Astérisque

ARNAUD BEAUVILLE

Introduction à l'application des périodes

Astérisque, tome 126 (1985), p. 7-18

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__126__7_0>

EXPOSÉ I

INTRODUCTION À L'APPLICATION DES PÉRIODES

Arnaud BEAUVILLE

1. PÉRIODES DES COURBES ALGÉBRIQUES

L'histoire des intégrales abéliennes et de leurs périodes se confond à son début avec celle des fonctions elliptiques, pour laquelle je renvoie à [9]. La théorie des périodes des courbes algébriques générales a été développée par Riemann [16] et ses successeurs (Clebsch, Schottky, etc.) ; je vais essayer de résumer ces travaux en langage moderne.

Soit X une surface de Riemann compacte, de genre g. Choisissons une base symplectique $(\gamma_1,\dots,\gamma_g\,;\,\delta_1,\dots,\delta_g)$ de $H_1(X,\mathbb{Z})$ (on a donc $\gamma_i\cdot\gamma_j=\delta_i\cdot\delta_j=0$ et $\gamma_i\cdot\delta_j=\delta_{ij}$; le produit sur $H_1(X,\mathbb{Z})$ correspond au cup-produit sur $H^1(X,\mathbb{Z})$ via la dualité de Poincaré). Soit $(\omega_\alpha)_{1\le\alpha\le g}$ une base de l'espace $\Omega(X)$ des 1-formes holomorphes sur X. La matrice des périodes de X (relativement aux bases choisies) est la matrice à g lignes et 2g colonnes

$$\left(\int_{\gamma_i}\omega_\alpha \;\Big|\; \int_{\delta_i}\omega_\alpha\right) .$$

Ces périodes ne sont pas indépendantes ; en exprimant la nullité de $\int_X \omega\wedge\omega'$, pour ω, ω' dans $\Omega(X)$, et la positivité de $i\int_X \omega\wedge\overline{\omega}$, Riemann obtient les relations bilinéaires

$$\sum_{i=1}^{g}\left(\int_{\gamma_i}\omega\int_{\delta_i}\omega' - \int_{\delta_i}\omega\int_{\gamma_i}\omega'\right) = 0$$

$$\operatorname{Im}\Big(\sum_i \int_{\gamma_i}\overline{\omega}\cdot\int_{\delta_i}\omega\Big) > 0 \qquad \text{pour } \omega\neq 0 .$$

On peut normaliser la matrice des périodes de la façon suivante : on vérifie facilement que les formes linéaires $\int_{\gamma_i}$ sur $\Omega(X)$ forment une base du dual $\Omega(X)^*$. On peut donc prendre pour (ω_α) la base duale, de sorte que la matrice des périodes s'écrit(•) $(I_g|\tau)$, avec $\tau_{ij} = \int_{\delta_j} \omega_i$. Les relations précédentes s'écrivent alors

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}\Big(\sum_{i,j} \tau_{ij} \overline{\lambda}_i \lambda_j\Big) > 0$$

pour tout $(\lambda_1,\ldots,\lambda_g) \in \mathbb{C}^g - \{0\}$; autrement dit, la matrice τ est symétrique et sa partie imaginaire est positive séparante (=non dégénérée).

Le domaine des périodes pour les courbes de genre g est donc le "demi-espace supérieur de Siegel"

$$H_g = \{\tau \in M_g(\mathbb{C}) \mid \tau = {}^t\tau \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(\tau) \text{ positive séparante}\} \quad .$$

C'est un ouvert de $\mathbb{C}^{g(g+1)/2}$; pour $g = 1$ c'est simplement le demi-plan de Poincaré.

Appelons "courbe marquée" (X,u) la donnée d'une courbe X et d'un isomorphisme symplectique u de $H^1(X,\mathbb{Z})$ sur le module symplectique standard $\mathbb{Z}^{2g}$ (ce qui revient à se donner une base symplectique de $H_1(X,\mathbb{Z})$). Soit $\widetilde{\mathcal{M}}_g$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de courbes marquées de genre g ; nous avons défini une "application des périodes"

$$\widetilde{\varphi} : \widetilde{\mathcal{M}}_g \longrightarrow H_g \quad .$$

Un changement de base symplectique correspond à une opération du groupe modulaire $\Gamma = Sp(2g,\mathbb{Z})$. De manière précise, faisons agir Γ à gauche sur $\widetilde{\mathcal{M}}_g$ et sur H_g, en posant, pour $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma$:

$$g\cdot(X,u) = (X, g\circ u) \quad , \quad g\tau = (A\tau - B)(-C\tau + D)^{-1} \quad ;$$

(•) Riemann utilise en fait la base $(\pi i\, \omega_\alpha)$; il obtient donc une matrice de périodes $(\pi i I_g \mid \sigma)$, où σ est une matrice symétrique dont la partie réelle est négative séparante. Cette normalisation curieuse (qui malheureusement se répercute sur l'écriture des fonctions thêtas) se retrouve encore par exemple dans le livre de Krazer.

alors $\tilde{\varphi}$ est compatible aux opérations de Γ, et définit par passage aux quotients une application $\varphi : \mathcal{M}_g \to H_g/\Gamma$, où $\mathcal{M}_g = \tilde{\mathcal{M}}_g/\Gamma$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme de courbes de genre g. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathcal{M}}_g \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d] & H_g \arrow[d] \\ \mathcal{M}_g \arrow[r, "\varphi"] & H_g/\Gamma \end{tikzcd} .$$

J'ai pris dans ce qui précède un point de vue ensembliste ; les géomètres algébristes savent mettre sur $\tilde{\mathcal{M}}_g$ et $\mathcal{M}_g$ des structures naturelles de variétés analytiques (cf. [8]). Les applications φ et $\tilde{\varphi}$ sont alors analytiques. Leur importance vient du théorème suivant :

<u>Théorème de Torelli</u> ([22], 1914) . <u>L'application</u> φ <u>est injective</u>.

Beaucoup plus récemment, Oort et Steenbrink ont démontré que φ est un plongement [14]. Signalons que $\tilde{\varphi}$ est un morphisme de degré 2 sur son image, ramifié seulement aux courbes hyperelliptiques : on a en effet $\tilde{\varphi}(X,u) = \tilde{\varphi}(X,-u)$, et les courbes marquées (X,u) et (X,-u) ne sont pas isomorphes si X n'est pas hyperelliptique.

L'espace des modules $\mathcal{M}_g$ apparaît donc comme une sous-variété de l'espace H_g/Γ , en principe plus accessible. Notons que la dimension de H_g , qui est $g(g+1)/2$, est beaucoup plus grande, lorsque g est grand, que celle de $\mathcal{M}_g$, égale à $3g-3$ (pour $g \geq 2$). Pour les petites valeurs de g, on a le tableau suivant :

g	dim $\mathcal{M}_g$	dim H_g
1	1	1
2	3	3
3	6	6
4	9	10
5	12	15

On appelle souvent <u>problème de Schottky</u> la question de décrire par des équations l'image de $\tilde{\varphi}$ dans H_g . D'après ce qui précède, le problème ne se pose que pour $g \geq 4$. En genre 4, Schottky a décrit une équation simple, en termes de "thetanulls", satisfaite par les matrices de périodes des courbes algébriques [17] ; un résultat remarquable et tout récent d'Igusa affirme que cette équation caractérise l'image de $\tilde{\varphi}$ [10]. En genre ≥ 5, le problème reste largement ouvert. Je voudrais cependant mentionner l'approche géométrique très jolie de [2] ; je renvoie également à [12] pour une présentation agréable de ces problèmes.

2. PÉRIODES ET STRUCTURES DE HODGE

Définition 1 . Soit L un $\mathbb{Z}$-module de type fini. Une structure de Hodge de poids n sur L est une décomposition en somme directe de $L_{\mathbb{C}} = L \otimes \mathbb{C}$:

$$L_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}$$

telle que les sous-espaces (complexes) $H^{p,q}$ et $H^{q,p}$ soient conjugués.

On pose $h^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}$.

Exemple 1 . Soit X une variété kählérienne compacte ; la théorie de Hodge [25] fournit une décomposition $H^n(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}$, c'est-à-dire une structure de Hodge de poids n sur $H^n(X,\mathbb{Z})$.

Choisissons une base $\gamma_1,\dots,\gamma_b$ de $H_n(X,\mathbb{Z})$ modulo torsion et des bases $(\omega_\alpha^{pq})_{1\leq\alpha\leq h^{pq}}$ de $H^{p,q}$ (pour $p+q=n$). La donnée de la structure de Hodge sur $H^n(X,\mathbb{Z})$ est alors équivalente à celle des matrices de périodes $\Omega^{pq} = (\int_{\gamma_i} \omega_\alpha^{pq})$. En effet, l'espace de cohomologie de de Rham $H^n(X,\mathbb{C})$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(X,\mathbb{Z}),\mathbb{C})$ par l'application qui associe à la classe d'une forme ω la forme linéaire $\gamma \mapsto \int_\gamma \omega$; le choix de la base (γ_i) permet donc d'identifier $H^n(X,\mathbb{C})$ à $\mathbb{C}^b$ par l'application $\omega \mapsto (\int_{\gamma_i} \omega)$. Avec ces conventions, l'image dans $\mathbb{C}^b$ d'un élément de base ω_α^{pq} de H^{pq} est le vecteur $(\int_{\gamma_i} \omega_\alpha^{pq})_{1\leq i\leq b}$.

Ainsi la notion de structure de Hodge formalise, en dimension quelconque, la donnée des matrices des périodes. Les relations bilinéaires satisfaites par les périodes (n°1) se traduisent par l'existence de polarisations. La définition qui suit n'est pas tout à fait standard mais est bien adaptée au cas des surfaces K3.

Définition 2 . Une polarisation d'une structure de Hodge (L, H^{pq}) de poids n est une forme bilinéaire Q sur L, à valeurs entières, $(-1)^n$-symétrique, possédant les propriétés suivantes (on note encore Q l'extension $\mathbb{C}$-bilinéaire de Q à $L_{\mathbb{C}}$) :

a) $Q(H^{pq}, H^{rs}) = 0$ sauf si $p+r = q+s = n$;

b) $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} i^{p-q} Q(\omega, \bar{\omega}) > 0$ si $p \neq q$, $\omega \in H^{pq}$, $\omega \neq 0$.

Exemples . 2) Soit X une variété projective (lisse, connexe) de dimension d, et soit $\eta \in H^2(X, \mathbb{Z})$ la classe d'une section hyperplane. Pour $n \leq d$, soit P^n le sous-module de $H^n(X, \mathbb{Z})$ formé des classes α telles que $\alpha \cdot \eta^{d-n+1} = 0$ ("partie primitive" de $H^n(X, \mathbb{Z})$). Alors la structure de Hodge de $H^n(X, \mathbb{Z})$ induit une structure de Hodge sur P^n ; la forme $(\alpha, \beta) \mapsto \int_X \eta^{d-n} \alpha\beta$ définit une polarisation de cette structure de Hodge [25].

3) Soit X une variété kählérienne compacte connexe, de dimension n. On suppose qu'on a $H^{pq} = 0$ si $p \neq q$ et $p+q = n-2k$ $(k \geq 1)$: c'est le cas en particulier si X est une courbe, une surface, ou une intersection complète dans $\mathbb{P}^m$. Alors le cup-produit définit une polarisation de la structure de Hodge sur $H^n(X, \mathbb{Z})$ ([25]).

Reprenant les notations de l'exemple 1, soit Q la matrice d'intersection $(\gamma_i \cdot \gamma_j)$; la définition 2 se traduit par les formules

$$ {}^t\Omega^{pq}\, Q\, \Omega^{rs} = 0 \quad \text{sauf si } p+r = q+s = n \ ; $$

$$ (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} i^{p-q}\, {}^t\Omega^{pq}\, Q\, \bar{\Omega}^{pq} > 0 \quad \text{si } p \neq q,\ p+q = n \ . $$

4) Revenons au cas des courbes. Il résulte de ce qui précède que pour une courbe X, la donnée de la matrice des périodes $\varphi(X)$ dans H_g/Γ équivaut à celle de la structure de Hodge

$$ H^1(X, \mathbb{C}) = H^{1,0} \oplus H^{0,1} $$

muni de la polarisation définie par le cup-produit.

Il est facile de vérifier que cette donnée est encore équivalente à celle de la jacobienne de X, c'est-à-dire du tore complexe $H^{0,1}/H^1(X, \mathbb{Z})$, munie de la polarisation principale (ou "forme de Riemann") définie par la forme hermitienne positive $\omega \mapsto i\, Q(\omega, \bar{\omega})$ sur $H^{0,1}$. En géométrie algébrique, on associe à une telle polarisation un <u>diviseur thêta</u>. bien défini à translation près. La géométrie de ce diviseur (singularités, application de Gauss, ...) est très riche ; c'est elle qui permet de retrouver la courbe à partir de sa jacobienne, et ce de multiples façons : outre la démonstration originale de Torelli, citons [1], [24], [13], [18] ... On ne sait pas à l'heure actuelle associer un objet géométrique à une structure de Hodge de poids ≥ 2 ; c'est pourquoi le problème de Torelli paraît si difficile en dehors du cas des courbes.

3. <u>L'APPLICATION DES PÉRIODES</u>

Je vais me borner dans ce qui suit aux structures de Hodge de poids 2 ; l'extension au cas général n'est pas difficile.

Soient L un $\mathbb{Z}$-module de type fini, Q une forme bilinéaire symétrique sur L, à valeurs entières. Rappelons (n° 2) qu'une structure de Hodge sur L est une décomposition

$$L_{\mathbb{C}} = H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2} \quad , \quad \text{avec} \quad H^{0,2} = \overline{H^{2,0}} \quad \text{et} \quad H^{1,1} = \overline{H^{1,1}} \quad ;$$

la forme Q est une polarisation de cette structure de Hodge si $H^{2,0}$ (donc aussi $H^{0,2}$) est isotrope, si $H^{1,1}$ est orthogonal à $H^{2,0} \oplus H^{0,2}$ et si $Q(\omega,\bar{\omega}) > 0$ pour $\omega \in H^{2,0}$, $\omega \neq 0$.

<u>Proposition</u> 1 . <u>Les données suivantes sont équivalentes</u> :

a) <u>une structure de Hodge sur</u> L, <u>polarisée par</u> Q ;

b) <u>un sous-espace complexe</u> $H^{2,0}$ <u>de</u> $L_{\mathbb{C}}$, <u>totalement isotrope pour</u> Q, <u>et tel que</u> $Q(\omega,\bar{\omega}) > 0$ <u>pour</u> $\omega \in H^{2,0}$, $\omega \neq 0$.

En effet si un sous-espace $H^{2,0}$ de $L_{\mathbb{C}}$ satisfait à b), on vérifie facilement que $H^{2,0}$ et $\overline{H^{2,0}}$ sont en somme directe et que la restriction de Q à $H^{2,0} \oplus \overline{H^{2,0}}$ est séparante. On détermine donc une structure de Hodge sur L en posant $H^{0,2} = \overline{H^{2,0}}$ et $H^{1,1} = (H^{2,0} \oplus H^{0,2})^{\perp}$.

Considérons la grassmannienne G formée des sous-espaces H de $L_{\mathbb{C}}$ totalement isotropes, de dimension $h^{2,0}$; c'est une variété projective lisse. Soit G^{+} l'ouvert de G défini par la condition $Q(\omega,\bar{\omega}) > 0$ pour $\omega \in H$, $\omega \neq 0$. Il résulte de la Proposition 1 que G^{+} paramètre l'ensemble des structures de Hodge de poids deux sur L, polarisées par Q, de nombres de Hodge h^{pq} fixés : c'est le domaine des périodes de la situation considérée. C'est un espace homogène sous le groupe $\mathrm{Aut}(L_{\mathbb{R}}, Q)$.

Dans le cas général (structures de poids n), on obtient de même comme domaine des périodes un ouvert d'une variété de drapeaux, qui est un espace homogène sous un groupe orthogonal ou symplectique réel.

Soit X_o une surface kählérienne compacte, et soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de surfaces kählériennes difféomorphes à X_o. Notons L le $\mathbb{Z}$-module $H^2(X_o, \mathbb{Z})$, muni de la forme quadratique Q définie par le cup-produit. Appelons <u>surface marquée</u> (X,u) une surface X munie d'un isomorphisme $u : H^2(X,\mathbb{Z}) \to L$ respectant le cup-produit. Soit $\widetilde{\mathcal{M}}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de surfaces marquées (X,u), avec $X \in \mathcal{M}$; l'application des périodes $\widetilde{\varphi} : \widetilde{\mathcal{M}} \to G^+$ associe à (X,u) le sous-espace $u_{\mathbb{C}}(H^{2,0})$ de $L_{\mathbb{C}}$. On a comme au n° 1 un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{M}} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d] & G^+ \arrow[d] \\ \mathcal{M} \arrow[r, "\varphi"] & G^+/\Gamma \end{tikzcd} ,$$

où Γ est le groupe d'automorphismes du $\mathbb{Z}$-module quadratique L.

Indiquons une variante de cette construction dans le cadre algébrique. On dit qu'un diviseur D sur une surface X est <u>presque ample</u> si on a $D^2 > 0$ et $D \cdot C \geq 0$ pour toute courbe C sur X ; on appelle <u>pseudo-polarisation</u> (resp. <u>polarisation</u>) sur X la classe dans $H^2(X,\mathbb{Z})$ d'un diviseur presque ample (resp.ample). Soit $q \in L$; on note $\widetilde{\mathcal{M}}_q$ (resp. $\widetilde{\mathcal{M}}_q^o$) le sous-ensemble de $\widetilde{\mathcal{M}}$ formé des (X,u) tels que $u^{-1}(q)$ soit une pseudo-polarisation (resp. une polarisation) de X . Une pseudo-polarisation est de type (1,1) (Lefschetz), donc orthogonale à $H^{2,0}$; par conséquent $\widetilde{\varphi}$ induit une application $\widetilde{\varphi}_q$ de $\widetilde{\mathcal{M}}_q$ dans la sous-variété G_q^+ de G^+ formée des sous-espaces H de $L_{\mathbb{C}}$ qui sont orthogonaux à q.

Soit Γ_q le sous-groupe de Γ formé des automorphismes qui préservent q le quotient $\mathcal{M}_q = \widetilde{\mathcal{M}}_q / \Gamma_q$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme de surfaces de $\mathcal{M}$ pseudo-polarisées (de type q). On a un diagramme

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{M}}_q \arrow[r, "\widetilde{\varphi}_q"] \arrow[d] & G_q^+ \arrow[d] \\ \mathcal{M}_q \arrow[r, "\varphi_q"] & G_q^+/\Gamma_q \end{tikzcd} .$$

Les ensembles $\widetilde{\mathcal{M}}_q$ et $\mathcal{M}_q$ ont des structures naturelles d'espaces analytiques, pour lesquelles $\widetilde{\varphi}_q$ et φ_q sont analytiques (un multiple convenable de la pseudo-polarisation définit un morphisme birationnel de X sur une surface $X' \subset \mathbb{P}^N$; on prend pour $\mathcal{M}_q$ le schéma de Hilbert de X' modulo $PG\ell(N+1)$).

Le <u>problème de Torelli</u> est la question de l'injectivité de φ (ou φ_q) : autrement dit, la structure de Hodge (polarisée) détermine-t-elle la variété ? On notera que l'injectivité de $\widetilde{\varphi}$ (ou $\widetilde{\varphi}_q$) est une assertion plus forte (souvent appelée "théorème de Torelli fort") : étant donnés X, Y dans $\mathcal{M}$, un isomorphisme de $H^2(Y,\mathbb{Z})$ sur $H^2(X,\mathbb{Z})$ respectant le cup-produit et la décomposition de Hodge est-il induit par un isomorphisme de X sur Y ?

Le problème de Schottky (déterminer l'image de φ ou $\widetilde{\varphi}$) paraît tout-à-fait inaccessible à l'heure actuelle , sauf s'il s'agit de montrer que l'application des périodes est surjective. C'est un cas très particulier : la dimension du domaine des périodes est en général beaucoup plus grande que celle de l'espace des modules. Il se trouve que ces dimensions sont égales pour certains types très particuliers de surfaces, comme les surfaces K3.

4. <u>SURFACES</u> K3

Les surfaces K3 sont les surfaces complexes (compactes) simplement connexes qui admettent une 2-forme holomorphe partout nulle. On verra plus loin qu'elles ont des propriétés remarquables qui en font des candidats naturels pour l'étude des périodes. Contentons-nous de noter leurs nombres de Hodge :

$$h^{2,0} = h^{0,2} = 1 \quad , \quad h^{1,1} = 20 \quad .$$

Avec les notations du n°3, le domaine des périodes G^+ (que nous noterons Ω) est particulièrement simple : la grassmannienne G est une hyperquadrique complexe dans $\mathbb{P}(L_{\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{P}^{21}$, et Ω est l'ensemble des droites $\mathbb{C}\alpha$ où $\alpha \in L_{\mathbb{C}}$, $Q(\alpha,\alpha) = 0$, $Q(\alpha,\bar{\alpha}) > 0$. Si $q \in L$, la sous-variété $\Omega_q = G_q^+$ de Ω est définie par la relation supplémentaire $Q(\alpha,q) = 0$.

Si (X,u) est une surface K3 marquée, $\widetilde{\varphi}(X,u)$ est la classe dans $\mathbb{P}(L_{\mathbb{C}})$ de $u(\omega)$, où ω est une 2-forme holomorphe non nulle de X. Si l'on fixe une base $(e_1,\dots,e_{22})$ de L, et si l'on identifie $H_2(X,\mathbb{Z})$ à $H^2(X,\mathbb{Z})$ par dualité de Poincaré, on a aussi

$$\tilde{\varphi}(X,u) = \left(\int_{u^{-1}(e_1)} \omega, \dots, \int_{u^{-1}(e_{22})} \omega\right) .$$

Les surfaces K3 n'ayant pas de polarisation naturelle, il y a lieu de distinguer deux cadres pour l'application des périodes. Dans le cadre algébrique, soit q un élément de L, avec $Q(q,q) > 0$. Considérons le diagramme (n° 3)

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{M}}_q & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_q} & \Omega_q \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}_q & \xrightarrow{\varphi_q} & \Omega_q/\Gamma_q \end{array} .$$

<u>Théorème</u> 1 . <u>Les applications</u> φ_q <u>et</u> $\tilde{\varphi}_q$ <u>sont surjectives</u> ; φ_q <u>est injective, ainsi que la restriction de</u> φ_q <u>à</u> $\mathcal{M}_q^o$.

L'injectivité a été démontrée par Chafarevitch et Piatecki-Chapiro [6] , la surjectivité par Kulikov [11], dont la démonstration peu claire a été précisée par Persson et Pinkham [15]. La surjectivité résulte aussi du théorème de Todorov qui sera exposé plus loin.

Dans le cadre kählérien, on considère le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{M}} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \Omega \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{\varphi} & \Omega/\Gamma \end{array} .$$

<u>Théorème</u> 2 . <u>Les applications</u> φ <u>et</u> $\tilde{\varphi}$ <u>sont surjectives</u> ; φ <u>est bijective</u>.

La première assertion est le théorème de Todorov ([19], [21]). La seconde est démontrée dans [3], à partir des résultats de [6] . L'application $\tilde{\varphi}$ n'est pas bijective, mais Burns et Rappoport mesurent exactement son défaut d'injectivité ; nous y reviendrons plus loin.

On peut donc dire que les propriétés de l'application des périodes sont bien comprises pour les surfaces K3. En dehors de ce cas très particulier, la situation n'est guère brillante. Mentionnons :

- le théorème de Torelli pour l'hypersurface cubique dans $\mathbb{P}^4$ [7] .

Dans ce cas la structure de Hodge est en fait de poids un, donc justiciable des méthodes de la théorie des courbes. On peut espérer un résultat analogue pour toutes les "variétés de Fano" (variétés de dimension 3 dont le fibré anticanonique est ample).

- les surfaces (minimales) avec $K^2 = p_g = 1$, étudiées dans [4], [20], [23]. Ces surfaces sont simplement connexes ; leur domaine de périodes a même dimension que leur espace de modules. L'application des périodes est <u>génériquement finie de degré</u> > 1, et certaines de ses fibres sont de dimension 2.

- enfin l'étude par Griffiths et son école des <u>variations infinitésimales</u> de structures de Hodge, entamée dans [5], a conduit à des résultats profonds et en particulier à la démonstration par R. Donagi du théorème de Torelli générique pour toutes les hypersurfaces - à un petit nombre d'exceptions près. Ces résultats sont exposés dans Compositio Mathematica 50 (1983), p.109-353.

* * *

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Andreotti : On a theorem of Torelli, Amer. J. of Math. 80 (1958), 801-828.

[2] A. Andreotti et A. Mayer : On period relations for abelian integrals on algebraic curves, Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa 21 (1967), 189-238.

[3] D. Burns et M. Rapoport : On the Torelli problems for kählerian K3 surfaces, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. Paris 8 (1975), 235-274.

[4] F. Catanese : The moduli and global period mapping of surfaces with $K^2 = p_g = 1$: A counterexample to the global Torelli problem, Compositio Math. 41 (1980), 401-414.

[5] J. Carlson et P. Griffiths : Infinitesimal variations of Hodge structure and the global Torelli problem, Journées de géométrie algébrique d'Angers, Sijthoff et Noordhoff (1980), 51-76.

[6] I. Chafarevitch et I. Piatecki-Chapiro : A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3, Math. USSR Izvestia 5 (1971), 547-588.

[7] H. Clemens et P. Griffiths : The intermediate Jacobian of the cubic threefold, Ann. of Math. 95 (1972), 281-356.

[8] A. Grothendieck : Construction de l'espace de Teichmüller, Exposé n° 10 du Séminaire Cartan 1960/61.

[9] C. Houzel : Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes, Abrégé d'histoire des Mathématiques 1700-1900 (dir. J. Dieudonné), Hermann, Paris (1978).

[10] J. Igusa : On the irreducibility of Schottky's divisor, Journal Fac. Sci. Univ. Tokyo 28 (1981) 531-545 .

[11] V. Kulikov : Degenerations of K3 surfaces and Enriques surfaces, Math. USSR Izvestia 11 (1977), 957-989.

[12] D. Mumford : Curves and their Jacobians, Univ. of Michigan Press, Ann Arbor (1975).

[13] H. Martens : A new proof of Torelli's theorem, Ann. of Math. 78 (1963), 107-111.

[14] F. Oort et J. Steenbrink : The local Torelli problem for algebraic curves, Journées de géométrie algébrique d'Angers, Sijthoff et Noordhoff (1980), 157-204.

[15] U. Persson et H. Pinkham : Degeneration of surfaces with trivial canonical bundle, Ann. of Math. 113 (1981), 45-66.

[16] B. Riemann : Theorie der Abelschen Funktionen, Journal de Crelle 54 (1857).

[17] F. Schottky : Zur Theorie der Abelschen Funktionen von vier Variabeln, Journal de Crelle 102 (1888), 304-352.

[18] B. Saint-Donat : Variétés de translation et théorème de Torelli, Note aux C. R. Acad. Sc. Paris, t. 280 (Mai 1975), 1611-1612.

[19] Y.T. Siu : A simple proof of the surjectivity of the period map of K3 surfaces, Manuscripta Math. 35 (1981), 311-321.

[20] A. Todorov : Surfaces of general type with $p_g = 1$ and $(K,K) = 1$, Ann. E.N.S. 13 (1980), 1-21.

[21] A. Todorov : Applications of the Kähler-Einstein-Calabi-Yau metric to moduli of K3 surfaces, Inventiones math. 61 (1980), 251-265.

[22] R. Torelli : Sulle Varietà di Jacobi, Atti Accad Lincei Rend. Cl. Sc. fis. mat., 5ème série 22 (1913), 98-103.

[23] S. Usui : Period map of surfaces with $p_g = c_1^2 = 1$ and K ample, Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. 2 (1980), 37-73.

[24] A. Weil : Zum Beweis des Torellischen Satzes, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math . Phys. Kl. 2 (1957), 33-53.

[25] A. Weil : Variétés kählériennes, Hermann, Paris (1958).

Bâtiment de Mathématiques 425
Université de Paris-Sud
ERA du CNRS n°653
91405 ORSAY CEDEX (France)