PAUL GAUDUCHON

Les métriques standard d'une surface complexe compacte a premier nombre de Betti pair

Astérisque, tome 126 (1985), p. 129-135

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__126__129_0>

EXPOSÉ XI

LES MÉTRIQUES STANDARD D'UNE SURFACE COMPLEXE COMPACTE A PREMIER NOMBRE DE BETTI PAIR

Paul GAUDUCHON

Les deux exposés qui suivent sont consacrés à la démonstration du fait que toutes les surfaces K3 sont kählériennes. L'objet de cet exposé est de démontrer le résultat suivant, qui fournit l'ingrédient technique essentiel :

Théorème 1. Toute métrique hermitienne sur une surface complexe compacte à premier nombre de Betti pair est conforme à une métrique hermitienne, unique à homothétie près, dont la forme de Kähler est la partie de type (1,1) d'une 2-forme réelle fermée.

Nous déduirons ce Théorème 1 d'un résultat général de géométrie hermitienne, le Théorème 2, et de la structure de Hodge particulière, déterminée par K. Kodaira, d'une surface complexe compacte à b_1 pair.

Avant d'énoncer et de démontrer le Théorème 2 nous introduisons quelques éléments indispensables de géométrie hermitienne.

1. NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Nous désignons par (M,J) une variété presque complexe de dimension $n = 2m$, TM le fibré tangent de M , $\Lambda^r M$ le fibré des r-formes extérieures (réelles), $r = 0,\dots,n$, $\Lambda^* M = \sum_{r=0}^{n} \Lambda^r M$ le fibré des formes extérieures.

Une métrique hermitienne est une métrique riemannienne g telle que l'opérateur presque complexe J soit une isométrie de l'espace tangent en tout point de M .

La forme de Kähler de g est la 2-forme réelle de type (1,1) ω définie en un point x de M pour tous vecteurs X,Y de $T_x M$ par

$$\omega(X,Y) = g(JX,Y) .$$

L'opérateur J s'étend, par dualité métrique, au fibré $\Lambda^* M$ des formes extérieures. En fait, cette extension, encore notée J, ne dépend pas de la métrique hermitienne g et est définie pour $X_1,\dots,X_r \in T_x M$ et $\varphi \in \Lambda^2_x M$ par

$$J\varphi(X_1,\dots,X_r) = (-1)^r \varphi(JX_1,\dots,JX_r)$$

A côté de la différentielle extérieure d nous définissons l'opérateur d^c par la formule

$$d^c = - J^{-1} d J .$$

Nota. Lorsque J est intégrable, les opérateurs d et d^c se décomposent, à la manière usuelle, en

$$d = d' + d'' \quad , \quad d^c = i(d'' - d') .$$

Le produit scalaire ponctuel (resp. global) de deux champs de vecteurs ou de deux formes extérieures est noté $(\ , \ )$ (resp. $< , >$).

En particulier, la trace $\mathrm{tr}\,\varphi$ d'une 2-forme φ est le produit scalaire (φ,ω) de φ et de la forme de Kähler ω.

Les adjoints formels de d et d^c sont notés δ et δ^c respectivement ($\delta^c = - J^{-1}\delta J$).

L'opérateur $*$ de Hodge est défini, à la manière usuelle, pour φ et ψ dans $\Lambda^*_x M$, par

$$\varphi\wedge(*\psi) = (\varphi,\psi).v_g$$

où $v_g = \frac{1}{m!}\omega^m$ est la forme volume de g.

On a $\quad \delta = - *d* \quad , \quad \delta^c = - *d^c* .$

Si $n = 4$, l'opérateur $*$ de Hodge induit une involution sur le fibré $\Lambda^2 M$. Les 2-formes $*$-invariantes (resp. $*$-anti-invariantes) sont dites auto-duales (resp. anti-auto-duales). Le fibré $\Lambda^+ M$ des 2-formes autoduales est engendré, en chaque point de M, par la forme de Kähler ω et les formes réelles de type $(2,0) \oplus (0,2)$, tandis que le fibré $\Lambda^- M$ des 2-formes anti-autoduales s'identifie à celui des 2-formes (réelles) primitives (= de trace nulle) de type $(1,1)$.

Le laplacien riemannien $\delta d + d\delta$ est noté Δ. Nous introduisons le laplacien complexe L et le laplacien complexe adjoint L^* définis par

(1) $$L(f) = -(dd^c f, \omega) = -\operatorname{tr}(dd^c f)$$

(2) $$L^*(f) = \delta\delta^c(f.\omega) .$$

Les trois laplaciens Δ, L et L^* ont même symbole principal mais sont distincts en général. Leur différence est mesurée par la 1-forme $\theta = -\delta^c\omega$. Plus précisément, on a

(3) $$L(f) = \Delta(f) - (\theta, df)$$

(4) $$L^*(f) = \Delta(f) + (\theta, df) - \delta\theta . f$$

(la vérification de ces deux relations est facile;l'une et l'autre valent que J soit intégrable ou non).

Une métrique hermitienne telle que Δ et L coïncident, c'est-à-dire telle que la forme de Kähler soit co-fermée, est dite co-symplectique (semi-kählérienne si J est intégrable). Ceci équivaut à dire que L est auto-adjoint.

Définition. Une métrique hermitienne est standard si la 1-forme θ est co-fermée.

De façon équivalente,
- le terme d'ordre zéro de L^* est nul ($L^*(1) = 0$) ;
- la forme de Kähler ω est annulée par $\delta\delta^c$;
- ω^{m-1} est dd^c-fermée.

Si $n = 4$ ($m=2$), une métrique hermitienne standard est une métrique hermitienne dont la forme de Kähler est dd^c-fermée.

2. RAPPELS SUR LES OPÉRATEURS ELLIPTIQUES

Rappelons l'énoncé du principe du maximum pour les opérateurs elliptiques du second ordre, dû à E. Hopf [3] :

Proposition. Soient M une variété différentielle, m un point de M et $A : \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ un opérateur différentiel elliptique du second ordre, sans terme d'ordre zéro. Soit f une fonction admettant un maximum relatif en m et telle que $A(f) \geq 0$ au voisinage de m. Alors f est constante au voisinage de m.

Par opérateur elliptique on entend ici un opérateur (du 2^e ordre) dont le symbole est positif non dégénéré (si l'on a, dans un système de coordonnées locales,

$$A = \Sigma\, a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \Sigma\, b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} ,$$

le symbole de A en m est la forme quadratique $\sigma_2(m,\xi) = \Sigma\, a_{ij}(m)\xi_i \xi_j$).

Dans le cas compact, on déduit immédiatement du principe du maximum le résultat suivant :

Corollaire 1. Supposons de plus M compacte connexe. Alors toute fonction f sur M telle que $A(f) \geq 0$ est constante (et $A(f)$ est nulle).

La conséquence suivante a été observée par T. Aubin [1] :

Corollaire 2. Soient M une variété différentielle connexe, et A un opérateur elliptique (réel) du second ordre. Soit f une fonction positive sur M, non identiquement nulle, telle que $A(f) = 0$. Alors f ne s'annule en aucun point de M.

Supposons en effet que f s'annule en un point m de M. Choisissons un système de coordonnées locales $(x_1,\ldots,x_n)$ en m, et considérons une forme linéaire ξ en les x_i. Soit A_ξ l'opérateur elliptique défini par

$$A_\xi(g) = A(e^{<\xi,x>}g) - g\, A(e^{<\xi,x>}) .$$

La fonction $g_\xi = e^{-<\xi,x>} f$ satisfait à

$$A_\xi(g_\xi) = - g_\xi\, A(e^{<\xi,x>}) = - f\, P(x,\xi) ,$$

où $P(x,\xi)$ est un polynôme de degré ≤ 2 en ξ, dont la partie homogène de degré 2 est le symbole $\sigma_2(x,\xi)$. Puisque A est elliptique, on a pour ξ assez grand $P(m,\xi) > 0$, d'où $A_\xi(g_\xi) \leq 0$ dans un voisinage de m. La fonction g_ξ admettant un minimum relatif en m, on conclut de la proposition (appliquée à $-g_\xi$) que f s'annule dans un voisinage de m, d'où le corollaire.□

3. LE THÉORÈME DES MÉTRIQUES HERMITIENNES STANDARDS

Théorème 2 [2]. Toute métrique hermitienne sur une variété presque complexe compacte de dimension 2m est conforme à une métrique hermitienne standard, unique à homothétie près.

Preuve. Soit g une métrique hermitienne quelconque sur M ; considérons une métrique conforme $\tilde{g} = e^{2\sigma} g$, où σ est une fonction réelle. Le laplacien complexe $\tilde{L}$ et le laplacien complexe adjoint $\tilde{L}^*$ relatifs à $\tilde{g}$ s'écrivent pour toute fonction scalaire f .

$$\tilde{L}(f) = e^{-2\sigma} L(f) \qquad \tilde{L}^*(f) = e^{-2m\sigma} L^*(e^{2(m-1)\sigma} f)$$

Comme g est standard si et seulement si $L^*(1)$ est nul, nous sommes ainsi ramenés à montrer que L^* a une solution strictement positive φ , unique à un facteur constant positif près. La métrique standard sera alors égale à $\varphi^{\frac{1}{m-1}} g$.

Lemme 1. Le noyau Ker L^* est de dimension 1 .

En effet l'indice de L , égal à celui de Δ puisque L et Δ ont même partie principale, est nul puisque Δ est autoadjoint. Ainsi Ker L^* et Ker L ont même dimension ; mais le Cor.1 au principe du maximum entraîne que Ker L est réduit aux fonctions constantes, donc de dimension un. □

Le lemme 1 démontre l'assertion d'unicité du Théorème 2. L'existence résulte du lemme suivant :

Lemme 2. Ker L^* est engendré par une fonction φ strictement positive en tout point.

En vertu de la théorie de Hodge pour l'opérateur elliptique L , l'espace $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ se décompose en somme directe orthogonale

$$\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} L^* \oplus \operatorname{Im} L .$$

Soit φ un élément non nul de Ker L^* ; alors la fonction φ est de signe constant sur M . Dans le cas contraire, en effet, il existerait une fonction de classe C^∞ positive, non identiquement nulle, orthogonale à φ , donc aussi à Ker $L^* = \mathbb{R}\varphi$ et appartenant de ce fait à l'image de L . Or ceci est exclu par le Cor.1 au principe du maximum. On peut donc supposer φ positive, et le Cor.2 au principe du maximum permet de conclure que φ est strictement positive en tout point. □

4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

La partie de type $(1,1)$ d'une 2-forme réelle fermée θ est dd^c-fermée : écrivons en effet $\theta = \alpha + \varkappa + \overline{\alpha}$, où α est de type $(2,0)$ et $\varkappa$ de type $(1,1)$; la condition $d\theta = 0$ se traduit par $d'\alpha + d''\varkappa = 0$, ce qui entraîne $d'd''\varkappa = 0$. Ainsi les métriques que nous cherchons sont des métriques standard ; pour prouver le Théorème 1 (à partir du Théorème 2), il suffit de montrer inversement que la forme de Kähler ω de toute métrique standard g sur une surface complexe compacte avec b_1 pair est la partie de type $(1,1)$ d'une 2-forme réelle fermée.
Soit donc g une métrique standard sur M ; considérons l'espace de cohomologie $H^2(M;\mathbb{R})$ comme l'espace des 2-formes réelles harmoniques sur M (relativement à g). L'opérateur de Hodge $*$ commute à Δ et induit de ce fait une involution sur $H^2(M;\mathbb{R})$ qui se décompose ainsi en deux sous-espaces orthogonaux H^+ et H^- (de dimension respectives b_+ et b_-) constitués respectivement des 2-formes fermées autoduales et anti-autoduales.

Le sous-espace H^- est ainsi constitué des 2-formes(réelles) primitives de type $(1,1)$ fermées (cf.1). Le sous-espace H^+ contient, pour sa part, l'espace B des formes réelles de type $(2,0) \oplus (0,2)$ dont la dimension est égale au double $2p_g$ du <u>genre géométrique</u> de la surface complexe M.

Comme le premier nombre de Betti b_1 de M est pair, <u>la dimension</u> b_+ <u>de</u> H^+ <u>est égale à</u> $2p_g + 1$ (Exposé III).
Il existe donc, dans H^+, une 2-forme fermée φ (unique à un facteur près) orthogonale à B, de la forme

$$\varphi = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\varphi.\omega + \beta + \overline{\beta}$$

où β est une forme de type $(2,0)$ et où $\mathrm{tr}\varphi$ <u>n'est pas identiquement nulle</u>.
La composante de type $(1,1)$ de φ est dd^c-fermée et aussi dd^c-cofermée puisque ω est autoduale, de sorte que $\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\varphi$ appartient au noyau de Ker L^*(cf. n°1) . Il en résulte, puisque g est standard, que $\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\varphi$ est une constante (non nulle !), que l'on peut naturellement choisir égale à 1. Ceci achève la démonstration du Théorème 1 . □

<u>Remarque</u> 1. Supposons que b_1 soit nul. Les espaces $H^1(M;\Theta)$ (où Θ désigne le faisceau de champs de vecteurs holomorphes) et $H^1(M;\Omega^2)$

définis à l'aide de la d"-cohomologie sont eux-mêmes réduits à zéro ; si ω est la forme de Kähler d'une métrique hermitienne standard, la (2,1)-forme $d'\omega$ est d"-fermée et donc aussi d"-exacte, de sorte que

$$d'\omega = d''\beta$$

où β est de type (2,0). Il est clair alors que la 2-forme réelle $\omega-\beta-\overline{\beta}$ est fermée, d'où le Théorème 2 dans ce cas.

Remarque 2. Lorsque ω est fixée, toute 2-forme réelle fermée ψ dont ω est la composante de type (1,1) se déduit de φ en lui ajoutant un élément quelconque de B , c'est-à-dire la partie réelle d'une forme holomorphe quelconque (qui est fermée sur une surface complexe).
En d'autres termes, si on désigne par $H^{1,1}$ l'orthogonal de B dans $H^2(M;\mathbb{R})$ - B et $H^{1,1}$ sont orthogonaux à la fois relativement à < , > et à la forme d'intersection de sorte que $H^{1,1}$ ne dépend pas de la métrique hermitienne - la composante, dans $H^{1,1}$, de la classe de cohomologie $[\psi]$ ne dépend que de ω et non de ψ .

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. Aubin: Equations différentielles non-linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, J. Math. pures et appl. 55, (1976), 269-296.

[2] P. Gauduchon: Le théorème de l'excentricité nulle, C.R. Acad. Sc. Paris, A t. 285 (1977), 387-390.

[3] E. Hopf: Elementare Bemerkungen über die Lösung partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus, Sitzungber. preuss. Akad. Wiss., Physik. Math. Kl t19 (1927), 147-152.

53 rue de Lyon
75012 PARIS