PAUL GAUDUCHON

Structure de Hodge d'une surface complexe [Appendice A à l'exposé III]

Astérisque, tome 126 (1985), p. 39-40

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__126__39_0>

Appendice A à l'Exposé III

STRUCTURE DE HODGE D'UNE SURFACE COMPLEXE

Paul GAUDUCHON

Soit X une <u>surface</u> complexe compacte (connexe).

L'espace $H^2(X,\mathbb{C})$ est égal par définition au quotient de l'espace des 2-formes complexes d-fermées par celui des 2-formes d-exactes.

L'espace $H^2(X,\mathbb{R})$ se définit de la même façon en remplaçant "2-formes complexes" par "2-formes réelles" ; l'image de $H^2(X,\mathbb{Z})$ dans $H^2(X,\mathbb{R})$ est constituée des classes de $H^2(X,\mathbb{R})$ représentées par des 2-formes réelles entières, c'est-à-dire dont l'intégrale sur un 2-cycle entier quelconque est un nombre entier. $H^2(X,\mathbb{C})$ est le complexifié de $H^2(X,\mathbb{R})$.

Chaque espace $H^{p,q}(X)$ est, par définition, le quotient de l'espace des formes de type (p,q) d"-fermées par celui des formes d"-exactes. On sait que $H^{p,q}(X)$ s'identifie canoniquement au q-ième groupe de cohomologie à valeurs dans le faisceau des germes de p-formes holomorphes. Nous ne considérons ici que le cas $p+q = 2$, c'est-à-dire les espaces $H^{2,0}(X)$, $H^{1,1}(X)$ et $H^{0,2}(X)$.

Soit g une métrique <u>hermitienne</u> (non nécessairement kählérienne) sur X ; elle induit un <u>opérateur de Hodge</u> * $\mathbb{C}$-linéaire sur les formes complexes préservant chaque espace de formes de type (p,q), $p + q = 2$. (Nous choisissons ici l'extension $\mathbb{C}$-linéaire de * et non l'opérateur complexe conjugué). Chaque espace $H^{p,q}(X)$ s'identifie alors, en vertu de la théorie de Hodge-Kodaira, à l'espace des formes φ Δ"-harmoniques de type (p,q), c'est-à-dire des formes φ telles que φ <u>soit</u> d"-<u>fermée et</u> $*\varphi$ d'-<u>fermée</u> (cette dernière condition équivaut à $\delta''\varphi = 0$ à cause du choix fait sur *).

Comme cet opérateur de Hodge * se réduit à l'identité sur $A^{2,0}$ et sur $A^{0,2}$, les espaces $H^{2,0}$ et $H^{0,2}$ <u>s'identifient aux espaces des formes fermées de type</u> (2,0) et (0,2) <u>respectivement</u>. (Elles sont alors harmoniques -au sens riemannien- pour <u>toute</u> métrique hermitienne).

Ainsi $H^{2,0}$ et $H^{0,2}(X)$ se plongent canoniquement dans $H^2(X,\mathbb{C})$ en deux sous-espaces conjugués.

Soit $\varkappa$ l'application de $H^2(X,\mathbb{R})$ dans $H^{0,2}(X)$ induite par la projection d'une 2-forme réelle fermée sur sa partie de type (0,2) ; nous obtenons une section σ de $\varkappa$ en associant à une forme fermée de type (2,0) le double de sa partie réelle ; ainsi $\varkappa$ est surjective et on a la décomposition :

$$H^2(X,\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} \varkappa \oplus \sigma(H^{0,2}(X)) \quad .$$

Le noyau Ker $\varkappa$ s'identifie pour sa part aux classes de $H^2(X,\mathbb{R})$ représentables par des formes réelles fermées de type (1,1).

Le complexifié de $\sigma(H^{0,2}(X))$ dans $H^2(X,\mathbb{C})$ s'identifie à la somme $H^{2,0}(X) \oplus H^{0,2}(X)$ de sorte que $H^2(X,\mathbb{C})$ est égal à la somme $H^{2,0}(X) \oplus \tilde{H}^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X)$, où $\tilde{H}^{1,1}(X)$ est le sous-espace de $H^2(X,\mathbb{C})$ constitué des classes représentables par des formes complexes de type (1,1) fermées. De telles formes sont aussi d''-fermées ; nous obtenons ainsi un $\mathbb{C}$-homomorphisme canonique α de $\tilde{H}^{1,1}(X)$ dans $H^{1,1}(X)$. Pour montrer que α est injectif , il suffit de montrer qu'une 2-forme fermée de la forme $d''u^{1,0}$, où $u^{1,0}$ est une 1-forme de type (1,0), est d-exacte ; or, par hypothèse $d'u^{1,0}$ est une 2-forme holomorphe, donc nulle, ce qui prouve notre assertion.

Par ailleurs, la dimension $h^{1,1}$ de $H^{1,1}(X)$ est égale (Corollaire 1 au Théor.1) à la différence $b^2 - (h^{2,0} + h^{0,2})$, donc à celle de $\tilde{H}^{1,1}(X)$ de sorte que α est un isomorphisme par lequel nous pouvons identifier les deux espaces $\tilde{H}^{1,1}(X)$ et $H^{1,1}(X)$. Nous obtenons ainsi une structure de Hodge sur $H^2(X,\mathbb{C})$

$$H^2(X,\mathbb{C}) = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X)$$

avec $H^{0,2}(X) = \overline{H^{2,0}(X)}$. Chacun des sous-espaces $H^{2,0}(X)$ et $H^{0,2}(X)$ est isotrope pour la forme d'intersection tandis que $H^{1,1}(X)$ est orthogonal à la somme des deux autres, pour des raisons de type. Ainsi, la donnée de $H^{2,0}(X)$ détermine la structure de Hodge toute entière.

53, rue de Lyon
75012 Paris