ARNAUD BEAUVILLE

Variétés Kählériennes compactes avec $c_1 = 0$

Astérisque, tome 126 (1985), p. 181-192
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__126__181_0>

EXPOSÉ XVI

VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES COMPACTES AVEC $c_1 = 0$

Arnaud BEAUVILLE

Introduction. Les résultats de l'exposé précédent, joints au théorème de S.T.Yau, ont pour conséquence un théorème de structure pour les variétés kählériennes compactes avec $c_1 = 0$; à un revêtement fini près, ces variétés se décomposent en produit de variétés de trois types : les tores complexes, les variétés compactes d'holonomie $SU(m)$ et celles d'holonomie $Sp(r)$. Alors que les deux premiers types sont bien connus, on ne connaissait jusqu'à ces dernières années comme exemples du troisième que les surfaces K3 .

Après un exposé du théorème de structure et de ses implications en géométrie complexe, j'explique ici les exemples récents de variétés compactes d'holonomie $Sp(r)$. Ces variétés présentent une analogie frappante avec les surfaces K3 , en particulier par le comportement de l'application des périodes. Toutefois on est encore loin de posséder à leur sujet des informations aussi précises que celles qu'on a exposées dans ce séminaire pour les surfaces K3.

J'ai adopté la terminologie de Weil : une variété kählérienne est munie d'une métrique kählérienne, alors qu'une variété complexe qui peut être munie d'une telle métrique est dite de type kählérien. Une variété est toujours supposée connexe.

La plupart des résultats de cet exposé se trouvent sous une forme plus détaillée dans l'article [1] .

1. VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES COMPACTES RICCI-PLATES

Proposition 1. Soit X une variété kählérienne compacte Ricci-plate. Il existe un revêtement fini étale de X qui est isomorphe (comme variété kählérienne) à un produit $T \times \prod_i V_i \times \prod_j X_j$, où T est un tore complexe (muni d'une métrique kählérienne plate) ; V_i est une variété kählérienne compacte simplement connexe, de groupe d'holonomie $SU(m_i) \subset SO(2m_i)$; X_j est une variété kählérienne compacte simplement connexe, de groupe d'holonomie $Sp(r_j) \subset SO(4r_j)$.

Considérons le revêtement universel $\tilde{X}$ de X. D'après le théorème de de Rham (Exposé XV), $\tilde{X}$ est isomorphe à un produit $\mathbb{C}^k \times \prod_i M_i$, où $\mathbb{C}^k$ est muni de la métrique kählérienne standard et où les M_i sont irréductibles (il faut observer que dans le cas kählérien, la décomposition de de Rham est automatiquement compatible avec les structures complexes). Un théorème de Cheeger-Gromoll [3] entraîne alors que les variétés M_i sont compactes. Puisqu'elles sont Ricci-plates, leur groupe d'holonomie est contenu dans $SU(m_i)$, avec $m_i = \dim_{\mathbb{C}}(M_i)$; en outre M_i n'est pas symétrique, car la courbure de Ricci d'un espace symétrique irréductible compact est positive non dégénérée. Un coup d'oeil à la liste de l'exposé précédent montre alors que les seuls groupes d'holonomie possibles sont $SU(m_i)$ ou $Sp(m_i/2)$.

Posons $M = \prod_i M_i$. Le groupe fondamental de X agit sur $\mathbb{C}^k \times M$ par automorphismes isométriques. Soit u un tel automorphisme ; en raison de l'unicité de la décomposition de de Rham, il existe des isomorphismes isométriques u_1 de $\mathbb{C}^k$ et u_2 de M tels qu'on ait

$$u(z,m) = (u_1(z), u_2(m)) \quad \text{pour } z \in \mathbb{C}^k, \ m \in M .$$

Considérons l'homomorphisme $u \longmapsto u_2$ de $\pi_1(X)$ dans le groupe fini $\mathrm{Aut}(M)$; soit Γ son noyau. Le groupe Γ opère librement sur $\mathbb{C}^k$, et le quotient $\mathbb{C}^k/\Gamma$ est compact. Soit Γ' l'ensemble des translations de Γ ; le théorème de Bieberbach affirme que Γ' est un sous-groupe d'indice fini de Γ. La variété compacte $T = \mathbb{C}^k/\Gamma'$ est alors un tore complexe, et $T \times M$ est un revêtement fini de X, d'où la proposition. □

2. INTERPRÉTATION EN GÉOMÉTRIE COMPLEXE

Nous allons maintenant traduire en termes de géométrie complexe les propriétés d'holonomie des variétés V_i et X_j, grâce au résultat suivant :

Principe de Bochner. Soit X une variété kählérienne compacte Ricci-plate. Alors tout champ de tenseurs holomorphe τ sur X est parallèle.

La démonstration repose sur la formule

$$\Delta(\|\tau\|^2) = \|D\tau\|^2 ,$$

qu'on obtient par un calcul sans difficultés. On en déduit que le laplacien de la fonction $\|\tau\|^2$ est positif, donc nul (par le principe du maximum, cf. Exposé XI, n° 3), ce qui entraîne $D\tau = 0$. □

Corollaire. Soit $x \in X$, et soit H le groupe d'holonomie de X en x. L'application $\omega \longmapsto \omega(x)$ induit un isomorphisme de $H^0(X,\Omega_X^p)$ sur le sous-espace de $\Omega_X^p(x)$ formé des p-formes invariantes par H .

Nous allons appliquer ce corollaire aux cas $H = SU(m)$ et $H = Sp(r)$.

Proposition 2. Soit X une variété kählérienne compacte, de dimension $m \geq 3$, dont le groupe d'holonomie est $SU(m)$.

(i) X est projective, à fibré canonique trivial ;

(ii) on a $H^0(X,\Omega_X^p) = 0$ pour $0 < p < m$, et $\chi(\mathcal{O}_X) = 1 + (-1)^m$.

Soit $x \in X$. La représentation de $SU(m)$ dans $\Omega^p(x)$ est isomorphe à $\Lambda^p\sigma$, où σ désigne la contragrédiente de la représentation identique de $SU(m)$ dans $\mathbb{C}^m$. Elle est irréductible et non triviale pour $0 < p < m$, donc ne contient pas de sous-espace invariant non nul ; en vertu du corollaire, on en déduit que $H^0(X,\Omega_X^p)$ est nul pour $0 < p < m$, tandis que le fibré canonique Ω_X^m , qui est engendré par une section partout $\neq 0$, est trivial. Par symétrie de Hodge, on a $H^{0,p} = 0$ pour $0 < p < m$, d'où la valeur de $\chi(\mathcal{O}_X)$. Enfin une variété kählérienne compacte avec $H^{0,2} = 0$ est projective : en effet l'ensemble des classes de Kähler est alors ouvert dans $H^2(X,\mathbb{R})$, donc contient un élément de $H^2(X,\mathbb{Q})$, ce qui entraîne que X est projective. □

Proposition 3. Soit X une variété compacte de dimension $2r$, dont le groupe d'holonomie est $Sp(r)$.

(i) Il existe une 2-forme holomorphe φ sur X qui est non dégénérée en tout point.

(ii) On a $H^0(X,\Omega_X^p) = 0$ si p est impair et $H^0(X,\Omega_X^{2q}) = \mathbb{C}.\varphi^q$ pour $0 \leq q \leq r$. En particulier on a $\chi(\mathcal{O}_X) = r+1$.

Le groupe $Sp(r)$ est le sous-groupe de $U(2r)$ formé des matrices qui laissent invariantes une forme $\mathbb{C}$-bilinéaire alternée non dégénérée sur $\mathbb{C}^{2r}$; le principe d'holonomie (cf. Exposé XV) entraîne donc qu'il existe une 2-forme φ parallèle sur X , de type (2,0), non dégénérée en tout point. Mais une forme parallèle est fermée, donc holomorphe si elle est de type (p,0), d'où (i).

D'après n'importe quel bon livre sur les représentations des groupes compacts, la représentation de $Sp(r)$ dans $\Omega^p(x)$ pour $p \leq r$ se scinde en une somme directe

$$\Omega^p(x) = P_p \oplus P_{p-2}\ \varphi(x) \oplus P_{p-4}\ \varphi^2(x) \oplus \ldots$$

où les représentations P_k $(0 \leq k \leq r)$ sont irréductibles, et non triviales pour $k > 0$. D'autre part la multiplication par $\varphi^k(x)$ induit un isomorphisme équivariant de $\Omega^{r-k}(x)$ sur $\Omega^{r+k}(x)$. On en déduit aussitôt que les seuls éléments invariants de $\bigoplus_p \Omega^p(x)$ sont les polynômes en φ, d'où (ii). □

On appelle <u>structure symplectique</u> (complexe) sur X une 2-forme holomorphe φ sur X qui est non dégénérée en tout point. L'existence d'une telle structure entraîne que la dimension de X est paire, et que le fibré canonique de X est trivial (il est engendré par φ^r, avec $r = \frac{1}{2}\dim(X)$). La Proposition 3 admet la réciproque suivante :

<u>Proposition</u> 4. <u>Soit</u> X <u>une variété compacte de type kählérien</u>, <u>simplement connexe</u>, <u>de dimension</u> 2r . <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) X <u>admet une métrique kählérienne d'holonomie</u> Sp(r) ;

(ii) X <u>admet une structure symplectique</u>, <u>unique à un scalaire près</u>.

<u>Lorsqu'elles sont réalisées</u>, <u>on dit que</u> X <u>est une variété symplectique irréductible</u>.

L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) résulte de la Prop.3. Sous l'hypothèse (ii), le fibré canonique de X est trivial; par suite le théorème de S.T.Yau entraîne que X admet une métrique kählérienne Ricci-plate. D'après la Prop.1, X est isomorphe à un produit de variétés kählériennes irréductibles $M_1, \ldots, M_m$. La structure symplectique φ de X induit nécessairement une structure symplectique φ_i sur chaque M_i, de façon que $\varphi = \sum_i pr_i^* \varphi_i$. Pour tout élément $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ de $(\mathbb{C}^*)^m$, la forme $\sum_i \lambda_i\, pr_i^* \varphi_i$ est alors une structure symplectique ; l'hypothèse (ii) entraîne donc $m = 1$, de sorte que X est irréductible, et d'holonomie Sp(r) compte tenu de la Proposition 2. □

<u>Remarque</u>. Puisque SU(2) = Sp(1), on a en principe le choix pour placer les surfaces K3 . On mettra en évidence dans la suite une analogie très frappante entre les variétés d'holonomie Sp(r), pour $r \geq 2$, et les surfaces K3 , ce qui nous a conduit à considérer celles-ci comme des variétés symplectiques.

Nous pouvons maintenant reformuler la Proposition 1 :

<u>Théorème</u> 1. <u>Soit</u> X <u>une variété compacte de type kählérien</u>, <u>dont la première classe de Chern réelle est nulle</u>. <u>Il existe un revêtement fini étale de</u> X <u>isomorphe</u>

à un produit $T \times \prod_i V_i \times \prod_j X_j$ *, où*

T *est un tore complexe* ;

V_i *est une variété projective simplement connexe, de dimension* $m_i \geq 3$, *à fibré canonique trivial, telle que* $H^0(V_i, \Omega^p_{V_i}) = 0$ *pour* $0 < p < m_i$;

X_j *est une variété symplectique irréductible*.

En effet X admet une métrique kählérienne Ricci-plate d'après le théorème de S.T.Yau ; le théorème résulte alors des Propositions 1 à 4 . □

3. EXEMPLES DE VARIÉTÉS D'HOLONOMIE SU(m)

Soit X une variété complexe compacte simplement connexe, de type kählérien, de dimension $m \geq 3$. D'après les résultats précédents, pour que X admette une métrique kählérienne d'holonomie SU(m), il faut et il suffit que X soit projective à fibré canonique trivial et qu'on ait $H^0(X, \Omega^p_X) = 0$ pour $0 < p < m$. Tous les exemples usuels de variétés projectives à fibré canonique trivial rentrent dans cette catégorie (à l'exception bien sûr des produits). Citons par exemple :

1) les hypersurfaces de degré $(m+2)$ dans $\mathbb{P}^{m+1}$; plus généralement, les intersections complètes (lisses) de degrés $(d_1,\dots,d_r)$ dans $\mathbb{P}^{m+r}$, avec $\sum_i d_i = m + r + 1$; plus généralement, les intersections complètes quasi-homogènes de degrés $(d_1,\dots,d_r)$ dans l'espace projectif tordu $\mathbb{P}(e_o,\dots,e_{m+r})$, avec $\sum_i d_i = \sum_j e_j$.

Ces variétés sont simplement connexes par le théorème de Lefschetz et leur fibré canonique est trivial ; on vérifie facilement, par exemple par récurrence sur le nombre d'équations, qu'elles satisfont $h^{0,p} = 0$ pour $0 < p < m$.

2) Soit V une variété projective lisse de dimension ≥ 4 , dont le système anticanonique $|-K_V|$ est ample et contient un diviseur lisse X . Alors X est une variété du type cherché. En effet on a $K_X \equiv (K_V+V)_{|V} \equiv 0$ (formule d'adjonction) ; de plus V est simplement connexe (théorème de Myers), donc il en est de même de X (théorème de Lefschetz). Enfin le théorème d'annulation de Kodaira entraîne $H^p(V,\mathcal{O}_V) = 0$ pour $p > 0$, puis $H^q(X,\mathcal{O}_X) = 0$ pour $0 < q < \dim(X)$.

Plus généralement si l'on a $-K_V \equiv dH$ où H est ample, on peut prendre pour X une intersection complète d'hypersurfaces $X_i \in |d_iH|$, avec $\sum d_i = d$. Ceci se produit notamment lorsque V est le quotient d'un groupe de Lie complexe réductif par un sous-groupe parabolique (grassmanniennes, variétés de drapeaux, etc...). Outre ces espaces homogènes, on connaît en géométrie algébrique beaucoup d'exemples de variétés à fibré anticanonique ample.

3) Pour $m = 3$, 4 ou 6 , notons E_m la courbe elliptique qui admet un automorphisme d'ordre m , et posons $A_m = (E_m)^m$. Le groupe μ_m des racines m-ièmes de l'unité agit sur A_m avec un nombre fini de points fixes. Soit $\hat{A}_m$ la variété obtenue en éclatant ces points ; le groupe μ_m agit sur $\hat{A}_m$, et l'ensemble des points fixes d'un générateur de μ_m est la réunion des diviseurs exceptionnels de $\hat{A}_m$. Ceci entraîne que la variété $X_m = \hat{A}_m/\mu_m$ est lisse ; on laisse au lecteur le soin de vérifier qu'elle est simplement connexe, à fibré canonique trivial, et qu'on a $H^{p,0} = 0$ pour $0 < p < m$.

4. <u>VARIÉTÉS SYMPLECTIQUES</u> : <u>LE CAS</u> $r = 2$

Les variétés symplectiques irréductibles de dimension (complexe) 2 sont les surfaces K3 , déjà amplement étudiées dans ce séminaire. Notons ici que l'article [2] énonce qu'il n'en existe pas d'autres, mais contient une erreur sur laquelle je reviendrai.

Je vais maintenant exposer le premier exemple de variété symplectique irréductible en dimension 4 , dû à A. Fujiki. Soit S une surface K3 . Considérons le carré symétrique $S^{(2)}$ de S (quotient de S^2 par l'involution σ qui échange les deux facteurs). Cet espace est singulier, car le lieu fixe de σ , qui est la diagonale Δ de S^2 , est de codimension 2 . Notons $\eta : B_\Delta(S^2) \longrightarrow S^2$ l'éclatement de Δ . On vérifie aussitôt que σ s'étend en une involution τ de $B_\Delta(S^2)$, dont le lieu fixe est le diviseur exceptionnel E . Par suite le quotient $S^{[2]} = B_\Delta(S^2)/\tau$ est une variété lisse (de dimension 4).

<u>Théorème 2.</u> <u>Pour toute surface</u> K3 S , <u>la variété</u> $S^{[2]}$ <u>est symplectique irréductible</u> (donc, par définition, de type kählérien et simplement connexe).

Calculons d'abord $H^0(S^{[2]},\Omega^2)$. Notons $\rho : B_\Delta(S^2) \longrightarrow S^{[2]}$ l'application canonique ; soit ω une 2-forme holomorphe non nulle sur S. Les homomorphismes

$$H^0(S^2,\Omega^2)^{inv} \xrightarrow{\ \eta^*\ } H^0(B_\Delta(S^2),\Omega^2)^{inv} \xleftarrow{\ \rho^*\ } H^0(S^{[2]},\Omega^2)$$

sont bijectifs ; il en résulte que $H^0(S^{[2]},\Omega^2)$ est engendré par une 2-forme φ telle que

$$\rho^*\varphi = \varepsilon^*(pr_1^*\omega + pr_2^*\omega) .$$

Montrons que φ est non dégénérée en tout point. Puisque ρ est un revêtement double ramifié le long de E , on a

$$\operatorname{div} \rho^* \varphi^2 = \rho^* \operatorname{div} \varphi^2 + E \ ;$$

d'autre part, puisque Δ est de codimension 2 dans S^2 , on a

$$\operatorname{div} \varepsilon^*(pr_1^* \omega + pr_2^* \omega)^2 = \varepsilon^* \operatorname{div}(pr_1^* \omega + pr_2^* \omega)^2 + E = E \ .$$

Par comparaison on obtient $\operatorname{div} \varphi^2 = 0$, ce qui prouve que φ est une structure symplectique sur $S^{[2]}$.

Puisque $B_\Delta(S^2)$ est simplement connexe et que l'involution τ a des points fixes, $S^{[2]}$ est simplement connexe. Enfin la variété éclatée $B_\Delta(S^2)$ est de type kählérien ; un résultat récent de Varouchas [4] entraîne alors qu'il en est de même de $S^{[2]}$. ␣

5. VARIÉTÉS SYMPLECTIQUES : LE CAS GÉNÉRAL

L'idée naturelle pour généraliser la construction de Fujiki est de trouver une bonne désingularisation de la puissance symétrique $S^{(r)}$ pour $r > 2$. On peut essayer, comme ci-dessus, d'éclater S^r de manière équivariante sous le groupe symétrique, de façon que le quotient soit lisse ; mais, même pour $r = 3$, les calculs se révèlent inextricables.

Une idée moins naïve consiste à réinterpréter géométriquement la construction de $S^{[2]}$. Au moins ensemblistement, la désingularisation $\varepsilon : S^{[2]} \longrightarrow S^{(2)}$ s'obtient en remplaçant un point de $S^{(2)}$ de la forme (x,x) par l'ensemble des couples (x,t), où t est une direction de $T_x(S)$; la donnée d'un tel couple équivaut à celle d'un sous-espace analytique Z de S , de support $\{x\}$, tel que $\lg(\mathcal{O}_Z) = 2$. Ainsi $S^{[2]}$ n'est autre que "l'espace de Douady" qui paramètre les sous-espaces Z de S tels que $\lg(\mathcal{O}_Z) = 2$. Il est dès lors naturel de considérer pour tout r l'espace de Douady $S^{[r]}$ qui paramètre les sous-espaces analytiques Z de S tels que $\lg(\mathcal{O}_Z) = r$.

<u>Théorème</u> 3. $S^{[r]}$ <u>est une variété symplectique irréductible</u>, <u>de dimension</u> $2r$.

Je vais indiquer ici les grandes lignes de la démonstration, renvoyant à [1] pour les détails. Soit $S^{(r)}$ la r-ième puissance symétrique de S ; on peut considérer qu'elle paramètre les 0-cycles (effectifs) sur S de degré r . En associant à un sous-espace fini de S le 0-cycle correspondant on obtient un morphisme $\varepsilon : S^{[r]} \longrightarrow S^{(r)}$. Voici les principales propriétés de cette application (dues en particulier à Fogarty et Iarrobino) :

a) Le lieu singulier de $S^{(r)}$ est la diagonale D (ensemble des cycles de la forme

$2x_1 + x_2 + \ldots + x_{r-1}$) ; le morphisme $\varepsilon : S^{[r]} \longrightarrow S^{(r)}$ est un isomorphisme au-dessus de $S^{(r)}-D$, et résoud les singularités de $S^{(r)}$.

b) Le diviseur $E = \varepsilon^{-1}(D)$ est irréductible.

Notons $S_*^{(r)}$ l'ensemble des cycles $x_1 + \ldots + x_r$ où deux au plus des x_i coïncident, et S_*^r , $S_*^{[r]}$, D_* l'image inverse de $S_*^{(r)}$ dans S^r, $S^{[r]}$, D . Puisqu'un point générique de E est dans $S_*^{[r]}$, la propriété b) entraîne :

c) $S^{[r]} - S_*^{[r]}$ est un sous-espace fermé de codimension 2 dans $S^{[r]}$.

Au voisinage d'un point de D_* , $S_*^{[r]}$ est localement isomorphe à $S^{r-2} \times S^{[2]}$, et $S_*^{(r)}$ à $S^{r-2} \times S^{(2)}$; la situation est donc obtenue (localement) par produit avec S^{r-2} de la situation pour $r = 2$. On en déduit aussitôt qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
B_\Delta(S_*^r) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\rho"'] & S_*^r \arrow[d] \\
S_*^{[r]} \arrow[r, "\varepsilon"] & S_*^{(r)}
\end{tikzcd}$$

où η est l'éclatement de la diagonale $\Delta = \bigcup_{i,j} \Delta_{ij}$ (qui est lisse dans S_*^r), et où ρ est l'application de passage au quotient par le groupe symétrique $\mathfrak{S}_r$.

Soit ω une 2-forme holomorphe non nulle sur S . La forme $\eta^*(\Sigma\, pr_i^*\omega)$ sur $B_\Delta(S_*^r)$ est invariante par $\mathfrak{S}_r$, donc s'écrit $\rho^* \varphi_*$, avec $\varphi_* \in H^0(S_*^{[r]}, \Omega^2)$. Le même calcul qu'au n°4 montre que le diviseur de φ_*^r est nul. Par le théorème de Hartogs, φ_* s'étend en une 2-forme φ holomorphe sur $S^{[r]}$; le diviseur de φ^r , qui doit être contenu dans une partie de codimension 2, est nécessairement nul, ce qui prouve que φ est une structure symplectique sur $S^{[r]}$.

On montre comme au n°4 que cette structure symplectique est unique à un scalaire près, et que $S^{[r]}$ est simplement connexe (ces assertions se vérifient sur $S_*^{[r]}$). Reste à montrer que $S^{[r]}$ est de type kählérien. Le résultat déjà cité de Varouchas entraîne que l'espace analytique $S^{(r)}$ admet une structure kählérienne. D'autre part le fibré $\mathcal{O}(-E)$ sur $S^{[r]}$ est ample relativement à ε : en effet cette assertion est locale sur $S^{(r)}$, donc pour la prouver on peut supposer que S est projective. Dans ce cas le morphisme ε est projectif et $\mathrm{Pic}(S^{[r]})/\varepsilon^* \mathrm{Pic}(S^{(r)})$ est engendré par la classe de $\mathcal{O}(E)$; on en déduit sans peine notre assertion. Par suite le morphisme ε est toujours projectif, ce qui entraîne que $S^{[r]}$ est de type kählérien. □

Il existe une deuxième série de variétés symplectiques irréductibles, construites à partir non plus de surfaces K3 mais de tores complexes. Soit A un tore complexe de dimension 2. Le même argument que ci-dessus montre que l'espace de Douady $A^{[r+1]}$ admet une structure symplectique ; mais il n'est pas simplement connexe. Soit $s : A^{(r+1)} \longrightarrow A$ le morphisme somme (défini par $s([a_o]+\ldots+[a_r]) = \sum_i a_i$), et $\tilde{s}$ le morphisme composé $A^{[r+1]} \xrightarrow{\varepsilon} A^{(r+1)} \xrightarrow{s} A$. Alors $\hat{s}$ est lisse, et toutes ses fibres sont isomorphes. Soit K_r l'une de ces fibres ; on montre comme précédemment (cf.[1]) :

<u>Théorème</u> 4. K_r <u>est une variété symplectique irréductible</u>, <u>de dimension</u> $2r$.

Pour $r = 1$, K_r est la surface de Kummer associée à A . Mais pour $r \geq 2$, on montre que K_r n'est pas isomorphe (ni même birationnellement équivalente) à une variété de type $S^{[r]}$.

6. PÉRIODES ET DÉFORMATIONS

Soit X une variété symplectique irréductible, et soit $f : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{M}$ la déformation locale universelle de X (famille de Kuranishi, cf. Exposé V). L'espace $\mathfrak{M}$ est donc muni d'un point marqué o tel que $\mathfrak{X}_o = X$. Bogomolov démontre dans [2] que $\mathfrak{M}$ est lisse. Il est facile de voir qu'on peut supposer, quitte à réduire $\mathfrak{M}$, que toutes les fibres de f sont des variétés symplectiques irréductibles; on notera φ_s une structure symplectique sur $\mathfrak{X}_s$. On peut de plus supposer que la fibration f est topologiquement triviale, c'est-à-dire qu'il existe un difféomorphisme $u : X \times \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{X}$ commutant à la projection sur $\mathfrak{M}$, donc induisant pour chaque $s \in \mathfrak{M}$ un difféomorphisme $u_s : X \longrightarrow \mathfrak{X}_s$. On peut supposer que u_o est l'identité.

A l'aide de cette trivialisation on définit comme pour les surfaces K3 une application des périodes $\mathcal{P} : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbb{P}(H^2(X,\mathbb{C}))$, en posant $\mathcal{P}(s) = u_s^*[\varphi_s]$.

Soit $\varphi(=\varphi_o)$ la structure symplectique de X , normalisée de facon que $\int_X (\varphi\bar{\varphi})^r = 1$. Posons, pour $\alpha \in H^2(X,\mathbb{C})$,

$$q(\alpha) = \frac{r}{2}\int_X (\varphi\bar{\varphi})^{r-1}\alpha^2 + (1-r)\int_X \varphi^{r-1}\bar{\varphi}^r\alpha \,.\, \int_X \varphi^r\bar{\varphi}^{r-1}\alpha \,.$$

<u>Théorème</u> 5.

a) <u>La forme quadratique</u> q <u>est non dégénérée</u> ; <u>à un scalaire réel positif près</u>, <u>elle provient d'une forme quadratique entière sur</u> $H^2(X,\mathbb{Z})$, <u>de signature</u> $(3,b_2-3)$.

b) <u>L'application des périodes</u> $\mathcal{P}$ <u>est un isomorphisme local de</u> $\mathcal{M}$ <u>sur la sous-variété analytique</u> Ω <u>de</u> $\mathbb{P}(H^2(X,\mathbb{C}))$ <u>définie par les conditions</u>

$$q(\alpha) = 0 \quad , \quad q(\alpha+\bar{\alpha}) > 0 \ .$$

Je vais me contenter de donner le principe de la démonstration (cf.[1]). Le théorème de Torelli local entraîne que l'image de $\mathcal{P}$ est une hypersurface. D'autre part, la classe $\mathcal{P}(s) = u_s^*[\varphi_s]$ satisfait à $\mathcal{P}(s)^{r+1} = 0$, ce qui entraîne un grand nombre de conditions sur $\mathcal{P}(s)$. L'une d'entre elles est la relation $q(\mathcal{P}(s)) = 0$; comme elle est quadratique irréductible, toutes les autres doivent lui être proportionnelles. Ceci entraîne des relations très contraignantes sur l'anneau de cohomologie de X , d'où l'on déduit en particulier que la forme q est entière (à un scalaire près). Notons que c'est à partir de ces relations que Bogomolov affirme incorrectement obtenir une contradiction dans [2]. □

L'application des périodes pour une variété symplectique irréductible quelconque ressemble donc beaucoup à celle des surfaces K3. Il est tentant d'essayer de pousser l'analogie plus loin et d'obtenir des résultats d'injectivité ou de surjectivité ; mais la généralisation des méthodes des Exposés VII à XII pose des problèmes difficiles, en particulier à cause de l'absence de critère d'effectivité pour une classe de diviseur en dimension > 2.

Revenons au cas particulier des variétés $S^{[r]}$. Observons que le H^2 d'une variété ne change pas lorsqu'on retire une partie de codimension 2. On déduit donc du diagramme commutatif du n°5 des isomorphismes

$$H^2(S^{[r]},\mathbb{C}) \xrightarrow{\rho^*} H^2(B_\Delta(S^r_*),\mathbb{C})^{inv} \xrightarrow{\sim} [H^2(S^r) \oplus \sum_{i,j} \mathbb{C}.[E_{ij}]]^{inv}$$

(on désigne par E_{ij} le diviseur exceptionnel $\eta^{-1}(\Delta_{ij})$) .

On obtient donc un isomorphisme canonique

$$H^2(S^{[r]},\mathbb{C}) = H^2(S,\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}.[E] \ .$$

On vérifie alors [1] que la forme q sur $H^2(S^{[r]},\mathbb{C})$ peut être définie de la façon suivante : q coïncide avec le cup-produit sur $H^2(S,\mathbb{C})$; la classe e de E est q-orthogonale à $H^2(S,\mathbb{C})$, et on a $q(e) = -8(r-1)$.

Soient $\mathcal{S}$ un espace local de modules pour S , et $\mathcal{M}$ un espace analogue pour $X = S^{[r]}$. Lorsque on déforme S , on obtient une déformation de $S^{[r]}$, d'où (quitte à réduire $\mathcal{M}$) un morphisme $j : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{M}$. D'autre part, on a des isomorphismes locaux

$$\rho_S : \mathcal{S} \longrightarrow \Omega_S \quad , \quad \rho_X : \mathcal{M} \longrightarrow \Omega_X \; ,$$

où Ω_S (resp. Ω_X) est la sous-variété de $\mathbb{P}(H^2(S,\mathbb{C}))$ (resp. de $\mathbb{P}(H^2(X,\mathbb{C}))$) définie par

$$\omega^2 = 0, \; (\omega+\bar{\omega})^2 > 0 \; (\text{resp. } q(\alpha) = 0 \; , \; q(\alpha+\bar{\alpha}) > 0) \; .$$

Il résulte alors de l'expression de q que Ω_S s'identifie à l'orthogonal Ω_e de e dans Ω_X, et qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{j} & \mathcal{M} \\ {\scriptstyle \rho_S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_X} \\ \Omega_S & \hookrightarrow & \Omega_X \end{array} \; .$$

Ainsi $j(\mathcal{S})$ est une hypersurface lisse dans $\mathcal{M}$. Les points de $\mathcal{M}$ correspondant à des variétés $F^{[r]}$ sont donc situés sur des hypersurfaces $\rho_X^{-1}(\Omega_e)$, pour certaines classes e de $H^2(X,\mathbb{Z})$; par conséquent :

<u>Théorème</u> 6. <u>Soit</u> S <u>une surface</u> K3, <u>et</u> r <u>un entier</u> ≥ 2 . <u>La base</u> $\mathcal{M}$ <u>de la déformation locale universelle de</u> $S^{[r]}$ <u>est lisse de dimension</u> 21 ; <u>les variétés</u> $F^{[r]}$ (<u>où</u> F <u>est une surface</u> K3) <u>forment une réunion dénombrable d'hypersurfaces lisses dans</u> $\mathcal{M}$.

On a un résultat analogue pour les variétés K_r .

Il existe donc beaucoup de déformations de $S^{[r]}$ qui ne proviennent pas de déformations de S (y compris des déformations projectives, si S est projective). Je ne connais malheureusement pas de description explicite des variétés qu'on obtient ainsi, qui me semblent des généralisations naturelles des surfaces K3 . Je vais terminer en citant deux exemples très particuliers où l'on obtient une description géométrique de telles variétés :

1) Soit X une hypersurface cubique lisse dans $\mathbb{P}^5$. La variété des droites contenues dans X est une variété symplectique irréductible (projective) de dimension 4. Lorsque X varie, on obtient ainsi la déformation projective générique d'une variété $S^{[2]}$, où S est une surface K3 de degré 14 dans $\mathbb{P}^8$ (A. Beauville et R. Donagi).

2) Soit S une surface K3 projective. Il existe un espace de modules grossier pour les fibrés stables sur S de rang et de classes de Chern fixées ; il est projectif sous certaines conditions portant sur ces invariants numériques. Mukai montre qu'il

est lisse et qu'il admet une structure symplectique. Il semble difficile en général de prouver que les variétés symplectiques obtenues sont irréductibles ; mais dans certains cas particuliers, Mukai montre que ce sont des déformations de variétés $S^{[r]}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Beauville : Variétés kählériennes dont la première classe de Chern est nulle. J. of Differential Geometry 18 (1983), 755-782.

[2] F. Bogomolov : Hamiltonian Kähler manifolds. Soviet Math. Dokl.19 (1978) 1462-1465.

[3] J. Cheeger, D. Gromoll : The Splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature. J. of Differential Geometry 6 (1971), 119-128.

[4] J. Varouchas : Stabilité de la classe des variétés kählériennes par certains morphismes propres, Prépublication (université de Nancy I).

Bâtiment de Mathématiques 425
Université de Paris-Sud
91405 ORSAY Cedex (France)
ERA du CNRS n°653