Astérisque

JOSEPH LE POTIER

Simple connexité des surfaces $K3$

Astérisque, tome 126 (1985), p. 79-89
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__126__79_0>

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

EXPOSÉ VI

SIMPLE CONNEXITÉ DES SURFACES K3

Joseph LE POTIER

On prouve dans cet exposé que les surfaces K3 sont difféomorphes entre elles, et simplement connexes. Cet énoncé sera obtenu plus loin (indépendamment) comme conséquence de la théorie des périodes ; mais on montre ici qu'il résulte de manière élémentaire de l'exposé précédent (théorème de Torelli local).

1. INTRODUCTION

Soit L un groupe abélien libre de rang 22, muni d'une forme quadratique entière de discriminant -1, paire et de signature (3,19). On note $(u,v) \mapsto u.v$ la forme bilinéaire symétrique associée, ainsi que son prolongement à l'espace vectoriel $L_{\mathbb{C}} = L \otimes \mathbb{C}$.

On désigne par $K_{20} \subset \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}})$ la quadrique des droites isotropes de $L_{\mathbb{C}}$, et par Ω l'ouvert de K_{20} défini par

$$z.\bar{z} > 0 \quad , \quad \text{où } z \in L_{\mathbb{C}} \text{ représente un point de } K_{20} .$$

Si X est une surface K3, on sait que le groupe abélien $H^2(X,\mathbb{Z})$ muni de la forme intersection est isomorphe à L.

<u>Définition</u> 1 . Une <u>surface</u> K3 <u>marquée</u> est un couple (X,σ), où X est une surface K3, et $\sigma : H^2(X,\mathbb{Z}) \to L$ un isomorphisme préservant les formes quadratiques.

Si (X,σ) est une surface K3 marquée, l'espace vectoriel $\Omega^2(X)$ des 2-formes holomorphes sur X est une droite isotrope de l'espace vectoriel $H^2(X,\mathbb{C})$; l'image de cette droite par l'isomorphisme associé à σ

$$H^2(X,\mathbb{C}) \longrightarrow L_{\mathbb{C}}$$

est un point $z = \mathfrak{P}(X,\sigma)$ de l'ouvert Ω de la quadrique K_{20}, appelé <u>période de</u> (X,σ). On a ainsi défini une application, appelée application des périodes :

$$\mathfrak{P} : \widetilde{\mathfrak{M}} \longrightarrow \Omega$$

de l'ensemble $\widetilde{\mathfrak{M}}$ des classes d'isomorphisme de surfaces K3 marquées, et à valeurs dans Ω. On sait que l'image de $\mathfrak{P}$ est un ouvert ; en outre, on sait qu'il existe un recouvrement de $\operatorname{Im}\mathfrak{P}$ par des ouverts U pour lesquels existe une surface K3 marquée universelle : on entend par là un morphisme propre et lisse

$$f : X \longrightarrow U$$

muni d'une trivialisation $U \times L \simeq R^2 f_*(\mathbb{Z})$, tel que pour tout $z \in U$, la fibre $X(z)$ au-dessus du point z soit une surface K3 marquée de période z (cf. Exposé V).

<u>Définition</u> 2 . Soit g un entier. On dira qu'une surface K3 est <u>spéciale de type</u> g si son groupe de Picard Pic(X) est un groupe cyclique engendré par un élément L tel que $(L.L) = 2g - 2$.

La simple-connexité des surfaces K3 est une conséquence des deux théorèmes suivants :

<u>Théorème</u> 1 . <u>L'ensemble des périodes des surfaces</u> K3 <u>marquées</u>, <u>spéciales de type</u> g , <u>est dense dans</u> $\operatorname{Im}\mathfrak{P}$.

<u>Théorème</u> 2 . <u>Une surface</u> K3 <u>spéciale de type</u> 3 <u>est isomorphe à une surface de degré</u> 4 <u>dans</u> $\mathbb{P}_3$.

Une surface K3 marquée (X,σ) s'insère dans une famille de surfaces K3 marquées, paramétrée par un ouvert $U \subset \Omega$ qu'on peut supposer connexe. D'après le Théorème 1, il existe dans cette famille une surface K3 spéciale de type 3 : la surface X est donc difféomorphe à une surface de degré 4 dans $\mathbb{P}_3$. Les surfaces lisses de degré 4 dans $\mathbb{P}_3$ constituent une famille algébrique paramétrée par un ouvert de Zariski de $\mathbb{P}_{34} = \mathbb{P}(\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(4)))$, obligatoirement connexe. Ainsi :

__Corollaire__ 1 . __Les surfaces__ K3 __sont difféomorphes entr'elles__.

On verra au paragraphe 2 que les surfaces algébriques lisses plongées dans $\mathbb{P}_3$ sont simplement connexes. Par suite :

__Corollaire__ 2 __Les surfaces__ K3 __sont simplement connexes__.

2 SIMPLE CONNEXITÉ

__Proposition__ 1 . __Les surfaces algébriques lisses plongées dans__ $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ __sont simplement connexes__.

La démonstration repose sur le théorème de Lefschetz en homotopie :

__Théorème__ . __Soient__ M __une variété analytique complexe compacte de dimension__ n, $L \to M$ __un fibré vectoriel holomorphe de rang__ 1 __positif__, X __le lieu des zéros d'une section__ f __de__ L __transverse à la section nulle__. __Alors__

$$\pi_i(M,X) = 0 \quad \text{pour } i < n \ .$$

Démonstration : Soit $|\ |^2$ une métrique hermitienne sur L dont la forme de courbure ω soit positive non dégénérée. Considérons sur $M - X$ la fonction : $\varphi = \mathrm{Log}\ |f|^2$. On a

$$i\, d''\, d'\ \mathrm{Log}\ |f|^2 = \omega\ |f|^2 \quad .$$

La fonction φ a pour forme quadratique de Levi $L(\varphi) : TM \to \mathbb{R}$

$$t \mapsto i\, d'\, d'' \varphi\,(t \wedge it) = -K(t)\ |f|^2$$

où K est la forme quadratique associée à ω ; par hypothèse, elle est positive non dégénérée en tout point de M. Soit $x \in M - X$ un point critique de φ. Si $(z_1, .. , z_n)$ sont des coordonnées au voisinage de x, on a pour $t \in T_x M$

$$D^2\varphi(x,t) = 2\, \mathcal{R}e\ \Big(\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\alpha \partial z_\beta}\ t^\alpha\ t^\beta \Big) + L(\varphi, x)t \quad .$$

On voit donc que $D^2\varphi(x)$ a pour signature (p,q), avec $q \geq n$. La théorie de Morse appliquée à une fonction de Morse voisine de φ (pour la topologie de la convergence uniforme au sens C^2 sur tout compact) montre que du point de vue homotopique, M s'obtient à partir de X en ajoutant un nombre fini de cellules de dimension $\geq n$. D'où le résultat. □

Démonstration de la Proposition 1 : On applique le théorème avec $M = \mathbb{P}_3$, $L = \mathcal{O}(d)$, et f un polynôme homogène de degré d dont le lieu des zéros est une surface lisse X de $\mathbb{P}_3$. On a la suite exacte

$$\begin{array}{ccccc} \pi_2(\mathbb{P}_3, X) & \longrightarrow & \pi_1(X) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{P}_3) \\ \| & & & & \| \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

Par suite, $\pi_1(X) = 0$.

La même démonstration montre plus généralement que pour une hypersurface lisse $X \subset \mathbb{P}_{n+1}$:

$$\pi_i(X) = \pi_i(\mathbb{P}_{n+1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } i = 2 \\ 0 & \text{si } 2 < i < n \end{cases} \quad .$$

3 DENSITÉ DES PÉRIODES DES SURFACES K3 SPÉCIALES

Soit g un entier.

Proposition 2 . Soit U un ouvert non vide de K_{20}. On peut trouver $\beta \in L$ non divisible tel que

(1) $\beta \cdot \beta = 2g-2$,

(2) l'hyperplan de $\mathbb{P}_{21} = \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}})$ d'équation $\beta \cdot z = 0$ rencontre U.

Lemme 1 . Soit Q la quadrique de $\mathbb{P}_{21}(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(L_{\mathbb{R}})$ des droites isotropes. Si V est un ouvert de $\mathbb{P}_{21}(\mathbb{R})$ rencontrant Q, V contient des points (β), avec $\beta \in L$ non divisible et tel que $\beta \cdot \beta = 2g-2$.

Démonstration . Soit B l'ensemble des $\beta \in L$ tels que $\beta \cdot \beta = 2g-2$, et non divisibles. Cet ensemble est infini. Soient (B) son image dans $\mathbb{P}_{21}(\mathbb{R})$, et F l'ensemble des points d'accumulation de (B). C'est un fermé non vide contenu dans Q, stable sous le groupe orthogonal Aut L. On va montrer que $F = Q$, ce qui démontrera le lemme.

Ceci résulte de l'énoncé suivant :

Lemme 2 . (1) L'image dans Q de l'ensemble des vecteurs isotropes de L est partout dense dans Q.

(2) Les orbites de Aut L dans Q sont partout denses.

Démonstration . On sait ([2], Chapitre 5) qu'il existe des vecteurs isotropes a et $b \in L$ tels que $a.b = 1$. Soit $L' = (a,b)^{\perp}$; on a

$$L = (a,b) \oplus L' \quad .$$

(1) Un point $\alpha \in L_{\mathbb{R}}$ s'écrit

$$\alpha = xa + yb + t \quad \text{avec } x,y \in \mathbb{R}, \quad \text{et } t \in L'_{\mathbb{R}} \quad .$$

La quadrique Q est définie par l'équation $xy + t.t = 0$. L'ouvert de Q défini par $y \neq 0$ est partout dense dans Q, et isomorphe à la quadrique affine Q_1 de $\mathbb{R} \times L'_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^{21}$ définie par les couples (x,t) satisfaisant à l'équation

$$x + t \cdot t = 0 \quad .$$

Les images des vecteurs isotropes de L correspondent aux points de Q_1 tels que $x \in \mathbb{Q}$ et $t \in L'_{\mathbb{Q}}$. Puisque Q_1 est le graphe d'un polynôme $L'_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ entier sur L', ces points sont bien partout denses.

(2) Soient $\alpha \in L_{\mathbb{R}}$ un vecteur isotrope non nul, (α) son image dans Q, A son orbite sous le groupe Aut L. On va montrer que l'adhérence $\overline{A}$ contient les images de tous les vecteurs isotropes $a \in L$ tels que $\alpha \cdot a \neq 0$. Ces images forment un ensemble partout dense dans Q d'après (1) ; on aura bien $\overline{A} = Q$.

On peut supposer a non divisible ; il existe alors $b \in L$ isotrope et tel que $a \cdot b = 1$. On pose comme ci-dessus $(a,b)^{\perp} = L'$; le point (α) peut être vu comme un point (x,t) de la quadrique affine $Q_1 \subset \mathbb{R} \times L'_{\mathbb{R}}$ considérée ci-dessus.

Or, le stabilisateur $G_a \subset \operatorname{Aut} L$ de a est isomorphe au groupe des déplacements de $L' : t \mapsto gt + v$, où $g \in \operatorname{Aut} L'$, $v \in L'$. Il contient en particulier les translations $\tau_v : t \mapsto t + v$. On a

$$\tau_v(x,t) = (x - 2v \cdot t - v \cdot v\ ,\ t + v) \quad .$$

Il en résulte que si l'on choisit v non isotrope, on aura dans Q

$$\lim_{k \to \infty} \tau_v^k(x,t) = (a)$$

et par suite $(a) \in \overline{A}$. D'où le Lemme 2. □

<u>Démonstration de la proposition</u> 2 : Soient $(z) \in K_{20}$, $x = \Re e\, z$, $y = \Im m\, z$. L'orthogonal dans $L_{\mathbb{R}}$ du sous-espace (x,y) est un sous-espace vectoriel de dimension ≥ 20. Ce sous-espace a pour signature (p,q), avec $p \leq 3$, $q \leq 19$. Par suite, il existe $\alpha \in L_{\mathbb{R}}$, non nul, tel que $\alpha \cdot \alpha = 0$ et $\alpha \cdot z = 0$.

Soit U un ouvert non vide de K_{20}. Considérons l'espace Σ des couples $((\alpha),(z))$, où $(\alpha) \in \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}})$, $(z) \in K_{20}$, tels que $\alpha \cdot z = 0$. On a un diagramme

$$\begin{tikzcd} & \Sigma \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"'] & K_{20} \\ \mathbb{P}(L_{\mathbb{R}}) \arrow[r] & \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}}) = \mathbb{P}_{21}(\mathbb{C}) & \end{tikzcd}$$

Le morphisme pr_1 est plat, donc ouvert. Par suite, $V = pr_1(pr_2^{-1}(U))$ est un ouvert de $\mathbb{P}_{21}(\mathbb{C})$, dont l'image réciproque dans $\mathbb{P}(L_{\mathbb{R}})$ rencontre la quadrique

Q des droites isotropes. D'après le Lemme 1, il existe $\beta \in L$ non divisible tel que

(1) $\beta \cdot \beta = 2g-2$

(2) $(\beta) \in V$.

L'assertion (2) signifie qu'il existe $(z) \in U$ tel que $\beta \cdot z = 0$. D'où la proposition. □

Démonstration du Théorème 1 : Pour tout sous-groupe $G \subset L$ de rang d, l'orthogonal $G^{\perp}$ de G dans $L_{\mathbb{C}}$ définit un sous-espace $\mathbb{P}(G^{\perp})$ de $\mathbb{P}(L_{\mathbb{C}})$ de codimension d ; soit $\Sigma(G) = \mathbb{P}(G^{\perp}) \cap K_{20}$. La codimension de $\Sigma(G)$ dans K_{20} est soit d si $\Sigma(G)$ est une quadrique, soit d-1 si $G^{\perp}$ est totalement isotrope (ce qui implique $d \geq 11$).

Soit U un ouvert non vide de $\mathrm{Im}\,\mathfrak{P}$. D'après la proposition 2, il existe $\beta \in L$, non divisible, tel que $\beta \cdot \beta = 2g-2$ et $\Sigma(\beta) \cap U \neq \emptyset$. Considérons l'ensemble $\mathcal{G}_{\beta}$ de tous les sous-groupes G de L, qui contiennent β, et non réduits à $\beta\mathbb{Z}$. Un tel sous-groupe est de rang ≥ 2, et $\mathcal{G}_{\beta}$ est dénombrable. Par suite

$$\bigcup_{G \in \mathcal{G}_{\beta}} \Sigma(G) \not\supset \Sigma(\beta) \cap U .$$

Considérons un élément $(z) \in \Sigma(\beta) \cap U - \bigcup_{G \in \mathcal{G}_{\beta}} \Sigma(G)$. Cet élément est la période d'une surface K3 marquée (X,σ), dont le groupe de Picard est isomorphe au noyau de l'application canonique

$$L \simeq H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{0,2}(X)$$

et par suite $\mathrm{Pic}(X) \simeq \{\gamma \in H,\ \gamma \cdot z = 0\}$. Vu le choix de z, on a $\beta \in \mathrm{Pic}(X)$, et $\mathrm{Pic}(X) \notin \mathcal{G}_{\beta}$. Donc $\mathrm{Pic}(X) = \beta\mathbb{Z}$. Ainsi, X est spéciale de type g.

Remarque : On peut montrer de manière analogue que, si d est un entier, $0 \leq d \leq 20$, les périodes des surfaces K3 marquées (X,σ) telles que le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(X)$ soit de rang d sont denses dans $\mathrm{Im}\,\mathfrak{P}$.

4 . SURFACES K3 SPÉCIALES DE TYPE 3

Soient X une surface K3 spéciale de type 3, L un générateur de Pic (X). D'après le théorème de Riemann-Roch, l'un des deux fibrés L, L^* a des sections non nulles ; on peut supposer qu'il s'agit de L. On a alors $h^2(L) = 0$, et par suite

$$h^0(L) - h^1(L) = 2 + \frac{L.L}{2} = 4 \quad .$$

<u>Lemme</u> 3 . <u>Le fibré</u> L <u>est engendré par ses sections</u>.

<u>Démonstration</u> : Soit s une section non nulle de L. Cette section s définit une courbe Y qui est obligatoirement irréductible et réduite puisque L est un générateur de $\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$. Considérons le fibré canonique sur Y

$$\begin{aligned} \omega_Y = \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathcal{O}_Y, \omega_X) &= \omega_X \otimes L_{|Y} \\ &= L_{|Y} \quad \text{(puisque } \omega_X \text{ est trivial)} \quad . \end{aligned}$$

La courbe Y est de genre $g = h^1(\mathcal{O}_Y) = 3$.
Compte-tenu de la suite exacte

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma(L) & \longrightarrow & \Gamma(L_{|Y}) & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{O}) \\ & & & & \| \\ & & & & 0 \end{array}$$

on est ramené à prouver le lemme suivant :

<u>Lemme</u> 4 . <u>Soit</u> Y <u>une courbe irréductible et réduite</u>, <u>de genre</u> $g \geq 1$, <u>sur une surface compacte</u> M. <u>Alors le fibré</u> $\omega_Y = \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathcal{O}_Y, \omega_M)$ <u>est engendré par ses sections</u>.

<u>Démonstration</u> : Si Y est lisse, pour tout $a \in Y$, on a par dualité de Serre

$$h^1(\omega_Y(-a)) = h^0(\mathcal{O}_Y(a)) = 1$$

puisque Y est de genre $g > 0$. Dans la suite exacte associée au point a

$$\begin{array}{ccccccccc} H^0(\omega_Y) & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & H^1(\omega_Y(-a)) & \longrightarrow & H^1(\omega_Y) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \| & & \| & & \\ & & & & \mathbb{C} & & \mathbb{C} & & \end{array}$$

la dernière flèche est un isomorphisme et donc la première flèche est surjective. Ceci signifie que ω_Y est engendré par ses sections en a.

Lorsque Y est singulière, la même démonstration montre que ω_Y est engendré par ses sections aux points où Y est lisse. Si a est un point singulier de multiplicité ℓ, soient M' l'éclaté de M en a, Y' la courbe transformée stricte de Y, E le fibré associé au diviseur exceptionnel, L(Y) et L(Y') les fibrés définis par Y et Y' sur M et M' respectivement. On a les formules suivantes, où $f : M' \to M$ désigne la projection :

(1) $$L(Y') = f^*(L(Y)) \otimes E^{\otimes -\ell}$$

(2) $$\omega_{M'} = f^*(\omega_M) \otimes E$$

(3) $$\omega_{Y'} = f^*(\omega_Y) \otimes (E^{\otimes 1-\ell}{}_{|Y'})$$

(4) $$f_*(E^{\otimes 1-\ell}{}_{|Y'}) = m_a^{\ell-1} \quad ,$$

où m_a est l'idéal de $\mathcal{O}_Y$ défini par a. Les formules (1) et (2) sont classiques (cf. [1] , Chapitre 2). La formule (3) est une conséquence de (1) et (2) et de la définition de $\omega_{Y'}$ et ω_Y. Pour vérifier (4), on remarque que le morphisme injectif canonique

$$m_a^{\ell-1} \longrightarrow f_*(E^{\otimes 1-\ell}{}_{|Y'})$$

est aussi surjectif : en effet, si U est une boule centrée en a dans M, on a

$$H^1(f^{-1}(U),E) = H^1(\mathbb{P}_1,\mathcal{O}(-1)) = 0 \quad .$$

Sur U, le fibré L(Y) est trivial. La suite exacte sur M'

$$0 \longrightarrow E \otimes L(-Y) \longrightarrow E^{\otimes 1-\ell} \longrightarrow E^{\otimes 1-\ell}{}_{|Y'} \longrightarrow 0$$

donne par restriction à $f^{-1}(U)$ le morphisme surjectif

$$\Gamma(f^{-1}(U),E^{\otimes 1-\ell}) \longrightarrow \Gamma(f^{-1}(U) \cap Y',E^{\otimes 1-\ell})$$

d'où la surjection au voisinage de a. C'est évident aux autres points. Il résulte de (3) et (4)

(5) $$f_*(\omega_{Y'}) = m_a^{\ell-1}\, \omega_Y \quad .$$

On a alors $h^1(m_a^{\ell-1}\omega_Y) = h^1(\omega_{Y'}) = 1$. Il en résulte que le morphisme surjectif $H^1(m_a^{\ell-1}\omega_Y) \to H^1(\omega_Y)$ est un isomorphisme. A fortiori, puisque $\ell \geq 2$, le morphisme $H^1(m_a\omega_Y) \to H^1(\omega_Y)$ est aussi un isomorphisme, et, par suite ω_Y est engendré par ses sections au point a.

Conséquence 1 : Le fibré L a une section transverse à la section nulle.

Démonstration : Soit Z la sous-variété lisse de $X \times \Gamma(L) - \{0\}$ des couples (x,s) tels que $s(x) = 0$. D'après le théorème de Bertini-Sard, les valeurs critiques du morphisme $(x,s) \mapsto s : Z \to \Gamma(L) - \{0\}$ forment un ensemble analytique strict ; en particulier, il existe une section non nulle de L dont le lieu des zéros Y est lisse.

Conséquence 2 : Le fibré L est ample.

Démonstration : On considère le morphisme défini par L

$$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}^{\cdot}(\Gamma(L))$$

à valeurs dans l'espace projectif des hyperplans de $\Gamma(L)$, et tel que $\varphi^*\mathcal{O}(1) = L$. Ce morphisme est obligatoirement fini : sinon il existerait une courbe sur laquelle L serait trivial. Mais ceci contredit le fait que L engendre Pic (X) et $L.L = 4$.

Conséquence 3 : On a $h^1(L) = 0$.

Démonstration : Il suffit d'appliquer le "precise vanishing theorem" de Kodaira, compte tenu du fait que ω_X est trivial, ou bien d'écrire la suite exacte $0 \to \mathcal{O}_X \to L \to L_{|Y} \to 0$ relative à l'une des courbes Y associées à L.

Fin de la démonstration du Théorème 2 : On a $h^0(L) = 4$. Ainsi, le fibré L définit un morphisme fini

$$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}_3$$

sur une sous-variété algébrique irréductible $X' \subset \mathbb{P}_3$. On a la formule

$$(\text{degré } X') . (\text{degré } \varphi) = (L.L) = 4 \quad .$$

Soit s une section de L transverse à la section nulle, dont le lieu des zéros est une courbe lisse $Y \subset X$. La section s provient d'une section de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(1)$, qui définit un plan $\mathbb{P}_2$; au-dessus de $\mathbb{P}_2$, φ s'identifie au morphisme canonique

$$\varphi_Y : Y \longrightarrow \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}^{\cdot}(\Gamma(L)/(s))$$

associé au fibré $L_{|Y} = \omega_Y$.

(1) Si Y n'est pas hyperelliptique, on a degré $\varphi = 1$, et degré $X' = 4$. Ainsi, φ est un isomorphisme sur une surface de degré 4.

(2) Si Y est hyperelliptique, on a degré $\varphi = 2$, et X' est une quadrique irréductible. Si X' est lisse, $X \simeq \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$, et $\mathrm{Pic}(X') = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, avec pour générateurs les fibrés $\mathcal{O}(1,0)$ et $\mathcal{O}(0,1)$. Dans Pic (X'), on a $\mathcal{O}(1)_{|X'} = \mathcal{O}(1,0) \otimes \mathcal{O}(0,1)$, et par suite $\varphi^* \mathcal{O}(1) = L^{\otimes m}$, avec $m \geq 2$. Ceci contredit le fait que L engendre Pic (X).

Si X' est singulière, c'est un cône de sommet s. On a alors

$$\mathrm{Pic}(X' - \{s\}) \simeq \mathbb{Z}$$

avec pour générateur le fibré $L(\gamma)$ associé à une génératrice γ du cône. On a encore $\mathcal{O}(1)_{|X'-\{s\}} = L(2\gamma)$, et par suite $\varphi^*(\mathcal{O}(1)) = L^{\otimes 2m}$, avec $m > 0$. On aboutit à nouveau à une contradiction.

La courbe Y n'est donc pas hyperelliptique. □

****

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Beauville : Surfaces algébriques complexes, Astérisque 54 (1978).

[2] I.R. Shafarevic : Algebraic surfaces, Proc. Steklov Inst. Math. 75 (1965) (trans. by A.M.S. 1967).

[3] J.P. Serre : Cours d'arithmétique, P.U.F. 1970.

UER de Mathématiques
Université Paris VII
2, place Jussieu
75230 PARIS Cedex 05