ARNAUD BEAUVILLE

Application aux espaces de modules

Astérisque, tome 126 (1985), p. 141-152

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__126__141_0>

EXPOSÉ XIII

APPLICATION AUX ESPACES DE MODULES

Arnaud BEAUVILLE

Les résultats des exposés précédents permettent une description très précise des espaces de modules des surfaces K3. Nous distinguerons trois parties, correspondant respectivement au point de vue analytique, riemannien, algébrique.

1. L'ESPACE DES MODULES DES SURFACES K3 MARQUÉES

Proposition 1. Il existe un espace de modules fin $\mathfrak{M}$ pour les surfaces K3 marquées.

Rappelons que cela signifie qu'il existe une famille de surfaces K3 $f : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{M}$, et un marquage $\sigma : R^2 f_*(\mathbb{Z}) \longrightarrow L_{\mathfrak{M}}$, tels que toute famille de surfaces K3 marquée $(X \longrightarrow S, \tau)$ provienne de (f,σ) par image réciproque via un morphisme (unique) de S dans $\mathfrak{M}$. En particulier l'application $m \longmapsto (\mathfrak{X}_m, \sigma(m))$ définit une bijection de $\mathfrak{M}$ sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de surfaces K3 marquées. Précisons toute de suite, pour tempérer l'enthousiasme du lecteur, que $\mathfrak{M}$ est une variété analytique non séparée.

Démontrons la Proposition 1. Notons $\mathfrak{M}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de surfaces K3 marquées. Toute surface K3 marquée apparaît comme fibre d'une famille universelle locale $(f_\alpha : X_\alpha \longrightarrow U_\alpha , \sigma_\alpha)$ telle que l'application des périodes $\mathcal{P} : U_\alpha \longrightarrow \Omega$ soit injective (théorème de Torelli local). Cette dernière condition entraîne que deux fibres distinctes de f_α ne sont pas isomorphes (comme surfaces K3 marquées), donc que chaque U_α s'identifie à une partie de $\mathfrak{M}$; les U_α forment donc un recouvrement de $\mathfrak{M}$ par des sous-ensembles, munis chacun d'une structure de variété (complexe).

Soit m un point de $U_\alpha \cap U_\beta$, correspondant à une surface K3 marquée (X,σ). Les familles (f_α,σ_α) et (f_β,σ_β) sont deux déformations universelles locales de (X,σ), donc sont isomorphes dans un voisinage de m. On en déduit que $U_\alpha \cap U_\beta$

est ouvert dans U_α et dans U_β , et que les structures de variétés induites sur $U_\alpha \cap U_\beta$ par celles de U_α et de U_β coïncident. On obtient donc par recollement une structure de variété sur $\mathcal{M}$.

Pour construire $\mathcal{X}$, choisissons pour tout $m \in \mathcal{M}$ un représentant $(\mathcal{X}_m, \sigma_m)$ de m , et posons $\mathcal{X} = \coprod_{m \in \mathcal{M}} \mathcal{X}_m$. Soit $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{M}$ l'application telle que $f(\mathcal{X}_m) = \{m\}$. Observons que pour toute surface K3 marquée (X,σ) de classe m , il existe en vertu de l'Exposé IX, Prop.6, un unique isomorphisme de (X,σ) sur $(\mathcal{X}_m, \sigma_m)$. Ceci permet d'identifier canoniquement chaque X_α à une partie de $\mathcal{X}$, de façon à ce que f_α coïncide avec f et $\sigma_\alpha(m)$ avec σ_m pour tout $m \in U_\alpha$. Le même raisonnement que ci-dessus montre que les structures complexes sur X_α se recollent en une structure complexe sur $\mathcal{X}$, faisant de $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{M}$ une famille de surfaces K3 . Enfin les marquages σ_α se recollent en un marquage $\sigma : R^2 f_*(\mathbb{Z}) \longrightarrow L_{\mathcal{M}}$.

Il reste à vérifier que la famille (f,σ) est universelle. Soit $(X \longrightarrow S\ ,\ \tau)$ une famille marquée de surfaces K3 . Définissons $u : S \longrightarrow \mathcal{M}$ par $u(s) = [X_s, \tau_s]$, et soit $v : X \longrightarrow \mathcal{X}$ l'application qui induit sur chaque fibre X_s l'unique isomorphisme de (X_s, τ_s) sur $(\mathcal{X}_{u(s)}, \sigma_{u(s)})$. Il s'agit de prouver que u et v sont holomorphes ; la vérification étant locale, cela résulte immédiatement de la propriété universelle des familles $X_\alpha \longrightarrow U_\alpha$. □

Remarques. 1) La démonstration s'applique à tout type de variétés pour lesquelles il existe un entier n tel que :

a) l'application des périodes pour les n-formes est localement injective ;

b) tout automorphisme agissant trivialement sur H^n est trivial ;

c) la déformation locale universelle (espace de Kuranishi) est lisse.

2) Soit $g : X \longrightarrow S$ une famille C^∞ de surfaces K3 sur une variété différentielle S (cf. Exposé V , ou n°2 plus bas), munie d'un marquage τ . Le même argument que ci-dessus montre qu'il existe un unique morphisme $u : S \longrightarrow \mathcal{M}$ de classe C^∞ tel que la famille (g,τ) s'identifie à l'image réciproque par u de la famille universelle (f,σ).

L'application des périodes $\mathcal{P} : \mathcal{M} \longrightarrow \Omega$ est holomorphe. Les résultats des exposés précédents se traduisent comme suit :

Proposition 2. L'application des périodes $\mathcal{P} : \mathcal{M} \longrightarrow \Omega$ est étale et surjective. Pour $P \in \Omega$, la fibre $\mathcal{P}^{-1}(P)$ s'identifie à l'ensemble des chambres de $\mathcal{C}_P$ (c'est donc un ensemble principal homogène sous le groupe $W_P \times \{\pm 1\}$).

Corollaire. La variété $\mathcal{M}$ a deux composantes connexes, qui sont échangées par l'involution $(X,\sigma) \longmapsto (X,-\sigma)$. Chacune de ces composantes est non séparée.

Soit $\pi : \Omega' \longrightarrow \Omega$ le revêtement étale double de Ω dont la fibre en $P \in \Omega$ est l'ensemble des composantes connexes de $\mathcal{C}_P$. En associant à toute surface K3 marquée (X,σ), outre sa période, la composante $\sigma(\mathcal{C}_X^+)$, on obtient une factorisation $\mathcal{P} : \mathcal{M} \xrightarrow{\mathcal{P}'} \Omega' \xrightarrow{\pi} \Omega$.

Lemme 1. Le revêtement $\pi : \Omega' \longrightarrow \Omega$ est trivial.

On peut le déduire facilement de l'étude du groupe $SO(L_{\mathbb{R}})$; donnons ici une démonstration directe. Fixons un 3-plan positif orienté F. Soient $P \in \Omega$ et $x \in \mathcal{C}_P$. Puisque $F^{\perp}$ est négatif, la projection orthogonale de $P \oplus \mathbb{R}x$ sur F est un isomorphisme, donc détermine une orientation de $P \oplus \mathbb{R}x$. Il existe alors une composante $\mathcal{C}_P^+$ (et une seule) de $\mathcal{C}_P$ telle que, pour toute base directe (a,b) de P et tout $x \in \mathcal{C}_P^+$, la base (a,b,x) de $P \oplus \mathbb{R}x$ soit directe. On a ainsi construit une section du revêtement double π, d'où le lemme. □

Notons Ω_i' $(i=0,1)$ les composantes de Ω', et posons $\mathcal{M}_i = \mathcal{P}'^{-1}(\Omega_i')$. L'involution $(X,\sigma) \longrightarrow (X,-\sigma)$ échange $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_1$; compte tenu de la surjectivité de $\mathcal{P}$, cela entraîne que $\mathcal{P}' : \mathcal{M}_i \longrightarrow \Omega_i'$ est surjectif. Il existe une partie dense T de Ω telle que Δ_P soit vide pour $P \in T$ (cela résulte par exemple du Th.1 de l'Exposé VI, ou encore du théorème de Baire). L'ensemble $T' = \pi^{-1}(T)$ est dense dans Ω' ; pour $P' \in T'$, la Prop.1 entraîne que la fibre $\mathcal{P}'^{-1}(P')$ est réduite à un point. Si $\mathcal{M}$ était séparé, on en conclurait que $\mathcal{P}'$ est bijective, c'est-à-dire (Prop.1) que Δ_P est vide pour tout $P \in \Omega$, ce qui est absurde. D'autre part, supposons $\mathcal{M}_0$ non connexe, de sorte qu'il existe une partition $\mathcal{M} = V_1 \cup V_2$ en deux ouverts disjoints non vides. On a alors $\Omega_0' = \mathcal{P}'(V_1) \cup \mathcal{P}'(V_2)$, et l'ouvert $\mathcal{P}'(V_1) \cap \mathcal{P}'(V_2)$ de Ω_0' est non vide puisque Ω_0' est connexe, donc rencontre T', ce qui conduit à une contradiction.

Remarques. - 1) Le fait que $\mathcal{M}$ n'est pas séparé est lié à un phénomène, déjà observé par Atiyah, de "non-unicité de la résolution simultanée". Notons D le disque unité. Soit $f : X \longrightarrow D$ une famille de surfaces K3, lisse sur le disque épointé, mais qui acquiert à l'origine un point double ordinaire $s \in X_0$. Supposons l'espace total X lisse, de sorte que f est définie, dans des coordonnées locales convenables en s, par $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ D \arrow[r, "u"] & D \end{tikzcd}$$

où $u(t) = t^2$, et où f' est l'image réciproque de f par u .

Alors X' a un point double ordinaire s' au-dessus de s (défini localement par $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$). Dans l'éclatement de ce point double, le diviseur exceptionnel est une quadrique lisse, donc une surface réglée (de deux façons différentes); on montre qu'on peut contracter chacun de ces réglages pour obtenir une variété <u>lisse</u> X_i $(i = 1,2)$, dominant X' . De plus la projection $f_i : X_i \longrightarrow D$ est lisse, et la fibre $f_i^{-1}(0)$ est la surface $\hat{X}_o$ obtenue par éclatement de X_o en s .

On a ainsi construit deux familles de surfaces K3 lisses sur D , et un isomorphisme entre ces deux familles sur le disque épointé D^* ; mais cet isomorphisme ne se prolonge pas au-dessus de D . Choisissons des marquages σ_i de f_i qui coïncident sur D^* ; on associe alors à (f_i,σ_i) un morphisme $p_i : D \longrightarrow \mathcal{M}$, et ces deux morphismes coïncident sur D^* . Si $\mathcal{M}$ était séparé, on aurait $p_1 = p_2$ et les deux familles seraient isomorphes, ce qui n'est pas. En fait on montre facilement que les points $p_1(0)$ et $p_2(0)$ correspondent à la même surface $\hat{X}_o$, munie de deux marquages qui diffèrent par la réflexion s_δ , où δ est la classe de la courbe exceptionnelle de $\hat{X}_o$.

2) Notons Γ le groupe discret $O(L)$. Le groupe Γ opère sur $\mathcal{M}$ (par $\gamma.(X,\sigma) = (X,\gamma \circ \sigma)$), et le quotient $\mathcal{M}/\Gamma$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme de surfaces K3. La Prop.2 entraîne que <u>l'application $\mathcal{M}/\Gamma \longrightarrow \Omega/\Gamma$ déduite de $\mathcal{P}$ est bijective</u>. Mais Γ n'opère pas proprement sur $\mathcal{M}$ ni sur Ω (puisque le stabilisateur d'un point (X,σ) s'identifie au groupe d'automorphismes de X , qui peut être infini). Il n'existe donc aucune structure analytique raisonnable sur les ensembles $\mathcal{M}/\Gamma$ et Ω/Γ .

Nous allons préciser un peu la Prop.2. Notons $K\Omega$ l'ensemble des couples $(P,k) \in \Omega \times L_{\mathbb{R}}$ tels que k appartienne à une chambre de $\mathcal{C}_P$ (autrement dit, tels que k soit orthogonal à P , qu'on ait $k^2 > 0$ et $k.\delta \neq 0$ quel que soit $\delta \in \Delta_P$).

<u>Lemme</u> 2. $K\Omega$ <u>est une sous-variété (réelle) localement fermée de</u> $\Omega \times L_{\mathbb{R}}$.

Il est clair que la condition "k orthogonal à P" (resp. $k^2 > 0$) est fermée (resp. ouverte). La dernière condition signifie aussi que le 3-plan $P \oplus \mathbb{R}k$ n'est orthogonal à aucun élément de Δ , ce qui est une condition ouverte (Exposé VII, Proposition 3).

Considérons sur $K\Omega$ la relation d'équivalence : "$(P,k) \sim (Q,\ell)$ si $P = Q$ et si k et ℓ sont dans une même chambre de $\mathcal{C}_P$" . On vérifie sans difficultés que cette relation d'équivalence est régulière, c'est-à-dire que son graphe G est une sous-variété de $K\Omega \times K\Omega$ et que les projections $G \longrightarrow K\Omega$ sont lisses. Cela entraîne l'existence d'une variété différentielle $\breve{\Omega}$, quotient de $K\Omega$ par $\sim$, telle que la projection $\pi : \tilde{\Omega} \longrightarrow \Omega$ soit étale. Les points de $\breve{\Omega}$ sont les paires (P,C) , où $P \in \Omega$ et où C est une chambre de $\mathcal{C}_P$. Il existe une unique structure complexe sur $\breve{\Omega}$ telle que π soit holomorphe.

Considérons l'application $\tilde{\mathcal{P}} : \mathcal{M} \longrightarrow \tilde{\Omega}$ définie par $\tilde{\mathcal{P}}(X,\sigma) = (\mathcal{P}(X,\sigma),\sigma(\mathcal{K}_X))$. Puisque $\pi \circ \tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$, l'application $\mathcal{P}$ est un morphisme étale ; d'après la Prop.2 elle est bijective. Par conséquent :

Proposition 3. L'application $\tilde{\mathcal{P}} : \mathcal{M} \longrightarrow \tilde{\Omega}$ est un isomorphisme.

2. L'ESPACE DES MODULES DE MÉTRIQUES DE KAHLER-EINSTEIN ET D'EINSTEIN

Une famille C^∞ de variétés analytiques est un morphisme lisse de variétés différentielles $f : X \longrightarrow S$, muni d'une structure complexe intégrable sur le fibré tangent relatif $T(X/S)$; autrement dit, une structure complexe sur chaque X_s , variant de façon C^∞ avec s (cf.Exposé V). Une métrique relative sur X/S est une forme quadratique C^∞ sur $T(X/S)$ induisant sur chaque fibre une métrique riemannienne ; on dira qu'une métrique relative est hermitienne, kählérienne, d'Einstein... s'il en est ainsi de sa restriction à chaque fibre.

Soit $f : X \longrightarrow S$ une famille C^∞ de surfaces K3. Les espaces $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X_s)$ s'organisent en un fibré vectoriel réel sur S , dans lequel l'ensemble des classes de Kähler $\mathcal{K}(X/S) = \bigcup_{s\in S} \mathcal{K}_{X_s}$ est ouvert. Nous appellerons classe de Kähler relative pour X/S une section de classe C^∞ du fibré $\mathcal{K}(X/S)$ sur S . A toute métrique kählérienne relative est associée une classe de Kähler relative ; le théorème de S.T. Yau entraîne qu'il existe une et une seule métrique de Kähler-Einstein relative sur X/S de classe de Kähler relative fixée.

Considérons la famille universelle $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{M}$ pour les surfaces K3 marquées, et posons $K\mathcal{M} = \mathcal{K}(\mathcal{X}/\mathcal{M})$.

<u>Proposition</u> 4. <u>La variété différentielle</u> $K\mathcal{M}$ <u>est un espace de modules fin pour les surfaces</u> K3 <u>marquées munies d'une classe de Kähler</u> (<u>resp</u>. <u>d'une métrique de Kähler-Einstein</u>).

Notons $K\mathcal{X}/K\mathcal{M}$ l'image réciproque sur $K\mathcal{M}$ de la famille $\mathcal{X}/\mathcal{M}$; elle admet une classe de Kähler relative $\kappa_{\mathcal{M}}$, correspondant à la section tautologique du fibré $\mathcal{K}(K\mathcal{X}/K\mathcal{M}) = K\mathcal{M} \times_{\mathcal{M}} K\mathcal{M}$ sur $K\mathcal{M}$. Soit alors $X \longrightarrow S$ une famille de surfaces K3 marquées, et κ une section de $\mathcal{K}(X/S)$. D'après la remarque 2 du n°1, il existe un unique morphisme $u : S \longrightarrow \mathcal{M}$ de classe C^{∞} tel que X s'identifie à l'image réciproque de $\mathcal{X}$ par u . On a alors $\mathcal{K}(X/S) = u^{*}\mathcal{K}(\mathcal{X}/\mathcal{M})$; la donnée de κ est donc équivalente à celle d'un morphisme $v : S \longrightarrow K\mathcal{M}$ relevant u , de façon que $\kappa = v^{*}\kappa_{\mathcal{M}}$. On en déduit aussitôt la proposition. □

Les points de $K\mathcal{M}$ sont donc les classes d'isomorphisme de triplets (X,σ,k), où (X,σ) est une surface K3 marquée et $k \in H^{2}(X,\mathbb{R})$ une classe de Kähler. En associant à un tel point le couple $(\wp(X,\sigma),\sigma(k)) \in \Omega \times L_{\mathbb{R}}$, on obtient une application $\mathfrak{O} : K\mathcal{M} \longrightarrow K\Omega$ (où $K\Omega$ est la sous-variété de $\Omega \times L_{\mathbb{R}}$ formée des couples (P,k) tels que k appartienne à une chambre de $\mathcal{C}_P$, cf. n°1, lemme 2).

<u>Proposition</u> 5 . <u>L'application</u> $\mathfrak{O} : K\mathcal{M} \longrightarrow K\Omega$ <u>est un isomorphisme de variétés différentielles</u>.

Il en résulte en particulier que la variété $K\mathcal{M}$ est <u>séparée</u>.(voir aussi[1] Chapter 14)Reprenant les notations du n°1 , on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} K\mathcal{M} \arrow[r, "\mathfrak{O}"] \arrow[d] & K\Omega \arrow[d] \\ \mathcal{M} \arrow[r, "\tilde{\wp}"] & \tilde{\Omega} \end{tikzcd} ;$$

$K\mathcal{M}$ et $K\Omega$ sont des ouverts de fibrés vectoriels sur $\mathcal{M}$ et $\tilde{\Omega}$ respectivement, et $\mathfrak{O}$ est induit par un morphisme de fibrés vectoriels. Puisque $\tilde{\wp}$ est un isomorphisme, il suffit donc de vérifier que $\mathfrak{O}$ induit un isomorphisme sur chaque fibre, ce qui résulte de la caractérisation des classes de Kähler sur une surface K3 (Exposé X , Théorème 2).

<u>Corollaire</u>. <u>Le groupe</u> $\Gamma = O(L)$ <u>opère proprement sur</u> $K\mathcal{M}$. <u>L'espace quotient</u> $KE = K\mathcal{M}/\Gamma$ <u>est un espace de modules grossier pour les surfaces</u> K3 <u>munies d'une classe de Kähler</u> (<u>resp</u>. <u>d'une métrique de Kähler-Einstein</u>).

(L' "espace" KE est une "Q-variété" , localement isomorphe au quotient d'une variété différentielle par un groupè fini.)

Pour démontrer la première assertion, il suffit de prouver que Γ opère proprement sur $K\Omega$. Notons $\overline{K\Omega}$ le sous-ensemble de $\Omega \times L_{\mathbb{R}}$ formé des couples (P,k) avec $k^2 > 0$ et k orthogonal à P . Le groupe des similitudes de $L_{\mathbb{R}}$ opère transitivement sur $\overline{K\Omega}$, et le stabilisateur d'un point (P,k) est le sous-groupe compact $SO(P) \times O((P + \mathbb{R}k)^{\perp})$. On en déduit par l'argument habituel que Γ opère proprement sur $\overline{K\Omega}$, donc aussi sur la partie stable $K\Omega$.

Les points de KE s'identifient aux classes d'isomorphisme de couples (X,k), où X est une surface K3 et k une classe de Kähler sur X . Pour toute famille C^{∞} de surfaces K3 $X \longrightarrow S$ munie d'une classe de Kähler relative k , on définit une application $u : S \longrightarrow KE$ en posant $u(s) = [(X_s,k_s)]$; la seconde assertion de l'énoncé signifie que u est de classe C^{∞} . Or ceci se vérifie localement sur S , de sorte qu'on peut supposer la famille X/S marquée ; alors u provient par passage aux quotients d'un morphisme $S \longrightarrow K\mathcal{M}$, d'où notre assertion. □

<u>Remarques</u>. 1) Le groupe Γ n'opère pas librement sur $K\mathcal{M}$: le stabilisateur d'un point (X,σ,k) s'identifie à l'ensemble (fini) des automorphismes de X qui préservent k . Cela entraîne d'une part que KE n'est pas lisse, d'autre part que la famille universelle $K\mathfrak{X} \longrightarrow K\mathcal{M}$ ne se descend pas sur KE .

2) Le groupe $\mathbb{R}_+^*$ opère sur $K\mathcal{M}$ et sur $K\Omega$ par

$$t.(X,\sigma,k) = (X,\sigma,tk), \qquad t.(P,k) = (P,tk) ;$$

cette action commute à celle de Γ . On peut se débarrasser d'un facteur $\mathbb{R}_+^*$ trivial en imposant la normalisation $k^2 = 1$, c'est-à-dire en ne considérant que des métriques de volume 1 . On obtient alors des espaces $K_1\mathcal{M}$, $K_1\Omega$ et K_1E , et des isomorphismes canoniques

$$K\mathcal{M} = K_1\mathcal{M} \times \mathbb{R}_+^* \qquad K\Omega = K_1\,\Omega \times \mathbb{R}_+^* \qquad KE = K_1E \times \mathbb{R}_+^* \quad .$$

Nous allons maintenant nous intéresser aux métriques d'Einstein sur une surface K3 , sans référence à la structure complexe. Nous appellerons "variété de type K3" une variété différentielle difféomorphe à une surface K3 (rappelons que toutes les surfaces K3 sont difféomorphes entre elles) . Notons $\tilde{\mathcal{E}}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de triplets (M,σ,g), où M est une variété de type K3, σ est un marquage de M et g une métrique d'Einstein sur M .
Soit $(M,\sigma,g) \in \tilde{\mathcal{E}}$. Nous verrons dans l'Exposé XV que le groupe d'holonomie de (M,g)

est réduit à Sp(1), ce qui entraîne l'existence d'une action du corps des quaternions $\mathbb{H}$ sur T M de façon que les structures complexes sur M pour lesquelles g est kählérienne sont obtenues par l'action des quaternions purs de norme 1. De plus, le 3-plan positif orienté de $L_{\mathbb{R}}$ engendré par la période de (M,σ) et la classe de Kähler de g, pour l'une quelconque des structures complexes précédentes, ne dépend pas en fait du choix de cette structure complexe (Exposé X, n°2) : on le notera $r_1(M,\sigma,g)$.

Soit G la grassmannienne des 3-plans positifs orientés de $L_{\mathbb{R}}$, et soit G^o l'ouvert de G formé des 3-plans qui ne sont orthogonaux à aucun élément de Δ (Exposé VII, prop.3). Posant $r_2(M,\sigma,g) = \mathrm{vol}(g)$, on définit une application $r = (r_1,r_2)$ de $\tilde{\mathcal{E}}$ dans $G^o \times \mathbb{R}_+^*$. On a d'autre part une application surjective $\alpha : K\mathfrak{M} \longrightarrow \tilde{\mathcal{E}}$, qui associe à (X,σ,k) le triplet (X,σ,g), où g est la métrique de Kähler-Einstein de classe k ; considérons enfin l'application $\beta : K\Omega \to G^o \times \mathbb{R}_+^*$ définie par $\beta_1(P,k) = P + \mathbb{R}k$, $\beta_2(P,k) = (k^2)^{1/2}$. On déduit de ce qui précède un diagramme commutatif (d'ensembles)

$$\begin{tikzcd} K\mathfrak{M} \arrow[r, "\mathfrak{P}"] \arrow[d, "\alpha"'] & K\Omega \arrow[d, "\beta"] \\ \tilde{\mathcal{E}} \arrow[r, "r"] & G^o \times \mathbb{R}_+^* \end{tikzcd} ;$$

comme $\mathfrak{P}$ est bijectif et induit une bijection entre les fibres de α et les fibres correspondantes de β, on conclut que r est bijectif.

L'ensemble $\mathcal{E}$ des classes d'isomorphisme de couples (M,g), où M est une variété de type K3 et g une métrique d'Einstein sur M, s'identifie à $\tilde{\mathcal{E}}/\Gamma$, donc (via r) à $(G^o \times \mathbb{R}_+^*)/\Gamma$, c'est-à-dire à $(G^o/\Gamma) \times \mathbb{R}_+^*$. On vérifie par la méthode usuelle que Γ opère proprement sur G^o, de sorte que le quotient G^o/Γ est une "Q-variété". On en déduit comme d'habitude :

Proposition 6. La Q-variété $(G^o/\Gamma) \times \mathbb{R}_+^*$ est un espace de modules grossier pour les variétés de type K3 munies d'une métrique d'Einstein.

Remarques. 3) On peut montrer comme ci-dessus que $G^o \times \mathbb{R}_+^*$ est un espace de modules fin pour les variétés de type K3 marquées munies d'une métrique d'Einstein.

4) Les espaces G^o ou G^o/Γ ont des "complétions" naturelles, à savoir G ou G/Γ. Les points à l'infini correspondent à des quasi-métriques sur des surfaces K3 qui dégénèrent le long d'un nombre fini de courbes de carré (-2). Il serait intéressant de décrire précisément les quasi-métriques qui apparaissent ainsi.

3. L'ESPACE DES MODULES DES SURFACES K3 POLARISÉES

Soit X une surface K3 . On dit qu'une classe $d \in H^2(X,\mathbb{Z})$ est une polarisation (resp. une pseudo-polarisation) sur X si c'est la classe d'un diviseur D ample (resp. pseudo-ample, c'est-à-dire tel que $D^2 > 0$ et $D.C \geq 0$ pour toute courbe C sur X). Toute polarisation est une pseudo-polarisation ; une surface pseudo-polarisée est projective (cf. Exposé III). Une (pseudo-) polarisation d est dite primitive si l'élément d de $H^2(X,\mathbb{Z})$ est primitif, c'est-à-dire non divisible ; le degré de d est le nombre d^2 . Il résulte de l'Exposé IV qu'une classe $d \in H^2(X,\mathbb{Z})$ est une polarisation (resp. une pseudo-polarisation) si et seulement si d appartient à $\mathcal{K}_X$ (resp. à l'adhérence de $\mathcal{K}_X$ dans $\mathcal{C}_X$).

Soit $f : X \longrightarrow S$ une famille de surfaces K3. Une polarisation (resp. pseudo-polarisation) sur cette famille est une section sur S du faisceau $R^2f_*(\mathbb{Z})$, qui induit sur chaque fibre X_s une polarisation (resp. pseudo-polarisation) d_s .
Soit $\sigma : R^2f_*(\mathbb{Z}) \longrightarrow L_S$ un marquage de f ; lorsque s varie, $\sigma_s(d_s)$ est un élément constant q de L .
On dira alors que la famille (f,σ) est (pseudo-) polarisée de type q .

Soit q un élément de L , de carré > 0 . Notons

Ω_q l'ensemble des éléments P de Ω orthogonaux à q ;

Ω_q^o l'ensemble des $P \in \Omega_q$ tels que q ne soit orthogonal à aucun élément de Δ_P ;

$\tilde{\Omega}_q$ l'ensemble des paires $(P,C) \in \tilde{\Omega}$ telles que $q \in \bar{C}$;

$\tilde{\Omega}_q^o$ l'ensemble des paires $(P,C) \in \tilde{\Omega}$ telles que $q \in C$.

On a un diagramme

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\Omega}_q^o \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_q^o"] & \tilde{\Omega}_q \arrow[d, "\pi_q"] \\
\Omega_q^o \arrow[r, hook] & \Omega_q
\end{tikzcd} ,$$

où les flèches verticales sont induites par π . D'après la Prop.3 de l'Exposé VII, Ω_q^o est ouvert dans Ω_q , qui est une sous-variété fermée de Ω . De même $\tilde{\Omega}_q$, qui est l'adhérence dans $\tilde{\Omega}$ de $\tilde{\Omega}_q^o$, est une sous-variété fermée de $\tilde{\Omega}$, et $\tilde{\Omega}_q^o$ est ouvert dans Ω_q . Le morphisme $\pi_q^o : \tilde{\Omega}_q^o \longrightarrow \Omega_q^o$ est un isomorphisme, puisque un élément de $\mathcal{C}_P$ non situé sur un mur appartient à une unique chambre de $\mathcal{C}_P$. Le morphisme $\pi_q : \tilde{\Omega}_q \longrightarrow \Omega_q$ est étale surjectif, mais la fibre $\pi_q^{-1}(P)$ a plus d'un élément pour $P \in \Omega_q - \Omega_q^o$ (ce qui prouve que $\tilde{\Omega}_q$ n'est pas séparé).

Si l'on considère Ω comme la sous-variété de $\mathbb{P}(L_{\mathbb{C}})$ définie par les équations $\omega^2 = 0$, $\omega.\bar{\omega} > 0$, alors Ω_q est l'hypersurface de Ω définie par $\omega.q = 0$, C'est donc un ouvert d'une quadrique lisse de dimension 19 dans $\mathbb{P}((L_q)_{\mathbb{C}})$, où L_q désigne l'orthogonal de q dans L . D'autre part Ω_q s'identifie à la grassmannienne des 2-plans positifs orientés dans $(L_q)_{\mathbb{R}}$, donc à l'espace homogène symétrique $SO(2,19)/SO(2) \times SO(19)$. On en déduit que Ω_q a deux composantes connexes, qui sont échangées par l'involution qui associe à un 3-plan orienté le même 3-plan muni de l'orientation opposée. Il en est de même pour Ω_q et pour l'ouvert dense Ω_q^o .

<u>Proposition</u> 7. <u>La variété</u> Ω_q^o <u>(resp.</u>$\tilde{\Omega}_q$) <u>est un espace de modules fin pour les surfaces</u> K3 <u>marquées polarisées</u> (<u>resp</u>. <u>pseudo-polariées</u>) <u>de type</u> q .

Soit $(f : X \longrightarrow S,\sigma)$ une famille de surfaces K3 marquées ; d'après les prop.1 et 3, la donnée d'une telle famille équivaut à celle d'un morphisme $u : S \longrightarrow \tilde{\Omega}$. Dire que (f,σ) est polarisée (resp. pseudo-polarisée) de type q signifie qu'on a $q \in \sigma_s(\mathcal{K}_{X_s})$ (resp. $q \in \overline{\sigma_s(\mathcal{K}_{X_s})}$) pour tout $s \in S$, c'est-à-dire que u prend ses valeurs dans $\tilde{\Omega}_q^o$ (resp.$\tilde{\Omega}_q$), d'où la proposition.

Notons Γ_q le fixateur de q dans $O(L)$. Le groupe Γ_q est un sous-groupe discret de $G = O((L_q)_{\mathbb{R}})$; comme Ω_q s'identifie à un quotient de G par un sous-groupe compact, l'argument usuel entraîne que Γ_q opère proprement sur Ω_q .

<u>Proposition</u> 8. <u>Soient</u> n <u>un entier pair</u> ≥ 2 , <u>et</u> q <u>un élément primitif de</u> L <u>de carré</u> n . <u>L'espace analytique</u> Ω_q^o/Γ_q (<u>resp</u>.Ω_q/Γ_q) <u>est un espace de modules grossier pour les surfaces</u> K3 <u>munies d'une polarisation</u> (<u>resp</u>. <u>pseudo-polarisation</u>) <u>primitive de degré</u> n .

Cela signifie que les points de cet espace s'identifient aux classes d'isomorphisme de paires (X,d), de façon que pour toute famille $X \longrightarrow S$ de surfaces K3, munie d'une (pseudo-)polarisation primitive de degré n , l'application $s \longmapsto [X_s,d_s]$ de S dans l'espace des modules soit holomorphe.

Observons d'autre part que si r est un autre élément primitif de L de carré n , il existe $\sigma \in O(L)$ tel que $\sigma(q) = r$ (Exposé IX, prop.1). Ceci entraîne en particulier qu'il existe un isomorphisme canonique de Ω_q/Γ_q sur Ω_r/Γ_r .

Démontrons la prop.8 dans le cas polarisé. D'après la prop.7 , Ω_q^o s'identifie à l'ensemble des classes d'isomorphisme de surfaces K3 marquées (X,σ) telles que $\sigma^{-1}(q)$ soit une polarisation de X . Deux marquages de X fournissent la même polarisation si et seulement s'ils diffèrent par un élément de Γ_q ; de plus, d'après l'observation qui précède la démonstration, toute polarisation primitive de degré n

sur X est obtenue de cette manière. Ainsi Ω_q^o/Γ_q s'identifie à l'ensemble des classes d'isomorphisme de paires (X,d). Soit $f : X \longrightarrow S$ une famille de surfaces K3, munie d'une polarisation induisant sur chaque fibre une polarisation primitive de degré n ; soit $u : S \rightarrow \Omega_q^o/\Gamma_q$ l'application définie par $u(s) = [X_s, d_s]$. La vérification que u est holomorphe étant locale, on peut supposer que f admet un marquage σ ; quitte à modifier σ par une isométrie de L, on peut supposer de plus $\sigma(d) = q$. Alors u provient par passage au quotient du morphisme des périodes $\mathcal{P} : S \longrightarrow \Omega_q^o$ associé à la famille (f,σ), donc est holomorphe.

Dans le cas pseudo-polarisé, on voit de même que l'ensemble des classes d'isomorphisme de paires (X,d) s'identifie à l'ensemble $\tilde{\Omega}_q/\Gamma_q$. Mais on sait que pour tout $P \in \Omega_q$, le sous-groupe de Γ_q engendré par les réflexions s_δ pour $\delta \in \Delta_P$, $\delta.q = 0$, opère transitivement sur $\pi_q^{-1}(P)$. On en déduit que π_q induit une bijection de $\tilde{\Omega}_q/\Gamma_q$ sur Ω_q/Γ_q. La fin de la démonstration est la même que dans le cas polarisé. □

<u>Corollaire</u>. <u>L'espace des modules des surfaces</u> K3 <u>munies d'une pseudo-polarisation primitive de degré</u> n <u>est un espace analytique irréductible</u> $\mathcal{M}_n$. <u>Les classes des surfaces</u> polarisées <u>forment un ouvert</u> $\mathcal{M}_n^o$ <u>de</u> $\mathcal{M}_n$.

Il s'agit de montrer que le groupe Γ_q échange les deux composantes de Ω_q ; il suffit pour cela d'exhiber un élément P de Ω_q et une isométrie γ de Γ_q qui préserve P, mais change son orientation. Rappelons qu'on a une décomposition orthogonale

$$L = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2 \oplus M ,$$

où H_i $(i=0,1,2)$ est un plan hyperbolique. De plus, en vertu de la Prop.1 de l'Exposé IX, on peut supposer $q \in H_0$. Soit γ l'isométrie de L qui coïncide avec l'identité sur H_0, H_1 et M, et avec -1 sur H_2 ; on a $\gamma \in \Gamma_q$. Soient x_i $(i=1,2)$ un élément de H_i de carré > 0, et P le 2-plan engendré par x_1 et x_2 ; alors P et γ ont les propriétés requises. □

<u>Remarque</u>. On peut aussi construire l'espace $\mathcal{M}_n^o$ algébriquement, de la façon suivante. On montre que si L est un fibré en droites ample sur une surface K3, le fibré $L^{\otimes 3}$ est très ample, donc permet (modulo le choix d'une base de $H^0(L^{\otimes 3})$) de plonger la surface dans un espace projectif $\mathbb{P}^N$. On paramètre ainsi les surfaces K3, munies d'une polarisation L de degré n et d'une base de $H^0(L^{\otimes 3})$, par un schéma de Hilbert H_n ; l'espace $\mathcal{M}_n^o$ s'identifie alors au quotient $H_n^0/PG\ell(N)$. On obtient de même $\mathcal{M}_n$ comme quotient $H_n/PG\ell(N)$, où H_n paramètre des surfaces K3 dans $\mathbb{P}^N$

pouvant admettre des points doubles rationnels.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.L. Besse : Einstein manifolds, Springer Verlag, à paraître.

Bâtiment de Mathématiques 425
Université de Paris-Sud
91405 Orsay cedex (France)
ERA du CNRS n°653