Astérisque

MICHEL DEMAZURE

# La place des surfaces $K3$ dans la classification des surfaces

*Astérisque*, tome 126 (1985), p. 29-38
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__126__29_0>

*EXPOSÉ III*

# LA PLACE DES SURFACES K3 DANS LA CLASSIFICATION DES SURFACES

Michel DEMAZURE

Introduction. Le mot "classification" est un peu abusif pour ce que nous allons décrire. Il s'agit essentiellement de répartir les surfaces en grandes classes, à l'aide d'invariants discrets ; on constatera sans peine que le résultat obtenu n'est précis que pour les surfaces les plus particulières ; en particulier, la notion de "surface de type général" recouvre essentiellement les surfaces algébriques non obtenues dans les classes particulières. Transposée au cas des courbes, ce principe donnerait la classification suivante : a) $\mathbb{CP}^1$, b) les courbes elliptiques, c) les autres !

Quoiqu'il en soit, cette classification fait apparaître par complexité croissante les surfaces réglées (dont l'étude se ramène essentiellement à celle des courbes), les tores complexes de dimension 2 (bien connus par ailleurs), certains types très particuliers de surfaces elliptiques (les surfaces "bielliptiques"), les surfaces K3 et les surfaces d'Enriques (qui se décrivent facilement à l'aide des surfaces K3). D'une certaine manière, les surfaces K3 forment la classe la plus simple de surfaces dont l'étude ne se ramène pas à celle des courbes ou des tores complexes, et pour laquelle on puisse se poser avec un espoir raisonnable de solution des problèmes intéressants.

Nous suivons essentiellement la série d'articles de Kodaira sur le sujet, notamment le quatrième ([6], on devrait le noter [K4] !)

***

Dans cet exposé, le mot surface signifie "variété analytique complexe compacte connexe de dimension 2". Soit S une surface.

## 1. INVARIANTS NUMÉRIQUES FONDAMENTAUX

### a) Les nombres de Betti

$$b_i = \dim H^i(S,\mathbb{R}) \quad , \quad i = 0,\dots,4 \quad .$$

On a, par dualité de Poincaré,

(1) $$b_o = b_4 = 1 \quad , \quad b_3 = b_1 \quad ;$$

la forme intersection $H^2(S,\mathbb{R}) \times H^2(S,\mathbb{R}) \to H^4(S,\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ est une forme symétrique non dégénérée dont nous notons le type $(b^+,b^-)$, donc

(2) $$b_2 = b^+ + b^- \quad .$$

### b) Les nombres de Hodge

$$h^{i,j} = \dim H^j(S,\Omega^i) \quad , \quad i,j = 0,1,2 \quad ;$$

où $\Omega^0 = \mathcal{O}_S$, $\Omega^1$ est le faisceau des formes différentielles holomorphes de degré 1 et $\Omega^2 = \Lambda^2\Omega^1$ est le faisceau inversible des formes différentielles de degré 2. On a par dualité de Serre

(3) $$h^{i,j} = h^{2-i,2-j} \quad .$$

On a donc

(4) $$h^{0,0} = h^{2,2} = 1 \quad ,$$

et on pose

(5) $$q = h^{0,1} = \dim H^1(S,\mathcal{O}_S) \quad (\text{"irrégularité"}) \quad ,$$

(6) $$p_g = h^{0,2} = \dim H^2(S,\mathcal{O}_S) = \dim H^0(S,\Omega^2) \quad (\text{"genre géométrique"}) \quad .$$

### c) Les nombres de Chern.

Les classes de Chern de S sont

$$c_1 = -c_1(\Omega^2) \in H^2(S,\mathbb{Z})$$
$$c_2 = c_2(\Omega^2) \in H^4(S,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \quad ,$$

d'où les nombres de Chern (entiers relatifs)

$$c_1^2 = c_1(\Omega^2)^2, c_2 \quad .$$

d) Entre ces nombres existent les <u>relations</u> numériques suivantes :

(6) $$p_g - q + 1 = \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2)$$

(7) $$b^+ - b^- = \frac{1}{3}(c_1^2 - 2c_2) \quad ,$$

(8) $$c_2 = \sum_i (-1)^i b_i = 2 - 2b_1 + b_2 \quad ,$$

(9) $$c_2 = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} h^{i,j} = 2 - 2q + h^{1,1} + 2p_g - 2h^{1,0} \quad .$$

L'égalité (6) est le théorème de Nœther , (cf. [2], 20.7), l'égalité (7) la formule de la signature d'Hirzebruch ($b^+ - b^- = L_1 = \frac{1}{3} p_1 = \frac{1}{3}(c_1^2 - 2c_2)$ ; [2], 8.2.2, 1.5 et 1.3).
Quant à (8) et (9), ce sont deux formes du théorème de Gauss-Bonnet (cf. [2], 4.10.1).

On peut aussi obtenir des inégalités

(10) $$2h^{1,0} \leq b_1 \quad , \quad b_1 - h^{1,0} \leq q \quad , \quad 2p_g \leq b^+ \quad ,$$

en considérant les formes holomorphes sur S ([6], pp. 754-755). Si on élimine $c_1^2$ et $c_2$ entre les trois relations (6), (7), (8), on obtient

$$(b^+ - 2p_g) + (2q - b_1) = (\frac{1}{2} b_2 - b_1) + \frac{1}{2}(b^+ - b^-) - 2(p_g - q)$$

$$= (\frac{1}{2} c_2 - 1) + \frac{1}{6}(c_1^2 - 2c_2) - \frac{1}{6}(c_1^2 + c_2) + 2 = 1 \quad ,$$

soit

(11) $$(b^+ - 2p_g) + (2q - b_1) = 1 \quad .$$

Mais, d'après (10), les deux différences intervenant dans (11) sont positives, d'où les deux possibilités suivantes, que l'on peut distinguer par la parité de $b_1$ :

$$b^+ = 2p_g \quad , \quad b_1 = 2q - 1 \quad ,$$

$$b^{+} = 2p_g + 1 \quad , \quad b_1 = 2q \quad .$$

D'après (10), on a $h^{1,0} = q-1$ dans le premier cas, $h^{1,0} = q$ dans le second. De là et des relations (6) à (9), on déduit :

<u>Théorème</u> 1 ([ 6 ], Théorème 3) .

a) <u>Si</u> $b_1$ <u>est pair</u>, <u>on a</u>

$$b_1 = 2q \quad , \quad b^{+} = 2p_g + 1 \quad , \quad h^{1,0} = q \quad , \quad h^{1,1} = b^{-} + 1 \quad ,$$

$$c_1^2 + 8q + b^{-} = 10p_g + 9 \quad .$$

b) <u>Si</u> $b_1$ <u>est impair</u>, <u>on a</u>

$$b_1 = 2q - 1 \quad , \quad b^{+} = 2p_g \quad , \quad h^{1,0} = q - 1 \quad , \quad h^{1,1} = b^{-} \quad ,$$

$$c_1^2 + 8q + b^{-} = 10p_g + 8 \quad .$$

Ces relations ont des conséquences nombreuses, ainsi :

<u>Corollaire</u> 1 . <u>On a</u> $b_1 = h^{1,0} + h^{0,1}$, $b_2 = h^{2,0} + h^{1,1} + h^{0,2}$.

<u>Corollaire</u> 2 . <u>Tous les nombres considérés sont invariants par déformation</u>.

## 2. <u>INVARIANTS BIRATIONNELS</u>

Si m est un point de S, on peut considérer l'éclatement $\hat{S} \to S$ de S en m. On dira que deux surfaces S et S' sont <u>birationnellement équivalentes</u> s'il existe un diagramme fini d'éclatements

$$S \longleftarrow S_1 \longleftarrow \cdots \longleftarrow S_m = S'_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow S'$$

Lorsque S et S' sont algébriques, cela coïncide avec la définition usuelle ([1], II.12). Par éclatement, les nombres $b_1$, $b^{+}$, q, $p_g$ ne changent pas, (tandis que $c_2$, $b_2$, $b^{-}$, $h^{1,1}$ et $-c_1^2$ augmentent de 1). Par conséquent, les <u>nombres</u> $b_1$, $b^{+}$, q, $p_g$ <u>sont des invariants birationnels</u>.

On obtient d'autres invariants birationnels en considérant les <u>plurigenres</u>

$$P_m = \dim H^0(S,(\Omega^2)^{\otimes m}) \quad , \quad m \geq 1 \quad .$$

Outre $P_1 = p_g$, les plus importants sont (pour des raisons pas toujours claires) $P_2$ et $P_{12}$.

La dimension de Kodaira

$$\varkappa \in \{-\infty, 0, 1, 2\}$$

est l'invariant birationnel défini par les équivalences suivantes :

$\varkappa = -\infty \iff P_m = 0$ pour tout m ,

$\varkappa = 0 \iff P_m \in \{0,1\}$ pour tout m, il existe m avec $P_m = 1$ ,

$\varkappa = 1 \iff P_m/m$ est borné, il existe m avec $P_m \geq 2$ ,

$\varkappa = 2 \iff P_m/m$ n'est pas borné. .

A posteriori, on vérifie que lorsque $\varkappa = 1$ ou 2, $P_m/m^{\varkappa}$ tend vers une limite non nulle lorsque m augmente indéfiniment (cf. [ 6 ], p. 795-796).

On dit qu'une surface S' domine une surface S s'il existe une suite finies d'éclatements $S' \to \ldots \to S$. Une surface qui ne domine que des surfaces isomorphes est dite minimale. Cela équivaut (critère de Castelnuovo) à l'inexistence sur D de courbes isomorphes à $\mathbb{CP}^1$ et de fibré normal de degré -1 ("courbes exceptionnelles").

Puisque $b_2$ augmente strictement par éclatement, toute surface domine au moins une surface minimale. On a facilement (voir [1], p. 87 pour le cas algébrique ) :

Proposition . Soit S une surface avec $\varkappa \neq -\infty$ ou $b_1$ impair. Les surfaces minimales birationnellement équivalentes à S sont isomorphes.

En particulier, dans une classe d'équivalence birationnelle avec $\varkappa \neq -\infty$ ou $b_1$ impair, les surfaces minimales ont les mêmes invariants $c_1^2$, $b_2$, ...

## 3. SURFACES ALGÉBRIQUES, SURFACES ELLIPTIQUES

Une surface S possède au plus une structure algébrique complexe compatible avec sa structure analytique. Lorsqu'elle en possède une, on dit simplement qu'elle est <u>algébrique</u>.

Une surface S est dite <u>elliptique</u> s'il existe un morphisme surjectif $S \to C$, où C est une courbe (variété analytique complexe compacte de dimension 1), dont les fibres générales sont des courbes elliptiques (= courbes de genre 1).

Soit M(S) le corps des fonctions méromorphes sur S. On a

$$\deg.\, \mathrm{tr.}_{\mathbb{C}}\, M(S) \leq 2 \quad .$$

<u>Théorème</u> 2 (cf. [ 6], p. 757) . <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) <u>on a</u> $\deg.\, \mathrm{tr.}_{\mathbb{C}}\, M(S) = 2$ ,

(ii) S <u>est algébrique</u> ,

(iii) S <u>est projective</u> (i.e. isomorphe à une sous-variété fermée d'un espace $\mathbb{CP}^N$) ,

(iv) <u>il existe un fibré en droites</u> $\mathcal{L}$ <u>sur</u> S <u>avec</u> $c_1(\mathcal{L})^2 > 0$ .

<u>Corollaire</u> 1 . <u>Si</u> $c_1^2 > 0$, S <u>est algébrique</u>. <u>Si</u> $\varkappa = 2$, S <u>est algébrique</u>.

<u>Corollaire</u> 2 . <u>Si</u> $b_1$ <u>est pair et si</u> $p_g = 0$, S <u>est algébrique</u>. <u>En particulier si</u> $b_1$ <u>est pair et si</u> $\varkappa = -\infty$, <u>alors</u> S <u>est algébrique</u>.

En effet, on a $b^+ = 1$ (Théorème 1). Puisque $H^2(S,\mathcal{O}_S) = 0$, l'application canonique $H^1(S,\mathcal{O}_S^*) \to H^2(S,\mathbb{Z})$ est surjective. Il existe donc un fibré en droites $\mathcal{L}$ avec $c_1(\mathcal{L})^2 > 0$ .

<u>Théorème</u> 3 ([ 6 ], p. 757) . <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) <u>on a</u> $\deg.\, \mathrm{tr.}_{\mathbb{C}}\, M(S) \geq 1$ ,

(ii) S <u>est algébrique ou elliptique</u> ,

(iii) <u>il existe un fibré en droites</u> $\mathcal{L}$ <u>sur</u> S, <u>avec</u> $\dim H^0(X,\mathcal{L}) \geq 2$ .

<u>Corollaire</u> . <u>Si</u> $\varkappa \geq 1$, S <u>est algébrique ou elliptique</u>.

Théorème 4 ([K4], théorème 11) . Supposons deg. $tr._{\mathbb{C}}$ M(S) = 0. Alors on est dans l'un des trois cas suivants :

a) $q = 2$, $b_1 = 4$, $p_g = 1$, $\varkappa = 0$ ("tore complexe", cf. n° 6) ,

b) $q = 0$, $b_1 = 0$, $p_g = 1$, $\varkappa = 0$ ("surface K3", cf. n° 6) ,

c) $q = 1$, $b_1 = 1$, $p_g = 0$, $\varkappa = -\infty$ .

Remarquons maintenant que si S est algébrique (ou plus généralement possède une structure kählérienne), on a $h^{1,0} = h^{0,1}$ (théorie de Hodge), donc $b_1 = 2q$ est pair. Par conséquent, si S est une déformation d'une surface algébrique, $b_1$ est pair ; inversement, si $b_1$ est pair, S est une déformation d'une surface algébrique : cela se vérifie directement pour les surfaces elliptiques et les cas a) et b) du théorème ci-dessus ([ 6 ], théorème 25).

## 4. LA CLASSIFICATION GÉNÉRALE DES SURFACES

Les deux invariants fondamentaux se révèlent être : 1) la parité de $b_1$, 2) la dimension de Kodaira. Ils permettent de diviser les surfaces en 6 grandes classes principales

(A) $b_1$ pair, $\varkappa = -\infty$ ,

(B) $b_1$ pair, $\varkappa = 0$ ,

(C) $b_1$ pair, $\varkappa = 1$ ,

(D) $\varkappa = 2$ (qui implique $b_1$ pair) ,

(E) $b_1$ impair, $\varkappa \geq 0$ ,

(F) $b_1$ impair, $\varkappa = -\infty$ .

La classe (A) est celle des surfaces algébriques réglées, nous en reparlerons au n° 5. La classe (B) se divise en quatre suivant les valeurs possibles du couple $(p_g, q)$ ; nous en parlerons au n° 6. Les classes (C) et (E) sont formées de surfaces elliptiques. La classe (D) est celle des surfaces algébriques dites de type général. La classe (F) est la plus mal connue, nous en reparlerons au n° 7. Dans toute classe d'équivalence birationnelle de surfaces n'appartenant pas à la classe (A), les surfaces minimales sont isomorphes ; cela n'est vrai pour aucune classe d'équivalence de la classe (A).

## 5. <u>LA CLASSE</u> (A) : $b_1$ pair, $\varkappa = -\infty$

Soit S une surface avec $b_1$ pair et $\varkappa = -\infty$, donc $p_g = 0$. Si $q = 0$ (c'est-à-dire $b_1 = 0$), S est rationnelle, c'est-à-dire birationnellement équivalente à $\mathbb{C}P^2$. Les surfaces rationnelles minimales sont $\mathbb{C}P^2$, $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ et les surfaces notées $F_n$, $n \geq 2$ ; la surface $F_n$ s'obtient en complétant l'espace total du fibré en droites de degré n sur $\mathbb{C}P^1$ par une "section à l'infini".
Si $q > 0$, S est réglée non rationnelle, et il existe une unique courbe C telle que S soit birationnellement équivalente à $C \times \mathbb{C}P^1$ ; on a $q = g(C)$. Les surfaces minimales birationnellement équivalentes à $C \times \mathbb{C}P^1$ sont les fibrés projectifs associés aux fibrés vectoriels de rang 2 sur C.

Toutes les surfaces réglées minimales, sauf $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ satisfont à $b^- = 1$, c'est-à-dire $b_2 = 2$, ou encore $c_1^2 = 8(1-q)$. Pour $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$, on a $b^- = 0$, $b_2 = 1$, $c_1^2 = 9$.

## 6. <u>LA CLASSE</u> (B) : $b_1$ pair, $\varkappa = 0$

Elle se divise en quatre ; les surfaces <u>minimales</u> portent les noms suivants :

($B_1$) $p_g = 0$, $q = 0$ : surfaces d'Enriques ,

($B_2$) $p_g$ 0, $q = 1$ : surfaces bielliptiques ,

($B_3$) $p_g$ 1, $q = 0$ : surfaces K3 ,

($B_4$) $p_g = 1$, $q = 2$ : tores complexes .

Dans chacun des cas, le fibré en droites $(\Omega^2)^{\otimes 12}$ est trivial, de sorte que $P_{12} = 1$, et que $12c_1 = 0$.

a) <u>Les tores complexes</u>. Ce sont les groupes de Lie complexes quotient de $\mathbb{C}^2$ par un sous-groupe discret de rang 4. Les faisceaux $\Omega^1$ et $\Omega^2$ sont triviaux, donc $q = 2$, $c_1 = 0$ et $P_m = 1$ pour tout $m \geq 0$, $\varkappa = 0$. On a $b_i = \binom{4}{i}$, donc $b_1 = 4$, $b_2 = 6$. Les tores complexes sont kählériens, ils peuvent être algébriques (surfaces abéliennes), elliptiques ou sans fonctions méromorphes.

b) <u>Les surfaces</u> K3. Elles sont caractérisées par les conditions $q = 0$, $c_1 = 0$ ; le faisceau $\Omega^2$ est trivial ; on a donc $c_1 = 0$, $P_m = 1$ pour tout $m > 0$, $\varkappa = 0$. Nous les étudierons en détail dans la suite du séminaire. Elles peuvent être algébriques ou non, elliptiques ou non, indépendamment. Les tores complexes et les surfaces K3 sont caractérisées par les conditions $b_1$ pair, $c_1 = 0$ ([K4], Théorème 20).

c) Les surfaces bielliptiques. Elles sont toutes algébriques et elliptiques par construction : ce sont les quotients d'un produit $E \times F$ de deux courbes elliptiques par un groupe fini G opérant sur E et F de façon que F/G soit rationnelle et que G opère fidèlement, et par translations, sur E. On peut les classifier explicitement (voir [1], VI.20). Le faisceau $\Omega^2$ est toujours non trivial (en fait $(\Omega^2)^{\otimes m}$ est trivial pour un des entiers $m = 2,3,4,6$). On a donc $p_g = 0$, $P_{12} = 1$ et $\kappa = 0$ ; on a par ailleurs $q = 1$.

d) Les surfaces d'Enriques. Elles sont caractérisées par le fait que $p_g = 0$, $q = 0$ et que $(\Omega^2)^{\otimes 2}_{\tilde{S}}$ est trivial. On a donc $P_2 = 1$, $\kappa = 0$. Puisque $p_g = b_1 = 0$, elles sont algébriques ; elles sont par ailleurs elliptiques (Enriques). Elles sont directement liées aux surfaces K3 :

Proposition . Les surfaces d'Enriques sont exactement les quotients des surfaces K3 par leurs involutions sans points fixes.

Soit S une surface d'Enriques et $\varphi : (\Omega^2)^{\otimes 2} \to \mathcal{O}_S$ un isomorphisme. Le revêtement double $\tilde{S} = \varphi^{-1}(1)$ de S est connexe puisque $\Omega^2$ n'est pas trivial. Par construction, on a $\Omega^2_{\tilde{S}} = 0$ et $\chi(\mathcal{O}_{\tilde{S}}) = 2\chi(\mathcal{O}_S) = 2$, donc $\tilde{S}$ est une surface K3. Inversement si S a un revêtement double $\tilde{S}$ qui est une surface K3, on a $\kappa = 0$ et $\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{1}{2}\,\chi(\mathcal{O}_{\tilde{S}}) = 1$, donc $p_g = q$, ce qui implique que S est une surface d'Enriques.

## 7. LA CLASSE (F) : $b_1 = 1$, $\kappa = -\infty$

En fait les conditions "$b_1$ impair et $p_g = 0$" équivalent à $b_1 = 1$ ([ 6 ], Théorème 26). On a donc $b_1 = 1$ pour toutes les surfaces de la classe (F).

On appelle surface de Hopf une surface dont le revêtement universel est $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, donc de la forme $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}/G$, où G est un groupe "proprement discontinu" d'automorphismes analytiques de $\mathbb{C}^2$ laissant fixe 0. Alors G contient toujours dans son centre une contraction f et le quotient $\tilde{S} = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}/(f)$ est déjà une surface compacte. On peut choisir des coordonnées dans $\mathbb{C}^2$ de façon que

$$f(z_1,z_2) = (\alpha_1 z_1 + \lambda z_2^m, \alpha_2 z_2)$$

avec $(\alpha_1 - \alpha_2^m)\lambda = 0$, $0 < |\alpha_1| \leq |\alpha_2| < 1$. Il en résulte que $\tilde{S}$ est homéomorphe à $S^1 \times S^3$, donc que $b_1 = 1$ et $b_2 = 0$. Par conséquent, S est une surface minimale avec $b_1 = 1$. En fait ([ 6 ], Théorème 4.1) une surface S est une surface de Hopf si et seulement si $b_2 = 0$ et $\pi_1(S)$ contient un sous-groupe cyclique infini d'indice fini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Beauville : Surfaces algébriques, Astérisque 54, Soc. Math. France 1978.

[2] F. Hirzebruch : Neue Topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, zweite Auflage, Springer, Berlin 1962.

[3] K. Kodaira : On compact complex analytic surfaces, I, Annals of Math 71 (1960), 111-152.

[4] K. Kodaira : On compact complex analytic surfaces, II, Annals of Math 77 (1963), 563-626.

[5] K. Kodaira : On compact complex analytic surfaces, III, Annals of Math 78 (1963), 1-40.

[6] K. Kodaira : On the structure of compact complex analytic surfaces, I, Amer. J. of Maths., 86 (1964), 751-798.

[7] K. Kodaira : On the structure of compact complex analytic surfaces, II, Amer. J. of Maths., 88 (1966), 682-721.

[8] K. Kodaira : On the structure of compact complex analytic surfaces, III, Amer. J. of Math. 90 (1968), 55-83.

[9] K. Kodaira : On the structure of compact complex analytic surfaces, IV, Amer. J. of Math., 90 (1968), 1049-1066.

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau cedex
"L.A. du C.N.R.S. n°169"