ARNAUD BEAUVILLE

Le théorème de Torelli pour les surfaces $K3$: fin de la démonstration

Astérisque, tome 126 (1985), p. 111-121
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__126__111_0>

EXPOSÉ IX

LE THÉORÈME DE TORELLI POUR LES SURFACES K3 : FIN DE LA DÉMONSTRATION

Arnaud BEAUVILLE

1. DENSITÉ DES PÉRIODES DES SURFACES DE KUMMER

Commençons par rappeler la terminologie en usage chez les spécialistes des formes quadratiques entières. On appelle réseau un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini, muni d'une forme quadratique entière. On dit qu'un réseau est pair, unimodulaire,... s'il en est ainsi de sa forme quadratique.

Etant donné un sous-module M d'un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini L, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) M est facteur direct de L ;

(ii) L/M est sans torsion ;

(iii) $M_{\mathbb{Q}} \cap L = M$.

Si elles sont réalisées, on dit que M est un sous-module primitif de L . Nous utiliserons le résultat suivant sur les réseaux :

Proposition 1. Soit L un réseau pair, unimodulaire, de signature (s,t), et soit M un réseau pair. Posons $k = \min(s,t)$.

(i) Si $\mathrm{rg}(M) \leq k$, il existe un sous-réseau primitif de L isomorphe à M .

(ii) Si $\mathrm{rg}(M) \leq k-1$, deux tels sous-réseaux se déduisent l'un de l'autre par une isométrie de L .

La démonstration de (i) est facile : soit $(m_1,\dots,m_r)$ une base de M .

La classification des formes paires unimodulaires implique que L contient la somme directe de k plans hyperboliques. Il existe donc des éléments e_1, $f_1,\dots,e_r$, f_r de L satisfaisant à

$$e_i.e_j = f_i.f_j = 0 \text{ et } e_i.f_j = \delta_{ij} \text{ pour } 1 \leq i, j < r .$$

On définit une application linéaire $i : M \longrightarrow L$ en posant

$$i(m_\ell) = e_\ell + \frac{1}{2}(m_\ell^2)\, f_\ell + \sum_{j<\ell} (m_j.m_\ell)\, f_\ell \quad ;$$

on vérifie aussitôt que i est une isométrie. Comme $(i(m_1),\dots,i(m_\ell))$ fait partie d'une base de L, le sous-module $i(M)$ est primitif, d'où (i).

La démonstration de (ii) est élémentaire mais longue ; je renvoie par exemple à [5]. □

Revenons aux surfaces K3 et à leur domaine des périodes Ω, que nous considérerons comme la grassmannienne des 2-plans positifs orientés de $L_{\mathbb{R}}$ (Exposé VIII).

<u>Proposition</u> 2 . <u>Soit</u> P <u>un 2-plan positif orienté de</u> $L_{\mathbb{R}}$, <u>tel que le réseau</u> $P_{\mathbb{Z}} = P \cap L$ <u>soit de rang</u> 2 <u>et qu'on ait</u> $x^2 \equiv 0 \pmod{4}$ <u>pour tout</u> $x \in P_{\mathbb{Z}}$. <u>Alors</u> P <u>est la période d'une surface de Kummer marquée</u>.

Notons T le $\mathbb{Z}$-module orienté $P_{\mathbb{Z}}$ muni de la forme quadratique $\frac{1}{2}$ (.). On va d'abord construire un tore complexe A et un plongement de T dans $H^2(A,\mathbb{Z})$ tels que $T_{\mathbb{R}}$ soit la période de A ; on en déduira ensuite que la surface de Kummer X associée à A, munie d'un marquage convenable, admet P comme période.

a) <u>Construction du tore complexe A</u>

Soit Γ un $\mathbb{Z}$-module libre orienté de dimension 4 . Alors $\Lambda^2\Gamma$ est un réseau (cf. Exposé VIII, n°3), isométrique à H^3 . D'après la Proposition 1(i), on peut identifier T à un sous-réseau primitif de $\Lambda^2\Gamma$. Le 2-plan $T_{\mathbb{C}}$ contient deux droites isotropes conjuguées $\mathbb{C}\omega$ et $\mathbb{C}\bar{\omega}$; on choisit ω de façon que la base $(\Re e(\omega), \Im m(\omega))$ de $T_{\mathbb{R}}$ soit directe. La droite isotrope $\mathbb{C}\omega \subset \Lambda^2\Gamma_{\mathbb{C}}$ définit un point de la grassmannienne $G(2,\Gamma_{\mathbb{C}})$, c'est-à-dire un 2-plan H de $\Gamma_{\mathbb{C}}$ tel que $\Lambda^2 H = \mathbb{C}\omega$. On a $H \cap \bar{H} = (0)$ puisque $\omega.\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega + \bar{\omega})^2 > 0$, d'où une décomposition

$$\Gamma_{\mathbb{C}} = H \oplus \bar{H}$$

qui définit sur Γ une structure de Hodge de poids un . Il existe alors (Exposé VIII, Lemme 5) un tore complexe A et un isomorphisme de structures de Hodge $\sigma : H^1(A,\mathbb{Z}) \longrightarrow \Gamma$. Identifions $H^2(A,\mathbb{Z})$ à $\Lambda^2\Gamma$ par l'isomorphisme $\Lambda^2\sigma$; on a alors $H^{2,0}(A) = \Lambda^2 H^{1,0}(A) = \mathbb{C}\omega$, de sorte que la période de A est $T_{\mathbb{R}}$.

b) Fin de la démonstration

Soient X la surface de Kummer associée à A , et $i : H^2(A,\mathbb{Z}) \to H^2(X,\mathbb{Z})$ l'homomorphisme défini dans l'Exposé VIII, n°2 . Posons $P_X = H^2(X,\mathbb{R}) \cap (H^{2,0} \oplus H^{0,2})$. On a $i(T_{\mathbb{R}}) = P_X$; de plus, comme P_X est orthogonal aux courbes exceptionnelles de X , on a (Exposé VIII, Lemme 3)

$$P_X \cap H^2(X,\mathbb{Z}) = i(T_{\mathbb{R}}) \cap i(H^2(A,\mathbb{Z})) = i(T) .$$

Or i(T) est isométrique au réseau $P_{\mathbb{Z}}$; celui-ci est donc isométrique à un sous-réseau primitif de $H^2(X,\mathbb{Z})$. On déduit alors de la Proposition 1(ii) qu'il existe un marquage $\sigma : H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow L$ qui induit un isomorphisme (préservant l'orientation) de $P_X \cap H^2(X,\mathbb{Z})$ sur $P_{\mathbb{Z}}$. Par suite la période de (X,σ) est P . □

Remarque . Pour toute surface X , on note S_X le sous-groupe de $H^2(X,\mathbb{Z})$ engendré par les classes algébriques ; sa dimension est appelée "nombre de Picard" de X et notée traditionnellement ρ . Puisque $(S_X)_{\mathbb{C}}$ est contenu dans $H^{1,1}(X)$, on a $\rho \leq h^{1,1}$. Les surfaces pour lesquelles $\rho = h^{1,1}$ sont dites exceptionnelles ; il revient au même de dire qu'on a $(S_X)_{\mathbb{C}} = H^{1,1}$, ou que l'espace $(H^{2,0} \oplus H^{0,2})$ est défini sur $\mathbb{Q}$.

Les surfaces **construites dans la Proposition** 2 sont exactement les surfaces de Kummer exceptionnelles ; d'après la prop.1 (ii) et le théorème de Torelli, la donnée d'une telle surface équivaut à celle d'un réseau positif $P_{\mathbb{Z}}$ de rang 2 , tel que $x^2 \equiv 0 \pmod{4}$ pour tout $x \in P_{\mathbb{Z}}$.

Signalons qu'une construction plus compliquée permet de décrire explicitement toutes les surfaces K3 exceptionnelles [3]. Elles correspondent aux réseaux positifs pairs de rang 2 .

Il reste maintenant à montrer que les 2-plans possèdant la propriété énoncée dans la proposition sont denses dans $G_2(L_{\mathbb{R}})$.

Lemme 1. Soient M un réseau, m et n deux nombres entiers. Alors si l'ensemble des éléments primitifs e de M tels que $e^2 \equiv m \pmod{n}$ n'est pas vide, son image dans $\mathbb{P}(M_{\mathbb{R}})$ est partout dense.

Supposons que cet ensemble contienne un élément e_o . Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{P}(M_{\mathbb{R}})$; alors U contient la classe d'un vecteur e primitif dans M . Posons $e_N = e_o + Ne$, pour $N \in \mathbb{N}$; lorsque N tend vers l'infini, le point $[e_N]$ dans $\mathbb{P}(M_{\mathbb{R}})$ tend vers e sur la droite $< e_o, e>$, et appartient donc à U pour N assez grand. De plus on a $e_N^2 \equiv e_o^2$ (mod.N), d'où $e_N^2 \equiv m$ (mod.n) si N est multiple de n .

Il reste à montrer que e_N est primitif pour un choix convenable de N . Comme e est primitif, il existe $f \in M$ tel que (e,f) soit une base du réseau $(\mathbb{Q}e_o + \mathbb{Q}e) \cap M$; on a $e_o = ae + bf$, avec $(a,b) = 1$ puisque e_o est primitif. On a alors $e_N = (a+N)e + bf$, de sorte que e_N est primitif dès que N est multiple de b , ce qui prouve le lemme. □

<u>Proposition</u> 3. <u>Les périodes des surfaces de Kummer marquées sont denses dans</u> Ω .

D'après la Proposition 2 , il s'agit de montrer que l'ensemble des 2-plans positifs $P \subset L_{\mathbb{R}}$, définis sur $\mathbb{Q}$ et tels que $x^2 \equiv 0$ (mod.4) pour tout $x \in P \cap L$, est dense dans la grassmannienne des 2-plans positifs de $L_{\mathbb{R}}$. Soient P_o un 2-plan positif de $L_{\mathbb{R}}$ et (e_1^o, e_2^o) une base orthonormale de P_o . Le Lemme 1 entraîne l'existence d'un élément primitif e_1 de L , dont la classe dans $\mathbb{P}(L_{\mathbb{R}})$ est arbitrairement proche de celle de e_1^o , et tel que $e_1^2 \equiv 4$ (mod.8). Notons M l'orthogonal de e_1 dans L . Comme e_1 est contenu dans un plan hyperbolique de L (à cause de la Prop. 1 (ii)), M contient un plan hyperbolique, et par conséquent contient pour tout $k \in \mathbb{Z}$ un élément primitif de carré 2k . Le Lemme 1 entraîne alors qu'il existe un élément e_2 de M , arbitrairement proche de e_2^o dans $\mathbb{P}(L_{\mathbb{R}})$, tel que $e_2^2 \equiv 0$ (mod.64). Le 2-plan $P = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$ est défini sur $\mathbb{Q}$, et arbitrairement proche de P_o ; nous allons voir qu'il satisfait la condition $x^2 \equiv 0$ (mod.4) pour tout $x \in P \cap L$.

Posons $e_1^2 = m_1$ et $e_2^2 = m_2$; on a

$$m_1 \equiv 4 \text{ (mod.8)} \quad \text{et} \quad m_2 \equiv 0 \text{ (mod.64)}.$$

Soit $x \in P \cap L$. L'élément $m_1x - (e_1.x)e_1$ de $P \cap L$ est orthogonal à e_1 , donc de la forme be_2 avec $b \in \mathbb{Z}$ (puisque e_2 est primitif). On a ainsi

$$m_1 x = a\, e_1 + b\, e_2 \quad , \quad \text{avec } a = (e_1.x) \ ,$$

d'où
$$m_1^2\, x^2 = a^2 m_1 + b^2\, m_2 \ .$$

Notons $v_2(n)$ la valuation 2-adique d'un entier n (c'est-à-dire l'exposant de 2 dans la décomposition de n en facteurs premiers). On a alors

$$v_2(b^2m_2) \geq 6 \quad \text{et} \quad v_2(a^2m_1) = 2(v_2(a) + 1) \ ;$$

il en résulte que $v_2(m_1^2 x^2) = 4 + v_2(x^2)$ est pair ou ≥ 6, d'où notre assertion $v_2(x^2) \geq 2$. Ceci achève la démonstration de la proposition. □

<u>Corollaire</u>. <u>Soient</u> X_o <u>une surface</u> K3, <u>et</u> $f : X \longrightarrow S$ <u>une déformation locale universelle de</u> X_o. <u>Il existe alors une partie dense</u> T <u>de</u> S <u>telle que la fibre</u> X_t, <u>pour</u> $t \in T$, <u>soit une surface de Kummer</u>.

Quitte à réduire S, on peut choisir un marquage $\sigma : R^2 f_*(\mathbb{Z}) \longrightarrow L_S$, d'où une application des périodes $\mathcal{P} : S \longrightarrow \Omega$ qui est un isomorphisme local (cf. Exposé V). Il existe donc (Prop. 3) une partie dense T de S telle que $\mathcal{P}(t)$, pour tout $t \in T$, soit la période d'une surface de Kummer. La surface X_t, qui a même période qu'une surface de Kummer, est donc une surface de Kummer (Proposition 1 de l'Exposé VIII), d'où le corollaire. □

<u>Remarque</u>. Il est immédiat que deux surfaces de Kummer sont difféomorphes ; le corollaire permet donc de retrouver le fait que toutes les surfaces K3 sont difféomorphes (Exposé VI).

2. <u>LE "LEMME PRINCIPAL" DE BURNS-RAPOPORT</u>

<u>Proposition</u> 4. <u>Soient</u> $f : X \longrightarrow S$ <u>et</u> $f' : X' \longrightarrow S$ <u>deux familles (lisses) de surfaces</u> K3 <u>kählériennes sur une variété analytique</u> S, <u>et</u> $\varphi : R^2 f_*(\mathbb{Z}) \to R^2 f'_*(\mathbb{Z})$ <u>un isomorphisme</u>. <u>Soient</u> T <u>une partie de</u> S <u>et</u> o <u>un point d'accumulation de</u> T. <u>On suppose qu'il existe pour chaque</u> $t \in T$ <u>un isomorphisme</u> $u_t : X'_t \longrightarrow X_t$ <u>tel que</u> $u_t^* = \varphi_t$. <u>Alors</u> :

a) X_o <u>et</u> X'_o <u>sont isomorphes</u> ;

b) <u>si de plus</u> φ_o <u>est une isométrie de Hodge effective</u>, <u>il existe un isomorphisme</u> $u_o : X'_o \longrightarrow X_o$ <u>tel que</u> $u_o^* = \varphi_o$.

On éviterait facilement la formulation en termes de $R^2 f_*(\mathbb{Z})$: l'énoncé étant local, on peut supposer que S est un polydisque. On a alors des isomorphismes <u>canoniques</u> de restriction $H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X_s,\mathbb{Z})$; on peut considérer φ

comme un isomorphisme de $H^2(X,\mathbb{Z})$ sur $H^2(X',\mathbb{Z})$, induisant pour tout $s \in S$, via les isomorphismes de restriction, une isométrie $\varphi_s : H^2(X_s,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X'_s,\mathbb{Z})$. L'existence de φ tel que $u_t^* = \varphi_t$ signifie simplement que u_t^* est <u>constant</u> avec les identifications précédentes.

Démontrons la proposition. Notons Γ_t le graphe de u_t dans $X_t \times X'_t$. La première étape consiste à montrer qu'une sous-suite de $(\Gamma_t)_{t\in T}$ converge (au sens des courants) vers un cycle analytique Γ_o de $X_o \times X'_o$. D'après un critère de Bishop [2] , il suffit pour qu'il en soit ainsi qu'il existe une métrique hermitienne sur $X \times X'$ pour laquelle le volume des sous-variétés Γ_t soit <u>borné</u>.

Un théorème de Kodaira-Spencer (cf. par exemple [4],Ch.4,§4) entraîne qu'on peut construire sur X (resp.X') une métrique hermitienne qui induit sur chaque fibre X_s (resp.X'_s) une métrique kählérienne, de forme fondamentale $\varkappa_s$ (resp.$\varkappa'_s$). Munissons $X \times X'$ de la métrique produit. On a

$$\mathrm{vol}(\Gamma_t) = \int_{\Gamma_t} (pr_1^* \varkappa_t + pr_2^* \varkappa'_t)^2$$

d'où, puisque Γ_t est l'image de X'_t par le plongement $(u_t,1)$,

$$\mathrm{vol}(\Gamma_t) = \int_{X'_t} (u_t^* \varkappa_t + \varkappa'_t)^2 = \int_{X_t} \varkappa_t^2 + \int_{X'_t} \varkappa_t'^2 + 2\int_{X'_t} \varkappa'_t \wedge u_t^* \varkappa_t \ .$$

Les deux premiers termes sont bornés puisqu'ils sont obtenus par restriction à T de fonctions continues sur S . Il s'agit de borner le troisième, dans lequel intervient u_t qu'on ne contrôle pas a priori. Mais puisque les formes de Kähler $\varkappa_t$ et $\varkappa'_t$ sont fermées, l'intégrale en question se calcule en cohomologie :

$$\int_{X'_t} \varkappa'_t \wedge u_t^* \varkappa_t = [\varkappa'_t] \cdot [u_t^* \varkappa_t] = [\varkappa'_t] \cdot \varphi_t([\varkappa_t]) \ ;$$

cette intégrale, qui est égale à la restriction d'une fonction continue sur S , est bornée.

Ainsi $\mathrm{vol}(\Gamma_t)$ est borné, et d'après le critère déjà cité de Bishop, il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans T , tendant vers o , telle que la suite des graphes Γ_{t_n} converge vers un cycle analytique (effectif) $\Gamma_o \subset X_o \times X'_o$. En particulier la classe de cohomologie de Γ_{t_n} dans $H^4(X_o \times X'_o)$ converge vers celle de Γ_o .

Disons qu'une surface $Z \subset X_t \times X'_t$ est de degré (p,q) si elle est de degré p sur X_t et q sur X'_t ; autrement dit si on a

$$(pr_1)_*[Z] = p \ \text{ dans } H^0(X_t,\mathbb{Z}) \ ; \ (pr_2)_*[Z] = q \ \text{ dans } H^0(X'_t,\mathbb{Z}) \ .$$

Les surfaces de degré (0,0) sont de la forme $C \times C'$, où C est une courbe de X_t et C' une courbe de X'_t .

Les graphes Γ_t sont de degré (1,1) ; par passage à la limite, il en est de même de Γ_o . Ceci entraîne pour Γ_o l'une des deux possibilités suivantes :

(i) $\Gamma_o = \Delta + \sum_{i\in I} C_i \times C'_i$, où Δ est de degré (1,1) et où les C_i (resp. C'_i) sont des courbes sur X_o (resp. X'_o) ;

(ii) $\Gamma_o = \Delta_1 + \Delta_2 + \sum_{i\in I} C_i \times C'_i$, où Δ_1 est de degré (1,0) et Δ_2 de degré (0,1).

Nous allons montrer que la seconde possibilité ne se produit pas. Etant donné une classe $c \in H^4(X_t \times X'_t , \mathbb{C})$, notons c_* l'homomorphisme de $H^2(X_t,\mathbb{C})$ dans $H^2(X'_t,\mathbb{C})$ défini par $c_*(x) = (pr_2)_* (c.pr_1^* x)$; il est compatible aux structures de Hodge. Si Z est une surface contenue dans $X_t \times X'_t$, et si p et p' désignent les projections de Z sur X_t et X'_t , on a

$$[Z]_* (x) = p'_* p^*(x) .$$

On obtient en particulier $[\Gamma_t]_* = u_t^* = \varphi_t$, et par conséquent $[\Gamma_o]_* = \varphi_o$.

D'autre part si $p(Z)$ (resp. $p'(Z)$) est contenu dans une courbe C de X_t (resp. C' de X'_t), on voit que $[Z]_*$ se factorise à travers $H^2(C,\mathbb{C})$ (resp. $H^0(C',\mathbb{C})$), et par conséquent s'annule sur $H^{2,0}(X_t)$. Appliquant ceci à Γ_o , on trouve dans le cas (ii) que φ_o s'annule sur $H^{2,0}(X_o)$, ce qui exclut cette possibilité.

On a donc

$$\Gamma_o = \Delta + \sum_{i\in I} C_i \times C'_i ,$$

où Δ est le graphe d'une application biméromorphe u_o de X'_o sur X_o . Comme les surfaces X_o et X'_o sont minimales non réglées, une telle application est nécessairement un isomorphisme, ce qui prouve a).

Supposons maintenant φ_o effectif. Notons c_i , c'_i les classes de cohomologie de C_i , C'_i ; on a , pour $x \in H^2(X_o, \mathbb{R})$,

$$\varphi_o(x) = [\Gamma_o]_*(x) = u_o^*(x) + \sum_{i\in I} (x.c_i)c'_i .$$

Prenons $x \in \mathcal{K}_X$; on a alors $(x.c_i) = r_i > 0$, et

$$\varphi_o(x) - u_o^*(x) = \sum_{i \in I} r_i\, c_i' ,$$

d'où $0 = (\varphi_o(x))^2 - (u_o^*(x))^2 = (\varphi_o(x) + u_o^*(x)) . \sum_{i \in I} r_i\, c_i'$.

Comme $\varphi_o(x)$ et $u_o^*(x)$ sont dans $\mathcal{K}_X$, ceci impose $I = \emptyset$, donc $u_o^* = \varphi_o$, ce qui prouve b) . □

Remarque. La démonstration s'applique plus généralement à deux familles de surfaces kählériennes $X \longrightarrow S$ et $X' \longrightarrow S$, pourvu que l'on suppose X_o et X_o' non réglées et minimales. Remarquons d'autre part que l'hypothèse kählérienne a été utilisée une seule fois dans la démonstration de a), pour borner le terme $\int_{X_t'} \varkappa_t' \wedge u_t^* \varkappa_t$ (le fait que $\varkappa_t$ et $\varkappa_t'$ sont fermées permettant de calculer en cohomologie).

3. OUVERTURE DE L'EFFECTIVITÉ

Soit $f : X \longrightarrow S$ une famille de surfaces K3 kählériennes sur une variété analytique S . Les espaces $H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X_s)$ s'organisent en un fibré vectoriel réel $\mathcal{H}^{1,1}$ sur S . On peut le voir élémentairement comme suit : localement sur S , on peut choisir un marquage $R^2 f_*(\mathbb{Z}) \longrightarrow L_S$, d'où une application des périodes $\mathcal{P} : S \longrightarrow \Omega$. Alors $\mathcal{H}^{1,1}$ est l'image réciproque par $\mathcal{P}$ du sous-fibré de $\Omega \times L_{\mathbb{R}}$ (au-dessus de Ω) formé des couples (P,x) tel que x soit orthogonal à P .

Lemme 2. La réunion des chambres de Kähler $\mathcal{K}_{X_s}$, pour $s \in S$, est une partie ouverte de $\mathcal{H}^{1,1}$.

Nous utiliserons les notations de l'Exposé VII, n° 2 . Il est clair que la réunion $\mathcal{C}$ des $\mathcal{C}_{X_s}$, qui est définie par la condition $x^2 > 0$, est ouverte dans $\mathcal{H}^{1,1}$. Montrons maintenant que la réunion des murs de $\mathcal{C}_{X_s}$ (c'est-à-dire des hyperplans $\delta^{\perp}$ pour $\delta \in \mathrm{Pic}(X_s)$, $\delta^2 = -2$), pour s parcourant S , est fermée dans $\mathcal{C}$: il suffit en effet de le vérifier sur S ; on peut donc supposer qu'il existe un marquage $\sigma : R^2 f_*(\mathbb{Z}) \longrightarrow L_S$, d'où une application des périodes $\mathcal{P} : S \longrightarrow \Omega$. Une classe x de $\mathcal{C}_{X_s}$ appartient à un mur si et seulement si le 3-plan $\mathcal{P}(s) + \mathbb{R}\,\sigma_s(x)$ de $L_{\mathbb{R}}$ est orthogonal à un élément de Δ , et cette dernière condition est fermée (Exposé VII, Proposition 3).

Soient $s \in S$, et $x \in \mathcal{K}_{X_s}$. Choisissons une classe de Kähler k dans

$\mathcal{K}_{X_s}$. D'après ce qui précède il existe un voisinage V du segment $[x,k]$ dans $\mathcal{C}$ qui ne rencontre aucun mur de $\mathcal{C}_{X_t}$, quel que soit $t \in S$. De plus on peut supposer que $V \cap \mathcal{C}_{X_s}$ est connexe pour tout $s \in S$ (puisque $\mathcal{H}^{1,1}$ est localement isomorphe à un produit $S \times F$, le segment compact $[x,k]$ admet un système fondamental de voisinages de la forme $V_1 \times V_2$, avec V_2 connexe). Enfin puisque l'ensemble des classes de Kähler est ouvert dans $\mathcal{H}^{1,1}$, on peut supposer, quitte à réduire S , que $V \cap \mathcal{C}_{X_s}$ contient une classe de Kähler pour tout $s \in S$. On déduit alors de ce qui précède $V \cap \mathcal{C}_{X_s} \subset \mathcal{K}_{X_s}$ pour tout $s \in S$, d'où $V \subset \bigcup_{s \in S} \mathcal{K}_{X_s}$, ce qui prouve le lemme. □

Proposition 5. Soient $f : X \longrightarrow S$, $f' : X' \longrightarrow S$ deux familles de surfaces K3 kählériennes, et $\varphi : R^2 f_*(\mathbb{Z}) \longrightarrow R^2 f'_*(\mathbb{Z})$ un isomorphisme induisant en chaque point une isométrie de Hodge. Alors l'ensemble des points s de S tels que l'isométrie φ_s soit effective est ouvert dans S .

Posons $\mathcal{K} = \bigcup_{s \in S} \mathcal{K}_{X_s}$, $\mathcal{H} = \bigcup_{s \in S} H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X_s)$, et notons $\mathcal{K}'$, $\mathcal{H}'$ les notions correspondantes pour X' . On déduit de φ un morphisme de fibrés $\Phi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$. L'ensemble des $s \in S$ tels que φ_s soit effective est la projection sur S de $\Phi^{-1}(\mathcal{K}') \cap \mathcal{K}$ (Exposé VII, Lemme 4) ; il est donc ouvert d'après le lemme 2 . □

4. AUTOMORPHISMES AGISSANT TRIVIALEMENT EN COHOMOLOGIE

Proposition 6. Soient X une surface K3 kählérienne, u un automorphisme de X induisant l'identité sur $H^2(X,\mathbb{Z})$. Alors u est l'identité.

Montrons d'abord que u est d'ordre fini. Fixons une métrique de Kähler-Einstein sur X (Exposé II). Puisque u préserve la classe de cohomologie de cette métrique, il préserve la métrique elle-même en vertu de son unicité. D'autre part le groupe des automorphismes de X est un groupe discret (c'est un groupe de Lie complexe dont l'algèbre de Lie $H^0(X,T_X)$ est nulle) ; le sous-groupe compact des automorphismes isométriques est donc fini, d'où notre assertion.

Notons ω une 2-forme holomorphe non nulle sur X ; puisque u agit trivialement sur $H^2(X,\mathbb{C})$, on a $u^*\omega = \omega$. Soit x un point fixe de X ; la relation $u^*\omega = \omega$ entraîne que l'endomorphisme $T_x(u)$ de $T_x(X)$ est de déterminant 1 , donc a pour valeurs propres λ et λ^{-1} , avec $|\lambda| = 1$. Comme u est d'ordre fini, il existe un système de coordonnées locales (s,t) en x tel que $u(s,t) = (\lambda s,\lambda^{-1}t)$.

Supposons $u \neq Id_X$. On a alors $\lambda \neq 1$, de sorte que l'ensemble F des points fixes de u est fini. On peut alors appliquer la formule de Lefschetz holomorphe [1]

$$\Sigma(-1)^i \operatorname{Tr}(u^*|H^i(X,\mathcal{O}_X)) = \sum_{x\in F} \det(1-T_x(u))^{-1} .$$

Le premier membre est égal à 2. Soit $x \in F$; notons $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ les valeurs propres de $T_x(u)$. Alors

$$\det(1-T_x(u)) = (1-e^{i\theta})\,(1-e^{-i\theta}) = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \leq 4 ,$$

d'où l'on déduit $\operatorname{Card}(F) \leq 8$. Mais la formule de Lefschetz topologique donne

$$\operatorname{Card}(F) = \Sigma(-1)^i \operatorname{Tr}(u^*|H^i(X,\mathbb{Z})) = \chi_{top}(X) = 24,$$

d'où une contradiction. □

<u>Remarque</u>. On évite facilement de recourir au théorème de S.T. Yau : on déduit sans difficultés de l'hypothèse sur u que u s'étend aux fibres voisines dans une déformation locale universelle de X . On se ramène alors au cas où X est projective, auquel cas u doit appartenir au groupe des automorphismes projectifs de X , qui est algébrique donc fini.

5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE TORELLI

Soient X , X' deux surfaces K3 , et $\varphi_o : H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X',\mathbb{Z})$ une isométrie de Hodge effective. Considérons des déformations locales universelles $f : \mathcal{X} \longrightarrow S$ et $f' : \mathcal{X}' \longrightarrow S'$ de X et X' (Exposé V), de sorte que $X = \mathcal{X}_o$ ($o \in S$) et $X' = \mathcal{X}'_{o'}$ ($o' \in S'$). Quitte à réduire S et S' , on peut choisir des marquages $\sigma : R^2f_*(\mathbb{Z}) \longrightarrow L_S$ et $\sigma' : R^2f'_*(\mathbb{Z}) \longrightarrow L_{S'}$; de plus, en modifiant convenablement σ' , on peut supposer que le diagramme

$$\begin{tikzcd} H^2(X,\mathbb{Z}) \arrow[d, "\varphi_o"'] \arrow[dr, "\sigma_o"] & \\ H^2(X',\mathbb{Z}) \arrow[r, "\sigma'_o"'] & L \end{tikzcd}$$

est commutatif. Soient $\mathcal{P} : S \longrightarrow \Omega$ et $\mathcal{P}' : S' \longrightarrow \Omega$ les applications des périodes correspondantes ; la condition précédente signifie qu'on a $\mathcal{P}(o) = \mathcal{P}'(o')$. D'après le théorème de Torelli local (Exp.V), on peut réduire S et S' de façon que ρ et ρ' induisent des isomorphismes sur un même ouvert de Ω. On peut donc identifier (S',o') à (S,o) de façon que les deux familles marquées $(\mathcal{X} \longrightarrow S,\sigma)$ et $(\mathcal{X}' \longrightarrow S,\sigma')$ aient même application des périodes. Ceci revient à dire que l'isomorphisme $\varphi = \sigma'^{-1} \circ \sigma$ de $R^2f_*(\mathbb{Z})$ dans $R^2f'_*(\mathbb{Z})$ induit en chaque point une isométrie de Hodge. D'après le cor. à la Prop.3 (n°1), il existe une partie dense T de S telle que $\mathcal{X}_t$ soit une surface de Kummer pour $t \in T$. Puisque l'isométrie de Hodge φ_o est effective, il en est de même de φ_t pour t assez voisin de o (Prop.5). On déduit alors du théorème de Torelli pour les surfaces de Kummer (Exposé VIII) des isomorphismes $u_t : \mathcal{X}'_t \longrightarrow \mathcal{X}_t$ tels que $u_t^* = \varphi_t$. La Proposition 4 permet alors de conclure qu'il existe un isomorphisme $u : X' \longrightarrow X$ tel que $u^* = \varphi_o$. L'unicité de u est assurée par la Proposition 6. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Atiyah, R. Bott : A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes, II : applications, Ann. of Math. 88 (1968), 451-491.

[2] E. Bishop : Conditions for the analyticity of certain sets, Mich. Math.J. 11 (1964), 289-304.

[3] H. Inose, T. Shioda : On singular K3 surfaces, Complex analysis and algebraic geometry (dedicated to K. Kodaira), Iwanami, Tokyo et CUP, Cambridge (1977), 119-136.

[4] K. Kodaira, J. Morrow : Complex manifolds, Holt, Rinehart and Winston, New-York (1971).

[5] E. Looijenga, C. Peters : Torelli theorems for Kähler K3 surfaces, Compositio Math. 42 (1981), 145-186.

Bâtiment de Mathématiques 425
Université de Paris-Sud
ERA du CNRS n° 653
91405 ORSAY CEDEX (France)