D$. Inversement, étant donné un 2-plan positif $P \subset L_{\mathbb{R}}$, le plan complexifié $P_{\mathbb{C}}$ contient deux droites isotropes, et le choix d'une de ces droites équivaut au choix d'une orientation de P . □

Dans ce cadre la période de (X,σ) est le 2-plan $\sigma(P_X)$, avec

$$P_X = H^2(X,\mathbb{R}) \cap (H^{2,0} \oplus H^{0,2}) \ .$$

Si l'on pose $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X) = H^2(X,\mathbb{R}) \cap H^{1,1}$, on a une décomposition orthogonale

$$H^2(X,\mathbb{R}) = P_X \oplus H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X) \ .$$

Lemme 2 . Le domaine des périodes Ω est connexe.

Le lecteur savant déduira ce lemme du fait que le groupe $SO(3,19)$ a 2 composantes connexes et que $-I$ n'appartient pas à la composante neutre. Donnons une démonstration élémentaire pour être complet. Montrons d'abord que dans un espace vectoriel réel V muni d'une forme de signature (p,q) avec $p \geq 2$, l'ensemble V^+ des vecteurs de carré > 0 est connexe. Soit en effet F un sous-espace négatif de dimension q de V . La projection orthogonale de V^+ sur F est ouverte et ses fibres, qui s'identifient au complémentaire d'une boule dans $F^{\perp}$, sont connexes et non vides ; ceci entraîne que V^+ est connexe.

Soit alors Z la sous-variété de $L^+_{\mathbb{R}} \times L^+_{\mathbb{R}}$ formée des couples (x,y) tels que $x.y = 0$. Soit $p : Z \longrightarrow L^+_{\mathbb{R}}$ la première projection ; elle est lisse et pour $v \in L^+_{\mathbb{R}}$, la fibre $p^{-1}(v)$ s'identifie à l'ensemble des vecteurs de carré > 0 dans $v^{\perp}$, qui est connexe d'après ce qui précède. Ainsi Z est connexe. Enfin l'application de Z dans Ω qui associe à un couple (x,y) le 2-plan $\mathbb{R}x + \mathbb{R}y$, orienté de façon que la base (x,y) soit directe, est continue et surjective, ce qui prouve le lemme. □

Soit maintenant $f : X \longrightarrow S$ une famille de surfaces K3 (par quoi nous entendrons toujours un morphisme propre et lisse dont les fibres sont des surfaces K3). Les groupes de cohomologie $H^2(X,\mathbb{Z})$, pour $s \in S$, forment un système local $R^2f_*(\mathbb{Z})$. Nous appellerons marquage de cette famille un isomorphisme σ de $R^2f_*(\mathbb{Z})$

sur le système constant L_S , qui induit en chaque point une isométrie $\sigma_s : H^2(X_s,\mathbb{Z}) \longrightarrow L$. L'<u>application des périodes</u> $\mathcal{P} : S \longrightarrow \Omega$ associée à (f,σ) est définie par $\mathcal{P}(s) = \sigma_s(H^{2,0}(X_s))$. Elle est holomorphe (Exposé V). Rappelons aussi que si f est une déformation locale universelle de sa fibre X_o , pour $o \in S$, l'application des périodes est un isomorphisme local en o (th. de Torelli local, Exposé V).

2. UN PEU DE GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

Soit P un 2-plan positif de $L_{\mathbb{R}}$. Notons $H_P^{1,1}$ l'orthogonal de P dans $L_{\mathbb{R}}$, et $\mathcal{C}_P$ le cône des éléments $x \in H_P^{1,1}$ tel que $x^2 > 0$. La forme quadratique restreinte à $H_P^{1,1}$ est de signature (1,19), de sorte que $\mathcal{C}_P$ a deux composantes connexes, qui sont échangées par la symétrie $x \longmapsto -x$. Pour que deux éléments x , y de $\mathcal{C}_P$ appartiennent à la même composante connexe, il faut et il suffit qu'on ait $x.y > 0$ (cf.Exposé IV , 4).

Soient Δ l'ensemble des éléments de L de carré (-2), et Δ_P le sous-ensemble de Δ formé des éléments orthogonaux à P . Pour $\delta \in \Delta_P$, notons s_δ la réflexion orthogonale de $L_{\mathbb{R}}$ définie par $s_\delta(x) = x + (x.\delta)\delta$. Soit W_P le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(L_{\mathbb{R}})$ engendré par les réflexions s_δ pour $\delta \in \Delta_P$. Le groupe W_P opère sur $H_P^{1,1}$ et aussi sur $\mathcal{C}_P$.

<u>Proposition</u> 1. <u>Le groupe discret</u> W_P <u>opère proprement sur</u> $\mathcal{C}_P$.

Notons $\mathcal{C}_P^1$ l'ensemble des éléments de carré 1 de $H_P^{1,1}$. A cause de l'isomorphisme W_P-équivariant $\mathcal{C}_P \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_P^1 \times \mathbb{R}_+^*$, il suffit de montrer que W_P opère proprement sur $\mathcal{C}_P^1$. Or le groupe $G = \mathrm{Aut}(H_P^{1,1})$ opère transitivement sur $\mathcal{C}_P^1$, et le stabilisateur K d'un point est compact (c'est le groupe orthogonal d'une forme quadratique négative non dégénérée). D'autre part le groupe W_P est discret dans $\mathrm{Aut}(L_{\mathbb{R}})$ (puisque contenu dans $\mathrm{Aut}(L)$), donc aussi dans G . Puisque G opère proprement sur $\mathcal{C}_P^1 = G/K$, il en est de même du sous-groupe discret W_P .

<u>Lemme</u> 3. <u>Soit</u> W <u>un groupe discret opérant proprement sur un espace séparé</u> X , <u>et soit</u> S <u>une partie de</u> W. <u>Alors la réunion</u> F <u>des lieux fixes des éléments de</u> S <u>est fermée dans</u> X .

Soit x un point de $X-F$, et soit W_x son stabilisateur ; on a $W_x \cap S = \emptyset$. Puisque W opère proprement sur X , il existe un voisinage U de x dans X tel que $wU \cap U = \emptyset$ pour tout $w \in W-W_x$, en particulier pour tout $w \in S$. Ceci entraîne $U \subset X-F$, de sorte que $X-F$ est ouvert, d'où le lemme.

Grâce au lemme 3, on déduit aussitôt de la Proposition 1 le résultat suivant :

<u>Corollaire</u>. <u>La réunion des hyperplans</u> $\delta^{\perp}$, <u>pour</u> $\delta \in \Delta_P$, <u>est fermée dans</u> $\mathcal{C}_P$.

On dit que les hyperplans $\delta^{\perp}$ sont les <u>murs</u> de $\mathcal{C}_P$; les composantes connexes de $\mathcal{C}_P - \bigcup_{\delta\in\Delta_P} \delta^{\perp}$ sont appelées les <u>chambres</u> de $\mathcal{C}_P$. Elles sont ouvertes dans $\mathcal{C}_P$ (corollaire), donc aussi dans $H_P^{1,1}$.

<u>Proposition</u> 2 . <u>Soit</u> $\mathcal{C}_P^+$ <u>une des deux composantes connexes de</u> $\mathcal{C}_P$. <u>Le groupe</u> W_P <u>opère transitivement sur l'ensemble des chambres de</u> $\mathcal{C}_P^+$.

(Autrement dit, le groupe $W_P \times \{\pm 1\}$ opère transitivement sur l'ensemble des chambres de $\mathcal{C}_P$.)

Observons d'abord que W_P préserve $\mathcal{C}_P^+$. En effet, pour $x \in \mathcal{C}_P$, on a

$$s_\delta(x).x = x^2 + (x.\delta)^2 > 0 ,$$

ce qui entraîne que x et $s_\delta(x)$ sont dans la même composante de $\mathcal{C}_P$.

Ainsi, puisque le groupe W_P préserve l'ensemble des murs de $\mathcal{C}_P$, il opère sur l'ensemble des chambres de $\mathcal{C}_P^+$. Soient C , C' deux de ces chambres, et soit $x \in C'$; il s'agit de montrer que l'orbite Wx rencontre C .

Fixons un élément e de C . Pour $a \in \mathbb{R}$, la partie de $\mathcal{C}_P^+$ formée des éléments z de carré fixé et tels que $(e.z) \leq a$ est compacte ; d'autre part l'application $w \longmapsto wx$ de W dans $\mathcal{C}_P$ est propre (Proposition 1). On en déduit qu'il n'y a qu'un nombre fini d'éléments w de W vérifiant $(e.wx) \leq a$, et par suite que la fonction $z \longmapsto (e.z)$ sur Wx atteint son minimum en un point y . On a alors, pour tout $\delta \in \Delta_P$,

$$e.s_\delta(y) \geq e.y \text{ , soit } (e.\delta)\ (y.\delta) \geq 0 .$$

Ainsi y est du même côté que e par rapport à tout mur, ce qui signifie que y appartient à C . □

<u>Remarque</u>. La théorie des groupes engendrés par des réflexions (cf.[1],Ch.5) donne en fait beaucoup plus : le groupe W_P opère <u>simplement transitivement</u> sur l'ensemble des chambres ; c'est un <u>groupe de Coxeter</u>, engendré par l'ensemble des réfle-

xions par rapport aux murs d'une chambre fixée. Nous n'utiliserons pas ces résultats; je renvoie pour plus de détails à l'exposé [3] ainsi qu'à la bibliographie qu'il contient.

Proposition 3 . Dans la grassmannienne $G_3^+(L_{\mathbb{R}})$ des 3-plans positifs de $L_{\mathbb{R}}$, l'ensemble des 3-plans orthogonaux à un élément de Δ est fermé.

Le groupe $\mathrm{Aut}(L_{\mathbb{R}})$ opère transitivement sur $G_3^+(L_{\mathbb{R}})$, et le stabilisateur d'un 3-plan F est le sous-groupe compact $O(F) \times O(F^{\perp})$. On en déduit comme dans la prop.1 que W_P opère proprement sur $G_3^+(L_{\mathbb{R}})$. D'autre part un 3-plan positif est fixé par la réflexion s_δ si et seulement s'il est orthogonal à δ . La Proposition 3 résulte donc du Lemme 3 . □

Soit maintenant X une surface K3 ; appliquons ce qui précède en identifiant L à $H^2(X,\mathbb{Z})$ à l'aide d'un marquage σ , et en prenant pour P la période de (X,σ). Alors $\mathcal{C}_P$ s'identifie au cône $\mathcal{C}_X$ des éléments x de $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$ tels que $x^2 > 0$, et Δ_P à l'ensemble Δ_X des classes de diviseurs de carré (-2) sur X . Les hyperplans $\delta^{\perp}$, pour $\delta \in \Delta_X$, découpent un pavage de $\mathcal{C}_X$. Le groupe W_X (engendré par les réflexions s_δ , pour $\delta \in \Delta_X$) opère transitivement sur les chambres de $\mathcal{C}_X$, qui sont ouvertes.

Supposons de plus X kählérienne. On sait alors distinguer une composante $\mathcal{C}_X^+$ de $\mathcal{C}_X$, à savoir celle qui contient les classes de Kähler (cf.Exposé IV).

Notons Δ_X^+ l'ensemble des classes de diviseurs effectifs de carré (-2) sur X ; à cause du théorème de Riemann-Roch, on a $\Delta_X = \Delta_X^+ \cup (-\Delta_X^+)$. On note $\mathcal{K}_X$ la chambre de $\mathcal{C}_X^+$ formée des $x \in \mathcal{C}_X^+$ tels que $x.\delta > 0$ pour tout $\delta \in \Delta_X^+$; elle contient les classes de Kähler. On dit que c'est la chambre kählérienne de $\mathcal{C}_X$. Les éléments x de $\mathcal{K}_X$ vérifient $x.d > 0$ pour toute classe de diviseur effectif d (loc.cit.).

3. Le théorème de Torelli : énoncé

Soient X, X' deux surfaces K3 kählériennes, et $\varphi : H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X',\mathbb{Z})$ une isométrie. On dit que φ est une isométrie de Hodge si elle est compatible aux structures de Hodge, c'est-à-dire si $\varphi_{\mathbb{C}}(H^{p,q}(X)) = H^{p,q}(X')$ pour $p+q = 2$; il suffit bien sûr de le vérifier pour $p = 2$, $q = 0$.

Lemme 4. Soit $\varphi : H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X',\mathbb{Z})$ une isométrie de Hodge. Notons $\mathcal{E}_X$ l'ensemble des classes de diviseurs effectifs dans $H^2(X,\mathbb{Z})$, et $\mathcal{E}_{X'}$ l'ensemble correspon-

<u>dant pour</u> X' . <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) $\varphi(\mathcal{E}_X) = \mathcal{E}_{X'}$ <u>et</u> $\varphi(\mathcal{C}_X^+) = \mathcal{C}_{X'}^+$;

(ii) $\varphi(\mathcal{K}_X) = \mathcal{K}_{X'}$;

(iii) $\varphi(\mathcal{K}_X) \cap \mathcal{K}_{X'} \neq \emptyset$.

<u>Lorsqu'elles sont réalisées, on dit que</u> φ <u>est une isométrie de Hodge effective</u>.

Les implications (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) sont claires. Sous l'hypothèse (ii), on a évidemment $\varphi(\mathcal{C}_X^+) = \mathcal{C}_{X'}^+$. Soit c la classe d'une courbe irréductible sur X . Comme $\varphi(c)^2 = c^2 \geq -2$, le théorème de Riemann-Roch entraîne que $\varphi(c)$ ou $-\varphi(c)$ est la classe d'un diviseur effectif. La seconde possibilité est exclue car pour $k \in \mathcal{K}_{X'}$, on a $\varphi(c).k = c.\varphi^{-1}(k) > 0$. Ceci prouve l'inclusion $\varphi(\mathcal{E}_X) \subset \mathcal{E}_{X'}$; le même raisonnement appliqué à φ^{-1} prouve l'inclusion opposée.□

Il est clair que si $u : X' \longrightarrow X$ est un isomorphisme, alors $u^* : H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X',\mathbb{Z})$ est une isométrie de Hodge effective. Inversement :

<u>Théorème de Torelli</u>. <u>Soient</u> X , X' <u>deux surfaces</u> K3 <u>kählériennes, et soit</u> $\varphi : H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X',\mathbb{Z})$ <u>une isométrie de Hodge effective</u>. <u>Il existe un unique isomorphisme</u> $u : X' \longrightarrow X$ <u>tel que</u> $u^* = \varphi$.

<u>Corollaire</u>. <u>Soient</u> (X,σ) <u>et</u> (X',σ') <u>deux surfaces</u> K3 <u>kählériennes marquées admettant la même période</u>. <u>Alors</u> X <u>et</u> X' <u>sont isomorphes</u>.

Considérons en effet l'isométrie $\varphi = \sigma'^{-1} \circ \sigma$ de $H^2(X,\mathbb{Z})$ dans $H^2(X',\mathbb{Z})$. Puisque $\sigma(H^{2,0}(X)) = \sigma'(H^{2,0}(X'))$, φ est une isométrie de Hodge. Alors $\varphi(\mathcal{K}_X)$ est une chambre de $\mathcal{C}_{X'}$; la Proposition 2 entraîne qu'il existe $w \in W_{X'} \times \{\pm 1\}$ tel que $w\varphi(\mathcal{K}_X) = \mathcal{K}_{X'}$. Alors $w\varphi$ est une isométrie de Hodge effective, d'où le corollaire.□

Le théorème de Torelli pour les surfaces K3 kählériennes est dû à Burns-Rapoport [2], qui s'appuyaient sur le cas projectif démontré par Pjateçkii-Šapiro et Šafarevič [5]. Une version simplifiée de la démonstration, complétant quelques lacunes de [5], est exposée dans [4]. Les deux exposés qui suivent sont consacrés à ce résultat ; j'ai suivi d'assez près [4], avec quelques simplifications.

Voici le schéma de la démonstration. On prouve d'abord (c'est la partie la plus délicate) que le théorème est vrai lorsque X est une surface de Kummer. On montre ensuite que les périodes des surfaces de Kummer sont denses dans Ω . Grâce au théorème de Torelli local, on construit alors, sur un ouvert S de Ω, des familles $(X_s)_{s\in S}$ et $(X'_s)_{s\in S}$ de surfaces K3 kählériennes, telles que $X_o = X$ et $X'_o = X'$ $(o \in S)$. A cause de ce qui précède, S contient une partie dense T telle que X_t et X'_t sont des surfaces de Kummer isomorphes. Le "lemme principal" de Burns-Rapoport permet alors de montrer que ces isomorphismes convergent, dans un certain sens, vers un isomorphisme de X' sur X .

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki : Groupes et algèbres de Lie, Ch.4,5,6 , Masson, Paris (1981).

[2] D. Burns, M. Rapoport : On the Torelli problem for Kählerian K3 surfaces, Ann. Sci.Ec. Norm. Sup. Paris 8 (1975), 235-274.

[3] I. Dolgachev : Integral quadratic forms : applications to algebraic geometry (after V. Nikulin) , Exposé n° 611, séminaire Bourbaki (juin 1983) ; Astérisque n° 105-106 (1983).

[4] E. Looijenga, C. Peters: A Torelli theorem for Kähler K3 surfaces, Compositio Math.42 (1981), 145-186.

[5] I. Pjateckii-Šapiro, I.R. Šafarevič : A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3, Math, USSR Izvestija 5 (1971), 547-588.

Bâtiment de Mathématiques 425
Université de Paris-Sud
ERA du CNRS n° 653
91405 ORSAY CEDEX (France)