ARNAUD BEAUVILLE

# Surjectivité de l'application des périodes

*Astérisque*, tome 126 (1985), p. 123-128

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__126__123_0>

*EXPOSÉ X*

# SURJECTIVITÉ DE L'APPLICATION DES PÉRIODES

Arnaud BEAUVILLE

## 1. LES RÉSULTATS

On conserve les notations de l'Exposé VII.

Théorème 1.

Tout élément de $\Omega$ est la période d'une surface K3 kählérienne marquée.

Théorème 2.

Soit X une surface K3 kählérienne. Alors la chambre kählérienne $\mathcal{K}_X$ est l'ensemble des classes de Kähler de X .

Le Théorème 1 est dû à A.Todorov [2] ; la démonstration que nous donnerons ici (d'après un exposé oral de A. Polombo) précise celle de Y.T. Siu [7] qui contient une erreur contournable. Elle a, par ailleurs, l'avantage de n'utiliser (en dehors du théorème de S.T. Yau, qui est essentiel) que le théorème de Torelli local.

Le Théorème 2 peut être considéré comme un analogue kählérien du critère d'amplitude de Nakai. Il est frappant de constater que la seule démonstration connue utilise le théorème de Torelli ainsi que le Théorème 1 ci-dessus. Il serait intéressant d'obtenir une démonstration plus directe, ainsi qu'un critère analogue pour d'autres types de surfaces.

Dans ce qui suit nous considérerons systématiquement les périodes comme des 2-plans (positifs, orientés) de $L_{\mathbb{R}}$ .

## 2. L'UTILISATION DU THÉORÈME DE S.T. YAU

La démonstration des théorèmes 1 et 2 utilise de façon essentielle le théorème de S.T. Yau, via le lemme suivant :

Lemme 1. Soit $(X,\sigma)$ une surface K3 marquée, de période $P$ , et soit $k$ l'image par $\sigma$ d'une classe de Kähler sur $X$ . Notons $E$ le 3-plan orienté $P \oplus \mathbb{R}k$ . Pour toute décomposition orthogonale directe[1] $E = P' \oplus \mathbb{R}k'$ , il existe une surface K3 marquée $(X',\sigma')$, de période $P'$ , telle que $\sigma'^{-1}(k')$ soit une classe de Kähler.

Le théorème de S.T. Yau entraîne que $X$ admet une métrique kählérienne $g$ , de classe $\sigma^{-1}(k)$, à courbure de Ricci nulle. D'après les résultats élémentaires sur l'holonomie (Exposé XV , n°2) , ceci se traduit par l'existence d'une structure quaternionienne sur $X$ , c'est-à-dire d'une action du corps des quaternions $\mathbb{H}$ sur le fibré tangent $T\,X$ par endomorphismes parallèles. En particulier les quaternions de carré (-1) définissent les structures complexes sur $X$ parallèles pour $g$ , c'est-à-dire pour lesquelles la métrique $g$ est kählérienne. L'ensemble $S$ de ces quaternions est la sphère unité de l'espace euclidien $\mathbb{H}_o$ (de dimension 3) formé des quaternions purs.

Soit $I \in S$ ; nous noterons $X_I$ la variété $X$ munie de la structure complexe définie par $I$ . En choisissant un élément $J$ de $S$ orthogonal à $I$ , et en posant $K = IJ$ , on obtient une base orthonormale directe $(I,J,K)$ de $\mathbb{H}_o$ satisfaisant les relations de commutation habituelles. Notons $\kappa$ , $\alpha$ , $\beta$ les formes de Kähler de $g$ pour les structures complexes $I$ , $J$ et $K$ respectivement ; ce sont des 2-formes réelles fermées, définies par

$$\kappa(U,V) = g(IU,V) \ , \ \alpha(U,V) = g(JU,V) \ , \ \beta(U,V) = g(KU,V) \ ,$$

pour $U,V$ champs de vecteurs sur $X$ . Posons $\omega = \alpha + i\beta$ . On a

$$\begin{aligned} \omega(IU,V) &= g(JIU,V) + i\,g(KIU,V) \\ &= -\,g(KU,V) + i\,g(JU,V) = i\,\omega(U,V) \ ; \end{aligned}$$

[1] Nous entendons par là que $P'$ est muni de l'orientation associée au vecteur normal $k'$ (c'est-à-dire qu'une base $(a,b)$ de $P'$ est directe si et seulement si la base $(a,b,k')$ de $E$ est directe).

ainsi $\omega$ est une 2-forme fermée de type (2,0) sur $X_I$ , donc holomorphe.

Considérons l'homomorphisme $\lambda : \mathbb{H}_o \to L_{\mathbb{R}}$ obtenu en posant $\lambda(q) = \sigma([\gamma_q])$, où la 2-forme fermée $\gamma_q$ est définie par $\gamma_q(U,V) = g(qU,V)$. Observons que pour $q \in S$ , $\lambda(q)^2 = \mathrm{vol}(X,g)$ est indépendant de $q$ , de sorte que $\lambda$ est une similitude. Il résulte des calculs ci-dessus que pour tout $I \in S$ , la classe de Kähler de $g$ sur $X_I$ est $\lambda(I)$, tandis que la période de $(X_I,\sigma)$ est le 2-plan $\lambda(I^\perp)$ (orienté comme $I^\perp$ , qui est lui-même orienté par la donnée de son vecteur unitaire normal I). Appliquant ceci à la structure complexe initiale de $X$ , on voit que $\lambda$ induit un isomorphisme de $\mathbb{H}_o$ sur $E$ .

Revenant à l'énoncé du lemme, posons $\lambda^{-1}(k') = mI$ , avec $I \in S$ et $m > 0$ . On déduit de ce qui précède que la surface $(X_I,\sigma)$ a pour période $P'$ et que la classe de la métrique $mg$ sur $X_I$ est $\sigma^{-1}(k')$, d'où le lemme. □

## 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Disons que deux éléments $P$, $P'$ de $\Omega$ sont liés s'il existe une suite de 2-plans $P_1,\dots,P_n$ telle que $P_1 = P$ , $P_n = P'$ , et que le sous-espace $<P_i, P_{i+1}>$ engendré par $P_i$ et $P_{i+1}$ soit un 3-plan positif $(1 \le i \le n-1)$. On définit ainsi une relation d'équivalence sur $\Omega$ .

Lemme 2. Deux éléments quelconques de $\Omega$ sont liés.

Puisque $\Omega$ est connexe (Exposé VII, Lemme 2), il suffit de montrer que les classes d'équivalence de $\Omega$ pour la relation précédente sont ouvertes (elles seront alors automatiquement fermées). Soit $P \in \Omega$ . Choisissons une base $(a,b)$ de $P$ , et un vecteur $k \in P^\perp$ de carré $> 0$ . Il existe un voisinage $V$ de $P$ dans $\Omega$ tel que pour tout 2-plan $P'$ de $V$ ,

(i) le 3-plan $< P',k >$ soit positif ;

(ii) $P'$ contienne un vecteur $b'$ tel que le 3-plan $< a, b', k>$ soit positif .

Posant alors $P_1 = P$ , $P_2 = < a,k >$ , $P_3 = < b',k >$ , $P_4 = P'$ , on voit que $P'$ est lié à $P$ , ce qui démontre le lemme. □

En vertu de ce lemme, le résultat suivant entraîne le Théorème 1 :

Lemme 3. Soient $P$ , $P'$ deux éléments de $\Omega$ engendrant un 3-plan positif. Si $P$ est la période d'une surface K3 kählérienne marquée, il en est de même de $P'$ .

Observons d'abord qu'en vertu du théorème de Torelli local et du fait qu'une petite déformation d'une variété kählérienne est kählérienne, il existe un voisinage $V$ de $P$ dans $\Omega$ tel que tout 2-plan de $V$ soit la période d'une surface K3 kählérienne marquée.

Soit $k$ un vecteur non nul orthogonal à $P$ dans le 3-plan $< P,P' >$. Quitte à modifier $P$ dans $V$, on peut supposer que $k$ n'est pas contenu dans $P'$. Nous allons montrer qu'il existe un élément $k_o$ de $L_{\mathbb{Q}}$ satisfaisant aux propriétés suivantes :

(i) le 3-plan $F_o = P' + \mathbb{R}k_o$ est positif ;

(ii) $F_o$ n'est pas orthogonal à un élément de $\Delta$ ;

(iii) l'orthogonal $P_o$ de $k_o$ dans $F_o$ appartient à $V$.

Les conditions (i) et (iii) sont réalisées pour tout élément $k_o$ d'un voisinage convenable $B$ de $k$ dans $L_{\mathbb{R}}$. Notons $\pi$ la projection orthogonale de $L_{\mathbb{R}}$ sur $P'^{\perp}$ ; on a $\pi(B) \subset \mathcal{C}_{P'}$. Soit $M$ la réunion des murs de $\mathcal{C}_{P'}$ ; c'est un fermé d'intérieur vide de $\mathcal{C}_{P'}$. Il existe donc un ouvert non vide $\overset{o}{B} \subset B$ qui ne rencontre pas $\pi^{-1}(M)$ ; tout élément $k_o$ de $L_{\mathbb{Q}} \cap \overset{o}{B}$ satisfait aux conditions (i) à (iii).

Soit alors $(X,\sigma)$ une surface K3 kählérienne marquée de période $P_o$. Les conditions (i) et (ii) impliquent que $\sigma^{-1}(k_o)$ appartient à une chambre de $\mathcal{C}_X$. En modifiant $\sigma$ par un élément de $W_X \times \{\pm 1\}$, on peut supposer $\sigma^{-1}(k_o) \in \mathcal{K}_X$. Puisque $k_o$ est rationnel, le critère de Nakai (Exposé IV) entraîne qu'un multiple convenable de $\sigma^{-1}(k_o)$ est la classe d'un diviseur ample, donc que $\sigma^{-1}(k_o)$ est une classe de Kähler. On déduit alors du Lemme 1 que le 2-plan $P' \subset P_o \oplus \mathbb{R}\, k_o$ est la période d'une surface K3 kählérienne marquée. □

## 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

Posons $P_X = H^2(X,\mathbb{R}) \cap (H^{2,0} \oplus H^{0,2})$. Soit $\mathcal{K}_X^o$ le sous-ensemble de $\mathcal{K}_X$ formé des éléments $k \in \mathcal{K}_X$ tels que le 3-plan $P_X \oplus \mathbb{R}k$ contienne une classe rationnelle non nulle.

a) Les éléments de $\mathcal{K}_X^o$ sont des classes de Kähler

Choisissons un marquage $\sigma : H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow L$ ; notons $P$ la période $\sigma(P_X)$

de X . On a par hypothèse une décomposition orthogonale

$$P \oplus \mathbb{R}\ \sigma(k) = P_o \oplus \mathbb{R}\ k_o \ ,$$

avec $k_o \in L_{\mathbb{Q}}$ . Le Théorème 1 entraîne l'existence d'une surface K3 marquée $(X_o,\sigma_o)$ de période $P_o$ . De plus puisque $k \in \mathcal{K}_X$ , la classe $\sigma_o^{-1}(k_o)$ appartient à une chambre de $\mathcal{C}_{X_o}$ ; on peut donc modifier $\sigma_o$ de façon que $\sigma_o^{-1}(k_o)$ appartienne à $\mathcal{K}_{X_o}$ , donc soit une classe de Kähler en vertu du critère de Nakai. Le Lemme 1 entraîne alors qu'il existe une surface K3 marquée $(X',\sigma')$ de période P , telle que $\sigma'^{-1}\sigma(k)$ soit une classe de Kähler. Considérons l'isométrie $\varphi = \sigma'^{-1}\circ\sigma$ de $H^2(X,\mathbb{Z})$ dans $H^2(X',\mathbb{Z})$ ; c'est une isométrie de Hodge (puisque $(X,\sigma)$ et $(X',\sigma')$ ont même période), effective (puisque $\varphi(k)$ est une classe de Kähler). Ainsi, d'après le théorème de Torelli, $\varphi$ provient d'un isomorphisme de X' sur X , donc transforme classes de Kähler en classes de Kähler : ceci prouve que k est une classe de Kähler.

b) $\mathcal{K}_X^o$ <u>est dense dans</u> $\mathcal{K}_X$

Soit en effet $k \in \mathcal{K}_X$ . Il existe un élément x de $H^2(X,\mathbb{Q})$ dont la composante $x^{1,1}$ est arbitrairement proche de k , donc appartient à $\mathcal{K}_X$ . Alors le 3-plan $P_X \oplus \mathbb{R}x^{1,1}$ contient x, donc $x^{1,1}$ appartient à $\mathcal{K}_X^o$ .

c) Il résulte de a) et b) que le cône des classes de Kähler est dense dans $\mathcal{K}_X$ . On conclut en remarquant qu'un cône convexe ouvert est l'intérieur de son adhérence. □

## 4. <u>UN COROLLAIRE</u>

L'énoncé suivant est équivalent à la conjonction des théorèmes 1 et 2 :

<u>Proposition</u>. <u>Soit</u> $P \in \Omega$ , <u>et soit</u> k <u>un élément de</u> $L_{\mathbb{R}}$ , <u>orthogonal à</u> P , <u>de carré</u> > 0 , <u>qui n'est pas orthogonal à un élément de</u> $\Delta_P$ . <u>Il existe alors une surface</u> K3 <u>marquée</u> $(X,\sigma)$ <u>telle que</u> $\sigma^{-1}(k)$ <u>soit une classe de Kähler pour</u> X .

Le Théorème 1 entraîne qu'il existe une surface K3 kählérienne marquée $(X,\sigma)$ de période P ; de plus on peut modifier $\sigma$ par un élément de $W_X \times \{\pm 1\}$ de façon que $\sigma^{-1}(k) \in \mathcal{K}_X$ . Le Théorème 2 permet alors de conclure.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y.T. Siu : A simple proof of the surjectivity of the period map of K3 surfaces, Manuscripta Math. 35 (1981), 311-321.

[2] A.N. Todorov : Applications of the Kähler-Einstein-Calabi-Yau metric to moduli of K3 surfaces, Inventiones Math. 61 (1980), 251-265.

Bâtiment de Mathématiques 425
Université de Paris-Sud
ERA du CNRS n° 653
91405 ORSAY CEDEX