Astérisque

P. BLANC
F. DU CLOUX
P. DELORME
A. GUICHARDET
J. PICHAUD

Homologie, groupes Ext^n représentations de longueur finie des groupes de Lie

Astérisque, tome 124-125 (1985)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__124-125__1_0>

124-125 ASTÉRISQUE

1985

HOMOLOGIE, GROUPES Ext^n REPRÉSENTATIONS DE LONGUEUR FINIE DES GROUPES DE LIE

par P. BLANC, F. du CLOUX, P. DELORME,
A. GUICHARDET, J. PICHAUD

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le présent numéro d'Astérisque est consacré à des travaux de divers auteurs portant sur trois sujets d'actualité : les groupes Ext^n des représentations des groupes de Lie (parties III et IV), les représentations de longueur finie des groupes de Lie (parties II, IV, V), l'homologie des représentations des groupes de Lie (parties I, VI). On va tenter, dans cette introduction, de faire le point de ces diverses théories.

1) Groupes Ext^n des représentations des groupes de Lie.

Dans le cas des groupes semi-simples, on avait jusqu'à maintenant des résultats de deux types sur les groupes $\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},K}(E,F)$ où E et F sont des $(\mathfrak{g},K)$-modules simples :

a) des résultats généraux, par exemple :

- $\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},K}(E,F) = 0$ si E et F sont de carré intégrable (Schmid [13] pour $n = 1$, Zuckerman (non publié) pour n quelconque):

- $\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},K}(E,F) = 0$ pour tout n strictement inférieur au rang réel de G si E (ou F) est unitaire et F (ou E) de dimension finie (Borel-Wallach [14]) ;

- si E et F ont des caractères infinitésimaux réguliers, et si $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(E,F) \neq 0$, alors E et F sont sous-quotients d'une même série principale (Vogan [15]).

b) des résultats concernant des groupes particuliers, par exemple calcul explicite de tous les $\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},K}(E,F)$ lorsque $G = SL(2,\mathbb{R})$ (Pinczon-Simon [16], Guichardet [17]).

Dans le cas des groupes de Lie inhomogènes (i.e. produits semi-directs de la forme $G = B \ltimes A$ où B est distingué et isomorphe à un $\mathbb{R}^n$), les groupes Ext^1_G ont été déterminés dans un travail de Guichardet [18] inspiré par des résultats de Rideau [19] concernant le groupe de Poincaré ; la partie III de ce fascicule est consacrée à l'étude des groupes Ext^n_G dans la même situation. On obtient ici des résultats un peu analogues à ceux de Mackey, ramenant le calcul des Ext^n de G à celui des Ext^n d'un sous-groupe ; mais ce sous-groupe est produit semi-direct du "petit groupe" S par un sous-groupe N de B qui n'apparaît pas dans la théorie de Mackey. Par ailleurs NS présente une certaine analogie avec le sous-groupe G(f) de la "méthode des orbites" (voir partie V , n° 6.2) ; d'où l'idée qu'il doit exister des relations entre les Ext^n_G et les $\mathrm{Ext}^n_{G(f)}$, G étant maintenant un groupe de Lie quelconque. Le cas des groupes nilpotents est étudié en détail dans la partie IV de ce fascicule : notons E le G-module unitaire irréductible associé par la méthode de Kirillov à un élément f de $\mathfrak{g}^*$, E^∞ le sous-espace des vecteurs différentiables, χ le caractère de G(f) de différentielle $if_{|\mathfrak{g}(f)}$. On peut se demander si l'on a

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{Ext}^n_G(E^\infty, E^\infty) \sim \mathrm{Ext}^n_{G(f)}(\mathbb{C}_\chi, \mathbb{C}_\chi) .$$

On démontre qu'on doit en réalité remplacer G(f) par un objet plus compliqué : le commutant C d'un relèvement de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I$ dans $\widehat{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}_I$, où I est l'annulateur de E^∞ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$; on démontre aussi que la relation (1) est vraie si l'orbite G.f est plate (i.e. est un sous-espace affine) ou est de dimension maximum.

2) Représentations de longueur finie des groupes de Lie.

On disposait jusqu'à présent d'un certain nombre de résultats concernant les groupes semi-simples, auquel cas "représentation" signifie "$(\mathfrak{g},K)$-module" . Notons χ un caractère de $Z(\mathfrak{g}_c)$ et $\mathcal{C}_\chi$ la catégorie des $(\mathfrak{g},K)$-modules de longueur finie dont tous les sous-quotients simples admettent le caractère infinitésimal χ .

a) Résultats de Bernstein-Gelfand-Gelfand [1], réénoncés par Khorochkin [3] : on construit une algèbre Q , sous-quotient de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)$, contenant un quotient de $Z(\mathfrak{g}_c)$; on note $\mathcal{C}'_\chi$ la catégorie des Q-modules de longueur finie dont tous les sous-quotients simples admettent le caractère infinitésimal χ ; on peut alors construire un foncteur $\mathcal{C}_\chi \longrightarrow \mathcal{C}'_\chi$ qui est un fait une équivalence de catégories, mais on n'a pas de construction explicite du foncteur inverse. Enfin on peut décrire explicitement Q (par générateurs et relations) si l'on connait la structure de certaines séries principales de G .

b) Résultats de Khorochkin [2],[3] : on prend $G = SO_o(n,1)$ ou $SU(n,1)$ et χ = caractère infinitésimal de la représentation triviale ; dans ce cas on connait suffisamment la structure des séries principales pour décrire Q explicitement ; on en déduit que $\mathcal{C}'_\chi$ est équivalente à la catégorie $\mathcal{C}''_\chi$ de certaines représentations d'un certain graphe ; par exemple, pour $G = SO_o(3,1)$, $\mathcal{C}''_\chi$ est la catégorie (qu'on notera $\mathcal{C}_o$ dans la suite) des diagrammes de la forme

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, shift left, "d_+"] & V_2 \arrow[l, shift left, "d_-"] \arrow[loop right, "a"] \end{tikzcd}$$

où V_1 et V_2 sont des espaces vectoriels complexes de dimension finie, d_+ , d_- et a des applications linéaires telles que $a.d_+ = d_-.a = 0$ et que $d_+ d_-$ et a soient nilpotentes; les morphismes de cette catégorie sont évidents.

Dans le cas où $G = SO_o(n,1)$, on peut construire explicitement, par des procédés combinatoires, les objets indécomposables de $\mathcal{C}''_\chi$; on retrouve ainsi des résultats de Gelfand-Ponomarev [6] pour $SO_o(3,1)$, et de Gelfand [9] et Nazarova-Roiter [10] pour $SO_o(2,1)$. Dans le cas de $G = SU(n,1)$, il n'existe pas de construction aussi explicite, car le problème contient alors celui de la classification à équivalence près des paires de matrices permutables - problème dont la non-résolubilité explicite a été discutée par Gelfand-Ponomarev [7] .

c) Résultats de Speh [11] : soient G un groupe semi-simple, E_1 et E_2 des $(\mathfrak{g},K)$-modules simples, E_1 étant en outre de dimension finie, et $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(E_1,E_2)$ non nul ; on construit un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des $(\mathfrak{g},K)$-modules de longueur finie à sous-quotients simples isomorphes à E_1 ou E_2 , dans la catégorie $\mathcal{C}_o$ décrite plus haut.

La partie II du présent fascicule étudie essentiellement les self-extensions d'un $(\mathfrak{g},K)$-module simple, noté J , d'un groupe semi-simple réel G ; on montre que celles-ci sont des sous-modules de $(\mathfrak{g},K)$-modules induits à partir de représentations d'un sous-groupe parabolique cuspidal $P = MAN$, triviales sur N . On donne également une borne supérieure pour la dimension de $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(J,J)$ (théorème 1). Dans le cas où J est une série principale généralisée irréductible (induite à partir de P), les résultats sont plus complets : on établit une équivalence entre la catégorie des self-extensions de J et celle des self-extensions d'un module irréductible d'une algèbre de polynômes à dim A-variables (algèbre des invariants de $S(\mathfrak{A})$ sous un sous-groupe du groupe de Weyl de A). Dans certains cas cette algèbre est précisément égale à $S(\mathfrak{A})$ et, en outre, le foncteur inverse de l'équivalence de catégorie précitée est donné par l'induction des représentations de P à G . Enfin, grâce à ces résultats, on résoud complètement un problème posé par I.M. Gelfand ([9],p.97) sur les $(\mathfrak{g},K)$-modules indécomposables à caractère infinitésimal généralisé "non singulier" , ceci pour G complexe (théorème 3).

La partie IV contient des résultats du même type dans le cas d'un <u>groupe de Lie nilpotent</u> G : on y construit explicitement une équivalence entre la catégorie des C-modules de longueur finie à sous-quotients simples triviaux (où C est la sous-algèbre de $\widehat{\mathfrak{U}(\mathfrak{g})}_I$ introduite en 1)) et celle des G-modules de longueur finie à sous quotients simples isomorphes à E^∞ ; si de plus l'orbite G.f est de dimension maximum, on peut remplacer C par G(f), mais l'équivalence de catégories n'est plus explicite.

Enfin la partie V est consacrée à la démonstration d'un résultat du même type dans le cas des <u>groupes de Lie inhomogènes</u> : sous certaines hypothèses concernant l'action du petit groupe S dans B^* (toujours vérifiées si S est semi-simple ou compact), on construit explicitement une équivalence entre une catégorie de NS-modules de longueur finie et une catégorie de G-modules de longueur finie. Ici la démonstration est assez différente de celles des cas semi-simple et nilpotent puisqu'elle utilise de façon essentielle, d'une part les propriétés des groupes Ext^n , et d'autre part un résultat d'Algèbre Homologique reliant les dites propriétés à celles des foncteurs (proposition 2.1).
Remarquons que dans les trois cas (groupes semi-simples, nilpotents, inhomogènes) le résultat obtenu est un résultat de "réduction" analogue à celui de la Théorie de Mackey, mais moins agréable que ce dernier, en ce sens que dans nombre de cas considérés comme "favorables", il ramène le problème concernant G à un problème analogue concernant un groupe abélien, problème non résolu (voir la remarque de Gelfand-Ponomarev mentionnée ci-dessus en b)).

Remarquons enfin que les résultats obtenus dans ces trois cas motivent une conjecture (voir partie V , n° 6.2) reliant les G-modules de longueur finie aux G(f)-modules de longueur finie, mais qui peut être vraie tout au plus pour les orbites coadjointes de dimension maximum, puisque l'on connait un contre exemple dans le cas du groupe nilpotent $G_{5,3}$ et d'une orbite de dimension non-maximum.

3) <u>Homologie des représentations des groupes de Lie</u>.

Les résultats connus jusqu'à maintenant étaient en gros les suivants : définition de l'homologie et construction d'objets relativement projectifs [23] (le tout est plus délicat qu'en cohomologie, entre autres parce que le H_o est a priori non séparé) ; isomorphisme de Poincaré, dû à P. Blanc et D. Wigner [24] ; isomorphisme de Van Est, dû à J. Pichaud [25].

La partie I de ce fascicule est consacrée au lemme de Shapiro en homologie (pour les représentations induites au sens C^∞ à support compact modulo le sous-groupe induisant) ainsi qu'à la définition et à la surjectivité de l'application $H_*(G_d,E) \longrightarrow H_*(G,E)$ où G_d désigne le groupe G rendu discret. On y présente en réalité un traitement unifié de l'homologie et de la cohomologie. Ajoutons qu'un résultat moins général que le nôtre, concernant la cohomologie, avait été obtenu dans [26] par des méthodes différentes, utilisant notamment les classifiants ; sur ces questions, voir aussi [27].
La partie VI contient le théorème de régularisation en homologie, c'est-à-dire l'isomorphisme de $H_*(G,E)$ et $H_*(G,E_\infty)$ lorsque E est un G-module continu ; précisons que $H_n(G,E)$ est défini ici comme le n-ième dérivé à gauche du foncteur

$E \longmapsto \underline{E}_G$, où $\underline{E}_G$ est le séparé de E_G , quotient de E par le sous-espace vectoriel engendré algébriquement par les éléments $g.x-x$, $g \in G$, $x \in E$; on sait, d'après Blanc et Wigner, que les foncteurs $E \longmapsto E_G$ et $E \longmapsto \underline{E}_G$ ont les mêmes dérivés lorsque le G-module E est C^∞ , mais on ignore si cela reste vrai lorsque E est seulement supposé continu.

⁂

BIBLIOGRAPHIE GÉNÉRALE.

[1] J. BERNSTEIN - I. GELFAND - S. GELFAND. Structure locale de la catégorie des modules de Harish-Chandra (C.R. Acad. Sci.,t.286, 1978, série A, p.435-437 et 495-498).

[2] S.M. KHOROCHKIN. Sur la catégorie des modules de Harish-Chandra du groupe SU(n,1) (Funkt. Anal. i ego Prilog.,t.14 (2), 1980, p.85-86).

[3] S.M. KHOROCHKIN. Représentations indécomposables des groupes de Lorentz (Funkt. Anal. i ego Prilog., t.15 (2), 1981, p.50-60).

[4] I.M. GELFAND - V.A. PONOMAREV. Catégorie des modules de Harish-Chandra sur l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz (Dokl. Acad. Nauk.,t.176 (2), 1967, p.243-246).

[5] I.M. GELFAND-V.A. PONOMAREV. Classification des représentations infinitésimales indécomposables du groupe de Lorentz (Dokl. Acad. Nauk, t.176 (3), 1967, p.502-505).

[6] I.M. GELFAND-V.A. PONOMAREV. Représentations indécomposables du groupe de Lorentz (Uspekhi Mat. Nauk. t.23 (2), 1968, p.1-60).

[7] I.M. GELFAND-V.A. PONOMAREV. Remarques sur la classification d'une paire de transformations linéaires permutables dans un espace de dimension finie (Funkt. Anal. i ego Prilog., t.3 (4), 1969, p.81-82).

[8] I.M. GELFAND-M.I. GRAEV-V.A. PONOMAREV. Classification des représentations linéaires du groupe SL(2,$\mathbb{C}$). (Dokl. Acad. Nauk, t.194 (5), 1970, p.1002-1005).

[9] I.M. GELFAND. Cohomology of infinite dimensional Lie algebras (C.I.M. Nice 1970, tome I, p. 95-111).

[10] L.A. NAZAROVA-A.V. ROITER. Un problème de Gelfand. (Funkt. Anal. i Prilog, t.7 (4), 1973, p.54-69).

[11] B. SPEH. Indécomposable représentations of semi-simple Lie groups (Trans. Amer. Math. Soc.,t.265, 1981, p.1-33).

[12] H. KRALJEVIC. Indécomposable Harish-Chandra modules (Berichte Math. Stat. Sekt. Forschungszentrum Graz, n° 113, 1979).

[13] W. SCHMID. Some properties of square-integrable representation of semi-simple Lie groups (Ann.Math., t.102, 1975, p.535-564).

[14] A. BOREL-N. WALLACH. Continuous cohomology, discrete subgroups and representations of reductive groups (Ann. Math. Studies, Princeton, n° 94, 1980).

[15] D. VOGAN. Irreducible characters of semi-simple Lie groups I (Duke Math. J., t. 46, 1979, p.61-108) et II (ibid, p.805-859).

[16] G. PINCZON-J.SIMON. Extensions of representations and cohomology (Reports Math. Phys.,t.16 (1), 1979, p.49-77).

[17] A. GUICHARDET. Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie (CEDIC-Nathan, 1980).

[18] A. GUICHARDET. Extension des représentations induites des produits semi-directs (J. reine angew. Math., t.310, 1979, p.7-32).

[19] G. RIDEAU. On the extensions of mass-zero representations of the Poincaré group (Reports Math. Phys., t.16 (2), 1979, p.251-263).

[20] G. RIDEAU. Cours sur les extensions de representations du groupe de Poincaré (Louvain, 1980).

[21] P. DELORME-H. KRALJEVIC. Abstracts of short communications, p.130. Congrès international des Mathématiciens. Helsinki, 1978.

[22] P. DELORME. Homomorphismes de Harish-Chandra liés aux K-types minimaux des séries principales généralisées des groupes de Lie réductifs connexes. (à paraître aux Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.).

[23] P. BLANC. Projectifs dans la catégorie des G-modules topologiques (C.R. Acad. Sci., t.289, 1979, p.161-163).

[24] P. BLANC-D. WIGNER. Homologie des représentations des groupes de Lie et dualité de Poincaré (à paraître dans Letters in Math. Phys.).

[25] J. PICHAUD. G-homologie et $(\mathfrak{g},K)$-homologie dans la catégorie des modules différentiables (à paraître aux Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.).

[26] R. BOTT- A. HAEFLIGER. On characteristic classes of Γ-foliations (Bull. Amer. Math. Soc., t.78 (6), 1972 , p.1039-1044).

[27] G. HOCHSCHILD- D. WIGNER. Abstractly split group extensions (Pacific J. Math., t. 68 (2), 1977, p.447-453).

PARTIE I

(CO)HOMOLOGIE DIFFÉRENTIABLE ET CHANGEMENT DE GROUPES

par

P. BLANC

Astérisque 124-125 (1985)
Société Mathématique de France

INTRODUCTION

Nous étudions ici des relations entre la (co) homologie différentiable d'un groupe de Lie réel et celle de ses sous groupes; nous en déduisons des relations entre la (co) homologie différentiable et la (co) homologie abstraite.

La partie cohomologique de ce travail ne prétend pas à l'originalité, nous avons cependant traité conjointement homologie et cohomologie. La première raison en est qu'il apparaît ainsi clairement que des problèmes d'analyse non triviaux surgissent en homologie, alors qu'ils n'apparaissent pas dans les questions duales de cohomologie. Le passage d'un résultat au résultat dual est donc généralement loin d'être formel.
La seconde raison est que les résultats du §12 utilisent les deux théories; enfin qu'on obtient ainsi à peu de frais conjointement les résultats duaux des §15 et 16.

Ce travail s'ordonne de la façon suivante :

Après quelques préliminaires topologiques §1,2,3, nous rappelons la définition de la (co)homologie différentiable §4,5, dont l'existence est garantie par le théorème fondamental du §6. Au §7, nous généralisons un résultat de [2] qui nous permet d'interprêter l'induction à support compact en termes d'espace de coinvariants §8 et 9, et d'établir le lemme de Shapiro homologique du §11; les isomorphismes du §12 sont alors une conséquence facile de l'isomorphisme de Poincaré [2]. Au §13, nous décrivons la fonctionalité de la (co) homologie différentiable par rapport aux groupes, cette description est bien utile pour démontrer les théorèmes du §15 et 16, en "suivant" les applications intervenant au niveau des résolutions. Nous construisons au §14 des homomorphismes naturels associés au foncteur de restriction et de (co) induction.
Les ingrédients des démonstrations du §15 et 16 sont en effet essentiellement la naturalité des morphismes considérés et l'utilisation des "théorèmes de comparaison" rappelés au §4.
Enfin notons que la partie cohomologique des théorèmes du §15 et 16 sont essentiellement contenus dans [8] et [6] respectivement, la démonstration de [6] étant par voie géométrique, alors que notre démonstration est "interne" dans la théorie de la (co) homologie différentiable des groupes de Lie.

1°) La catégorie de base, rappels sur les notions fortes :

Nous désignerons par $\mathcal{B}$ la catégorie dont les objets sont les espaces vectoriels topologiques localement convexes complets séparés sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes et dont les morphismes sont les applications $\mathbb{C}$-linéaires continues.

Un complexe de $\mathcal{B}$ est dit fortement exact si il admet une homotopie contractante.

Une suite de $\mathcal{B}$, $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$, est dite fortement exacte si $\beta\circ\alpha$ est nulle et si vue comme complexe de $\mathcal{B}$ elle est fortement exacte, ceci entraine évidemment que la suite est exacte.

Un morphisme $A \xrightarrow{\alpha} B$ est dit fort si l'on a les suites exactes fortes :

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\alpha \longrightarrow A \longrightarrow A/\ker\alpha \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \operatorname{Im}\alpha \longrightarrow B \longrightarrow B/\operatorname{Im}\alpha \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow A/\ker\alpha \longrightarrow \operatorname{Im}\alpha \longrightarrow 0 .$$

En particulier la notion d'injection et de surjection forte est équivalente au fait d'admettre un inverse repsectivement à gauche ou à droite.

Une résolution forte d'un objet A de $\mathcal{B}$ est la donnée d'un complexe positif $R^{\bullet}$ de $\mathcal{B}$ et d'un morphisme $R^0 \xrightarrow{\alpha} A$ tel que $R^{\bullet} \xrightarrow{\alpha} A \longrightarrow 0$ soit un complexe fortement exact. Ceci équivaut au fait que $R^{\bullet} \xrightarrow{\alpha} A \longrightarrow 0$ est exacte et que les morphismes qui la définissent sont tous forts. On obtient la notion de corrésolution forte en renversant les flèches.

2°) Stabilité fonctionnelle :

Soit X une variété différentiable et M dans $\mathcal{B}$, on note $C^{\infty}(X,M)$ l'espace des fonctions différentiables sur X à valeur dans M, on le munit de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact des dérivées à tout ordre, qui en fait un espace complet [4].

Soit K un fermé de X, on note $\mathcal{C}^{\infty}(X,K,M)$ le sous espace de $\mathcal{C}^{\infty}(X,M)$ des fonctions à support dans K, muni de la topologie induite. On note $\mathcal{C}^{\infty}_c(X,M)$ le sous espace de $\mathcal{C}^{\infty}(X,M)$ des fonctions à support compact, muni de la topologie limite inductive des $\mathcal{C}^{\infty}(X,K,M)$, K parcourant les parties compactes de X.

L'espace $\mathcal{C}^{\infty}_c(X,M)$ est la somme directe topologique des $\mathcal{C}^{\infty}_c(X_i,M)$ où X_i parcourt les composantes connexes de X.

Si la variété X est paracompacte, chaque X_i est dénombrable à l'infini, $\mathcal{C}^{\infty}_c(X_i,M)$ est alors complet car c'est une limite inductive stricte d'espaces complets, il s'en suit que $\mathcal{C}^{\infty}_c(X,M)$ est complet.

Notons qu'il en résulte la propriété importante que toute partie compacte de $\mathcal{C}^{\infty}_c(X,M)$ est contenue pour un certain compact K de X dans $\mathcal{C}^{\infty}(X,K,H)$.

Pour nous résumer pour tout X et tout M, $\mathcal{C}^\infty(X,M)$ est un objet de $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}^\infty_c(X,M)$ est un objet de $\mathcal{D}$ si X est paracompacte.

3°) La catégorie des modules différentiables :

Soit G un groupe de Lie réel, nous ne ferons aucune hypothèse sur son nombre de composantes connexes.

Définition : Un G-module différentiable est la donnée d'un objet M de $\mathcal{D}$, d'un homomorphisme de groupe de G dans Aut(M), $(g \longrightarrow (m \longrightarrow g.m))$, où $g \in G$ et $m \in M$, satisfaisant aux conditons suivantes :

D_1 : l'image pour cet homomorphsime de tout compact de G est équicontinue.

D_2 : La fonction $(g \longrightarrow g.m)$ de G dans M est différentiable.

D_3 : L'application de M dans $\mathcal{C}^\infty(G,M)$, $(m \longrightarrow (g \longrightarrow g.m))$, est continue.

Pour plus de détails sur ces modules voir [3].

On note $\mathcal{D}_G$ la catégorie dont les objets sont les G-modules différentiables et les morphismes, ceux de $\mathcal{D}$ qui commutent à l'action de G .

Proposition : Soit X une variété différentiable sur laquelle G agit de telle sorte que l'application $(x,g) \longrightarrow x.g$ soit différentiable de $X \times G$ dans X et soit M un objet de $\mathcal{D}_G$.

Si φ est une fonction de X dans M on pose pour tout $g \in G$, $x \in X$:

$$(g.\varphi)(x) = g.(\varphi(x.g)) .$$

Cette formule définit alors une structure de G-module différentiable sur $\mathcal{C}^\infty(X,M)$ et si X est paracompacte sur $\mathcal{C}^\infty_c(X,M)$.

Démonstration : L'action de G sur ces espaces est le produit de l'action de G sur X et M respectivement. L'isomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(G,\mathcal{C}^\infty(G,M))$ avec $\mathcal{C}^\infty(G \times G,M)$, voir [4], ramène l'étude au cas où l'une des deux actions est triviale.

Si l'action sur M est triviale, la proposition est montrée dans le cas où X est G-lui même dans [3], cette démonstration se généralise sans difficulté à notre situation.

Si l'action sur X est triviale, la condition D_1 résulte des propriétés des topologies adoptées sur $\mathcal{C}^\infty(X,M)$ et $\mathcal{C}_c^\infty(X,M)$, cf 2°.

Les conditions D_2 et D_3 sont remplies pour $\mathcal{C}^\infty(X,M)$ du fait que l'application de M dans $\mathcal{C}^\infty(G,M)$ définie pour D_3, induit une application de $\mathcal{C}^\infty(X,M)$ dans $\mathcal{C}^\infty(X,\mathcal{C}^\infty(G,M))$ espace qui est isomorphisme à $\mathcal{C}^\infty(G,\mathcal{C}^\infty(X,M))$. Pour $\mathcal{C}_c^\infty(X,M)$, l'application définie par D_3 pour M, induit une application de $\mathcal{C}^\infty(X,K,M)$ dans $\mathcal{C}^\infty(X,K,\mathcal{C}^\infty(G,M))$ pour tout compact K de X, cet espace étant isomorphe à $\mathcal{C}^\infty(G,\mathcal{C}^\infty(X,K,M))$ on en déduit une application continue de $\mathcal{C}_c^\infty(X,M)$ dans $\mathcal{C}^\infty(G,\mathcal{C}_c^\infty(X,M))$ ce qui montre D_2 et D_3 dans ce cas.

Dans la catégorie $\mathcal{D}_G$, on introduit les notions relatives de suites fortement exacte, résolution forte, morphisme fort,... ; elles sont identiques à celles introduites au § 1, il suffit d'oublier sur les objets et morphismes de $\mathcal{D}_G$ la structure de G-module, les considérant seulement comme objet et morphismes de $\mathcal{D}$.

4°) Notion d'injectifs et de projectifs dans la catégorie $\mathcal{D}_G$.

Soit P un objet de $\mathcal{D}_G$, on dira que P est relativement projectif si pour toute surjection forte de $\mathcal{D}_G$, $B \xrightarrow{\beta} C \to 0$, tout morphisme $P \xrightarrow{\pi} C$ de $\mathcal{D}_G$, se relève en un morphisme, $P \xrightarrow{\bar{\pi}} B$, de $\mathcal{D}_G$, à savoir $\beta\,\bar{\pi} = \pi$.

Dualement, I, objet de $\mathcal{D}_G$, sera dit relativement injectif si pour toute injection forte de $\mathcal{D}_G$, $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B$, tout morphisme, $A \xrightarrow{i} I$, de $\mathcal{D}_G$ s'étend en un morphisme $V \xrightarrow{\bar{i}} I$ de $\mathcal{D}_G$, autrement dit $\bar{i}\,\alpha = i$. Rappelons ici les classiques "théorèmes de comparaison" entre deux complexes, qui joueront un rôle fondamental dans la suite :

Soit $X^\cdot \to M \to 0$ une résolution forte du module M dans $\mathcal{D}_G$, $P^\cdot$ un complexe d'objets relativement projectifs de $\mathcal{D}_G$: Tout morphisme, $P^0 \xrightarrow{\alpha} M$, de $\mathcal{D}_G$, se prolonge en un morphisme de complexes $P^\cdot \xrightarrow{\bar{\alpha}} X^\cdot$, unique à homotopie près.

Soit $0 \to M \to Y^\cdot$ une corésolution forte du module M dans $\mathcal{D}_G$, $I^\cdot$ un complexe d'objets relativement injectifs dans $\mathcal{D}_G$: Tout morphisme, $M \xrightarrow{\beta} I^0$, de $\mathcal{D}_G$, se prolonge en un morphisme de complexes $Y^\cdot \xrightarrow{\beta^\cdot} I^\cdot$, unique à homotopie près.

5°) (Co)homologie différentiable d'un groupe de Lie :

Soit $\mathcal{E}$ la catégorie des espaces vectoriels localement convexes sur $\mathbb{C}$, non nécessairement séparés, et soit M un objet de $\mathcal{D}_G$.

On note M^G l'espace des invariants sous G de M, à savoir l'ensemble des $m \in M$, tels que $g.m = m$ pour tout $g \in G$, muni de la topologie induite.

On définit le foncteur H^o de $\mathcal{D}_G$ dans $\mathcal{E}$ par $H^o(M) = M^G$.

On note M_G l'espace des coinvariants de M, c'est le quotient de M par le sous espace algébriquement engendré par $(g.m-m)$, (g,m) parcourant $G \times M$, muni de la topologie quotient. On définit le foncteur H_o de $\mathcal{D}_G$ dans $\mathcal{E}$ par $H_o(M) = M_G$.
Le foncteur H^o est relativement exact à gauche, H_o l'est à droite, plus précisément :
Si, $0 \to A \to B \to C \to 0$, est une suite exacte forte dans $\mathcal{D}_G$,

$0 \to A^G \to B^G \to C^G$ et $A_G \to B_G \to C_G \to 0$ sont exactes dans $\mathcal{E}$.

Les foncteurs (co)homologiques sont alors définis par dérivation :

- $H^\bullet(G,M)$ est la cohomologie du complexe $H^o(I^\bullet) = (I^G)^\bullet$ où $0 \to M \to I^\bullet$ est une coré-solution forte relativement injective de M .

- $H_\bullet(G,M)$ est l'homologie du complexe $H_o(P^\bullet) = (P_G)^\bullet$ où $P^\bullet \to M \to 0$ est une réso-lution forte relativement projective de M . Munis de leur topologie de sous quotient, ces espaces ne dépendent que de M , ceci résulte des théorèmes de comparaisons du §4. et de ce que A^G dans B^G et C_G dans B_G sont facteurs directs topologiques.
Leur existence est établie par le théorème suivant, qui entraine essentiellement que $\mathcal{D}_G$ admet suffisamment d'objets relativement injectifs et d'objets relativement pro-jectifs.

6°) <u>Théorème</u> : <u>Pour tout G-fibré principal</u> X <u>paracompact et tout</u> $M \in \mathcal{D}_G$:

- <u>Le module</u> $\mathcal{C}^\infty(X,M)$ <u>est relativement injectif dans</u> $\mathcal{D}_G$
- <u>Le module</u> $\mathcal{C}^\infty_c(X,M)$ <u>est relativement projectif dans</u> $\mathcal{D}_G$.

<u>Démonstration</u> : On construit tout d'abord sur le fibré X , une fonction $\chi \in \mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{C})$, telle que l'intersection de son support avec tout sous ensemble compact d'orbites de X sous G soit compacte dans X et que pour tout $x \in X$, dg désignant une mesure invariante à gauche fixée sur G : $\int_G \chi(xg)\, dg = 1$.

En particulier, ceci entraine que si x reste dans un compact K de X , l'ensemble des $g \in G$ tels que xg soit dans le support de χ est un compact K_χ de G .
- Soit $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B$ une injection forte de $\mathcal{D}_G$, $B \xrightarrow{\sigma} A$ un morphisme de $\mathcal{D}$ inver-se à gauche de α , $A \xrightarrow{i} \mathcal{C}^\infty(X,M)$ un morphisme de $\mathcal{D}_G$.
Pour tout $b \in B$, $g \in G$, $x \in X$ on pose :

$$i_\chi(b)\ (g)\ (x) = i(g\sigma g^{-1}b)\ (x)\ \chi(xg) .$$

De cette formule on déduit une application $B \xrightarrow{i_\chi} \mathcal{C}^\infty(G,\mathcal{C}^\infty(X,M))$ qui est linéaire et continue.

D'autre part si $\| \ \|_K$ désigne une quelconque semi norme sur X, définissant la topologie de la convergence uniforme dans $\mathcal{C}^\infty(X,M)$ sur un compact K de X, la fonction composée $\|i_\chi(b)\|_K$ à son support dans le compact K_χ défini plus haut, qui est indépendant de $b \in B$.

On en déduit que la fonction $i_\chi(b)$ est intégrable sur G par rapport à dg, et que l'application $B \xrightarrow{\bar{i}} \mathcal{C}^\infty(X,M)$, définie par la formule ci-dessus est continue :

$$\bar{i}(b) = \int_G i_\chi(b)\ (g)\ dg\ .$$

Il reste à vérifier que $\bar{i}$ est un morphisme de $\mathcal{B}_G$ et que c'est un prolongement de i, ce qui résulte respectivement de l'invariance à gauche de dg et du fait que χ est d'intégrale 1 sur chaque orbite.

- Soit $B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ une surjection forte dans $\mathcal{B}_G$, $C \xrightarrow{\tau} B$ un morphisme de $\mathcal{B}$ inverse à droite de β, $\mathcal{C}_c^\infty(X,M) \xrightarrow{\pi} C$ un morphisme de $\mathcal{B}_G$.

Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(X,M)$, $g \in G$, $x \in X$ on pose :

$$\varphi_\chi(g)\ (x) = \varphi(x).\chi(x.g)$$

Pour tout compact K de X l'application $\varphi \longrightarrow \varphi_\chi$, envoie continument $\mathcal{C}^\infty(X,K,M)$ dans $\mathcal{C}^\infty(G,K_\chi,\mathcal{C}^\infty(X,K,M))$, où K_χ est le compact de G qui a été précédemment associé à K et à χ.

On peut alors poser : $\bar{\pi}(\varphi) = \int_G g\tau\, g^{-1}\ \beta(\varphi_\chi(g))\ dg$.

L'application $\bar{\pi}$ est alors continue de $\mathcal{C}_c^\infty(X,M)$ dans B. De plus pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(X,M)$ on a les égalités suivantes :

$$(g_o.\varphi)_\chi(g) = g_o.(\varphi_\chi(g_o^{-1}g)) \text{ pour tous } g_o \in G\ ,\ g \in G\ .$$

$$\int_G \varphi_\chi(g)\ dg = \varphi\ .$$

On en déduit respectivement que $\bar{\pi}$ est un morphisme de $\mathcal{B}_G$ et qu'il relève π, d'où le théorème.

Remarquons enfin que pour tout $M \in \mathcal{B}_G$ on peut définir une injection forte, $0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(G,M)$ par les formules :

$$\varepsilon(m)(g) = m \text{ pour tout } m \in M \text{ et tout } g \in G$$

$$S(\varphi) = \varphi(e) \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{C}^\infty(G,M).$$

De même on obtient une surjection forte, $\mathcal{C}_c^\infty(G,M) \longrightarrow M \longrightarrow 0$ pour :

$$\varepsilon_c(\psi) = \int_G \psi(g)\, \Delta_G(g)dg \quad \text{pour tout } \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(G,M)$$

$$S_c(m)(g) = u(g^{-1}).m \quad \text{pour tout } m \in M \text{ et tout } g \in G .$$

Où ici u est une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(G,\mathbb{C})$, d'intégrale 1 par rapport à la mesure dg, et Δ_G la fonction modulaire de G. Ceci joint au théorème précédent, appliqué à $X = G$, montre que $\mathcal{D}_G$ admet suffisamment d'objets relativement projectifs et d'objets relativement injectifs.

On en déduit une description explicite du complexe qui permet de calculer les espaces de (co)homologie :

L'espace $H^i(G,M)$ est la cohomologie en degré i du complexe :

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(G,M)^G \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(G^{n+1},M)^G \xrightarrow{d^n} \mathcal{C}^\infty(G^{n+2},M)^G \longrightarrow \cdots$$

où $(d^n\varphi)(g_o,\dots,g_{n+1}) = \sum_{i=o} (-1)^i \varphi(g_o,\dots,g_{i-1},g,g_i,\dots,g_n)$

L'espace $H_i(G,M)$ est l'homologie en degré i du complexe :

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{C}_c^\infty(G^{n+2},M)_G \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathcal{C}_c^\infty(G^{n+1},M)_G \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{C}_c^\infty(G,M)_G \longrightarrow 0 .$$

où $(\partial_{n+1}\psi)(g_o,\dots,g_n) = \sum_{i=o}^{n+1} (-1)^i \int_G \psi(g_o,\dots,g_{i-1},g,\ g_i,\dots,g_n)dg$

7^o) Caractérisation des fonctions d'intégrale nulle comme somme finie de différences de translatées

On conserve les notations du 6^o), pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(X,M)$ on pose :

$$(\theta(\varphi))(x) = \int_G g.(\varphi(x.g)).\Delta_G(g).dg$$

Proposition : Si $\theta(\varphi)$ est identiquement nulle il existe un nombre fini $g_1,\dots,g_n$ d'éléments de G et un nombre fini $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ de fonctions de $\mathcal{C}_c^\infty(X,M)$ telle que $\varphi = g_1.\varphi_1 - \varphi_1 + \dots + g_n.\varphi_n - \varphi_n$

<u>Démonstration</u> : Si $X = G$, et l'action de G sur M est triviale, c'est le théorème 2.1 de [2] .

Si X est un fibré triviale $X/G \times G$ et M quelconque, soit $X \xrightarrow{\tau} G$ la projection de X sur G . On se ramène au cas précédent de la manière suivante. Si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(X,M)$, on pose $\tilde{\varphi}(x) = \tau(x)\ \varphi(x)$, $\varphi \longrightarrow \tilde{\varphi}$ est un automorphisme de $\mathcal{C}_c^\infty(X,M)$, la condition $\theta(\varphi) = 0$ devient : $\int_G \tilde{\varphi}(xg)\Delta_G(g)\,dg = 0$ pour tout $x \in X$.

Comme $\mathcal{C}_c^\infty(X,M)$ est algébriquement isomorphe à $\mathcal{C}_c^\infty(G,(\mathcal{C}_c^\infty(X/G,M))$ on peut poser pour tout $g \in G$: $\tilde{\varphi}g(x.G) = \tilde{\varphi}(g,x.G)$ est la condition s'écrit : $\int_G \tilde{\varphi}g\ dg = 0$

Ceci nous ramène au cas précédent où $X = G$ et G agit trivialement sur le module ici $\mathcal{C}_c^\infty\ (X/G,M)$.

Si X n'est pas trivial, on décompose φ en somme finie de φ_i , où chaque φ_i est à support dans un ouvert saturé de X trivial sous G , ceci à l'aide d'une partition de l'unité de X/G subordonnée à un recouvrement ouvert, localement fini, tels que X est trivial sur chacun d'eux, on applique alors le résultat précédent à chacun des φ_i .

8°) Notons $\mathcal{C}_c^\infty(X,G,M)$ le sous espace de $\mathcal{C}^\infty(X,M)$ des fonctions Ψ à support compact modulo G , c'est-à-dire telles qu'il existe un compact K de X , dont le saturé $K.G$ par Ψ contient le support de Ψ , et vérifiant de plus l'égalité :

$$\Delta_G(g).g.\Psi(x.g) = \Psi(x) \quad \text{pour tout } g \in G \text{ et tout } x \in X .$$

On munit cet espace de la topologie limite inductive de sous espaces $\mathcal{C}^\infty(X,K\cdot G,M\otimes\Delta_G)^G$, K parcourant les compacts de X .

<u>Proposition</u> : <u>L'application</u> θ <u>induit un isomorphisme topologique de</u> $\mathcal{C}_c^\infty(X,M)_G$ <u>sur</u> $\mathcal{C}_c^\infty(X,G,M)$.

<u>Démonstration</u> : Si χ désigne la fonction fixée en début du § 6 , on pose

$$\theta^{-1}(\Psi)(x) = \Psi(x).\chi(x) \text{ pour tout } x \in X .$$

La proposition 4.1. de [3] se généralise facilement à un fibré quelconque, elle montre essentiellement que θ définit une surjection forte $\mathcal{C}_c^\infty(X,M) \xrightarrow{\theta} \mathcal{C}_c^\infty(X,G,M)$, d'inverse à droite θ^{-1} . Il ne reste à montrer que Ker θ est exactement le noyau de la projection de $\mathcal{C}_c^\infty(X,M)$ sur $\mathcal{C}_c^\infty(X,M)_G$, c'est à dire le résultat de la proposition précédente.

9^{o}) Soit Γ un groupe fermé d'un groupe de Lie G . A tout $M \in \mathcal{D}_{\Gamma}$ on associe le G-module induit de Γ à G de M noté $P_{\Gamma}^{G}(M)$, défini par $P_{\Gamma}^{G}(M) = \mathcal{C}_{c}^{\infty}(G,\Gamma,M\otimes\Delta_{G}^{-1})$, avec les notations du § 8 , où ici G est vu comme un Γ-fibré principal pour l'action à droite de Γ , le groupe G opérant sur $P_{\Gamma}^{G}(M)$ par translation à gauche.

D'après les propositions du § 7 et 8, le module $P_{\Gamma}^{G}(M)$ s'identifie à un quotient de $\mathcal{C}_{c}^{\infty}(G,M\otimes\Delta_{G}^{-1})$ à savoir $\mathcal{C}_{c}^{\infty}(G,M\otimes\Delta_{G}^{-1})_{\Gamma}$, il est donc différentiable.

Il se décrit concrètement comme l'espace des fonctions C^{∞} de G dans M , à support compact modulo Γ , vérifiant la relation :

$$\Delta_{\Gamma}(\gamma)/\Delta_{G}(\gamma).\gamma\ \varphi(g\gamma) = \varphi(g) \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma \text{ et tout } g \in G .$$

Le module coinduit de Γ à G de M noté $I_{\Gamma}^{G}(M)$ est défini par $I_{\Gamma}^{G}(M) = \mathcal{C}^{\infty}(G,M)^{\Gamma}$, où G agit par translation à gauche, c'est l'espace des fonctions C^{∞} de G dans M , vérifiant la relation $\gamma\ \Psi(g\gamma) = \varphi(g)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $g \in G$.

10^{o}) Réciprocités :

Proposition : Si X est une variété différentiable sur laquelle G opère différentiablement, M un Γ-module différentiable on a un isomorphisme naturel de $\mathcal{C}^{\infty}(X,I_{\Gamma}^{G}(M))^{G}$ sur $\mathcal{C}^{\infty}(X,M)^{\Gamma}$.

Démonstration : A toute φ dans $\mathcal{C}^{\infty}(X,I_{\Gamma}^{G}(M)^{G}$ on associe Ψ dans $\mathcal{C}^{\infty}(X,M)^{\Gamma}$ par :
$\Psi(x) = \varphi(x)\ (e)$

Réciproquement à Ψ on associe φ pour : $\varphi(x)\ (g) = \Psi(x.g)$. Ceci décrit l'isomorphisme.

Proposition : On a un isomorphisme topologique naturel de $\mathcal{C}_{c}^{\infty}(X,P_{\Gamma}^{G}(M))_{G}$ sur $\mathcal{C}_{c}^{\infty}(X,M)_{\Gamma}$ pour tout G-fibré principal X paracompact et G-module différentiable M de $\mathcal{D}_{G}$.

Démonstration : L'espace $\mathcal{C}_{c}^{\infty}(X,\mathcal{C}_{c}^{\infty}(G,M))$ étant un module différentiable, il s'injecte continument dans $\mathcal{C}^{\infty}(G,\mathcal{C}_{c}^{\infty}(X,\mathcal{C}_{c}^{\infty}(G,M))$, voir §3 D_{3} . D'autre part l'évaluation en $\mathcal{C}$
l'élément neutre de G , définit une application continue de $\mathcal{C}_{c}^{\infty}(G,M)$ dans M .

Par composition on en déduit une application de $\mathcal{C}_{c}^{\infty}(X,\mathcal{C}_{c}^{\infty}(G,M))$ dans $\mathcal{C}^{\infty}(G,\mathcal{C}_{c}^{\infty}(X,M)$, qui envoit le sous espace $\mathcal{C}_{c}^{\infty}(X,K,\mathcal{C}^{\infty}(G,H,M))$ sur $\mathcal{C}^{\infty}(G,H^{-1},\mathcal{C}^{\infty}(X,K\ H^{-1},M)$, pour tout compact K de X et H de G .

En intégrant les fonctions de ce dernier espace par rapport à la mesure invariante à gauche sur G , on en déduit une application π linéaire et continue de l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathcal{C}_c^\infty(G,M))$ dans $\mathcal{C}_c^\infty(X,M)$ à savoir :

$$\pi(\varphi)\ (x) = \int_G \varphi(xg)\ (g^{-1})\ \Delta_G(g)\ dg$$

Cette application est une surjection forte, l'inverse est donné par la formule : $S(\psi)\ (x)\ (g) = \psi(xg)\ u(g)$ où $u \in \mathcal{C}_c^\infty(G,C)$ choisie telle que $\int_G u(g)dg = 1$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(X, \mathcal{C}_c^\infty(G,M))$, son image dans $\mathcal{C}^\infty(X, P_\Gamma^G(M))_G$ est nulle, d'après les propositions du § 7 si elle vérifie :

Pour tout $g' \in G$ et tout $x \in X$:

$$\int_\Gamma \gamma\ \frac{\Delta_\Gamma(\gamma)}{\Delta_G(\gamma)} \int_G \varphi(xg)\ (g^{-1}g'\gamma)\ \Delta_G(g)\ dg\ d\gamma = 0$$

Condition équivalente aux suivantes :

Pour tout $g' \in G$ et tout $x \in X$:

$$\int_\Gamma \gamma \int_G \varphi(x\ g'g)\ (g^{-1}\gamma)\ \Delta_G(g'g)\ \frac{\Delta_\Gamma(\gamma)}{\Delta_G(\gamma)}\ dg\ d\gamma = 0$$

Pour tout $x' \in X$:

$$\int_\Gamma \gamma\ \Delta_\Gamma(\gamma) \int_G \varphi(x'\gamma\ g)\ (g^{-1})\ \Delta_G(g)\ dg\ d\gamma = 0\ .$$

Cette dernière égalité exprime exactement que ψ est dans le noyau de la composée de π par la surjection de $\mathcal{C}_c^\infty(X,M)$ sur $\mathcal{C}_c^\infty(X,M)_\Gamma$ d'après la proposition du § 7 .

On a donc deux surjections fortes de $\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathcal{C}_c^\infty(G,M))$ sur $\mathcal{C}_c^\infty(X, P_\Gamma^G(M))_G$ et $\mathcal{C}_c^\infty(X,M)_\Gamma$ de même noyau, elles définissent donc un isomorphisme topologique sur leur image.

<u>Remarque</u> : Compte tenu de la proposition du § 8, on peut interpréter ce résultat comme un isomorphisme de $\mathcal{C}_c^\infty(X, G, P_\Gamma^G(M))$ sur $\mathcal{C}_c^\infty(X, \Gamma, M)$. Sur ces espaces l'isomorphisme s'explicite par la correspondance :

$$\psi \rightleftarrows \varphi \quad \text{où } \varphi(x) = \psi(x)\ (e)$$
$$\text{et } \psi(x) = \varphi(xg)\ \Delta_G(g)\ .$$

Bien qu'ici l'isomorphisme apparaisse simplement, la justification en est plus pénible.

On généralise en fait ici le théorème d'induction par étage de [3].Sous cette forme on se convaint aisément du fait que l'isomorphisme est naturel.

11°) Lemmes de Shapiro en (co)homologie :

Théorème : Soit Γ un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie G, pour tout $M \in \mathcal{D}_\Gamma$, il existe un isomorphisme topologique naturel de $H_i(\Gamma,M)$ sur $H_i(G,P_\Gamma^G(M))$ et un isomorphisme topologique naturel de $H^i(\Gamma,M)$ sur $H^i(G,I_\Gamma^G(M))$.

Démonstration : On munit l'espace G^{i+1} d'une structure de G-fibré principal en faisant agir G à droite sur chacun des facteurs, la restriction de cette action au sous-groupe Γ, définit une structure de Γ-fibré principal.
On peut donc appliquer le théorème du §6, les modules $\mathcal{C}_c^\infty(G^{i+1},P_\Gamma^G(M))$ et $\mathcal{C}_c^\infty(G^{i+1},M)$ sont relativement projectifs respectivement dans $\mathcal{D}_G$ et $\mathcal{D}_\Gamma$.
De plus ils constituent les modules d'une résolution forte de $P_\Gamma^G(M)$ et de M respectivement, les différentielles étant données par la formule du §6. L'isomorphisme de la deuxième proposition du § 10 étant naturel on en déduit un isomorphisme du complexe

$$\mathcal{C}_c^\infty(G^\cdot,M)_\Gamma \quad \text{sur} \quad \mathcal{C}_c^\infty(G^\cdot,P_\Gamma^G(M))_G$$

D'où un isomorphisme de l'homologie de ces complexes, à savoir en degré $i \geq 0$, de $H_i(\Gamma,M)$ sur $H_i(G,P_\Gamma^G(M))$. Pour établir le second isomorphisme, on procède d'une façon analogue : $\mathcal{C}^\infty(G^{i+1},I_\Gamma^G(M))$ et $\mathcal{C}^\infty(G^{i+1},M)$ sont relativement injectifs dans $\mathcal{D}_G$ et $\mathcal{D}_\Gamma$ respectivement toujours en vertu du § 6, d'autre part les complexes définis par la formule du §6, $\mathcal{C}^\infty(G^\cdot,I_\Gamma^G(M))^G$ et $\mathcal{C}^\infty(G^\cdot,M)^\Gamma$ sont isomorphes d'après la première proposition du §10, d'où l'isomorphisme de $H^i(\Gamma,M)$ sur $H^i(G,I_\Gamma^G(M))$.

12°) Quelques conséquences de la dualité de Poincaré et des lemmes de Shapiro :

a) On se donne ici un groupe de Lie G, ayant un nombre fini de composantes connexes, Δ_G désigne la fonction modulaire de G, on note n la dimension de l'espace G/K où K est un sous-groupe compact maximal de G.

Proposition : Soit Γ un sous-groupe cocompact de G, pour tout Γ-module différentiable M de $\mathcal{D}_\Gamma$, les espaces $H_i(\Gamma,M)$ et $H^{n-i}(\Gamma,M\otimes\Delta_\Gamma)$ sont topologiquement isomorphes, $M\otimes\Delta_\Gamma$ désignant le module M tordu par la fonction modulaire de Γ.

Démonstration : Ce résultat signifie que l'isomorphisme de Poincaré pour G , démontré dans [2] se propage aux sous groupes cocompacts. Remarquons tout d'abord que $P_\Gamma^G(M)$ s'identifie à $I_\Gamma^G(M\otimes \Delta_\Gamma)\otimes\Delta_G^{-1}$ par l'application qui à une fonction φ de $P_\Gamma^G(M)$ associe la fonction $g \longrightarrow \Delta_G(g^{-1})\ \varphi(g)$, Γ étant cocompact il n'y a en effet plus de condition de support sur l'induite.
Il suffit alors d'appliquer successivement le lemme de Shapiro en homologie, l'isomorphisme de Poincaré pour G , et le lemme de Shapiro en cohomologie pour avoir :

$$H_i(\Gamma,M) = H_i(G,I_\Gamma^G(M\otimes\Delta_\Gamma)\otimes\Delta_G^{-1}) = H^{n-i}(G,I_\Gamma^G(M\otimes\Delta_\Gamma)) = H^{n-i}(\Gamma,M\otimes\Delta_\Gamma) .$$

b) Le résultat suivant relie la cohomologie d'une induite et l'homologie d'une coinduite à la cohomologie et l'homologie respectivement, du module induisant.

Proposition : Si Γ est un sous groupe fermé de G , ayant un nombre fini de composantes connexes, soit ν l'analogue de n pour Γ , pour tout Γ-module différentiable M de $\mathcal{D}_\Gamma$ on a des isomorphismes topologiques de $H^i(\Gamma,M)$ sur $H^{i+n-\nu}(G,P_\Gamma^G(M))$ et de $H_i(\Gamma,M)$ sur $H_{i+n-\nu}(G,I_\Gamma^G(M\otimes\Delta_\Gamma/\Delta_G))$.

Démonstration : Les groupes Γ et G ayant un nombre fini de composantes connexes on peut leur appliquer le théorème d'isomorphisme de Poincaré [2], en utilisant les lemmes de Shapiro en homologie et en cohomologie on obtient respectivement les isomorphismes ci-dessus. On vérifie au passage que dans le cas où Γ est de plus cocompact n et ν sont égaux.

13°) Fonctorialité de l'homologie et de la cohomologie différentiable relativement aux homomorphismes de groupes de Lie :

Proposition : A tout homomorphisme entre deux groupes de Lie, correspond canoniquement une application naturelle de l'homologie différentiable du premier groupe dans celle du second, et une application naturelle de la cohomologie du second dans celle du premier : A l'homomorphisme identique correspond l'application identique, à la composée de deux homomorphismes correspond la composée des applications.

Démonstration : Soit μ un homomorphisme d'un groupe de Lie Γ dans un groupe de Lie G .
A tout $M \in \mathcal{D}_G$, est associé un Γ-module M_μ de $\mathcal{D}_\Gamma$: En tant qu'objet de $\mathcal{D}$, M_μ est identique à M , sa structure de Γ-module est donnée par :

$$\gamma.m = \mu(\gamma).m \quad \text{pour tout } \gamma \in M \quad \text{et tout } m \in M \ .$$

On a une injection canonique de M^G dans M_μ^Γ et une surjection canonique de $M_{\mu\Gamma}$ sur M_G .

Etant donnée une G-résolution forte relativement projective de M , $P^\cdot(G,M) \longrightarrow M \longrightarrow 0$, on lui associe le complexe $P^\cdot(G,M)_\mu \longrightarrow M_\mu \longrightarrow 0$ qui est une Γ-résolution forte de M_μ . Si maintenant $P^\cdot(M,M_\mu) \longrightarrow M_\mu \longrightarrow 0$ est une Γ résolution forte relativement projective de M_μ , le théorème de comparaison, du §4, nous donne un morphisme de complexe de $P^\cdot(\Gamma,M_\mu)$ dans $P^\cdot(G,M)_\mu$ dans la catégorie $\mathcal{D}_\Gamma$, d'où un morphisme de $P^\cdot(\Gamma,M_\mu)_\Gamma$ dans $P^\cdot(G,M)_{\mu\Gamma}$.

Si l'on le compose avec le morphisme de $P^\cdot(G,M)_{\mu\Gamma}$ dans $P^\cdot(G,M)_G$ provenant de la surjection canonique citée plus haut, on obtient un morphisme de $P^\cdot(\Gamma,M_\mu)_\Gamma$ dans $P^\cdot(G,M)_G$, qui en passant à l'homologie, fournit l'application cherchée de l'homologie de Γ dans M_μ dans l'homologie de G dans M . Cette application ne dépend pas du choix des résolutions en vertu du théorème de comparaison. Il suffit de regarder la construction pour se convaincre que cette application est naturelle et que la correspondance ainsi étalie préserve l'identité et la composition. Pour la cohomologie, la construction de l'application est analogue, il suffit de renverser les flèches.

14°) <u>Soit</u> Γ <u>un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie</u> G .

a) <u>Proposition</u> : <u>Pour tout</u> G-<u>module différentiable</u> M <u>de</u> $\mathcal{D}_G$ <u>il existe un</u> G-<u>morphisme naturel</u> i <u>de</u> M <u>dans</u> $I_\Gamma^G(M)$ <u>et un</u> G <u>morphisme naturel</u> p <u>de</u> $P_\Gamma^G(M)$ <u>sur</u> M , <u>donnés par les formules</u> : $i(m)(g) = g^{-1}.m$, <u>pour tout</u> $m \in M$ <u>et tout</u> $g \in G$

$$p(\varphi) = \int_G g.\varphi(g).\chi(g)dg \ \underline{\text{pour tout}} \ \varphi \in P_\Gamma^G(M) \ .$$

<u>Où</u> χ <u>désigne une fonction arbitraire de</u> $\mathcal{C}^\infty(G,\mathbb{C})$ <u>du type décrit au §6 ici pour le fibré principal</u> $G \longrightarrow G/\Gamma$, <u>le morphisme</u> p <u>est un fait indépendant de</u> χ .

<u>Démonstration</u> : Le fait que i définisse un G-morphisme est immédiat. Par contre pour p , il faut remarquer que la composée de la surjection canonique de $\mathcal{C}_c^\infty(G,M)$ sur $P_\Gamma^G(M)$ avec p est en fait le G-morphisme de $\mathcal{C}_c^\infty(G,M)$ où G agit par translation à gauche sur G dans M qui à φ associe l'intégrale : $\int_G g\ \varphi(g)dg$.

En effet :

$$\int_G g.\int_\Gamma \gamma.\Delta_\mu(\gamma)/\Delta_G(\gamma)\varphi(g\gamma)d\gamma\ \chi(g)dg =$$

$$\int_G g\varphi(g) \int_\Gamma \Delta_\Gamma(\gamma)\ \chi(g\gamma^{-1})\ d\gamma\ dg = \int_G g\varphi(g)\ dg\ .$$

On en déduit donc non seulement que p est un G-morphisme mais que de plus il est indépendant de χ.

Si X est un G-fibré principal, M un G-module différentiable de $\mathcal{B}_G$, l'injection canonique de $\mathcal{C}^\infty(X,M)^G$ dans $\mathcal{C}^\infty(X,M)^\Gamma$ se factorise à travers $\mathcal{C}^\infty(X,I_\Gamma^G(M))^G$, via l'application induit par le G-morphisme i de M dans $I_\Gamma^G(M)$ et l'isomorphisme construit au § 10. La vérification se fait aisément sur les formules.

De même considérons les applications :

$$\mathcal{C}_c^\infty(X,M)_\Gamma \longrightarrow \mathcal{C}_c^\infty(X,P_\Gamma^G(M))_G \longrightarrow \mathcal{C}_c^\infty(X,M)_G$$

Où la première est l'isomorphisme construit au § 10, la deuxième l'application induite par le G-morphisme p de la proposition, l'application composée est la surjection canonique de $\mathcal{C}_c^\infty(X,M)_\Gamma$ sur $\mathcal{C}_c^\infty(X,M)_G$, en effet :

Il suffit de considérer les deux applications de $\mathcal{C}_c^\infty(X,\mathcal{C}_c^\infty(G,M))$ sur $\mathcal{C}_c^\infty(X,M)$, à savoir l'application π et l'application induite par le G-morphisme p de $\mathcal{C}_c^\infty(G,M)$ sur M, intervenant respectivement au § 10 et ci-dessus et de montrer que composées avec l'application θ du § 8, elles coincident : le calcul explicite nous donne respectivement ;pour tout $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(X,\mathcal{C}_c^\infty(G,M))$

$$\int_G g' \int_G g.\Psi(xg',g)\,dg\ \Delta_G(g')dg \text{ pour la première}$$

$$\int_G g' \int_G \Psi(xg'g)(g^{-1})\ \Delta_G(g)dg\ \Delta_G(g')dg' \text{ pour la seconde}$$

Ces deux expressions étant égales on en déduit le résultat :

b) <u>Proposition</u> : <u>Les applications naturelles de $\mathcal{C}^\infty(X,M)^G$ dans $\mathcal{C}^\infty(X,M)^\Gamma$ et $\mathcal{C}_c^\infty(X,M)_\Gamma$ dans $\mathcal{C}_c^\infty(X,M)_G$ se factorisent respectivement à travers $\mathcal{C}^\infty(X,I_\Gamma^G(M))^G$ et $\mathcal{C}_c^\infty(X,P_\Gamma^G(M))_G$</u>

15°) <u>Théorème</u> : <u>Si Γ est un sous-groupe cocompact dans G tel que $\Delta_G/\Delta_\Gamma = 1$, alors pour tout $M \in \mathcal{B}_G$, l'application naturelle de $H^i(G,M)$ dans $H^i(\Gamma,M)$ est injective, l'application naturelle de $H_i(\Gamma,M)$ dans $H_i(G,M)$ est surjective.</u>

<u>Démonstration</u> : Sous nos hypothèses la fonction χ intervenant dans la proposition du §14 est à support compact, on peut la choisir d'intégrale 1, d'autre part

$P_\Gamma^G(M)$ et $I_\Gamma^G(M)$ coincident. On déduit alors de la proposition du §13 que M est facteur direct en tant que G-module dans $P_\Gamma^G(M)$ $(= I_\Gamma^G(M))$ puisque ici poi est l'identité de M .
L'espace $H^i(G,M)$ est donc facteur direct dans $H^i(G,I_\Gamma^G(M))$ et l'espace $H_i(G,M)$ est facteur direct dans $H_i(G,P_\Gamma^G(M))$. Les lemmes de Shapiro du §11, permettent alors par composition de construire une injection de $H^i(G,M)$ dans $H^i(\Gamma,M)$ et une surjection de $H_i(\Gamma,M)$ sur $H_i(G,M)$ qui d'après la proposition du §14 coincident avec les applications naturelles définies pour l'injection de Γ dans G au moyen de la proposition du §13.

Remarquons en fait qu'on a démontré que $H_i(G,M)$ et $H^i(G,M)$ sont facteurs topologiques respectivement dans $H_i(\Gamma,M)$ et $H^i(\Gamma,M)$.

16°) Théorème : Soit G un groupe de Lie réel, supposons qu'il existe un sous-groupe Γ discret cocompact dans G , alors si $G\delta$ désigne le groupe G muni de la topologie discrète, pour tout G-module différentiable M de $\mathcal{D}_G$, l'application canonique de $H_i(G\delta,M)$ dans $H_i(G,M)$ est surjective, l'application canonique de $H^i(G,M)$ dans $H^i(G\delta,M)$ est injective.

Démonstration : Le groupe Γ étant discret dans G , on a le diagramme commutatif d'homomorphisme de groupe de Lie :

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[rr] \arrow[dr] & & G \\ & G\delta \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Appliquons alors la proposition du §13 on obtient deux diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} H^i(G,M) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H^i(\Gamma,M) \\ & H^i(G\delta,M) \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H_i(\Gamma,M) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H_i(G,M) \\ & H_i(G\delta,M) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Le groupe Γ étant discret et cocompact, $\Delta_G/\Delta_\Gamma = 1$ puisque alors $\Delta_\Gamma = \Delta_G = 1$, on peut appliquer le théorème de §15 : Les flèches horizontales de ces diagrammes sont respectivement injectives et surjectives, d'où le résultat.
La remarque de la fin du § 15 , implique de surcroit que $H_i(G,M)$ et $H^i(G,M)$ sont facteurs directs topologiques dans $H_i(G\delta,M)$ et $H^i(G\delta,M)$ respectivement.

Références :

[1] P. Blanc : Projectifs dans la catégorie des G-modules topologiques Note aux C.R.A.S. t.289.

[2] P. Blanc et D. Wigner : Homology of Lie group and Poincaré Duality : à paraître in Letters in Math Physics.

[3] F. Bruhat : Sur les représentations induites des groupes de Lie. Bull.Soc. Math. France 84, 1956 p.97 à 205.

[4] A. Grothendieck : Espaces vectoriels topologiques Soc. Math. Sao Paulo 1958.

[5] A. Grothendieck : Produit tensoriel topologique et espaces nucléaires.Mem. Amer. Math. Soc. n°16, 1955 .

[6] A. Haefliger : Differentiable cohomology, Conf. donnée au C.I.M.E. 1976 .

[7] G. Hochschild, G.D. Mostow : Cohomology of Lie groups. Illinois J. Math. t.6 1962, p.367-401 .

[8] W.T. van Est : A generalization of the Cartan-Leray spectral sequence, II , Indag Math 20 n°4 , 1958 p.399-413.

P.BLANC
Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
91128 Palaiseau Cedex
France

PARTIE II

Selfextensions de modules de Harish-Chandra et une question de I.M. Gelfand.

Patrick DELORME

Astérisque 124-125 (1985)
Société Mathématique de France

§ 0 . INTRODUCTION.

Dans cet article, nous étudions essentiellement des selfextensions de modules de Harish-Chandra irréductibles pour un groupe de Lie semi-simple réel connexe. En d'autres termes, on étudie des modules dont tous les sous-quotients simples sont isomorphes, qu'on appellera aussi primaires dans la suite.

La motivation initiale était de répondre à une question de I.M. Gelfand ([8], p. 97) qui conjecturait que pour les groupes semi-simples complexes, les modules de Harish-Chandra indécomposables, avec caractère infinitésimal "non singulier" (au sens de [8], p. 97, cf. § 3, déf. 1) étaient tous induits par des représentations de Jordan d'un sous-groupe parabolique minimal.

La conjecture de Gelfand s'avère fausse dans la généralité où elle est posée. Néanmoins, pour les caractères infinitésimaux "non singuliers" réguliers, la réponse (positive) se trouve dans un travail commun avec H. Kraljevič [5]. L'étude du cas général m'a amené à étudier l'image d'homomorphismes de Harish-Chandra liés aux K-types minimaux des séries principales généralisées. C'est l'étude des modules de Harish-Chandra indécomposables qui m'a permis de déterminer l'image de ces homomorphismes [4]. En quelque sorte, je viens aujourd'hui payer mes dettes au problème initial, les résultats de [4] ayant déjà eu un certain nombre d'applications à des théorèmes de type Paley-Wiener.

Avant d'étudier la question sur les groupes complexes du § 3 (th. 3), nous établissons des résultats sur les self-extensions d'un module de Harish-Chandra irréductible d'un groupe de Lie semi-simple réel connexe. En utilisant essentiellement la "conjecture" d'Osborne (cf. [9]) nous montrons que toute self-extension d'un module irréductible J est sous-module d'une induite à partir d'un sous-groupe parabolique cuspidal, $P = MAN$, de G, $\operatorname{Ind}_{P\uparrow G} \sigma \otimes V \otimes 1_N$, où V est primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$ avec $\sigma \in \hat{M}_d$ et J un sous-module de Vogan de $\operatorname{Ind}_{P\uparrow G}(\sigma \otimes e^\lambda \otimes 1_N)$ (th. 1). On en déduit que $\operatorname{Ext}^1_{\underline{g},K}(J,J)$ est de dimension inférieure ou égale à la dimension de Lie A.

D'autre part, on détermine précisément les self-extensions d'une série principale généralisée irréductible en termes de représentations indécomposables d'une algèbre de polynômes.

Pour répondre à la question de I.M. Gelfand, il suffit alors de montrer que pour un groupe complexe, lorsque toutes les séries principales de caractère infinitésimal donné sont irréductibles (i.e. ce caractère infinitésimal est "non singulier" au sens de [8]), des extensions entre deux de celles-ci sont triviales à moins que ce ne soit une selfextension. Ceci se fait en utilisant le théorème du sous-module de Casselman (cf. [2]) qui permet de plonger ces extensions dans des induites à partir d'un sous-groupe de Borel.

Pour terminer, mentionnons que les résultats de [3] permettraient de traduire nos résultats en terme de représentations de G grâce à des complétions canoniques.

Toute ma reconnaissance va à I.M. Gelfand qui, en me suggérant cette question, m'a mis sur la route des résultats de [4] . C'est avec plaisir que je remercie H. Kraljevič, puisque notre travail commun [5] est à l'origine du § 3 de cet article. La réduction de la question de I.M Gelfand à la question des self-extensions (i.e. la réduction du th. 3 au théorème 2) peut d'ailleurs être considérée comme un travail joint. Enfin je remercie D. Vogan pour m'avoir montré comment on pouvait se servir de la conjecture d'Osborne dans ces questions.

§ 1. NOTATIONS, DÉFINITIONS, RAPPELS.

1.1 - Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ on notera E^* son dual et $S(E)$ l'algèbre symétrique de E que l'on regardera comme l'algèbre des fonctions polynomiales sur E^*. Si E' est un autre espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, on notera $\mathrm{Hom}(E,E')$ l'espace des applications $\mathbb{K}$-linéaires de E dans E' et 1_E l'endomorphisme identité de E.

Si H est un groupe localement compact, on notera $\hat{H}$ l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de H et pour $\mu \in \hat{H}$ on désignera par (μ,E_μ) un représentant de μ. Si en outre H est compact, pour tout H-module I on désignera par I^μ la composante isotypique de type μ de I.

Si H est un groupe de Lie réel, on désignera par $\underline{h}_o$ son algèbre de Lie réelle, par $\underline{h}$ l'algèbre de Lie complexifiée de $\underline{h}_o$, par $U(\underline{h})$ l'algèbre enveloppante de $\underline{h}$ et par $Z(\underline{h})$ le centre de $U(\underline{h})$. On identifiera $U(\underline{h})$ à l'algèbre de convolution des distributions sur H, de support l'origine.

Soit V un module (sur un groupe ou une algèbre) et L un module simple (sur ce groupe ou cette algèbre). On dira que V est primaire de type L si V est de longueur finie et si tous les sous-quotients simples de V sont isomorphes à L.

Soit A un groupe vectoriel d'algèbre de Lie $\underline{a}_o$. Pour $\lambda \in \underline{a}^*$ on notera $a \to a^\lambda$ le quasi-caractère de A dont la différentielle est λ et $\mathbb{C}_\lambda$ le A-module de dimension 1 correspondant.

Si V est un $\underline{a}$-module (ou ce qui revient au même, un $S(\underline{a})$-module), on notera V_λ le sous $\underline{a}$-module de V formé de ses vecteurs de $\underline{a}$-poids généralisé λ. Si V est de dimension finie, V est la somme directe des V_λ $(\lambda \in \underline{a}^*)$ et V_λ est primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$.

1.2 - Dans la suite G désignera un groupe de Lie semi-simple, connexe, de centre fini, θ sera une involution de Cartan de G fixée une fois pour toute. Soit K l'ensemble des points fixes de G. On noter parfois U au lieu de $U(\underline{g})$ l'algèbre enveloppante de $\underline{g}$ et l'on désignera par U^K la sous-algèbre des éléments de U invariants sous $\operatorname{Ad} K$. Si P est un sous-groupe parabolique de G, la donnée de θ définit une décomposition de Langlands de G, $P = MAN$, avec $MA = P \cap \theta P$, qu'on appellera "la" décomposition de Langlands de P, MA étant "le" sous-groupe de Levi de P. On note ρ_P la demi-somme des racines de $\underline{a}$ dans $\underline{n}$. Regardant $\underline{a}_o^*$ comme un sous-espace réel de $\underline{a}^*$ on désignera pour $\lambda \in \underline{a}^*$, par $\operatorname{Re}\lambda$ et $\operatorname{Im}\lambda$ les éléments de $\underline{a}_o^*$ tels que $\lambda = \operatorname{Re}\lambda + i \operatorname{Im}\lambda$.
On note C_P la chambre de Weyl positive définie par $\underline{n}$ et $\overline{C}_P$ sa fermeture.
On note $W(\underline{a})$ le quotient du normalisateur dans K de $\underline{a}$ par son centralisateur.

1.3 - Nous adopterons la définition suivante d'un module de Harish-Chandra pour G (on devrait dire pour $(\underline{g},K)$) : c'est un $U(\underline{g})$-module, V, muni d'une action de K tel que :

(a) V est de type fini sous $U(\underline{g})$
(b) V est $U(\underline{k})$ - localement fini
(c) les actions de $\underline{g}$ et K sont compatibles
(d) chaque K-type est de multiplicité finie.

Comme K est connexe, si V, V' sont deux modules de Harish-Chandra pour G, on notera $\operatorname{Hom}_{\underline{g}}(V,V')$ (au lieu de $\operatorname{Hom}_{\underline{g},K}(V,V')$) l'espace des applications linéaires de V dans V' commutant aux actions de $\underline{g}$ et K.
Soit $P = MAN$ la décomposition de Langlands d'un sous-groupe parabolique cuspidal de G et $(\sigma,H_\sigma) \in \hat{M}_d$ une série discrète de M. Soit (π,V_π) un A-module de dimension finie. On définit alors sur :

$$I_P^\infty(\sigma,\pi) = \{\varphi : G \to H_\sigma \otimes V_\pi \mid \varphi \text{ est } C^\infty, \ \varphi(g\,man) = a^{-\rho_P}(\sigma(m^{-1}) \otimes \pi(a^{-1}))\varphi(g)\ ,$$
$$\forall\, g \in G\ , \forall\, m \in M\ , \forall\, a \in A\ , \forall\, n \in N\}\ ,$$

une représentation $r_{\sigma\pi}^P$ de G par :

$\forall\, g, x \in G\ , \forall\, \varphi \in I_P^\infty(\sigma,\pi)\ ,\ (r_{\sigma\pi}^P(g)\varphi)(x) = \varphi(g^{-1}x)$.

Alors $r_{\sigma\pi}^P$ est l'induite C^∞ de P à G de $\sigma \otimes \pi \otimes 1_N$. On notera $I_P(\sigma \otimes \pi)$ le sous-espace des vecteurs K-finis de $I_P^\infty(\sigma,\pi)$. Alors $I_P(\sigma,\pi)$ est stable sous l'action de $U(\underline{g})$ qu'on notera encore $r_{\sigma\pi}^P$, et il est ainsi muni d'une structure de module de Harish-Chandra. Cette structure ne dépend pas du plongement de E_σ dans H_σ . Pour σ fixé, $V_\pi \to I_P(\sigma,\pi)$ est un foncteur exact. D'autre part, soit

$$I^\infty(\sigma) = \{\varphi : K \to H_\sigma \mid \varphi \text{ est } C^\infty, \varphi(km) = \sigma(m^{-1})\varphi(k)\ ,\ \forall\, k \in K, \forall\, m \in K_M\}$$

et

$$I(\sigma) = \{\varphi : K \to H_\sigma \mid \varphi \text{ est K-finie, } \varphi(km) = \sigma(m^{-1})\varphi(k)\ , \forall\, k \in K\ , \forall\, m \in K_M\}$$

où $K_M = K \cap M$.

L'espace $I(\sigma)$ est l'espace des vecteurs K-finis de $I^\infty(\sigma)$ pour l'action naturelle de K sur $I^\infty(\sigma)$. Comme $G = KP$, l'opération de restriction de G à K des éléments de $I_P^\infty(\sigma,\pi)$ (resp. $I_P(\sigma,\pi)$) est un isomorphisme de K-modules sur $I^\infty(\sigma) \otimes V_\pi$ (resp. $I(\sigma) \otimes V_\pi$) où K agit trivialement sur V_π . Alors par transport de structure on obtient une représentation de G (resp. $U(\underline{g})$) encore notée $r_{\sigma\pi}^P$ sur $I^\infty(\sigma) \otimes V_\pi$ (resp. $I(\sigma) \otimes V_\pi$) ainsi qu'une structure de module de Harish-Chandra sur $I(\sigma) \otimes V_\pi$.

Dans le cas où π est un quasi-caractère de A de différentielle $\lambda \in \underline{a}^*$, $r_{\sigma\pi}^P$ est noté $r_{\sigma\lambda}^P$, $I_P(\sigma,\pi)$ est noté $I_P(\sigma,\lambda)$.

1.4 - Dans ce numéro, on se fixe MA un sous-groupe de Levi de G et l'on notera W au lieu de $W(\underline{a})$ le groupe de Weyl correspondant. On suppose que M admet des séries discrètes. Alors W qui agit sur $\hat{M}$ laisse stable l'ensemble $\hat{M}_d$ des (classes de) séries discrètes de M . Si $\sigma \in \hat{M}_d$ (resp. $\lambda \in \underline{a}^*$) on notera W_σ (resp. W_λ) le stabilisateur dans W de σ (resp. λ) . Enfin on pose $W_{\sigma,\lambda} = W_\sigma \cap W_\lambda$.

Nous allons introduire le R-groupe selon Vogan. Soit MA un sous-groupe de Levi de G tel que $\hat{M}_d \neq \emptyset$. On notera $\underline{\underline{P}}(MA)$ l'ensemble (fini) des sous-groupes paraboliques de G dont le sous-groupe de Levi est égal à MA .

Si $\sigma \in \hat{M}_d$, on désignera par $A(\sigma)$ l'ensemble des K-types minimaux de $I(\sigma)$ (cf. [10] déf. 5.1 ou [12] déf. 5.4.18) . On a $A(\sigma) = A(w\sigma)$ pour $w \in W$.

1.5 - Théoréme (Vogan) ([10], [11], [12]) :

(i) Soit $\sigma \in \hat{M}_d$ et $\mu \in A(\sigma)$. Alors μ est contenu avec multiplicité un dans $I(\sigma)$.

(ii) Pour $\mu \in A(\sigma)$ et $P \in \underline{\underline{P}}(MA)$ soit $J_P(\sigma,\lambda)(\mu)$ l'unique sous-quotient simple de $I_P(\sigma,\lambda)$ contenant le K-type μ . Alors, à isomorphisme près, $J_P(\sigma,\lambda)(\mu)$ ne dépend pas de P et sera noté $J(\sigma,\lambda)(\mu)$ dans la suite. D'autre part si $\mathrm{Re}\,\lambda \in \overline{C}_P$ (resp. $-\overline{C}_P$) , $I_P(\sigma,\lambda)$ se décompose de manière unique (à l'ordre près) en :

$$I_P(\sigma,\lambda) = I_P^1(\sigma,\lambda) \oplus \ldots \oplus I_P^{r(\sigma,\lambda)}(\sigma,\lambda)$$

de telle sorte que pour tout $i = 1,\ldots,r(\sigma,\lambda)$, $I_P^i(\sigma,\lambda)$ a un unique quotient (resp. sous-module) simple $J_P^i(\sigma,\lambda)$. De plus

$$\{J_P^i(\sigma,\lambda) \mid i = 1,\ldots,r(\sigma,\lambda)\} = \{J(\sigma,\lambda)(\mu) \mid \mu \in A(\sigma)\}$$

En particulier, pour tout $\mu \in A(\sigma)$, $J(\sigma,\lambda)(\mu)$ est un quotient (resp. un sous-module) de $I_P(\sigma,\lambda)$ et $\{J(\sigma,\lambda)(\mu) \mid \mu \in A(\sigma)\}$ est l'ensemble des quotients (resp. sous-modules) simples de $I_P(\sigma,\lambda)$.

(iii) Il existe un sous-groupe distingué W_σ^o de W_σ et un sous-groupe R_σ^c de W_σ tels que :

le groupe W_σ est le produit semi-direct de R_σ^c et W_σ^o comme groupe d'automorphismes de $\underline{a}$, W_σ^o est engendré par des réflexions et R_σ^c est un produit de copies de $\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$

(iv) Notons R_σ le quotient W_σ/W_σ^o (qui est isomorphe à R_σ^c) , $w \to \overline{w}$ la projection canonique et $\hat{R}_\sigma$ le dual de R_σ .
Alors il existe une action simplement transitive de $\hat{R}_\sigma$ sur $A(\sigma)$ telle que :

$$\forall\, \sigma\,, \sigma' \in \hat{M}_d\,, \forall\, \lambda,\, \lambda' \in \underline{a}^*\,, \forall\, \mu \in A(\sigma)\,, \forall\, \mu' \in A(\sigma')\,,$$

$J(\sigma,\lambda)(\mu)$ est isomorphe à $J(\sigma',\lambda')(\mu')$ si et seulement si (σ,λ) est conjugué de (σ',λ') par un élément de W et si $\mu' \in \hat{R}_\sigma(\lambda).\mu$, où $\hat{R}_\sigma(\lambda)$ est l'orthogonal dans $\hat{R}_\sigma$ de

$$R_\sigma(\lambda) = \{\overline{w} \in R_\sigma \mid w \in W_\sigma\,,\ w\,\lambda \in W_\sigma^o\,\lambda\}\ .$$

Dans [5] nous avons démontré l'unicité de W_σ^o et de l'action de $\hat{R}_\sigma$ vérifiant le théorème 1.5 . On conserve les notations de 1.4 et on se fixe $P \in \underline{\underline{P}}(MA)$.
Il résulte des définitions que :

$$I(\sigma) = \bigoplus_{\mu \in \hat{K}} I^{\mu}(\sigma) ,$$

où $I^{\mu}(\sigma)$ est la composante isotypique de type μ du K-module $I(\sigma)$.

Pour $\mu \in \hat{K}$, on notera P^{μ}_{σ} la projection de $I(\sigma)$ sur $I^{\mu}(\sigma)$ parallèlement à $\bigoplus_{\substack{\mu' \in \hat{K} \\ \mu' \neq \mu}} I^{\mu'}(\sigma)$. On définit alors, pour tout $\delta , \gamma \in \hat{K}$:

$$\forall u \in U(\underline{g}) , \ {}^{P}r^{\delta\gamma}_{\sigma\lambda}(u) = P^{\delta}_{\sigma}\, {}^{P}r_{\sigma\lambda}(u)_{|I^{\gamma}(\sigma)} \in \mathrm{Hom}(I^{\gamma}(\sigma) , I^{\delta}(\sigma))$$

et

$$\forall u \in U(\underline{g}) , \ {}^{P}r^{\delta\gamma}_{\sigma\pi}(u) = (P^{\delta}_{\sigma} \otimes 1_{V_{\pi}})\, {}^{P}r_{\sigma\pi}(u)_{|I^{\gamma}(\sigma) \otimes V_{\pi}} \in \mathrm{Hom}(I^{\gamma}(\sigma), I^{\delta}(\sigma)) \otimes \mathrm{End}\, V_{\pi}$$

Alors, on a

<u>Proposition ([4] , prop. 1,2)</u> :

Soient $\delta\ \gamma \in \hat{K}$. Soit $u \in U(\underline{g})$. Alors :

(i) l'application $\lambda \to {}^{P}r_{\sigma\lambda}(u)$ (resp. ${}^{P}r^{\delta\gamma}_{\sigma\lambda}(u)$) de $\underline{a}^*$ dans $\mathrm{End}(I(\sigma))$ (resp. $\mathrm{Hom}(I^{\gamma}(\sigma) , I^{\delta}(\sigma))$ est polynomiale en λ et définit un élément de $S(\underline{a}) \otimes \mathrm{End}(I(\sigma))$ (resp. $S(\underline{a}) \otimes \mathrm{Hom}(I^{\gamma}(\sigma) , I^{\delta}(\sigma))$) noté ${}^{P}r_{\sigma}(u)$ (resp. ${}^{P}r^{\delta\gamma}_{\sigma}(u)$) .

(ii) Notant $\tilde{\pi} = \pi \otimes 1 : S(\underline{a}) \otimes \mathrm{End}(I(\sigma)) \to \mathrm{End}(V_{\pi}) \otimes \mathrm{End}(I(\sigma))$

(resp. $\tilde{\pi} = \pi \otimes 1 : S(\underline{a}) \otimes \mathrm{Hom}(I^{\gamma}(\sigma), I^{\delta}(\sigma)) \to \mathrm{End}(V_{\pi}) \otimes \mathrm{Hom}(I^{\gamma}(\sigma), I^{\delta}(\sigma)))$,

on a : ${}^{P}r_{\sigma\pi}(u) = \tilde{\pi}({}^{P}r_{\sigma}(u))$ (resp. ${}^{P}r^{\delta\sigma}_{\sigma\pi}(u) = \tilde{\pi}({}^{P}r^{\delta\gamma}_{\sigma}(u))$)

Rappelons maintenant le résultat principal de [4]

<u>Théorème ([4] , th. 3)</u> :

Soient $\sigma \in \hat{M}_d$, $\delta\ \gamma \in A(\sigma)$ des K-types minimaux de $I(\sigma)$. Identifions $I(\sigma)^{\gamma}$ et $I(\sigma)^{\delta}$ à E_{γ} et E_{δ} et notons ${}^{P}F^{\delta\gamma}_{\sigma} = \{{}^{P}r^{\delta\gamma}_{\sigma}(u) | u \in U\}$. Alors :

$${}^{P}F^{\delta\gamma}_{\sigma} = (S(\underline{a})^{W^{o}_{\sigma}})^{r(\delta,\gamma)} \otimes \mathrm{Hom}(E_{\delta}, E_{\gamma}) .$$

Ici $S(\underline{a})^{W^{o}_{\sigma}}$ est regardé comme module sous R_{σ} et $(S(\underline{a})^{W^{o}_{\sigma}})^{r(\delta,\gamma)}$ désigne sa composante de type $r(\delta,\gamma) \in \hat{R}_{\sigma}$.

§ 2. <u>AUTOEXTENSIONS D'UN MODULE DE HARISH-CHANDRA IRRÉDUCTIBLE.</u>

2.1 - Avec les notations de 1.4 et 1.5 , soit $J(\sigma,\lambda)(\mu)$ un module de Harish-Chandra irréductible. Soit $\underline{\underline{H}}(J(\sigma,\lambda)(\mu))$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des modules de Harish-Chandra dont les objets sont primaires de type $J(\sigma,\lambda)(\mu)$.

L'objet de ce paragraphe est d'étudier cette catégorie.

On se fixe $P \in \underline{\underline{P}}(MA)$ tel que $\mathrm{Re}\,\lambda \in -\overline{C}_P$. On sait, d'après [5] prop. 6 (ii) et prop. 7, que λ est un exposant directeur le long de P de $I_P(\sigma,\lambda)$ et $J(\sigma,\lambda)(\mu)$. Alors il en est de même pour tout objet V de $\underline{\underline{H}}(J(\sigma,\lambda)(\mu))$ (cf. [9] lemme 8.4.6) . En outre, grâce à [4] prop. 6 et prop. 7 et le théorème de W. Schmid sur les extensions de séries discrètes on voit que $H_o(\underline{n},V)_{\lambda+\rho_P}$ est semi-simple sous l'action de $(\underline{m},K_M)$.

Notons $\tilde{V} = \mathrm{Hom}_M(E_\sigma , H_o(\underline{n},V)_{\lambda+\rho_P} \otimes \mathbb{C}_{-\rho_P})$. C'est un $S(\underline{a})$-module primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$. Comme $H_o(\underline{n},V)_{\lambda+\rho_P}$ est semi-simple sous l'action de $(\underline{m},K_M)$, $E_\sigma \otimes (\tilde{V} \otimes \mathbb{C}_{\rho_P})$ est un facteur direct du $(\underline{m} \oplus \underline{a} , K_M)$-module $H_o(\underline{n},V)_{\lambda+\rho_P}$ (ici E_σ est l'espace des vecteurs K_M-finis de H_σ) . Par composition avec la projection canonique , $V \to H_o(\underline{n},V)_{\lambda+\rho_P}$, on en déduit une projection canonique $V \to E_\sigma \otimes (\tilde{V} \otimes \mathbb{C}_{\rho_P})$. Grâce à la réciprocité de Frobenius, celle-ci détermine un homomorphisme de modules de Harish-Chandra : $V \to I_P(\sigma,\tilde{V})$ que l'on notera φ_V dans la suite.

Le lemme suivant est dû à D. Vogan (communication orale) :

<u>Lemme 1</u> : Pour tout V primaire de type $J(\sigma,\lambda)(\mu)$, φ_V est une injection.

<u>Démonstration</u> :

On raisonne par récurrence sur la longueur de V . Lorsque V est de longueur un , le lemme est vrai. En effet, $\tilde{V}$ est non nul d'après [5] , th. 2, et il en est de même de φ_V . Comme V est alors irréductible, φ_V est nécessairement injectif. Par ailleurs, il résulte du fait que λ est un exposant directeur de $J(\sigma,\lambda)(\mu)$ que le foncteur défini sur $\underline{\underline{H}}(J(\sigma,\lambda)(\mu)$ par $V \to H_o(\underline{n},V)_{\lambda+\rho_P}$ est un foncteur exact (cf.[9]) donc aussi le foncteur $V \to \tilde{V}$. Soit alors $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$ une suite exacte dans $\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{H}}(J(\sigma,\lambda)(\mu))$ On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & V_1 & \to & V_2 & \to & V_3 & \to & 0 \\ & & \downarrow\varphi_{V_1} & & \downarrow\varphi_{V_2} & & \downarrow\varphi_{V_3} & & \\ 0 & \to & I_P(\sigma,\tilde{V}_1) & \to & I_P(\sigma,\tilde{V}_2) & \to & I_P(\sigma,\tilde{V}_3) & \to & 0 \end{array} .$$

Le lemme en résulte immédiatement. □

Corollaire du lemme 1 :

Soit V un objet de $\underline{\underline{H}}$. Alors l'action de $U(\underline{g})$ sur V se factorise à travers l'homomorphisme $U(\underline{g}) \to S(\underline{a}) \otimes \mathrm{End}(I(\sigma))$ défini dans 1.5 (proposition).

Démonstration :

En effet, d'après 1.5, proposition (ii), l'action de $U(\underline{g})$ sur $I_P(\sigma,\widetilde{V})$ se factorise selon l'homomorphisme voulu. Comme d'après le lemme 1, V est un sous-module de $I_P(\sigma,\widetilde{V})$, cela achève la démonstration du corollaire. □

2.2 - Ce corollaire va nous permettre d'utiliser le théorème rappelé en 1.5. Soit $V \in \underline{\underline{H}}(J(\sigma,\lambda)(\mu))$. On identifie, comme en 1.5, $I_P(\sigma,\widetilde{V})^{\mu}$ et $E_{\mu} \otimes \widetilde{V}$. Alors, le sous-module $\varphi_V(V)$ de $I_P(\sigma,\widetilde{V})$ détermine un sous-espace de $E_{\mu} \otimes \widetilde{V}$ stable sous $\mathrm{End}(E_{\mu}) \otimes S(\underline{a})^{W_{\sigma}}$, d'après l'égalité ${}^{P}F_{\sigma}^{\mu\mu} \simeq \mathrm{End}\, E_{\mu} \otimes S(\underline{a})^{W_{\sigma}}$ rappelée en 1.5, théorème. Ce sous-espace est de la forme $E_{\mu} \otimes \Psi(V)$ où $\Psi(V)$ est un sous-espace de $\widetilde{V}$ stable sous l'action de $S(\underline{a})^{W_{\sigma}}$.

Lemme 2 :

Avec les notations ci-dessus, pour tout V objet de $\underline{\underline{H}}(J(\sigma,\lambda)(\mu))$:

(i) $\Psi(V)$ est stable sous $S(\underline{a})^{W_{\sigma}^{o}}$ et $S(\underline{a})^{W_{\sigma,\lambda}^{o}}$.

(ii) Notant $\underline{\underline{C}}_{\lambda}$ (resp. $\underline{\underline{D}}_{\lambda}$) la catégorie des $S(\underline{a})^{W_{\sigma}^{o}}$-modules (resp. $S(\underline{a})^{W_{\sigma,\lambda}^{o}}$-modules) primaires de type $\mathbb{C}_{\lambda}$, la correspondance $V \to \Psi(V)$ est un foncteur exact de $\underline{\underline{H}}$ dans $\underline{\underline{C}}_{\lambda}$ (resp. $\underline{\underline{D}}_{\lambda}$). En outre, la dimension de $\Psi(V)$ est égale à la longueur de V.

Démonstration :

(i) D'après 1.4, théorème, pour tout $\mu' \in A(\sigma)$, tel que $\mu' \notin \hat{R}_{\sigma}(\lambda)$ et tout V primaire de type $J(\sigma,\lambda)(\mu)$ on a $V^{\mu'} = \{0\}$. Alors, il résulte du lemme 1 et de 1.5 que $E^{\mu} \otimes \Psi(V)$ est annulé par ${}^{P}F_{\sigma}^{\mu\mu'}$ pour tout $\mu' \in A(\sigma)$ vérifiant $\mu' \notin \hat{R}_{\sigma}(\lambda)$. Alors, il résulte de 1.5, théorème, que $\Psi(V)$ est stable sous $A_H = \bigotimes_{r \in H} (S^{W_{\sigma}^{o}})^{r}$, où H est un sous-groupe supplémentaire de $\hat{R}_{\sigma}(\lambda)$ dans $\hat{R}_{\sigma}$. Or d'après [4], lemme 4, pour tout $S(\underline{a})$-module primaire de type $\mathbb{C}_{\lambda}$, X, l'injection canonique :

$$0 \to \mathrm{Hom}_{S^{W_{\sigma}^{o}}}(\mathbb{C}_{\lambda},X) \to \mathrm{Hom}_{A_H}(\mathbb{C}_{\lambda},X)$$

est un isomorphisme.

Alors, il résulte de [4], prop A.1, que tout A_H-sous-module de X est un $S(\underline{a})^{W_{\sigma}}$-sous-module, ce qui permet de conclure que $\Psi(V)$ est un $S(\underline{a})^{W_{\sigma}^{o}}$-sous-module. Il résulte alors de [4], prop. A.2, que $\Psi(V)$ est stable sous $S(\underline{a})^{W_{\sigma,\lambda}^{o}}$, ce qui achève de prouver (i).

(ii) La fonctorialité de la correspondance $V \to \Psi(V)$ est immédiate ainsi que l'assertion sur la dimension de $\Psi(V)$, car la multiplicité de μ dans V est clairement égale à la longueur de V. □

2.3 - Lemme 3 :

Pour tout V_1, V_2 dans $\underline{\underline{H}}$, l'application naturelle :

$$\Psi : \mathrm{Ext}^1_{\underline{g},K}(V_1,V_2) \to \mathrm{Ext}^1_{S(\underline{a})^{W^o_\sigma},\lambda}(\Psi(V_1), \Psi(V_2)) ,$$

est injective.

Démonstration :

Il suffit de voir que si une suite exacte dans $\underline{\underline{H}}$: $0 \to V_1 \to V \to V_2 \to 0$, est telle que la suite exacte de $S(\underline{a})^{W^o_\sigma},\lambda$-modules : $0 \to \Psi(V_1) \to \Psi(V) \to \Psi(V_2) \to 0$ soit scindée, alors elle est elle-même scindée. Mais, si la suite exacte : $0 \to \Psi(V_1) \to \Psi(V) \to \Psi(V_2) \to 0$ est scindée, on a $\mathrm{Hom}_K(E_\mu, V) = \Psi(V)$ qui se décompose en somme directe $\Psi(V) \simeq \Psi(V_1) \oplus \Psi(V_2)$ avec $\Psi(V_i)$, $i = 1,2$, stables sous l'action de U^K (grâce à 1.5, théorème, et à l'inclusion $S(\underline{a})^{W_\sigma} \subset S(\underline{a})^{W^o_\sigma,\lambda}$) Mais alors, identifiant V^μ à $E_\mu \otimes \Psi(V)$, on a $(U(E_\mu \otimes \Psi(V_i))) \cap V^\mu = E_\mu \otimes \Psi(V_i)$ $(i = 1,2)$, grâce à [6] 9.1.7, 9.1.10. Comme tout se passe dans $\underline{\underline{H}}$, on a :

$$V = U(E_\mu \otimes \Psi(V_1)) \oplus U(E_\mu \otimes \Psi(V_2)) ,$$

pour des raisons de longueur et la suite exacte $0 \to V_1 \to V \to V_2 \to 0$ est alors scindée dans $\underline{\underline{H}}$. □

Lemme 4 :

Soient V_1, V_2 deux objets de $\underline{\underline{H}}$. V_1 et V_2 sont isomorphes si et seulement si les $S(\underline{a})^{W^o_\sigma},\lambda$-modules (resp. $S(\underline{a})^{W^o_\sigma}$-modules) $\Psi(V_1)$ et $\Psi(V_2)$ sont isomorphes.

Démonstration :

Le lemme est vrai si la longueur commune de V_1 et V_2 est égale à 1. En effet, on a alors $V_1 \simeq V_2 \simeq J(\sigma,\lambda)(\mu)$. Pour l'assertion sur les $S(\underline{a})^{W^o_\sigma},\lambda$-modules, un raisonnement par récurrence et l'utilisation du lemme 3 conduisent immédiatement au résultat voulu. On passe à l'assertion sur les $S(\underline{a})^{W^o_\sigma}$-modules en utilisant [4] prop. A.1, A.2. □

2.4 - Théorème 1 : (cf. Note à la fin de l'article).

Soit $\sigma \in \hat{M}_d$, $\lambda \in \underline{a}^*$ et $\mu \in A(\sigma)$. Alors :

(i) $\dim \mathrm{Ext}^1_{\underline{g},K}(J(\sigma,\lambda)(\mu), J(\sigma,\lambda)(\mu)) \leqslant \dim \underline{a}$.

(ii) Le foncteur Ψ réalise une équivalence de catégories entre $\underline{\underline{H}}(J(\sigma,\lambda)(\mu))$ et une sous-catégorie pleine de la catégorie $\underline{\underline{C}}_\lambda$ des $S(\underline{a})^{W^o_{\sigma,\lambda}}$-modules de dimension finie primaires de type $\mathbb{C}_\lambda$.

Démonstration :

D'après le lemme 3 , la partie (i) du théorème résultera de l'égalité $\dim \mathrm{Ext}^1_{S(\underline{a})^{W^o_{\sigma,\lambda}}}(\mathbb{C}_\lambda, \mathbb{C}_\lambda) = \dim \underline{a}$. Mais $W^o_{\sigma,\lambda}$ est un groupe engendré par des réflexions, comme stabilisateur de λ dans W^o_σ qui est engendré par des réflexions (cf. 1.4, th.) Donc $S(\underline{a})^{W^o_{\sigma,\lambda}}$ est une algèbre de polynômes avec $\dim \underline{a}$ variables, ceci d'après un théorème de Chevalley. L'égalité voulue en résulte et cela prouve (i) .

Montrons (ii) . Au vu des lemmes 2 et 3 , il suffit de montrer que si V_1 et V_2 sont des objets de $\underline{\underline{H}}$ et si l'on a un morphisme de $S(\underline{a})^{W^o_{\sigma,\lambda}}$-modules entre $\Psi(V_1)$ et $\Psi(V_2)$ il provient , par Ψ , d'un morphisme dans $\underline{\underline{H}}$ entre V_1 et V_2 . En considérant les graphes des morphismes, on se ramène à montrer que pour tout objet V de $\underline{\underline{H}}$ et tout $S(\underline{a})^{W^o_{\sigma,\lambda}}$-sous-module de $\Psi(V)$, X , X est de la forme $\Psi(V')$ avec V' sous-module de V . Mais, en utilisant [6] 9.1.7 , 9.1.10 , et le théorème rappelé en 1.5 , on voit facilement que $\Psi(V') = X$ si l'on pose $V' = U(E_\mu \otimes X)$. □

2.6 - Théorème 2.

Soit $P = MAN$ un sous-groupe parabolique cuspidal de G . Soient $\sigma \in \hat{M}_d$, $\lambda \in \underline{a}^*$ tels que $\mathrm{Re}\,\lambda \in -\overline{C}_P$. On suppose que $I_P(\sigma,\lambda)$ est irréductible; comme pour tout $\mu \in A(\sigma)$, $J(\sigma,\lambda)(\mu) = I_P(\sigma,\lambda)$ on notera $\underline{\underline{H}}(\sigma,\lambda)$ au lieu de $\underline{\underline{H}}(J(\sigma,\lambda)(\mu))$. Alors :

(i) Le foncteur Ψ est une équivalence de catégorie entre $\underline{\underline{H}}(I_P(\sigma,\lambda))$ et la catégorie $\underline{\underline{C}}_\lambda$ (resp $\underline{\underline{D}}_\lambda$) des $S(\underline{a})^{W^o_{\sigma,\lambda}}$-modules primaires de type $\mathbb{C}_\lambda$.

(ii) Si (et seulement si) $W^o_{\sigma,\lambda}$ est réduit à un élément, le foncteur $X \to I_P(\sigma,X)$ est une équivalence de catégorie entre la catégorie des A-modules de dimension finie primaires de type $\mathbb{C}_\lambda$ et $\underline{\underline{H}}(I_P(\sigma,\lambda))$.

Démonstration :

Comme $\underline{\underline{C}}_\lambda$ et $\underline{\underline{D}}_\lambda$ sont canoniquement isomorphes, il suffit d'établir l'équivalence de catégories entre $\underline{\underline{C}}_\lambda$ et $\underline{\underline{H}}(\sigma,\lambda)$. On va construire le "foncteur inverse" de Ψ . Soit X un objet de $\underline{\underline{C}}_\lambda$. Comme $W^o_{\sigma,\lambda}$ (resp W^o_σ) est un groupe engendré par des réflexions, $S(\underline{a})$ est un $S(\underline{a})^{W^o_{\sigma,\lambda}}$-module libre. Par conséquent l'application canonique $x \to 1 \otimes x$ de X dans $Y = S(\underline{a}) \otimes_{S(\underline{a})^{W^o_{\sigma,\lambda}}} X$ est injective.

Notons $\Lambda(X)$ l'image de X par cette application. C'est un $S(\underline{a})^{W^o_{\sigma,\lambda}}$ - sous-module de Y . D'autre part, Y est un $\underline{a}$-module primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$. Identifiant $I_P(\sigma,Y)^\mu$ à $E_\mu \otimes Y$, il résulte de 1.5 et [6] 9.1.7 , 9.1.10 que si l'on note $\Phi(X) = U(E_\mu \otimes \Lambda(X)$, $\Phi(X)$ est un objet de $\underline{\underline{H}}$ vérifiant $\Phi(X) \cap I_P(\sigma,Y)^\mu = E_\mu \otimes \Lambda(X)$. Clairement, la correspondance $X \to \Phi(X)$ est un foncteur de $\underline{\underline{C}}_\lambda$ (resp. $\underline{\underline{D}}_\lambda$) dans $\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{H}}(\sigma,\lambda)$ que l'on a aussi noté $\underline{\underline{H}}$. En outre , par construction , on a $\Psi(\Phi(X) \simeq X$. De même, pour tout objet V de $\underline{\underline{H}}$, $\Phi(\Psi(V)) \simeq V$ (grâce au lemme 4) . Ceci achève de prouver (i) . Pour (ii) remarquons que $W^o_{\sigma,\lambda} = \{e\}$ implique $S(\underline{a})^{W^o_{\sigma,\lambda}} = S(\underline{a})$ et $\Lambda(X) = Y$. D'où la partie si de (ii) . Réciproquement, il est facile de voir que $X = S(\underline{a}) \otimes_{S(\underline{a})^{W^o_{\sigma,\lambda}}} \mathbb{C}_\lambda$, qui est de dimension Card $W^o_{\sigma,\lambda}$, est tel que $I_P(\sigma,X)$ est semi-simple comme objet de $\underline{\underline{H}}$, alors que X est indécomposable comme $\underline{a}$-module (avec un unique quotient simple) . D'où la partie seulement si de (ii) . □

<u>Corollaire du théorème 2</u> :

Sous les hypothèses du théorème 2 ,

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{\underline{g},K}(I_P(\sigma,\lambda)\ ,\ I_P(\sigma,\lambda)) = \dim \underline{a}$$

<u>Remarque</u> : Comme nous l'avons signalé dans l'introduction, la partie (ii) du théorème avait été démontrée dans des cas particuliers en collaboration avec H. Kraljevic.

§ 3 . MODULES DE HARISH-CHANDRA A CARACTÈRE INFINITÉSIMAL (GENERALISE) "NON SINGULIER" POUR UN GROUPE DE LIE SEMI-SIMPLE COMPLEXE.

3.1 - Désormais, on suppose que G est un groupe de Lie semi-simple complexe, connexe, simplement convexe . Introduisons quelques notations propres à cette situation. L'algèbre de Lie $\underline{g}_o$ est donc munie d'une structure complexe. On note $X \to \overline{X}$ la conjugaison par rapport à une forme réelle déployée de $\underline{g}_o$ telle que l'involution de Cartan θ commute à cette conjugaison. On notera P = MAN la décomposition de Langlands d'un sous-groupe parabolique minimal de G . Alors M est connexe et commutatif. On a $\underline{m}_o = i\,\underline{a}_o$. On note $\underline{h}_o = \underline{m}_o \oplus i\,\underline{a}_o$. C'est une sous-algèbre de Cartan (complexe) de $\underline{g}_o$. On a un isomorphisme canonique entre $\underline{g} = (\underline{g}_o)_{\mathbb{C}}$ et $\underline{g}_o \times \underline{g}_o$ qui s'obtient par prolongement $\mathbb{C}$-linéaire de l'application $X \to (X,\overline{X})$ définie sur $\underline{g}_o$. On en déduit un isomorphisme de $\underline{h} = (\underline{h}_o)_{\mathbb{C}}$ sur $\underline{h}_o \times \underline{h}_o$ tel que $H \to (H,\overline{H})$ si $H \in \underline{h}_o$. L'isomorphisme entre $\underline{h}_o^* \times \underline{h}_o^*$ et $\underline{h}^*$ qu'on en déduit est noté $(p,q) \in \underline{h}_o^* \times \underline{h}_o^* \to (p,q) \in \underline{h}^*$. Par définition $(p,q)(H) = p(H) + q(\overline{H})$ si $H \in \underline{h}_o$. D'autre part $\underline{h}_o = \underline{m}_o \oplus i\underline{a}_o$

et donc $\underline{h} = \underline{m} \oplus \underline{a}$. Les injections de $\underline{m}_\circ$ et $\underline{a}_\circ$ dans $\underline{h}_\circ$ se prolongent en des isomorphismes de $\underline{m}$ et $\underline{a}$ sur $\underline{h}_\circ$. Pour $\sigma,\lambda \in \underline{h}_\circ^*$ on note $\sigma \oplus \lambda$ l'élément de $\underline{h}^*$ tel que $(\sigma \oplus \lambda)(H + H') = \sigma(H) + \lambda(H')$ pour $H \in \underline{m}_\circ$ et $H' \in \underline{a}_\circ$. Nous disposons ainsi de deux descriptions du dual de $\underline{h}$. On passe de l'une à l'autre de la façon suivante :

$$(p,q) = \sigma \oplus \lambda \Longleftrightarrow p + q = \lambda \ , p - q = \sigma \ , \ p = \frac{1}{2}(\sigma + \lambda) \ , q = \frac{1}{2}(\lambda - \sigma) \ .$$

Le groupe $W = W(\underline{a}_\circ)$ agit aussi sur $\underline{h}_\circ = (\underline{a}_\circ)_{\mathbb{C}}$. C'est alors le groupe de Weyl de la paire $(\underline{g}_\circ , \underline{h}_\circ)$. Soit $\Delta(\underline{h}_\circ)$ le système de racines de $\underline{h}_\circ$ dans $\underline{g}_\circ$ qui s'identifie à $\Delta(\underline{a})$ grâce à l'isomorphisme $\underline{a} \simeq \underline{h}_\circ$.
Soit $\Delta^+(\underline{h}_\circ)$ l'ensemble de racines positives correspondant à l'ensemble $\Delta^+(\underline{a})$ des racines de $\underline{a}$ dans $\underline{n}$. Pour $\alpha \in \Delta$ on note $s_\alpha \in W$ la symétrie par rapport à $\alpha^\perp$. On notera R le réseau des poids radiciels, Q le réseau des poids entiers.

A tout $\sigma \in \hat{M}$ on fait correspondre sa différentielle notée encore $\sigma \in \underline{h}_\circ^*(\simeq \underline{m}^*)$ qui est un poids entier. Réciproquement, G étant simplement connexe, tout poids entier est la différentielle d'un caractère de M . L'ensemble des caractères de MA s'identifie donc à

$$\{ \sigma \oplus \lambda \mid \sigma \in Q \ , \ \lambda \in \underline{h}_\circ^* (\simeq \underline{a}) \ = \ \{(p,q) \mid (p,q) \in \underline{h}_\circ^* \times \underline{h}_\circ^* \ , \ p - q \in Q \}$$

Enfin on sait qu'il existe un isomorphisme $u \to p_u$ entre le centre $Z(\underline{g})$ de l'algèbre $U(\underline{g})$ et $S(\underline{h}_\circ)^W \otimes S(\underline{h}_\circ)^W$ telle que, identifiant $S(\underline{h}_\circ)$ aux fonctions polynomiales sur $\underline{h}_\circ^*$, on ait : $\forall \ \sigma \in \hat{M}$, $\forall \ \lambda \in \underline{a}$, $\forall \ u \in Z(\underline{g})$, u agit sur $I_P(\sigma,\lambda)$ par $p_u(p,q)$ avec $(p,q) = \sigma \oplus \lambda$. Dans la suite, on identifiera $\hat{Z} = Z(\underline{g})^\wedge$ à $\underline{h}_\circ^* \times \underline{h}_\circ^* / W \times W$ grâce à cet isomorphisme.
Pour $(p,q) \in \underline{h}_\circ^* \times \underline{h}_\circ^*$ on note $\chi_{p,q}$ l'élément de $\hat{Z}$ correspondant et pour $\chi \in \hat{Z}$ on note O_χ l'orbite de $W \times W$ dans $\underline{h}_\circ \times \underline{h}_\circ$ correspondante et on définit $O_{\chi,ad} = \{(p,q) \in O_\chi \mid p - q \in Q\}$ ainsi que $\hat{Z}_{ad} = \{ \chi \in \hat{Z} \mid O_{\chi,ad} \neq \emptyset \}$.
Enfin, on note $\Omega_{p,q}$ l'orbite de (p,q) sous l'action diagonale de $W \times W$.
Clairement $\Omega_{p,q} \subset O_{\chi_{p,q}}$ et si $p - q \in Q$, $\Omega_{p,q} \subset O_{\chi_{p,q},ad}$.

3.2 - Soit $S \subset \{(p,q) \in \underline{h}_\circ^* \times \underline{h}_\circ^* \mid p - q \in Q\}$ et X un MAN-module de dimension finie. On dit que X est de type S si tous les éléments d'une suite de Jordan-Hölder de X sont éléments de S (regardé comme ensemble de caractères de MAN triviaux sur N) .

Si $\sigma \in \hat{M}$ et $\lambda \in \underline{a}^*$, notant $(p,q) = \sigma \oplus \lambda$ on notera indifféremment $X_{(p,q)} = X_{\sigma \oplus \lambda}$ la composante primaire de type $\sigma \otimes e^\lambda$ d'un MAN-module X.
Si $(p_\circ,q_\circ) \in \underline{h}_\circ^* \times \underline{h}_\circ^*$ avec $p_\circ - q_\circ \in Q$, on note :

$$X^R_{(p_\circ,q_\circ)} = \bigoplus_{(p,q) \in (p_\circ,q_\circ) + R \times R} X_{(p,q)}$$

Raisonnant au niveau des algèbres de Lie, on obtient facilement que $X^R_{(p_\circ,q_\circ)}$ est un facteur direct de X et X est somme directe de tels sous-modules.

3.3 - Caractère infinitésimal "non singulier".

Définition (cf. [8] p. 97) : On dira que $\chi \in \hat{Z}_{ad}$ (cf. 3.1) est "non singulier", si toutes les séries principales de caractère infinitésimal χ sont irréductibles.

On dit que $p \in \underline{h}_\circ^*$ est dominant (resp. antidominant) si pour tout $\alpha \in \Delta^+$ avec $p_\alpha \in \mathbb{Z}$ on a $p_\alpha \in \mathbb{N}$ (resp. $p_\alpha \in -\mathbb{N}$).

Lemme 5 : Soit $\chi \in \hat{Z}_{ad}$ "non singulier". Pour tout $(p,q) \in O_{\chi,ad}$ (cf. 1.7) et tout $\alpha \in \Delta^+$, on a les implications

$$p_\alpha \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow q_\alpha = 0 \ , \ q_\alpha \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow p_\alpha = 0$$

Démonstration : Supposons par exemple $p_\alpha \in \mathbb{Z}^*$. Alors $(p, s_\alpha q)$ est dans $O_{\chi,ad}$. Ecrivons $(p,q) = \sigma \oplus \lambda$, $(p,s_\alpha q) = \sigma' \oplus \lambda'$. Alors l'irréductibilité de $I_P(\sigma,\lambda)$ et $I_P(\sigma',\lambda')$ impliquent respectivement que q_α n'est pas du même signe que p_α et $-q_\alpha$ n'est pas du même signe que p_α. (cf. [7] th. 1.4.4). D'où $q_\alpha = 0$. □

Lemme 6 : Soit $\chi \in \hat{Z}_{ad}$, "non singulier". Soit $(p,q) \in O_{\chi,ad}$. Alors il existe $(p_\circ,q_\circ) \in \Omega_{(p,q)}$ tel que $p_\circ$ soit dominant et $q_\circ$ antidominant.

Démonstration :

Dans l'orbite de $\sigma = p - q \in Q$, il existe un poids dominant $\sigma_\circ = w\sigma$. Posons $p_\circ = wp$, $q_\circ = wq$. Montrons que $p_\circ$ est dominant. Raisonnons par l'absurde et soit $\alpha \in \Delta^+$ avec $(p_\circ)_\alpha \in -\mathbb{N}^*$. Alors d'après le lemme précédent on a $(q_\circ)_\alpha = 0$. Mais alors $(\sigma_\circ)_\alpha = (p_\circ)_\alpha \in -\mathbb{N}^*$. Une contradiction avec $\sigma_\circ$ dominant qui montre que $p_\circ$ est dominant. On procède de façon similaire pour montrer que $q_\circ$ est antidominant.

Lemme 7 : Soit $\chi \in \hat{Z}_{ad}$, "non singulier". Soient $(p,q) \in O_{\chi,ad}$ avec p dominant et q antidominant, $W^p = \{w \in W \mid wp - p \in R\}$, $W^q = \{w \in W \mid wq - q \in R\}$. Alors $W^p = W^q \simeq W_1 \times W_2$ où W_1 (resp. W_2) est un sous-groupe du stabilisateur W_p (resp. W_q) de p (resp. q).

Démonstration :

Soient $\Delta^p = \{\alpha \in \Delta \mid p_\alpha \in \mathbb{Z}\}$, $\Delta^q = \{\alpha \in \Delta \mid q_\alpha \in \mathbb{Z}\}$.

Comme $p-q$ est un poids on a $\Delta^p = \Delta^q$. En outre Δ^p est un système de racines, $\Delta^p \cap \Delta^+$ est un système de racines positives pour Δ^p et W^p (resp. W^q) est le groupe de Weyl de $\Delta^p = \Delta^q$ (cf. [1] Ex. 1, p. 227). Ecrivons Δ^p comme somme de systèmes de racines irréductibles (Δ_i). Alors $W^p = \Pi W_{\Delta_i}$, $\Delta^+ \cap \Delta_i$ est un système de racines positives de Δ_i.

Soit $\gamma_i \in \Delta_i^+$ la plus grande racine de Δ_i relativement à Δ_i^+. D'après le lemme 5 on a soit $p_{\gamma_i} = 0$, soit $q_{\gamma_i} = 0$.

Supposons par exemple $p_{\gamma_i} = 0$. Comme p est dominant et $\Delta_i^+ \subset (\Delta^p)^+$ on en déduit aisément que $p_\alpha = 0$, $\forall \alpha \in \Delta_i$. D'où $W_{\Delta_i} \subset W_p$. On en déduit que Δ^p est somme de deux systèmes de racines (éventuellement vides), Δ_1 et Δ_2, avec $W_{\Delta_1} \subset W_p$, $W_{\Delta_2} \subset W_q$.

Lemme 8 : Soit $\chi \in \hat{Z}_{ad}$, "non singulier", (p,q), $(p',q') \in O_{\chi,ad}$.
Si $(p-p', q-q') \in R \times R$, il existe $w \in W$ avec $(p',q') = (wp, wq)$.

Démonstration :

Ecrivons $p' = xp$, $q' = yq$ avec $x,y \in W$. Soit $t \in W$ tel que tp soit dominant et tq antidominant. Un tel t existe d'après le lemme 6. Alors on a : $tp - txp \in R$, $tq - tyq \in R$. Soit encore $txt^{-1} \in W^{tp}$, $tyt^{-1} \in W^{tq}$.
D'après le lemme 7 on a :

$$txp = x'tp \qquad \text{avec } x' \in W_{tp}$$
$$tyq = y'tq \qquad \text{avec } y' \in W_{tq}$$

et en outre $x'y' = y'x'$.
D'où : $txp = x'y'tp$, $tyq = x'y'tq$, soit encore $p' = t^{-1}x'y'tp$, $q' = t^{-1}x'y'tq$. □

3.4 - Soit χ un caractère de $Z(\underline{g})$. Notons $\underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{C}}(\chi)$ la catégorie des modules de Harish-Chandra avec caractère infinitésimal généralisé χ.

La proposition suivante reprend essentiellement les techniques de [5].

Proposition 1 :

Soit V un objet indécomposable de $\underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{C}}(\chi)$ avec χ "non singulier". Alors tous les sous-quotients simples de V sont isomorphes.

Démonstration :

D'après le théorème du sous-module de Casselman (cf. [2]), V est un sous-module d'une induite à partir de MAN d'un module de dimension finie X. Notons $\mathrm{Ind}\, X$ cette induite. Comme V est un objet de $\underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{C}}\,(\chi)$, V est contenu dans la composante de $\mathrm{Ind}\, X$ de caractère infinitésimal χ que l'on note $(\mathrm{Ind}\, X)(\chi)$. D'après 3.2, on peut écrire :

$$X = \bigoplus_i X^R_{(p_i,q_i)}$$

Il est clair que si $((p_i,q_i) + R \times R) \cap O_{\chi,ad} = \emptyset$ alors $(\mathrm{Ind}\, X^R_{(p_i,q_i)})(\chi) = 0$.
On peut donc supposer que tous les (p_i,q_i) sont dans $O_{\chi,ad}$.
Mais si $(p,q),(p',q') \in O_{\chi,ad}$ et $(p,q) \in (p',q') + R \times R$, on a, grâce au lemme 8, $I_P(\sigma,\lambda) \simeq I_P(\sigma',\lambda')$, avec $(p,q) = \sigma \oplus \lambda$ et $(p',q') = \sigma' \oplus \lambda'$. On en déduit facilement que, pour $(p,q), (p',q') \in O_{\chi,ad}$,

$$\mathrm{Hom}_{\underline{g}}((\mathrm{Ind.}\, X^R_{(p,q)})(\chi)\,,\ (\mathrm{Ind}\, X^R_{(p',q')})(\chi)) = \{0\}\,,$$

dès que $(p,q) \notin (p',q') + R \times R$ car tous les sous-quotients du premier module sont isomorphes à $I_P(\sigma,\lambda)$ et ceux du second à $I_P(\sigma',\lambda')$. V étant indécomposable, il est donc inclus dans l'un des $(\mathrm{Ind}\, X^R_{(p,q)})(\chi)$ avec $(p,q) \in O_{\chi,ad}$.
Mais on vient de voir que celui-ci est primaire de type $I_P(\sigma,\lambda)$ avec $\sigma \oplus \lambda = (p,q)$. □

Théorème 3.

Soit χ un caractère infinitésimal "non singulier". Soient $I_1,\ldots,I_n$ un système de représentants des classes de modules simples de $\underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{C}}\,(\chi)$. Ce sont des séries principales $I_P(\sigma_i,\lambda_i)$, $i = 1,\ldots,n$, pour lesquelles on peut supposer $\mathrm{Re}\,\lambda_i \in -\overline{C}_P$ puisque $I_P(\sigma_i,\lambda_i) \simeq I_P(w\sigma_i,w\lambda_i)$ pour tout $w \in W$.
Alors :

(i) La catégorie $\underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{C}}\,(\chi)$ est égale à la somme directe $\bigoplus_{i=1}^{n} \underline{\underline{H}}\,(I_P(\sigma_i,\lambda_i))$.

(ii) Pour tout i, $\underline{\underline{H}}(I_P(\sigma_i,\lambda_i))$ est naturellement équivalente à la catégorie $\underline{\underline{C}}_{\lambda_i}$ (resp. $\underline{\underline{D}}_{\lambda_i}$) des $S(\underline{a})^{W_{\sigma_i,\lambda_i}}$ (resp. $S(\underline{a})^{W_{\sigma_i}}$)-modules primaires de type $\mathbb{C}_{\lambda_i}$ grâce au foncteur Ψ (cf. Th. 2).

(iii) Si (et seulement si) W_{σ_i,λ_i} est trivial, le foncteur $X \to I_P(\sigma_i,X)$ est une équivalence de catégorie entre la catégorie des A-modules de dimension finie primaires de type $\mathbb{C}_{\lambda_i}$ et $\underline{\underline{H}}(I_P(\sigma_i,\lambda_i))$

(iv) $\mathrm{Ext}^*_{\underline{g},K}(I_i,I_j) = 0$ si $i \neq j$ et $\dim \mathrm{Ext}^n_{\underline{g},K}(I_i,I_i) = \dim(\Lambda^n \underline{a})$

Démonstration :

Le théorème résulte immédiatement de la proposition précédente et du théorème 2. □

Le théorème 3 répond à une question de I.M. Gelfand ([8] p. 97). La partie directe de (iii) avait déjà été obtenue en collaboration avec H. Kraljevic. (cf. [5]).

Remarque :

Dans (iii) la condition de régularité de λ_i par rapport à W_{σ_i} est nécessaire comme on l'a déjà remarqué. Pour s'en convaincre, il suffit d'étudier le cas de $G = SL(2,\mathbb{C})$ et de prendre le caractère infinitésimal χ correspondant à $(0,0) \in \underline{h}^* \times \underline{h}^*$. Alors le foncteur $X \to I_P(0,X)$ ne réalise pas l'équivalence de catégorie souhaitée. En effet, en induisant un indécomposable sous A de longueur 2 (primaire de type $\mathbb{C}_0$), on obtient un module décomposable. Par contre, en induisant un module indécomposable, de dimension 3, on obtient un module dans $\underline{\underline{H}}\ \underline{\underline{C}}(\chi)$ qui est somme directe d'une irréductible et d'un indécomposable de longueur 2. Ceci résulte de ce qui suit : soit J l'idéal maximal de $S(\underline{a})$ correspondant à $0 \in \underline{a}^*$. Alors $S(\underline{a})/J^2$ est décomposable comme $S(\underline{a})^W$-module et $S(\underline{a})/J^3$ s'écrit comme somme de deux modules indécomposables sous $S(\underline{a})^W$, l'un irréductible, l'autre de longueur 2.

Note concernant le théorème 1, paragraphe 2.4 :

Dans le cas où $J = J(\sigma,\lambda)(\mu)$ est unitaire et vérifie $\mathrm{Ext}^I_{\underline{g},K}(F,J) \neq 0$ pour un module de dimension finie, F, B. Speh avait démontré un résultat beaucoup plus précis que le nôtre, à savoir $\dim \mathrm{Ext}^1_{\underline{g},K}(J,J) \leq 1$ (cf. [13], th. 6.16). De plus, le principe du théorème dans le cas général est déjà implicite dans son travail (cf. [13], § 4).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] N. BOURBAKI , Groupes et algèbres de Lie, Ch. 4,5,6. Elements de Mathématiques, XXXIV, Paris,(1964) .

[2] W. CASSELMAN, D.MILLIČIČ , Asymptotic behaviour of matrix coefficients of admissible representations, Duke Math. J. 49 (1982) 869-930.

[3] N. WALLACH , Asymptotic expansions of generalized matrix entries of real reductive groups , L.N. in Math. 1024, Springer (1983) 287-369.

[4] P. DELORME , Homomorphismes de Harish-Chandra liés aux K-types minimaux des séries principales des groupes de Lie réductifs connexes , Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 17 (1984) 117-189.

[5] P. DELORME, H. KRALJEVIC , Congrès International des Mathématiciens, Helsinki (1978) Abstracts of short communications, p. 130.

[6] J. DIXMIER , Algèbres enveloppantes, Cahiers scientifiques XXXVII, Gauthiers-Villars, Paris (1974).

[7] M. DUFLO , Représentations irréductibles des groupes de Lie semisimples complexes, L.N. in Math. 497, Springer (1975) 26-87.

[8] I.M. GELFAND , Actes Congrès Int. Math., Nice,(1970),t. 1 , 95-111.

[9] H. HECHT, W. SCHMID , Characters, asymptotics and $\underline{n}$-homology of Harish-Chandra modules , Acta Math. 151 (1983) 49-51.

[10] D. VOGAN , The algebraic structure of the representations of semisimple Lie groups I, Ann. of Math. 109 (1979) 1-60.

[11] D. VOGAN , The algebraic structure of the representations of semisimple Lie groups II (preprint).

[12] D. VOGAN , Representations of real reductive groups, Progress in Math. 15, Birkhäuser (1981) Boston, Bäsel, Stuttgart.

[13] B. SPEH , Indecomposable representations of semi-simple Lie groups. Trans. Amer. Math. Soc. 265 (1981) 1-33.

*
* *

P.DELORME
Faculté des Sciences de Luminy
Dépt.de Mathématiques-Informatique
L.A.225 du C.N.R.S.
70 route Léon Lachamp
13288 Marseille Cedex 9, France

PARTIE III

SUR LES n-EXTENSIONS DES REPRÉSENTATIONS INDUITES DES PRODUITS SEMI-DIRECTS.

par

F. DU CLOUX

Astérisque 124-125 (1985)
Société Mathématique de France

Introduction

Le problème abordé dans cette thèse est l'étude des espaces Ext^n entre représentations induites d'un groupe de Lie produit semi-direct, construites par une méthode analogue à celle de Mackey. Plus précisément, on considère un groupe de Lie $G = B \rtimes A$, avec B distingué et isomorphe à un groupe $\mathbb{R}^N$, et A quelconque. On note $\underline{b}$ l'algèbre de Lie de B, $\underline{b}^*$ son dual. A chaque élément x_0 de $\underline{b}^*$, et à chaque représentation (E,σ) du stabilisateur S de x_0 dans A , dans un espace localement convexe séparé complet E , on associe la représentation (F,π) induite au sens C^∞ par la représentation $e^{ix_0} \times \sigma$ de $B \rtimes S$. Malheureusement, le choix de ces représentations est un peu arbitraire et il ne semble pas facile d'en donner une caractérisation intrinsèque (i.e. indépendante de la décomposition de G en produit semi-direct), d'autant plus que l'induction au sens C^∞ (sans "condition de croissance") n'est pas une opération très raisonnable en théorie des représentations. C'est ce qui donne à la présente étude un caractère un peu exploratoire. Cependant il semble plausible que les résultats (sinon les méthodes) pourraient subsister pour d'autres choix.

Prenons maintenant deux représentations F_1 , F_2 comme ci-dessus. Dans le prolongement de l'article de Guichardet [3], où est considéré le cas des Ext^1, on s'intéresse aux espaces $\mathrm{Ext}^n_G(F_1,F_2)$, le but étant d'exprimer $\mathrm{Ext}^n_G(F_1,F_2)$ en termes de S-cohomologie à l'aide des représentations induisantes E_1,E_2 . L'outil essentiel est la suite spectrale de Hochschild-Serre. Pour le calcul des Ext^1 la suite exacte à cinq termes était suffisante, mais dans le cas général il faut considérer la suite spectrale dans son ensemble et voir ce que l'on peut en obtenir. Il est utile pour cela d'avoir l'expression la plus explicite possible des divers objets et morphismes qui interviennent ; c'est ce à quoi je me suis surtout attaché dans cette thèse.

Le plan du texte est le suivant. Le premier chapitre contient une présentation "hypercohomologique" de la suite spectrale de Hochschild-Serre, qui rendra de grands services par la suite. Dans le chapitre II on détermine le terme E_2^{pq} de la suite spectrale, le résultat apparaissant comme une généralisation naturelle de celui donné en [3] pour la suite exacte à cinq termes ; puis dans le chapitre III on s'intéresse aux différentielles. On obtient une expression explicite de l'opérateur d_2 , faisant intervenir d'une part la géométrie du fibré vectoriel $A \times_S E_1$, d'autre part la géométrie extrinsèque de l'orbite $X = Ax_0$ plongée dans $\underline{b}^*$. Enfin, dans un dernier chapitre sont traités quelques exemples, notamment celui du groupe de Poincaré généralisé $\widetilde{SO}_0(1,n) \ltimes \mathbb{R}^{n+1}$.

On trouvera en tête de chaque chapitre une présentation plus détaillée, ainsi que les énoncés des principaux théorèmes.

Chapitre 0. Notations et rappels.

(cf. [5] comme ouvrage de référence pour tout ceci; pour 0.6. et 0.7. on se reportera à [3]).

0.1. Soit G un groupe de Lie. Dans tout ce travail je désignerai par G-module un espace localement convexe séparé (en abrégé ELCS) E où G opère <u>différentiablement</u>. Cela veut dire que l'application $G \times E \longrightarrow E$ donnant l'action de G est continue, et que pour tout $v \in E$ fixé, l'application $g \longrightarrow gv$ est de classe C^∞ de G dans E.

0.2. Si E, E' sont deux G-modules, on munit l'espace Hom(E,E') de la topologie <u>de la convergence compacte</u>; c'est alors un G-module pour l'action $(gu)(v) = g.u(g^{-1}v)$.
De même si X est une variété C^∞ où G agit à gauche, et E un G-module, l'espace $C^\infty(X,E)$ est un G-module pour la topologie C^∞ habituelle et l'action $(gf)(x) = g.f(g^{-1}x)$.

0.3. Si E est un G-module, on appelle <u>résolution standard</u> de E le complexe:

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow C^\infty(G,E) \longrightarrow \dots \longrightarrow C^\infty(G^{n+1},E) \longrightarrow \dots$$

où l'application $d : C^\infty(G^n,E) \longrightarrow C^\infty(G^{n+1},E)$ est donnée par :

$$df(g_0, \dots ,g_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f(g_0, \dots ,g_{i-1},g_{i+1}, \dots ,g_n).$$

Ce complexe admet une homotopie contractante s définie par :

$$sf(g_1, \dots ,g_n) = f(1,g_1, \dots ,g_n).$$

En faisant agir G sur lui-même par translation à gauche, on voit que les G-modules $C^\infty(G^n,E)$ sont relativement injectifs, et que l'on obtient une résolution forte relativement injective (en abrégé f.r.i.) de E (cf. [5] ch. III §1).

Par définition, $H^n(G,E)$ est alors le $n^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie du complexe:

(1) $$0 \longrightarrow C^\infty(G,E)^G \longrightarrow \ldots \longrightarrow C^\infty(G^{n+1},E)^G \longrightarrow \ldots \qquad .$$

On obtient une définition équivalente en partant de n'importe quelle autre résolution f.r.i. de E. Par exemple on définit la résolution standard normalisée en se restreignant aux cochaînes telles que $f(g_0, \ldots ,g_n) = 0$ si $g_i = g_{i+1}$ pour un $i \in \{0, \ldots ,n-1\}$.

Le complexe (1) est isomorphe au complexe que je noterai $C^*(G,E)$, dit complexe des cochaînes inhomogènes sur G à valeurs dans E, défini par: $C^n(G,E) = C^\infty(G^n,E)$, et

$$df(g_1, \ldots ,g_{n+1}) = g_1 f(g_2, \ldots ,g_{n+1}) +$$
$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(g_1,\ldots,g_{i-1},g_i g_{i+1},g_{i+2},\ldots,g_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(g_1,\ldots,g_n).$$

On obtient le complexe des cochaînes inhomogènes normalisées en se restreignant aux cochaînes vérifiant $f(g_1,\ldots,g_n) = 0$ dès que l'un des arguments vaut 1.

0.4. Supposons que G n'admette qu'un nombre fini de composantes connexes. Soit K un compact maximal de G. Soit E un G-module. On appelle résolution de van Est de E le complexe :

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \Omega^0(X,E) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Omega^n(X,E) \longrightarrow \ldots$$

où $X = G/K$ et où $\Omega^n(X,E)$ désigne l'espace des n-formes différentielles sur X à valeurs dans E. La différentielle est le cobord usuel; comme X est difféomorphe à un espace $\mathbb{R}^N$ ce complexe admet l'homotopie contractante de Poincaré.

Le complexe $0 \longrightarrow \Omega^0(X,E)^G \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Omega^n(X,E)^G \longrightarrow \ldots$ correspondant n'est autre que le complexe $C^*(\underline{g},K,E)$, complexe de $(\underline{g},K)$-cohomologie de E.

0.5. Soient E,E' deux ELCS. Soit $u: E \longrightarrow E'$ une application linéaire continue. On dit que u est <u>forte</u>, s'il existe une a.l.c. $v: E' \longrightarrow E$ telle que $uvu = u$. Alors $(1-uv)$ est un projecteur de E' de noyau $\mathrm{Im}(u)$, et $(1-vu)$ est un projecteur de E d'image $\mathrm{Ker}(u)$, donc ces deux espaces sont supplémentables et u induit un isomorphisme de $E/\mathrm{Ker}(u)$ sur $\mathrm{Im}(u)$.

On dit qu'un complexe A d'ELCS est fort si sa différentielle d est une application linéaire forte. Il revient au même de dire que pour tout $q \in \mathbb{Z}$, $B^q(A)$ est fermé et supplémentable dans $Z^q(A)$, et $Z^q(A)$ est supplémentable dans $C^q(A)$. On démontre facilement que le fait d'être fort ne dépend que de la classe d'homotopie du complexe (cf. [5] appendice D lemme D.2.). Si G est un groupe de Lie, E un G-module, cela a donc un sens de dire que les complexes donnant la G-cohomologie de E sont forts.

0.6. Soit A un complexe d'ELC. On munit les espaces $H^q(A)$ de la topologie quotient Soit $(A_p)_{p\geq 0}$ une filtration de A par des sous-complexes. Rappelons comment on associe à cette donnée une suite spectrale $(E_r)_{r\geq 0}$ (cf. [3] ch.4).

On définit $Z_r^{pq} = \{x \in A_p^{p+q} \mid dx \in A_{p+r}^{p+q+1}\}$, $B_r^{pq} = dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}$,

$E_r^{pq} = Z_r^{pq}/(Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_r^{pq})$. On munit E_r^{pq} de la topologie quotient.

On montre aussitôt que la dérivation de A passe au quotient en une application $d_r : E_r^{pq} \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$; si l'on considère E_r comme un module bigradué par p et q, d_r est donc une différentielle de bidegré $(r,-r+1)$. On peut démontrer que $H^{pq}(E_r)$ s'identifie canoniquement à E_{r+1}^{pq} (en tant qu'ELC).

On définit aussi un terme $E_\infty^{pq} = Z_\infty^{pq}/(Z_\infty^{p+1,q-1} + B_\infty^{pq})$ en posant $Z_\infty^{pq} =$

$\{x \in A_p^{p+q} \mid dx = 0\}$, $B_\infty^{pq} = B^{p+q}(A) \cap Z_\infty^{pq}$. On voit aussitôt que E_∞^{pq} s'identifie à $H^{p+q}(A)_p / H^{p+q}(A)_{p+1}$, si l'on note $H^*(A)_p$ l'image de $H^*(A_p)$ dans $H^*(A)$ par l'injection canonique. En d'autres termes, E_∞ est le module bigradué associé à la filtration de $H^*(A)$ par les $H^*(A)_p$.

Supposons maintenant que A soit un complexe de cochaînes, par exemple, et que l'on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, $A_p \cap A^n = 0$ pour $p > p(n)$ (en pratique on aura souvent $p(n) = n$). Alors la suite spectrale converge vers $H^*(A)$ en ce sens que pour p et q fixés on a $E_r^{pq} = E_\infty^{pq}$ pour r assez grand.

0.7. Considérons maintenant le cas d'un double complexe K, de premier quadrant par exemple. On note d', d" les deux différentielles de K, d = d'+d" la différentielle totale, et on définit la graduation totale de K par $K^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{pq}$. On désigne par $H^*(K)$ la cohomologie de K muni de la graduation totale et de la différentielle d.

Les deux filtrations naturelles de K sont définies par :

$$'K_p = \bigoplus_{k\geq p,q\in\mathbb{N}} K^{kq} \qquad ''K_q = \bigoplus_{l\geq q,p\in\mathbb{N}} K^{pl}$$

(attention, dans la deuxième filtration les rôles traditionnels des lettres p et q sont intervertis: c'est q qui est l'indice filtrant, et p l'indice complémentaire). Les deux suites spectrales correspondantes sont notées $('E_r)$, $(''E_r)$. On est manifestement dans un cas où $'K_p \cap K^n = 0$ pour $p > n$ (resp. $''K_q \cap K^n = 0$ pour $q > n$) donc ces deux suites spectrales convergent vers $H^*(K)$.

d' (resp. d") est une différentielle de K de bidegré (1,0) (resp. (0,1)). On note $'H^{pq}(K)$ (resp. $''H^{pq}(K)$) le groupe de cohomologie de bidegré (p,q) correspondant. Remarquons que d' passe en une différentielle de bidegré (1 de "H(K); on peut donc définir les groupes $'H^{pq}(''H(K))$; résultat analogue pour d". Montrons que l'on a une identification naturelle $'E_2^{pq} \simeq {}'H^{pq}(''H(K)$ (resp. $''E_2^{pq} \simeq {}''H^{pq}('H(K))$). Faisons-le pour la première suite spectrale, en partant directement de la définition de $'E_2^{pq}$.

Tout élément f de degré total n de K s'écrit de manière unique:

$$f = f_0 + f_1 + \ldots + f_n \qquad \text{avec } f_k \in K^{kl},\ k+l = n.$$

On a alors : $(df)_k = d'f_{k-1} + d''f_k$.

La condition $f \in {}'K_p \cap K^n$ s'écrit évidemment : $f_k = 0$ pour $k < p$. Exprimons maintenant que $f \in {}'Z_2^{pq}$: $(df)_p = (df)_{p+1} = 0$, soit :

$$(1) \quad \begin{cases} d''f_p = 0 \\ d'f_p + d''f_{p+1} = 0 . \end{cases}$$

Les éléments de $'Z_2^{pq}$ qui sont dans $'K_{p+1}$ sont caractérisés par $f_p = 0$; pour obtenir $'E_2^{pq}$ il faut donc identifier à 0 les f pour lesquels il existe $g \in {}'Z_1^{p-1,q}$ tel que $(f - dg)_p = 0$; il faut et il suffit pour cela que les deux conditions suivantes soient remplies :

$$(2) \quad \begin{cases} d'g_{p-1} + d''g_p = f_p \\ d''g_{p-1} = 0 . \end{cases}$$

(n'importe quel élément g de la forme $g = g_{p-1} + g_p + \ldots + g_{n-1}$ répond alors à la question).

Ainsi $'E_2^{pq}$ peut se décrire comme l'ensemble des solutions de (1) modulo celles pour lesquelles on peut résoudre (2). Or les deux conditions (1) s'expriment encore par le fait que $f_p \in {}''Z^{pq}(K)$, $d'f_p \in {}''B^{p+1,q}(K)$, et $d''f_{p-1} = -d'f_p$. Donc f_p définit un élément de $'Z^{pq}(''H(K))$, puis un élément de $'H^{pq}(''H(K))$. Montrons que l'application $'Z_2^{pq} \longrightarrow {}'H^{pq}(''H(K))$ ainsi définie réalise l'isomorphisme cherché. En effet c'est clairement une surjection, et par ailleurs si l'image de $f \in {}'Z_2^{pq}$ est 0, c'est que f_p définit en fait un élément de $'B^{pq}(''H(K))$; cela veut dire qu'il existe g_{p-1} vérifiant $d''g_{p-1} = 0$, tel que $f_p - d'g_{p-1}$ soit dans $''B^{pq}(K)$; mais cela veut encore dire qu'il existe g_p tel que $f_p - d'g_{p-1} = d''g_p$. C'est donc bien équivalent au fait de pouvoir résoudre (2).

0.8. Soit G un groupe de Lie, et $0 \longrightarrow E' \underset{u}{\longrightarrow} E \underset{v}{\leftrightarrows} E'' \longrightarrow 0$ une suite exacte forte de G-modules. On définit alors de la façon habituelle une longue suite exacte de cohomologie :

$$0 \longrightarrow H^0(G,E') \xrightarrow{u_*} H^0(G,E) \xrightarrow{v_*} H^0(G,E'') \xrightarrow{\delta} H^1(G,E') \longrightarrow \ldots$$
$$\ldots \longrightarrow H^n(G,E') \xrightarrow{u_*} H^n(G,E) \xrightarrow{v_*} H^n(G,E'') \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(G,E') \longrightarrow \ldots$$

Les flèches u_* et v_* sont induites en cohomologie par u et v respectivement. Rappelons que la flèche δ ("morphisme de connexion") s'obtient comme suit. Choisissons une scission linéaire continue $s : E'' \longrightarrow E$ pour v. Soit $\alpha \in H^n(G,E'')$, $z \in Z^n(G,E'')$ un représentant de α. Alors $s \circ z \in C^n(G,E)$, mais n'est plus un cocycle en général. Comme $v(d(sz)) = d(vsz) = dz = 0$, $d(sz) \in C^{n+1}(G,E')$; et il est clair que c'est un cocycle. Alors on pose $\delta(\alpha) = [dsz] \in H^{n+1}(G,E')$. On vérifie aussitôt que cela ne dépend ni du choix de z, ni du choix de s.

On peut encore interpréter cela en termes de cup-produit, en remarquant que $ds \in Z^1(G,\mathrm{Hom}(E'',E'))$ représente précisément la classe de l'extension, et que l'on peut écrire:

$$d(sz) = ds \smile z$$

(car $dz = 0$) en désignant par $\smile$ le cup-produit associé au couplage naturel d'"évaluation" : $(u,v'') \longrightarrow u(v'')$ de $\mathrm{Hom}(E'',E') \times E''$ vers E'.

(Rappelons que si E_1, E_2, E sont trois G-modules, et si $\smile : E_1 \times E_2 \longrightarrow E$ est un couplage G-invariant, on définit un couplage $C^p(G,E_1) \times C^q(G,E_2) \longrightarrow C^{p+q}(G,E)$ par:

$$f_1 \smile f_2(g_1,\dots,g_{p+q}) = f_1(g_1,\dots,g_p)\smile g_1\dots g_p f_2(g_{p+1},\dots,g_{p+q})$$

(cf. [6] ch. II n°1) et que l'on a alors la formule :

$$d(f_1 \smile f_2) = df_1 \smile f_2 + (-1)^p f_1 \smile df_2$$

ce qui permet de définir un couplage, dit de cup-produit, en cohomologie de $H^p(G,E_1)\times H^q(G,E_2)$ vers $H^{p+q}(G,E)$.)

Si on désigne par β la classe de ds, $\beta \in \mathrm{Ext}^1_G(E'',E')$, on a donc la formule:

$$\delta(\alpha) = \beta \smile \alpha$$

Supposons maintenant que l'on ait une suite exacte longue :

$$0 \longrightarrow E' \leftrightarrows E_1 \leftrightarrows \dots \leftrightarrows E_n \leftrightarrows E'' \longrightarrow 0$$

On peut la considérer comme la donnée de n suites exactes courtes "mises bout à bout" : $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E_1 \longrightarrow E''_1 \longrightarrow 0$, $0 \longrightarrow E''_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow E''_2 \longrightarrow 0$, ... $0 \longrightarrow E''_{n-1} \longrightarrow E_n \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$. Si $\beta_1, \dots, \beta_n$ sont les classes de ces extensions, $\beta_i \in \mathrm{Ext}^1_G(E''_i, E''_{i-1})$, avec $E''_0 = E'$, $E''_n = E''$, alors la classe associée à la n-extension (cf. [5] ch.I §10) n'est autre que $\beta_1 \smile \dots \smile \beta_n = \beta$, avec les couplages naturels provenant de la composition des morphismes. On a $\beta \in \mathrm{Ext}^n_G(E'',E')$. Si $\alpha \in H^q(G,E'')$, on dit par définition que $\beta\smile\alpha \in H^{q+n}(G,E')$ est l'image de α par relèvement à travers la n-extension.

Enfin si $u : E' \longrightarrow F'$ est un morphisme de G-modules, on peut considérer avec β comme ci-dessus $u\smile\beta \in \mathrm{Ext}^n_G(E'',F')$ (ici $u \in \mathrm{Ext}^0_G(E',F')$); du point de vue des n-extensions il s'agit de la classe de la n-extension obtenue par image directe à partir de u :

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
(1) & 0 & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & E_n & \longrightarrow & E'' \longrightarrow 0 \\
 & & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow 1 & & & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 \\
(2) & 0 & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & E_n & \longrightarrow & E'' \longrightarrow 0
\end{array}$$

où F_1 est un certain G-module topologiquement isomorphe à $E''_1 \oplus F'$, caractérisé à isomorphisme près par la condition que v induise 1 sur E''_1 (cf. [5] ch.I §10 pour plus de détails). Si on s'intéresse à l'image de $\beta\smile\alpha$ par u_* (on parlera de l'image par u, par abus de langage), il revient donc au même de relever α à travers l'extension (2).

Par exemple, si E'_0 est un sous-G-module de E', et si u est la projection canonique $E' \longrightarrow E'/E'_0$, la n-extension obtenue par image directe est :

$$0 \longrightarrow E'/E'_0 \longrightarrow E_1/E'_0 \longrightarrow E_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow E_n \longrightarrow 0 .$$

Chapitre I : Généralités sur la suite spectrale de Hochschild-Serre dans le cas des groupes de Lie.

1. Introduction.

Dans ce chapitre on introduit quelques notions d'hypercohomologie (dans la terminologie de Cartan-Eilenberg [2] ch. XVII) pour la cohomologie des groupes topologiques. Le cadre naturel pour ces notions semble être celui des complexes forts; on peut alors calquer mutatis mutandis l'exposé de [2]. Mais il m'a paru utile de signaler en remarque que si l'on se limite à la résolution standard, la plupart des résultats restent valables en supposant seulement une propriété de relèvement de fonctions C^∞.
Comme application, on interprète dans ce cadre la construction de la suite spectrale de Hochschild-Serre associée à un sous-groupe distingué fermé H d'un groupe de Lie G (cf. [5] ch.III §5 où l'on reprend dans le cas topologique la "méthode générale" de [6] ch.I). Dans le cas où G est un produit semidirect $K \ltimes H$, on peut simplifier considérablement le double complexe introduit, ce qui s'avèrera très utile au ch.III.

Les résultats essentiels du chapitre sont regroupés dans les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 1.1. Soient G un groupe de Lie, A un complexe fort de G-modules.

(i) La première suite spectrale d'hypercohomologie de A vérifie :

$$E_2^{pq} \simeq H^p(G,H^q(A)).$$

(ii) L'application $d_2 : E_2^{pq} \longrightarrow E_2^{p+2,q-1}$ s'obtient en relevant $\alpha \in H^p(G,H^q(A))$ à travers la suite exacte à 4 termes de G-modules :

$$0 \longrightarrow H^{q-1}(A) \longrightarrow C^{q-1}(A)/\,B^{q-1}(A) \longrightarrow Z^q(A) \longrightarrow H^q(A) \longrightarrow 0 .$$

(iii) Si l'une des deux suites exactes :

$$\text{(a)} \quad 0 \longrightarrow B^q(A) \longrightarrow Z^q(A) \longrightarrow H^q(A) \longrightarrow 0$$
$$\text{(b)} \quad 0 \longrightarrow H^{q-1}(A) \longrightarrow C^{q-1}(A)/B^{q-1}(A) \longrightarrow B^q(A) \longrightarrow 0$$

est scindée sous G pour tout $q \geq 0$, alors $d_r = 0$ pour tout $r \geq 2$.

Démonstration à la fin du n° 6.

<u>THÉORÈME 1.2</u>. Soient G un groupe de Lie, H un sous-groupe distingué fermé de G, E un G-module tel que les complexes de H-cohomologie de E soient forts.

(i) Faisons agir G/H sur le complexe A^H, où $A^q = C^\infty(G^{q+1},E)$ muni de l'action naturelle de G. Alors la première suite spectrale d'hypercohomologie du complexe A^H n'est autre que la suite spectrale de Hochschild-Serre du G-module E associée à H, définie en [5] ch.III §5. Elle converge vers $H^*(G,E)$ et d'après le théorème 1.1. (i) vérifie : $E_2^{pq} = H^p(G/H, H^q(H,E))$. On peut aussi lui appliquer les autres assertions du théorème 1.1.

(ii) Si G est un produit semidirect $G = K \ltimes H$, on peut dans ce qui précède remplacer le complexe A^H par le complexe A' défini par : $A'^q = C^\infty(H^{q+1},E)^H$ où K agit sur H par restriction des automorphismes intérieurs. On peut aussi passer en cochaînes inhomogènes.

(iii) Supposons de plus H difféomorphe à un espace $\mathbb{R}^N$. On peut encore remplacer A^H par le complexe A" défini par : $A''^q = C^q(\underline{h},E)$, où $\underline{h}$ est l'algèbre de Lie de H sur laquelle K agit par restriction de l'action adjointe.

Démonstration à la fin du n° 9.

On obtient le corollaire suivant, en réénonçant le théorème 1.1. dans ce cas particulier :

<u>COROLLAIRE</u> : Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 1.2. (iii).

(i) La suite spectrale de Hochschild-Serre relativement à H vérifie :

$$E_2^{pq} = H^p(K,H^q(\underline{h},E)).$$

(ii) L'application $d_2 : E_2^{pq} \longrightarrow E_2^{p+2,q-1}$ s'obtient en relevant $\alpha \in H^p(K,H^q(\underline{h},E))$ à travers la suite exacte à 4 termes de K-modules :

$$0 \longrightarrow H^{q-1}(\underline{h},E) \longrightarrow C^{q-1}(\underline{h},E)/\,B^{q-1}(\underline{h},E) \longrightarrow Z^q(\underline{h},E) \longrightarrow H^q(\underline{h},E) \longrightarrow 0.$$

(iii) Si l'une des deux suites exactes :

(a) $\quad 0 \longrightarrow B^q(\underline{h},E) \longrightarrow Z^q(\underline{h},E) \longrightarrow H^q(\underline{h},E) \longrightarrow 0$

(b) $\quad 0 \longrightarrow H^{q-1}(\underline{h},E) \longrightarrow C^{q-1}(\underline{h},E)/\,B^{q-1}(\underline{h},E) \longrightarrow B^q(\underline{h},E) \longrightarrow 0$

est scindée sous K pour tout $q \geq 0$, on a $d_r = 0$ pour tout $r \geq 2$.

2. Résolutions de complexes.

Soient G un groupe de Lie, A un complexe fort de G-modules (cf. 0.5.); on entend par là que la différentielle de A commute à l'action de G.
Une résolution forte relativement injective (en abrégé f.r.i.) de A est la donnée d'une suite exacte de complexes forts de G-modules :

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A^0 \longrightarrow \dots \longrightarrow A^p \longrightarrow \dots$$

qui soit forte, en ce sens que pour tout $p \geq 0$ il existe un morphisme de complexes (mais non nécessairement de G-modules) $s^p : A^p \longrightarrow A^{p-1}$ (avec $A^{-1} = A$) tel que $d \circ s^p = 1_{A^p}$, et telle que pour tout $q \in \mathbb{Z}$ les suites (exactes) suivantes :

(1) $0 \longrightarrow C^q(A) \longrightarrow C^q(A^0) \longrightarrow \dots \longrightarrow C^q(A^p) \longrightarrow \dots$

(2) $0 \longrightarrow Z^q(A) \longrightarrow Z^q(A^0) \longrightarrow \dots \longrightarrow Z^q(A^p) \longrightarrow \dots$

(3) $0 \longrightarrow B^q(A) \longrightarrow B^q(A^0) \longrightarrow \dots \longrightarrow B^q(A^p) \longrightarrow \dots$

(4) $0 \longrightarrow H^q(A) \longrightarrow H^q(A^0) \longrightarrow \dots \longrightarrow H^q(A^p) \longrightarrow \dots$

soient des résolutions f.r.i. des G-modules $C^q(A)$, $Z^q(A)$, $B^q(A)$, $H^q(A)$ respectivement. (Le fait qu'il s'agisse de résolutions fortes résultait déjà de ce qui précède; l'hypothèse supplémentaire est donc que $C^q(A^p)$, $Z^q(A^p)$, $B^q(A^p)$, $H^q(A^p)$ sont relativement injectifs, et il suffit de vérifier cela pour les trois premiers; donc la condition (4) est redondante).

Il est équivalent de dire que les $C^q(A^p)$ sont relativement injectifs, et que $Z^q(A^p)$ (resp. $B^q(A^p)$) est supplémentable en tant que G-module dans $C^q(A^p)$ (resp. $Z^q(A^p)$).

LEMME 1.1. Tout complexe fort de G-modules admet une résolution f.r.i.

Démonstration. On définira plus loin la résolution standard d'un complexe fort de G-modules.

A une résolution f.r.i. de A on associe un double complexe de G-modules, en remplaçant la flèche "verticale" $d^q : C^q(A^p) \longrightarrow C^q(A^{p+1})$ par $(-1)^q d^q$.
On a alors la propriété fondamentale suivante, analogue au "lemme de comparaison des résolutions" ([5] ch.I prop. 2.2.)

PROPOSITION 1.1. Soient A, A' deux complexes forts de G-modules, soit $f : A \longrightarrow A'$ un morphisme de complexes de G-modules, et A^* (resp. A'^*) une résolution f.r.i. de A (resp. A'). Il y a alors un morphisme de doubles complexes de G-modules $F : A^* \longrightarrow A'^*$ au-dessus de f.
Si F et F' sont deux morphismes au-dessus de morphismes homotopes f, f', alors F et F' sont homotopes (en tant que morphismes de doubles complexes de G-modules).

Démonstration. Elle se fait comme dans [2] ch. XVII prop. 1.2.; elle n'utilise que les propriétés universelles des modules relativement injectifs.

3. Hypercohomologie.

Soit A un complexe fort de G-modules, A^* une résolution f.r.i. de A. On définit un double complexe K par : $K^{pq} = C^q(A^p)^G$, et les flèches naturelles issues de la structure de double complexe sur la résolution.
Les deux suites spectrales $'E_r^{pq}$, $''E_r^{pq}$ ($r \geq 2$) et la cohomologie $H^*(K)$ du complexe total associé s'appellent les invariants hypercohomologiques de A.
Ceci est justifié par la proposition 1.1., qui montre que si l'on remplace la résolution A^* par une autre résolution f.r.i. B^*, il y a un isomorphisme canonique au niveau des suites spectrales pour $r \geq 2$, et donc aussi au niveau de la cohomologie du complexe total (cf. [3] ch.4 th. 4.3.1.).
Elle montre aussi que deux complexes homotopiquement équivalents (en tant que complexes de G-modules) ont des invariants hypercohomologiques isomorphes; et enfin qu'un morphisme $f : A \longrightarrow A'$ induit un morphisme au niveau des deux suites spectrales et donc de $H^*(K) \longrightarrow H^*(K')$ qui ne dépend que de la classe d'homotopie de f.
Calculons le terme $'E_2^{pq}$. On a $'E_0^{p*} = (A^p)^G$; comme $C^q(A^p)$ admet une décomposition sous G :

$$C^q(A^p) = B^q(A^p) \oplus H^q(A^p) \oplus B^{q+1}(A^p)$$

on peut écrire : $H^*((A^p)^G) = (H^*(A^p))^G$; donc $'E_1^{pq} = (H^q(A^p))^G$. En d'autres termes, le complexe $'E_1^{*q}$ n'est autre que celui qui provient de la résolution de $H^q(A)$ par les $H^q(A^p)$. Donc : $'E_2^{pq} = H^p(G, H^q(A))$.
Pour la deuxième suite spectrale on a $''E_1^{pq} = H^p(G, C^q(A))$. Le complexe $''E_1^{p*}$ est donc celui "induit en cohomologie" par A; il ne semble pas y avoir d'interprétation naturelle de $''E_2^{pq}$ en général.

4. Une propriété particulière à la première suite spectrale d'hypercohomologie.

PROPOSITION 1.2. Soient A, A' deux complexes forts de G-modules. Soient f et g deux morphismes de complexes de G-modules de A vers A', homotopes en tant que morphismes de complexes d'EVT. Alors les morphismes induits par f et g au niveau de la première suite spectrale d'hypercohomologie sont identiques pour $r \geq 2$, et donc aussi les morphismes induits de $H^*(K)$ vers $H^*(K')$.

Démonstration.
Soit A^* (resp. A'^*) une résolution f.r.i. de A (resp. A'). Soit $F : A^* \longrightarrow A'^*$ un morphisme de doubles complexes de G-modules au-dessus de f. Pour tout p fixé, F induit un morphisme $A^p \longrightarrow A'^p$; d'où un morphisme en cohomologie : $F_*^{pq} : H^q(A^p) \longrightarrow H^q(A'^p)$. On voit immédiatement que pour q donné, les F_*^{pq} définissent un morphisme de la résolution de $H^q(A)$ par les $H^q(A^p)$ vers la résolution de $H^q(A')$ par les $H^q(A'^p)$, au-dessus de f_*. En d'autres termes on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & H^q(A) & \longrightarrow & H^q(A^0) & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow & H^q(A^p) & \longrightarrow & \cdots \\
& \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle F_*^{0q}} & & & \downarrow{\scriptstyle F_*^{pq}} & & \\
0 \longrightarrow & H^q(A') & \longrightarrow & H^q(A'^0) & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow & H^q(A'^p) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

De même pour G au-dessus de g. Si maintenant les morphismes de complexes d'EVT sous-jacents à f et g sont homotopes, on a $f_* = g_*$; alors le lemme de comparaison des résolutions ([5] ch.III prop.1.1.) dit que les morphismes de complexes de G-modules $F_*^{\cdot q}$ et $G_*^{\cdot q}$ sont homotopes, donc induisent la même application $H^p(G,H^q(A)) \longrightarrow H^p(G,H^q(A'))$. Comme cette application est précisément celle induite par F (resp. G) au niveau du terme $'E_2^{pq}$ (cf. la détermination de $'E_2^{pq}$ au n°3), la proposition est démontrée.

COROLLAIRE 1.1. Soient A,A' deux complexes forts de G-modules, $f : A \longrightarrow A'$ un morphisme. Si le morphisme de complexes d'EVT sous-jacent à f admet un inverse d'homotopie, alors f induit un isomorphisme au niveau de la première suite spectrale d'hypercohomologie pour $r \geq 2$, et donc de $H^*(K)$ vers $H^*(K')$

5. La résolution standard d'un complexe.

Soit A un complexe fort de G-modules. Définissons le complexe A^p par :

$C^q(A^p) = C^\infty(G^{p+1}, C^q(A))$; la différentielle de A^p est $f \longrightarrow d \circ f$, où $d : C^q(A) \longrightarrow C^{q+1}(A)$ est la différentielle de A. On vérifie aussitôt que si l'on définit $d : C^q(A^p) \longrightarrow C^q(A^{p+1})$ comme étant la flèche usuelle de la résolution standard de $C^q(A)$ (cf. 0.3.), et de même les scissions $C^q(A^{p+1}) \longrightarrow C^q(A^p)$, on obtient une résolution f.r.i. de A, avec $Z^q(A^p) = C^\infty(G^{p+1}, Z^q(A))$, $B^q(A^p) = C^\infty(G^{p+1}, B^q(A))$, et $H^q(A^p) = C^\infty(G^{p+1}, H^q(A))$. (Tout ceci ne pose aucun problème parce que le complexe est fort).
On l'appelle la <u>résolution standard</u> de A. On définirait de même la résolution standard normalisée.

Remarquons maintenant que le double complexe K correspondant, qui vérifie $K^{pq} = C^\infty(G^{p+1}, C^q(A))^G$, est naturellement <u>isomorphe</u> au double complexe que l'on pourrait définir directement en cochaînes inhomogènes, et que l'on note $C^*(G,A)$.

On peut alors élargir un peu le cadre des complexes forts en procédant comme suit. Tout d'abord si A est un complexe d'ELCS tel que $H^*(A)$ soit séparé, X une variété C^∞, on définit comme ci-dessus le complexe $C^\infty(X,A)$. Il est clair que $Z^q(C^\infty(X,A)) = C^\infty(X, Z^q(A))$; sous cette identification $B^q(C^\infty(X,A))$ est contenu dans $C^\infty(X, B^q(A))$. On obtient donc une application naturelle de $H^q(C^\infty(X,A))$ vers $C^\infty(X, H^q(A))$, mais en général cette application n'est ni injective ni surjective. Elle est injective si et seulement si toute application C^∞ de X vers $B^q(A)$ se relève en une application C^∞ de X vers $C^{q-1}(A)$; et elle est surjective si et seulement si toute application C^∞ de X vers $H^q(A)$ se relève en une application C^∞ de X vers $Z^q(A)$.
Disons maintenant qu'un complexe A de G-modules, non nécessairement fort, mais tel que $H^*(A)$ soit séparé, <u>admet la résolution standard</u> si pour tout $p \geq 0$, l'application naturelle : $H^*(C^\infty(G^p,A)) \longrightarrow C^\infty(G^p, H^*(A))$ est un isomorphisme. (C'est le cas notamment si A est fort). On peut vérifier que cette notion ne dépend que de la classe d'homotopie du complexe d'EVT sous-jacent à A.
Le calcul du terme $'E_2^{pq}$, ainsi que les propositions 1.1. et 1.2. restent valables dans cette situation, à condition de se restreindre partout à la résolution standard. De même pour la proposition 1.3. ci-dessous.

6. L'opérateur d_2 de la première suite spectrale d'hypercohomologie.

PROPOSITION 1.3. Soient G un groupe de Lie, A un complexe fort de G-modules. Soit $'E_2^{pq}$ la première suite spectrale d'hypercohomologie de A. L'application $d_2 : {'E_2^{pq}} \longrightarrow {'E_2^{p+2,q-1}}$ s'obtient en relevant $\alpha \in H^p(G,H^q(A))$ à travers la suite exacte à 4 termes de G-modules :

$$0 \longrightarrow H^{q-1}(A) \longrightarrow C^{q-1}(A)/\ B^{q-1}(A) \longrightarrow Z^q(A) \longrightarrow H^q(A) \longrightarrow 0.$$

De manière équivalente on peut dire que l'on obtient l'image de $\alpha \in {'E_2^{pq}} \simeq H^p(G,H^q(A))$ en le relevant successivement à travers les deux suites exactes :

(a) $\quad 0 \longrightarrow B^q(A) \longrightarrow Z^q(A) \longrightarrow H^q(A) \longrightarrow 0$

(b) $\quad 0 \longrightarrow H^{q-1}(A) \longrightarrow C^{q-1}(A)/\ B^{q-1}(A) \longrightarrow B^q(A) \longrightarrow 0$.

Si l'une des deux suites exactes (a), (b), est scindée sous G pour tout $q \geq 0$, on a $d_r = 0$ pour tout $r \geq 2$.

Démonstration.

J'ai rappelé en 0.6. la définition générale d'une suite spectrale, et en 0.7. j'ai considéré le cas d'un complexe double. On a ici le double complexe K que j'écris en cochaînes inhomogènes : $K^{pq} = C^p(G,C^q(A))$, et dont je note :

$$f \longrightarrow (-1)^q df \qquad f \longrightarrow dof \qquad \text{pour } f \in K^{pq}$$

les deux dérivations (en effet, la deuxième dérivation de K est donnée par composition de f avec la dérivation de A).

Soit e un élément de $'E_2^{pq}$, $f \in {'Z_2^{pq}}$ un représentant de e. Rappelons comment on retrouve e à partir de f, dans l'identification $'E_2^{pq} = H^p(G,H^q(A))$. Puisque $f \in {'Z_2^{pq}}$, f s'écrit $\sum\limits_{k\geq p} f_k$, avec $f_k \in K^{kl}$, $k+l = p+q$, et on a les deux conditions :

$$\begin{cases} dof_p = 0 \\ (-1)^q df_p + dof_{p+1} = 0. \end{cases}$$

La première exprime que f_p est en fait à valeurs dans $Z^q(A)$, donc définit $\tilde{f}_p \in C^p(G,H^q(A))$; alors la deuxième montre que $d\tilde{f}_p = 0$, donc que $\tilde{f}_p \in Z^p(G,H^q(A))$; et e n'est autre que la classe de $\tilde{f}_p$ dans $H^p(G,H^q(A))$.

Soit donc $e \in {'E_2^{pq}}$. Pour obtenir $d_2 e \in {'E_2^{p+2,q-1}}$, je dois choisir un représentant f de e, calculer df, et appliquer la procédure ci-dessus à $(df)_{p+2}$.

Choisissons tout d'abord un représentant z de e dans $Z^p(G,H^q(A))$; soit f_p $\in C^p(G,Z^q(A))$ un relèvement de z. Soit $g_{p+1} = df_p$; alors g_{p+1} est un cocycle sur G à valeurs dans $B^q(A)$, et comme le complexe A est fort, je peux écrire $g_{p+1} = (-1)^{q-1} d \circ f_{p+1}$, où f_{p+1} est un certain élément de $C^{p+1}(G,C^{q-1}(A))$. Il est clair que $f = f_p + f_{p+1}$ est dans $'Z_2^{pq}$ et représente e.

Par définition $[g_{p+1}] \in H^{p+1}(G,B^q(A))$ est l'image de e par relèvement à travers la suite exacte (a). De même $(-1)^{q-1}[df_{p+1}] \in H^{p+2}(G,Z^{q-1}(A))$ est l'image de $[g_{p+1}]$ par relèvement à travers la suite exacte :

(b_1) $$0 \to Z^{q-1}(A) \to C^{q-1}(A) \to B^q(A) \to 0,$$

dont on déduit (b) en prenant l'image directe par la projection canonique $Z^{q-1}(A) \to H^{q-1}(A)$.

Or on a $(df)_{p+2} = (-1)^{q-1} df_{p+1}$ (qui est même déjà directement un cocycle à valeurs dans $Z^{q-1}(A)$). Pour obtenir $d_2 e$, je dois composer $(df)_{p+2}$ avec la projection canonique $Z^{q-1}(A) \to H^{q-1}(A)$, puis prendre la classe du p+2-cocycle ainsi obtenu. Il revient au même de relever $[g_{p+1}]$ à travers la suite exacte (b), ce qui démontre la première assertion de la proposition 1.3.

Plaçons-nous maintenant dans les hypothèses de la seconde assertion, et montrons qu'alors tout $e \in {}'E_2^{pq}$ admet un représentant f qui soit un "vrai cocycle", i.e. tel que df = 0.

Si les suites exactes (a) sont scindées c'est clair; on pourra choisir pour f_p un cocycle dans la construction ci-dessus, donc $df_p = 0$, ce qui permet de prendre $f_{p+1} = 0$, et alors $f = f_p$ est bien un cocycle dans K.

Si les suites (b) sont scindées, c'est un peu plus compliqué. On sait alors seulement que pour tout $z \in Z^p(G,B^q(A))$, on peut choisir un relèvement c $\in C^p(G,C^{q-1}(A))$ tel que $dc \in Z^{p+1}(G,B^{q-1}(A))$ (alors qu'à priori dc était à valeurs dans $Z^{q-1}(A)$). Mais cela est exactement suffisant, car on peut alors choisir f_{p+1} tel que $df_{p+1} \in Z^{p+2}(G,B^{q-1}(A))$, d'où $f_{p+2} \in C^{p+2}(G,C^{q-2}(A))$ tel que $d \circ f_{p+2} = (-1)^{q-2} df_{p+1}$, qu'en outre on peut choisir tel que df_{p+2} soit à valeurs dans $B^{q-2}(A)$. Continuant ainsi de proche en proche on construit $f = f_p + f_{p+1} = \dots + f_{p+q}$ tel que df = 0, et qui représente e.

Or il est clair que si tout $e \in {}'E_2^{pq}$ admet un représentant qui soit un vrai cocycle, on a $d_r = 0$ pour tout $r \geq 2$. En effet d'après la définition on a alors $d_2 = 0$, ce qui permet d'identifier ${}'E_2^{pq}$ à ${}'E_3^{pq}$; mais un représentant cocycle de $e \in {}'E_2^{pq}$ le représente aussi en tant qu'élément de ${}'E_3^{pq}$, donc $d_3 = 0$, ... etc. Cqfd.

Remarque 1.1. On aurait le même résultat en supposant qu'il y ait un sous-G-module $Z_0^q \subset Z^q(A)$, tel que l'application $Z_0^q \longrightarrow H^q(A)$ soit surjective, puis un sous-G-module $C_0^{q-1} \subset C^{q-1}(A)$ tel que l'application $C_0^{q-1} \longrightarrow B_0^q(A)$ soit surjective (en notant $B_0^q = Z_0^q \cap B^q(A)$). Soient $Z_0^{q-1} = C_0^{q-1} \cap Z^{q-1}(A)$, $B_0^{q-1} = C_0^{q-1} \cap B^{q-1}(A)$, $H_0^{q-1} = Z_0^{q-1}/ B_0^{q+1}$. On peut alors pour la détermination du d_2 remplacer les suites exactes (a), (b), par :

(a') $\quad 0 \longrightarrow B_0^q \longrightarrow Z_0^q \longrightarrow H^q(A) \longrightarrow 0$

(b') $\quad 0 \longrightarrow H_0^{q-1} \longrightarrow C_0^{q-1}/ B_0^{q-1} \longrightarrow B_0^q \longrightarrow 0.$

Si l'une des suites (a'), (b') est scindée sous G pour tout $q \geq 0$, on aura encore $d_r = 0$ pour tout $r \geq 2$.

Démonstration du théorème 1.1.

Le calcul du ${}'E_2^{pq}$ au n°3 et la proposition 1.3. constituent le théorème 1.1.

7. La suite spectrale de Hochschild-Serre.

Soient G un groupe de Lie, H un sous-groupe distingué fermé de G, E un G-module. On suppose que le H-module sous-jacent à E soit tel que les complexes de H-cohomologie de E soient forts (cf. 0.5.) (on pourrait supposer seulement qu'ils admettent la résolution standard; c'est l'hypothèse faite en [5] ch.III §5).

On peut considérer le foncteur $E \longrightarrow E^G$ comme composé des foncteurs $E \longrightarrow E^H$ et $(E^H) \longrightarrow (E^H)^{G/H}$ (remarquer que G/H agit sur E^H). Les méthodes générales de [2] pour l'étude des dérivés des foncteurs composés conduisent alors à la construction d'une suite spectrale comme suit. Soit $0 \longrightarrow E \longrightarrow A$ une résolution f.r.i. du G-module E, qui soit aussi une résolution f.r.i. du H-module E (par exemple la résolution standard du G-module E). On considère alors le complexe de G/ H-modules A^H. Il est fort puisque c'est un complexe de H-cohomologie de E. On démontre facilement (cf. [5] ch.I lemme 8.1. qui se généralise sans peine au cas topologique) que les G/ H-modules $C^q(A)^H$ sont encore relativement injectifs. Il en résulte aussitôt que la deuxième suite spectrale d'hypercohomologie de A^H est <u>dégénérée</u>, i.e. $''E_2^{pq} = 0$ pour tout $p > 0$. Or $''E_2^{On} = H^n(A^G) = H^n(G,E)$, donc la cohomologie du complexe total n'est autre que $H^*(G,E)$. Alors la première suite spectrale d'hypercohomologie fournit la suite cherchée : elle converge vers $H^*(G,E)$ et vérifie : $'E_2^{pq} = H^p(G/H, H^q(H,E))$.

Il en résulte que l'on peut appliquer les résultats des n^{o}s précédents à la suite spectrale de Hochschild-Serre, considérée comme première suite spectrale d'hypercohomologie du complexe A^H; la proposition 1.1. montre que l'on obtient une suite spectrale isomorphe (pour $r \geq 2$) en remplaçant A par une autre résolution f.r.i. quelconque de E.

8. Cas du produit semidirect.

Supposons maintenant que G soit un produit semidirect $G = K \ltimes H$, toujours avec H distingué. Faisons agir K sur H par restriction des automorphismes intérieurs. Soit $0 \longrightarrow C^\infty(H,E) \longrightarrow \ldots \longrightarrow C^\infty(H^{q+1},E) \longrightarrow \ldots$ la résolution standard du H-module sous-jacent à E. On voit aussitôt que la différentielle de ce complexe (ainsi que la scission naturelle) commutent à l'action de K, et que $C^\infty(H^{q+1},E)^H$ est un sous-K-module de $C^\infty(H^{q+1},E)$. On a donc le complexe fort de K-modules :

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow C^\infty(H,E)^H \longrightarrow \ldots \longrightarrow C^\infty(H^{q+1},E)^H \longrightarrow \ldots$$

dont la cohomologie est $H^*(H,E)$.

PROPOSITION 1.4. Soit $G = K \ltimes H$ un produit semidirect avec H distingué. Soit E un G-module, tel que les complexes de H-cohomologie de E soient forts. Alors la suite spectrale de Hochschild-Serre de E relativement à H est, pour $r \geq 2$, isomorphe à la première suite spectrale d'hypercohomologie du complexe (1) de K-modules.

Démonstration.

On va construire une K-injection du complexe (1) dans le complexe :

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow C^{\infty}(G,E)^H \longrightarrow \dots \longrightarrow C^{\infty}(G^{q+1},E)^H \longrightarrow \dots$$

(l'action de K dans (2) s'obtient à partir de son action sur G par <u>translation à gauche</u>).

Pour cela, remarquons que si l'on écrit $g = kh$ un élément de G, avec $k \in K$ et $h \in H$, l'application $g \longrightarrow khk^{-1}$ est un K-morphisme de G dans H qui commute aussi à l'action de H par translation à gauche car pour $h_1 \in H$:

$h_1g = k.k^{-1}h_1kh$, donc $h_1g \longrightarrow h_1gk^{-1} = h_1.khk^{-1}$.

Alors l'application $u : C^{\infty}(H^{q+1},E) \longrightarrow C^{\infty}(G^{q+1},E)$ définie par :

$$u(f)(g_0,\dots g_n) = f(k_0h_0k_0^{-1},\dots,k_nh_nk_n^{-1})$$

commute aux actions de K et H, et aussi aux différentielles. On a obtenu un morphisme de la résolution standard du H-module E vers la résolution standard du G-module E, commençant par 1_E, et admettant d'ailleurs pour rétraction l'opération de restriction à H; il en résulte un morphisme de complexes de (1) vers (2), commutant à l'action de K, et dont le morphisme de complexes d'EVT sous-jacent admet un inverse d'homotopie (d'après le lemme de comparaison des résolutions, en considérant les deux résolutions comme des résolutions f.r.i. du H-module sous-jacent à E). Le corollaire 1.1. permet alors de conclure à l'isomorphisme des deux <u>premières</u> suites spectrales d'hypercohomologie, pour $r \geq 2$.

<u>Remarque 1.2</u>. Il n'y a aucune raison a priori pour que les <u>secondes</u> suites spectrales d'hypercohomologie des complexes (1) et (2) soient elles aussi isomorphes. Pour le complexe (2) elle est toujours dégénérée, alors que par exemple si le produit est direct la deuxième suite spectrale d'hypercohomologie de (1) vérifie : $''E_2^{pq} = H^q(H,H^p(K,E))$.

9. <u>Utilisation des algèbres de Lie</u>.

On se propose maintenant, dans le cas où H est difféomorphe à un espace $\mathbb{R}^N$, de remplacer le complexe standard de H par le complexe de van Est (0.4.).

<u>LEMME 1.2</u>. Soit $G = K \ltimes H$, avec H distingué et difféomorphe à $\mathbb{R}^N$. Soit E un G-module. Alors $\Omega^n(H,E)$ est un G-module K-relativement injectif au sens suivant : si $0 \longrightarrow X' \leftrightarrows X$ est une injection de G-modules scindée sous K, si $u: X' \longrightarrow \Omega^n(H,E)$ est un G-morphisme, il existe un G-morphisme $\tilde{u} : X \longrightarrow \Omega^n(H,E)$ prolongeant u.

Démonstration.

Il suffit de montrer que le prolongement défini habituellement (cf. [5] ch.III lemme 7.1.) commute à l'action de G. Rappelons que l'on définit : $\tilde{u}(x)(h) = h.u(sh^{-1}x)(1)$, en désignant par s une scission K-invariante de l'injection $0 \longrightarrow X' \rightleftarrows X$. (Dans cette formule, $u(y)(1) \in \mathrm{Hom}(T_1H,E)$, et $h.u(y)(1) \in \mathrm{Hom}(T_hH,E)$ est défini par : $\xi \longrightarrow h.u(y)(1)(h^{-1}\xi))$.

Tout d'abord, il est clair que l'on a bien comme cela un élément de $\Omega^n(H,E)$. On sait déjà (loc. cit.) que $\tilde{u}$ commute à l'action de H. Reste donc à vérifier qu'il commute aussi à l'action de K.

Or $\tilde{u}(kx)(h) = h.u(s(h^{-1}kx))(1) = h.u(s(k.k^{-1}h^{-1}kx))(1)$, et comme s commute à l'action de K, ainsi que u :

$= hk.u(s(k^{-1}h^{-1}kx))(1)$ (car 1 est point fixe pour l'action de K sur H)

$= k.k^{-1}hk.u(s(k^{-1}h^{-1}k))(1) = k.\tilde{u}(x)(k^{-1}hk) = (k\tilde{u}(x))(h)$.

Donc $\tilde{u}(kx) = k.\tilde{u}(x)$, et le lemme est démontré.

LEMME 1.3. Soit $G = K \ltimes H$, avec H distingué et difféomorphe à $\mathbb{R}^N$. Soit E un G-module. On considère les deux résolutions f.r.i. suivantes du H-module sous-jacent à E :

$$(1) \quad 0 \longrightarrow E \longrightarrow C^\infty(H,E) \longrightarrow \dots \longrightarrow C^\infty(H^{q+1},E) \longrightarrow \dots$$

$$(2) \quad 0 \longrightarrow E \longrightarrow \Omega^0(H,E) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Omega^q(H,E) \longrightarrow \dots$$

Alors il y a une flèche de complexes de G-modules de (1) vers (2) commençant par 1_E.

Démonstration.

On vérifie facilement que les différentielles de ces deux complexes commutent à l'action de K, et donc qu'il s'agit en fait de complexes de G-modules. (Un ELCS E muni d'actions de K et H devient un G-module si l'application : $H \longrightarrow GL(E)$ donnant la représentation commute aux actions de K sur H et GL(E), ce qui se vérifie trivialement ici). D'autre part l'homotopie contractante du premier commute aussi à l'action de K. On peut donc dire que le premier complexe est K-fort.

Le deuxième complexe est formé de G-modules K-relativement injectifs, d'après le lemme 1.2. On démontre alors comme dans [5] ch.I prop.2.2. (lemme de comparaison des résolutions) l'existence du morphisme cherché.

Remarque 1.3. L'existence d'un morphisme de complexes de G-modules de (2) vers (1) ne semble pas claire en général. Elle a lieu chaque fois que le complexe (2) est lui aussi K-fort (car on peut vérifier aisément que (1) est K-relativement injectif), ce que je ne sais démontrer que lorsque H est exponentiel.(L'homotopie contractante usuelle de (2) est l'homotopie de Poincaré, dont il n'est pas clair qu'elle commute à l'action de K en général).

PROPOSITION 1.5.
Soit G un groupe de Lie produit semidirect $G = K \ltimes H$, avec H distingué et difféomorphe à un espace $\mathbb{R}^N$. Soit E un G-module tel que les complexes de H-cohomologie de E soient forts. Faisons agir K sur l'algèbre de Lie $\underline{h}$ de H par l'action adjointe. Alors la suite spectrale de Hochschild-Serre de E relativement à H est isomorphe, pour $r \geq 2$, à la première suite spectrale d'hypercohomologie du complexe de K-modules $C^*(\underline{h},E)$.

Démonstration.
Le morphisme de complexes du lemme 1.3. passe en un morphisme de complexes de K-modules de $0 \longrightarrow C^\infty(H,E)^H \longrightarrow \ldots \longrightarrow C^\infty(H^{q+1},E)^H \longrightarrow \ldots$ vers $C^*(h,E)$ (complexes H-invariants correspondants). Toujours d'après le lemme de comparaison des résolutions, le morphisme de complexes d'EVT sous-jacent admet un inverse d'homotopie. Alors le corollaire 1.1. permet de conclure.

Démonstration du théorème 1.2.

Il s'agit des remarques faites au n°7, et des propositions 1.4. et 1.5.

Chapitre II : Le terme E_2 de la suite spectrale de Hochschild-Serre.

1. Introduction

Dans toute la suite de ce travail on s'intéresse à la situation suivante. Soit G un groupe de Lie produit semidirect de la forme $B \rtimes A$, avec B distingué et isomorphe à un groupe $\mathbb{R}^N$. Soient x_1, $x_2 \in \hat{B}$, que l'on identifiera à $\underline{b}^*$, dual de l'algèbre de Lie de B; on notera $(x,b) \longrightarrow \langle x,b\rangle$ le couplage naturel de dualité de $\underline{b}^* \times \underline{b}$ vers $\mathbb{R}$. Soit X_j l'orbite de x_j dans $\underline{b}^*$, S_j le stabilisateur de x_j dans A. On munit X_j de la structure de variété quotient A/S_j ; elle est plongée dans $\underline{b}^*$. Soit (E_j, σ_j) un S_j-module complet; soit $F_j = \mathrm{Ind}_{B \rtimes S_j \uparrow G}\, E_j$ (au sens C^∞), où $B \rtimes S_j$ agit sur E_j par :

$$bs(v) = e^{i\langle x_j, b\rangle} \sigma_j(s)v$$

(le fait que S_j stabilise x_j assure que l'on a bien ainsi une représentation). On peut réaliser F_j dans l'espace des fonctions C^∞ sur A (et non sur G) vérifiant $f(as) = s^{-1}f(a)$ pour tous $s \in S_j$, $a \in A$, en posant:

$$ba(f)(a') = e^{i\langle a' x_j, b\rangle} f(a^{-1}a') \qquad b \in B,\ a,\ a' \in A$$

(on identifie B à son algèbre de Lie).

On se propose alors d'étudier les espaces $\mathrm{Ext}^n_G(F_1,F_2)$. Cette étude a déja été abordée par Guichardet dans [4], pour le cas $n = 1$, et en supposant les E_j de dimension finie.

Notons $T_{x_j} \subset \underline{b}^*$ le sous-espace tangent en x_j à X_j, N_{x_j} son orthogonal dans $\underline{b}$; T_{x_j} et N_{x_j} sont des S_j-modules, et on a des isomorphismes canoniques $T^*_{x_j} \simeq \underline{b}/N_{x_j}$, $N^*_{x_j} \simeq \underline{b}^*/T_{x_j}$. Le but du chapitre II est de démontrer le théorème suivant, énoncé de manière plus précise à la proposition 2.3. :

THÉORÈME 2.1.

(i) Si $X_1 \neq X_2$, on a $\mathrm{Ext}^n_G(F_1,F_2) = 0$ pour tout $n \geq 0$ (cf. [5] prop. 5.4. pour une autre démonstration).

(ii) Si $X_1 = X_2$, auquel cas on peut choisir $x_1 = x_2 = x_0$, $S_1 = S_2 = S$, il y a une suite spectrale $(E_r)_{r\geq 0}$ convergeant vers $\mathrm{Ext}^*_G(F_1,F_2)$, avec

$E_2^{pq} = \mathrm{Ext}_S^p(\Lambda^q N_{x_0}, \mathrm{Hom}(E_1,E_2))$. (Il s'agit de la suite spectrale de Hochschild-Serre par rapport à B du $B \rtimes S$-module $\mathrm{Hom}(F_1,E_2)$).

(iii) Si T_{x_0} admet un supplémentaire S-invariant dans $\underline{b}^*$, $d_r = 0$ pour tout $r \geq 2$.

(Démonstration à la fin du n° 5).

Ce théorème est une généralisation de la description de la suite exacte à 5 termes de Hochschild-Serre, faite en [4] §6.

La démonstration se fait en plusieurs étapes, comme dans [4], en partant du cas où X est un ouvert dans $\underline{b}^*$ (après avoir réénoncé convenablement le problème en termes de fibrés principaux, ce qui permet de considérer la situation localement). Une utilisation différente du lemme de Shapiro permet d'alléger substantiellement les calculs par rapport à [4]. Cependant le passage à la n-cohomologie conduit à des démonstrations de nature combinatoire quelquefois assez compliquées. D'autre part le fait de ne plus supposer les représentations induisantes de dimension finie m'a conduit à éviter l'utilisation des connexions à ce niveau (bien que je les réintroduise au chapitre III, au moment de l'étude de l'application d_2); en outre, il a fallu vérifier que les conditions pour la définition de la suite spectrale de Hochschild-Serre avaient lieu (cf. ch.I n°5); on a pour cela vérifié que le complexe $C^*(\underline{b},\mathrm{Hom}(F_1,E_2))$ est <u>fort</u>.

Enfin il m'a paru plus clair de travailler explicitement en <u>homologie</u> plutôt qu'en cohomologie, quitte à faire une transposition à la fin; c'était implicite dans [4].

2. Position du problème.

On s'intéresse donc aux espaces $\mathrm{Ext}_G^n(F_1,F_2)$. Puisque $F_2 = \mathrm{Ind}_{B \rtimes S_2 \uparrow G}\, E_2$, le lemme de Shapiro ([5] prop. 4.4.) ramène ce calcul à celui des $\mathrm{Ext}^n_{B \rtimes S_2}(F_1,E_2)$. L'idée est maintenant d'utiliser la suite spectrale de Hochschild-Serre par rapport à B du $B \rtimes S_2$-module $\mathrm{Hom}(F_1,E_2)$.

D'après le théorème 1.2. (iii), c'est aussi la première suite spectrale d'hypercohomologie du complexe de S_2-modules $C^*(\underline{b},\mathrm{Hom}(F_1,E_2))$, à condition que ce dernier soit fort. On va donc démontrer que $C^*(\underline{b},\mathrm{Hom}(F_1,E_2))$

est fort, et calculer sa cohomologie; on aura alors $E_2^{pq} = H^p(S,\mathrm{Ext}^q_{\underline{b}}(F_1,E_2))$. Remarquons que $\underline{b}$ agit scalairement sur E_2; donc si on pose $F = \mathbb{C}_{x_2} \otimes E_1$, le $\underline{b}$-module $\mathrm{Hom}(F_1,E_2)$ s'identifie à $\mathrm{Hom}(F,E_2)$, avec cette fois action triviale de $\underline{b}$ sur E_2. Comme je le montrerai au n°5, le résultat se déduit aussitôt, par transposition, de l'étude de l'<u>homologie</u> du $\underline{b}$-module F. On est donc conduit au problème suivant:

(P) Soit $\underline{b}$ une algèbre de Lie commutative de dimension finie, et S un groupe de Lie. Soit X une variété plongée dans $\underline{b}^*$, et P un S-fibré principal au-dessus de X; soit x_0 un point de $\underline{b}^*$, et si $x_0 \in X$, soit p_0 un point de $\pi^{-1}(x_0)$, où $\pi : P \longrightarrow X$ est la projection canonique. Soit (E,σ) un S-module complet. Par abus de langage, notons $\mathrm{Ind}_{S\uparrow P}\, E$ l'espace :

$$F = \{f \in C^\infty(P,E) \mid f(ps) = s^{-1}f(p) \text{ pour tous } p \in P,\ s \in S\}$$

Faisons agir $\underline{b}$ sur F par : $bf(p) = i\langle x - x_0, b\rangle f(p)$, où $x = \pi(p)$.
Il s'agit de prouver que le complexe d'homologie $C_*(\underline{b},F)$ est fort, et de calculer son homologie. (Rappelons que $C_q(\underline{b},F) = \Lambda^q\underline{b} \otimes F$, et que $\partial(x_1\wedge\ldots\wedge x_q\otimes f) = \sum_{i=1}^{q} (-1)^i x_1\wedge\ldots x_{i-1}\wedge x_{i+1}\ldots\wedge x_q\otimes x_i f$, car $\underline{b}$ est abélienne).

3. <u>Cas où X est un ouvert dans $\underline{b}^*$</u>.

Le but de ce n° est de démontrer la proposition suivante :

<u>PROPOSITION 2.1.</u> Considérons le problème (P) ci-dessus, et supposons X ouverte dans $\underline{b}^*$.

(i) Si $x_0 \in X$, le complexe augmenté :

$$0 \longleftarrow E \xleftarrow{\varepsilon} F \longleftarrow \underline{b}\otimes F \longleftarrow \ldots \longleftarrow \Lambda^q\underline{b}\otimes F \longleftarrow \ldots \qquad \text{où } \varepsilon(f) = f(p_0)$$

est acyclique et admet une homotopie contractante continue.

(ii) Si $x_0 \notin X$, $C_*(\underline{b},F)$ est acyclique et admet une homotopie contractante continue.

3.1. Avant de commencer la démonstration de la proposition 2.1. on fixe quelques notations. Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de $\underline{b}$, $(e_1^*,\ldots,e_n^*)$ la base duale de $\underline{b}^*$ correspondante. On note $(x_1,\ldots,x_n)$ les coordonnées de x dans $(e_1^*,\ldots,e_n^*)$. Appelons D_i l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_i}$ de $C^\infty(\underline{b}^*,E)$ dans lui-même. Soit N l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$ muni de son ordre naturel.

LEMME 2.1. Soit U un ouvert de $\underline{b}^*$ de la forme $\prod_{j=1}^{n}]a_j,b_j[$, $a_j < b_j$. Soit $J \subset N$. Soit $A_J = \{f \in C^\infty(U,E) \mid f(x) = 0$ dès que $x_j = x_{0j}$ pour tout $j \in J\}$. Il existe alors des applications linéaires continues $f \longrightarrow g_j$, $j \in J$, de A_J vers $C^\infty(U,E)$, telles que :

$$f(x) = \sum_{j \in J} (x_j - x_{0j}) g_j(x) \qquad \text{pour tout } x \in U.$$

Démonstration.

Quitte à faire une translation, on peut supposer que $x_0 = 0$. S'il existe un $j \in J$ tel que $0 \notin]a_j,b_j[$, la condition définissant A_J est vide, i.e. $A_J = C^\infty(U,E)$. Soit alors j_0 le plus petit $j \in J$ tel que $0 \notin]a_j,b_j[$. Les fonctions g_j définies par :

$$g_j(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x_{j_0}} f(x) & \text{si } j = j_0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

répondent manifestement à la question.

Supposons donc maintenant que pour tout $j \in J$, $0 \in]a_j,b_j[$. Soit j_1 le plus petit élément de J. On pose :

$$g_{j_1}(x) = \int_0^1 D_{j_1} f(x_1,\dots,x_{j_1-1},tx_{j_1},x_{j_1+1},\dots,x_n)dt$$

On a $f(x) - x_{j_1} g_{j_1}(x) = f(x_1,\dots,x_{j_1-1},0,x_{j_1+1},\dots,x_n)$. En itérant de proche en proche on trouve des fonctions g_j, $j \in J$, telles que :

$$f - \sum_{j \in J} x_j g_j = f \circ \pi_J$$

où π_J est la projection de $\underline{b}^*$ sur $\bigoplus_{j \notin J} \mathbb{R} e_j^*$, parallèlement à $\bigoplus_{j \in J} \mathbb{R} e_j^*$; et les g_j dépendent linéairement et continûment de f. Comme par hypothèse $f \circ \pi_J = 0$, le lemme est démontré.

Remarque 2.1. Les fonctions g_j exhibées ci-dessus seront dites "les" fonctions associées aux conditions d'annulation correspondantes. Bien entendu beaucoup d'autres choix sont possibles.

3.2. Démonstration de la proposition 2.1. dans le cas d'un pavé ouvert.

Supposons X de la forme $\prod_{j=1}^{n}]a_j,b_j[$, et démontrons la proposition 2.1. dans ce cas.

a. On remarque d'abord qu'il suffit de construire des applications linéaires continues $h : Z_q \longrightarrow C_{q+1}$ telles que $\partial h = 1_{Z_q}$ ($q \geq -1$ pour le cas (i), $q \geq 0$ pour le cas (ii)).
En effet on posera alors pour $f \in C_q$ quelconque : $hf = h(f - h\partial f)$, ce qui a bien un sens puisque pour $f \in C_q, \partial f \in Z_{q-1}$, et que $\partial(f-h\partial f) = \partial f - \partial h\partial f = \partial f - \partial f = 0$. On a bien alors : $\partial hf = f - h\partial f$, d'où $h\partial f + \partial hf = f$.

b. Comme X est contractile, P est trivialisable au-dessus de X. Soit s une section de P, avec $s(x_0) = p_0$. On peut alors identifier P à $X \times S$, et F à $C^\infty(X,E)$ (par restriction de $f \in F$ à $X \times \{1\}$), à condition de faire agir $\underset{\sim}{b}$ sur $C^\infty(X,E)$ par : $bf(x) = i<x-x_0,b>f(x)$.
Si $x_0 \in X$, on définit h au cran -1 par la formule : $h(v)(x) = v$ pour $v \in E$, $x \in X$. Comme ε s'écrit maintenant $\varepsilon(f) = f(x_0)$, on a bien $\varepsilon h(v) = v$.
Au cran 0, la condition $f \in Z_0$ s'exprime par $f(x_0) = 0$ (elle est vide si $x_0 \notin X$). Soient $g_1,\dots,g_n$ les fonctions associées à f par le lemme 2.1. (cf. Remarque 2.1.). Alors $h(f) = i\sum_{j=1}^{n} e_j \otimes g_j$ convient (noter que e_j agit par multiplication par $i(x_j-x_{0j})$ et que $\partial(\sum_{j=1}^{n} e_j \otimes g_j) = -\sum_{j=1}^{n} e_j g_j)$.

c. Faisons maintenant la construction de h au cran q, $q \geq 1$. Pour cela on doit encore introduire quelques notations. Soit $\mathcal{P}_q(N)$ l'ensemble des parties à q éléments de N; on les munit toujours de leur ordre naturel. Pour $I \in \mathcal{P}_q(N)$, soit $e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_q}$. On ordonne $\mathcal{P}_q(N)$ par ordre lexicographique.
Pour $I \subset N$ on note $d(I)$ le dernier élément de I. Soit $\varphi : \mathcal{P}_{q+1}(N) \longrightarrow \mathcal{P}_q(N)$ l'application $I \longrightarrow I \setminus \{d(I)\}$; φ définit une partition de $\mathcal{P}_{q+1}(N)$.
Pour tout $j \in I$ on note $I_j = I \setminus \{j\}$. Pour tout $j \notin I$, on note $I^j = I \cup \{j\}$.
Enfin pour tout $I \subset N$, on note r_I la fonction qui à tout $j \in N$ associe le nombre d'éléments de I précédant j (au sens large), de sorte que ∂ est donnée par :

$$\partial(e_I \otimes f_I) = \sum_{j \in I} (-1)^{r_I(j)} e_{I_j} \otimes i(x_j - x_{0j}) f_I$$

Soit $f \in Z_q(\underset{\sim}{b},F)$, $f = \sum_{I \in \mathcal{P}_q(N)} e_I \otimes f_I$. La condition $\partial f = 0$ s'écrit :

$$(*) \qquad \forall K \in \mathcal{P}_{q-1}(N) \qquad \sum_{j \notin K} (-1)^{r_K(j)+1} i(x_j - x_{0j}) f_{K^j} = 0 \quad .$$

et le problème est de construire $g = \sum_{J \in \mathcal{P}_{q+1}(N)} e_J \otimes g_J$ telle que :

$$(**) \qquad \forall\, I \in \mathcal{P}_q(N) \qquad f_I = \sum_{j \notin I} (-1)^{r_I(j)+1} i(x_j - x_{0j}) g_{I^j}$$

On construit les g_J par récurrence sur $\varphi(J)$.

Soit $I_0 = \{1,\ldots q\}$. Ecrivons la condition $(*)$ pour $K = \varphi(I_0)$:

$$(-1)^q \sum_{j=q}^{n} i(x_j - x_{0j}) f_{K^j} = 0.$$

En particulier $(x_q - x_{0q}) f_{I_0} = 0$ dès lors que $x_j = x_{0j}$ pour tout $j>q$; et comme l'ensemble des x tels que $x_q = x_{0q}$ est d'intérieur vide dans l'ensemble des $x \in X$ tels que $x_j = x_{0j}$ pour tout $j>q$, on a par continuité :

$$f_{I_0}(x) = 0 \text{ dès lors que } x_j = x_{0j} \text{ pour tout } j>q.$$

On peut donc écrire $f_{I_0} = \sum_{j>q} (x_j - x_{0j}) \gamma_j$, où les γ_j sont les fonctions associées à f_{I_0} par le lemme 2.1.; et on posera $g_{I_0^j} = (-1)^q i\gamma_j$ pour $j>q$: c'est le premier pas de la récurrence.

Soit maintenant $I \in \mathcal{P}_q(N)$ quelconque, et supposons les g_J déjà construits pour $\varphi(J) < I$, vérifiant $(**)$ pour $I' < I$ (cela ne fait intervenir que des indices J' pour lesquels $\varphi(J') < I$). On va définir les g_J pour $\varphi(J) = I$.

On veut que $f_I = \sum_{j \notin I} (-1)^{r_I(j)+1} i(x_j - x_{0j}) g_{I^j}$. Or, pour $j<d(I)$, les g_{I^j} sont déjà définis. Pour pouvoir prolonger la construction en vertu du lemme 2.1. il suffira de vérifier que la fonction :

$$(1) \qquad f_I - \sum_{j<d(I)} (-1)^{r_I(j)+1} i(x_j - x_{0j}) g_J$$

s'annule dès que $x_k = x_{0k}$ pour tout $k>d(I)$. Or, écrivons dans les mêmes conditions l'équation $(*)$ pour $K = \varphi(I)$:

$$(2) \qquad \sum_{j<d(I),\, j\notin I} (-1)^{r_K(j)+1} (x_j - x_{0j}) f_{K^j} \;+\; (-1)^q (x_{d(I)} - x_{0d(I)}) f_I = 0.$$

Dans l'expression sous le signe Σ on a toujours $K^j < I$; donc par hypothèse de récurrence :

$$f_{K^j} = \sum_{k \notin K^j} (-1)^{r_{K^j}(k)+1} i(x_k - x_{0k}) g_{K^{jk}} ,$$

et comme on suppose que $x_k = x_{0k}$ pour $k>d(I)$, on peut se restreindre aux termes tels que $k \leq d(I)$. En reportant cette expression, et après regroupement des termes, (2) devient :

$$\sum_{\substack{j<d(I)\\ j\notin I}} (-1)^{r_K(j)+1}(-1)^{q+1} i(x_j - x_{Oj})(x_{d(I)} - x_{Od(I)}) g_I j \; + \; (-1)^q (x_{d(I)} - x_{Od(I)}) f_I$$

$$+ \sum_{\substack{j,k<d(I)\\ j,k\notin I;\, j\neq k}} (-1)^{r_K(j)+1+r_K j(k)+1} i(x_j - x_{Oj})(x_k - x_{Ok}) g_K jk = 0.$$

Or, la dernière somme est nulle, car les termes correspondant aux couples (j,k) et (k,j) se détruisent. Il reste donc :

$$(-1)^q i(x_{d(I)} - x_{Od(I)})(f_I - \sum_{j<d(I),\, j\notin I} (-1)^{r_K(j)+1}(x_j - x_{Oj}) g_I j) = 0.$$

Or pour $j<d(I)$, $r_K(j) = r_I(j)$; par ailleurs on peut simplifier par $(x_{d(I)} - x_{Od(I)})$ qui ne s'annule que sur un ensemble d'intérieur vide; donc on retrouve bien la condition (1). Cqfd.

3.3. Démonstration de la proposition 2.1. dans le cas général.

Soit (U_α) un recouvrement ouvert de X par des ouverts de la forme $\prod_{j=1}^{n}]a_j, b_j[$. Soit (θ_α) une partition de l'unité C^∞ subordonnée. Soit $\tilde{U}_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$; les $\tilde{U}_\alpha$ forment un recouvrement ouvert de P, et $(\tilde{\theta}_\alpha) = (\theta_\alpha \circ \pi)$ est une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. Soit $F_\alpha = \mathrm{Ind}_{S\uparrow \tilde{U}_\alpha} E$.

Pour $f \in F$, on pose $f_\alpha = f|\tilde{U}_\alpha$. On réalise ainsi une injection de F dans $\prod_\alpha F_\alpha$ qui admet une rétraction, à savoir $r : (f_\alpha) \longrightarrow \sum_\alpha \tilde{\theta}_\alpha f_\alpha$. Ainsi F est facteur direct dans $\prod_\alpha F_\alpha$, comme EVT et comme $\underline{b}$-module.

Supposons que l'on soit dans le cas (i); on impose alors qu'un seul des U_α contienne x_0, et on le note U_0; on a $\theta_0(x_0) = 1$, ce qui montre que r commute aux augmentations $\prod_\alpha F_\alpha \longrightarrow E$, $F \longrightarrow E$. Donc le complexe augmenté $0 \longleftarrow E \longleftarrow C_*(\underline{b},F)$ est facteur direct dans le complexe augmenté $0 \longleftarrow E \longleftarrow \prod_\alpha C_*(\underline{b},F_\alpha)$, qui est fort et acyclique comme produit direct de complexes forts et acycliques, d'après 3.2. Or un facteur direct dans un complexe fort et acyclique est lui-même fort et acyclique, d'où la proposition (on raisonnerait de manière analogue dans le cas (ii)).

4. Homologie du b-module F : cas général.

On passe maintenant au cas où X est une variété plongée dans $\underline{b}^*$ quelconque.

4.1. Considérons TX comme sous-fibré vectoriel du fibré trivial $X \times \underline{b}^*$. Soit $\underline{q}$ un fibré vectoriel supplémentaire de TX dans $X \times \underline{b}^*$, de sorte que pour tout $x \in X$ on a : $\underline{b}^* = T_x \oplus \underline{q}_x$. Soit NX le fibré vectoriel conormal à X (i.e. N_x est l'orthogonal de T_x dans $\underline{b}$).

LEMME 2.2. Soit x un point de X.
(i) Si $x \neq x_0$, soit U un voisinage ouvert de x dans X tel que $x_0 \notin U$, et tel que la projection de U sur T_x parallèlement à $\underline{q}_x$ soit un difféomorphisme de U sur un ouvert U' de T_x. Soit $F_U = \mathrm{Ind}_{S\uparrow\tilde{U}} E$, où $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$. Alors le complexe $C_*(\underline{b},F_U)$ admet une homotopie contractante; en particulier $H_q(\underline{b},F_U) = 0$ pour tout $q \geq 0$.
(ii) Si $x = x_0$, soit U un voisinage ouvert de x_0 dans X tel que la projection de U sur T_{x_0} parallèlement à $\underline{q}_{x_0}$ soit un difféomorphisme sur son image U'. Soit $F_U = \mathrm{Ind}_{S\uparrow\tilde{U}} E$, avec $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$. Alors le complexe $C_*(\underline{b},F_U)$ est fort, et $H_*(\underline{b},F_U) \simeq C_q(N_{x_0},E)$.

Démonstration.
Je la ferai dans le cas (ii); on raisonnerait de manière analogue pour la première assertion. Il s'agit essentiellement d'un raisonnement de suite spectrale (d'homologie), mais je dois l'expliciter pour vérifier que les complexes considérés sont forts.

a. Soit $\underline{b}_0 = \underline{q}_{x_0}^{\perp} \subset \underline{b}$ l'orthogonal de $\underline{q}_{x_0}$; $\underline{b}_0$ est une sous-algèbre de $\underline{b}$, et T_{x_0} s'identifie au dual de $\underline{b}_0$. Soit u la projection de $\underline{b}^*$ sur T_{x_0} parallèlement à $\underline{q}_{x_0}$, Soit P' le fibré principal au-dessus de U' déduit de $P|U$ (il suffit de composer la projection π avec u). On peut maintenant écrire tout $x \in U$ de manière unique sous la forme $(x',\varphi(x'))$, avec $x' = u(x) \in U'$, et $\varphi(x') \in \underline{q}_{x_0}$. L'action de $\underline{b}$ s'écrit :

$$bf(p) = i\langle x'+\varphi(x')-x_0,b\rangle f(p) \text{ si } x' = u\pi(p).$$

En particulier si $b \in \underline{b}_0$: $bf(p) = i\langle x'-x'_0,b\rangle f(p)$.
Donc $\underline{b}_0$ agit comme dans l'énoncé du problème (P), et par conséquent on peut appliquer la proposition 2.1. au $\underline{b}_0$-module F_U. Soit $q \geq 0$ donné. On écrit $\Lambda^q\underline{b} = \bigoplus_{k+l=q} \Lambda^k\underline{b}_0 \otimes \Lambda^l N_{x_0}$. J'écrirai $f \in C_q(\underline{b},F_U)$ sous la forme $\sum_{k=0}^{q} f^k$ suivant cette décomposition.

b. Soit f un élément de $Z_q(\underline{b},F_U)$ tel que $f^0(p_0) = 0$; je vais construire $g \in C_{q+1}(\underline{b},F_U)$, dépendant linéairement et continûment de f, tel que $f = \partial g$. On procède par "approximations successives". On commence par construire g_0 tel que $(f - \partial g_0)^0 = 0$.

Choisissons des bases (e_i), (e'_j) de $\underline{b}_0$, N_{x_0} respectivement. On peut alors écrire :

$$f^k = \sum_{I\in\mathcal{P}_k(M),J\in\mathcal{P}_l(M')} e_I \otimes e'_J \otimes f^k_{I,J}$$

où $M = \{1,..,m\}$, $m = \dim(\underline{b}_0)$, $M' = \{1,...m'\}$, $m' = \dim(N_{x_0})$ (cf. le début de 3.2.c. pour les autres notations), et $f^k_{I,J} \in F_U$.

L'hypothèse est que $f^0_J(p_0) = 0$ pour tout $J \in \mathcal{P}_q(M')$, en notant pour $J \in \mathcal{P}_l(M')$, $k+l = q$, $f^k_J = \sum_{I\in\mathcal{P}_k(M)} e_I \otimes f^k_{I,J}$. Soit $h(f^0_J) = \sum_{i=1}^m e_i \otimes g_{0,i,J}$, où h est l'homotopie contractante du complexe :

$$(*) \qquad 0 \longleftarrow E \longleftarrow F \longleftarrow \underline{b}_0\otimes F \longleftarrow \dots \longleftarrow \Lambda^k\underline{b}_0\otimes F \longleftarrow \dots$$

exhibée à la proposition 2.1.

Posons $g_0 = \sum_{i,J} e_i \otimes e'_J \otimes g^1_{0,i,J}$. On a $(\partial g_0)^0 = -\sum_J e'_J \otimes (\sum_i e_i g^1_{0,i,J}) = \sum_J e'_J \otimes f^0_J = f^0$, donc $(f - \partial g_0)^0 = 0$.

Posons maintenant $f_0 = f - \partial g_0$. Lorsque l'on écrit que $\partial f_0 = 0$, compte tenu du fait que $f^0_0 = 0$, on voit que pour tout $J \in \mathcal{P}_{q-1}(M')$, $f^1_{0,J} \in Z_1(\underline{b}_0, F_U)$.
On peut donc à nouveau lui appliquer l'homotopie contractante du complexe $(*)$, et poser $h(f^1_{0,J}) = \sum_{I\in\mathcal{P}_2(M)} e_I \otimes g^2_{1,I,J}$; cela définit $g_1 = \sum_{I,J} e_I \otimes e'_J \otimes g^2_{1,I,J} + g_0$.

On améliore ainsi l'approximation en ce sens que $(f - \partial g_1)^0 = (f - \partial g_1)^1 = 0$.
Poursuivant de proche en proche on obtient le résultat annoncé.

c. Réciproquement, il est clair d'après l'expression de ∂ que tous les éléments de $B_q(b,F_U)$ vérifient $f^0(p_0) = 0$. On a donc montré que $B_q(b,F_U)$ est <u>exactement</u> l'ensemble des $f \in Z_q(b,F_U)$ tels que $f^0(p_0) = 0$ (ce qui montre déjà qu'il est fermé), et on a exhibé une scission à l'application $\partial : C_{q+1}(b,F_U) \longrightarrow B_q(b,F_U)$.

L'application $r : f \longrightarrow f^0(p_0)$ passe donc en une <u>injection</u> <u>continue</u> de $H_q(\underline{b},F_U)$ dans $C_q(N_{x_0},E)$. Je vais maintenant exhiber une application $C_q(N_{x_0},E) \longrightarrow Z_q(\underline{b},F_U)$ inverse à droite de r, ce qui montrera d'une part que r est surjective, et d'autre part que l'application naturelle $Z_q(\underline{b},F_U) \longrightarrow H_q(\underline{b},F_U)$ est scindée.
Soit $\alpha \in C_q(N_{x_0},E)$. En appliquant l'homotopie contractante de (*) au cran -1, on obtient $h \in C_q(N_{x_0},F_U)$ tel que $h(p_0) = \alpha$. Il s'agit maintenant de montrer que h peut être considéré comme le terme d'ordre 0 (au sens de a.) d'un certain cycle. Définissons d'abord f' par $f'^0 = h$, $f'^k = 0$ pour $k > 0$. Soit s l'application $B_{q-1}(\underline{b},F_U) \longrightarrow C_q(\underline{b},F_U)$ construite au b.; on remarque que l'on a toujours $s(g)^0 = 0$. Posons alors $f = f' - s\partial f'$. On a $f^0 = f'^0 = h$, et d'autre part $\partial f = \partial f' - \partial f' = 0$; en outre f dépend linéairement et continûment de α. Cqfd.

4.2. Considérons le problème (P) énoncé au n°2, avec $x_0 \in X$. Soit $F' = \{f \in F \mid f(p_0)=0\}$
On a alors une suite exacte forte de $\underline{b}$-modules :

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \rightleftarrows E \longrightarrow 0$$

où la flèche $F \longrightarrow E$ est $f \longrightarrow f(p_0)$, et avec action triviale de $\underline{b}$ sur E.
(On vérifie que la suite exacte est forte en utilisant une section locale de P au voisinage de x_0).
Il s'en suit une longue suite exacte d'homologie :

(1) $$\ldots \longrightarrow H_q(\underline{b},F') \longrightarrow H_q(\underline{b},F) \longrightarrow H_q(\underline{b},E) \longrightarrow H_{q-1}(\underline{b},F') \longrightarrow \ldots$$

<u>PROPOSITION 2.2</u>. Considérons le problème (P) énoncé au n° 2.
(i) Si $x_0 \notin X$, le complexe $C_q(\underline{b},F)$ admet une homotopie contractante continue; en particulier $H_q(\underline{b},F) = 0$ pour tout $q \geq 0$.
(ii) Si $x_0 \in X$, les trois complexes $C_*(\underline{b},F')$, $C_*(\underline{b},E)$, $C_*(\underline{b},F)$ sont forts. Dans la longue suite exacte d'homologie (1), l'application $H_q(\underline{b},F) \longrightarrow H_q(\underline{b},E)$ est <u>injective</u>; son image est $C_q(N_{x_0},E)$. On a donc des suites exactes :

$$0 \longrightarrow C_q(N_{x_0},E) \longrightarrow C_q(\underline{b},E) \longrightarrow H_{q-1}(\underline{b},F') \longrightarrow 0 \quad \text{pour } q \geq 1$$

(en identifiant $H_q(\underline{b},F)$ à $C_q(N_{x_0},E)$), et :

$$H_0(\underline{b},F) = H_0(\underline{b},E) = E \qquad \text{pour le cran } q = 0.$$

Démonstration.

On se limite à l'assertion (ii); l'assertion (i) se démontre comme en a. ci-dessous.

a. Soit (U_α) un recouvrement ouvert de X par des ouverts vérifiant les hypothèses du lemme 2.2.; en particulier x_0 appartient à un seul de ces ouverts, que l'on note U_o. Soit (θ_α) une partition C^∞ de l'unité subordonnée au recouvrement (U_α). Soient $\widetilde{U}_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$, $\widetilde{\theta}_\alpha = \theta_\alpha o\pi$, $F_\alpha = \mathrm{Ind}_{S\uparrow\widetilde{U}_\alpha} E$. Comme en 3.3., F est facteur direct dans $\prod_\alpha F_\alpha$, comme EVT et comme $\underline{b}$-module. Comme un facteur direct dans un complexe fort est fort, il en résulte que $C_*(\underline{b},F)$ est fort (compte tenu du lemme 2.2.). Pour le complexe $C_*(\underline{b},E)$ cela est évident car $\underline{b}$ agit trivialement sur E. Pour $C_*(\underline{b},F')$ on le verra ci-après.

b. Reprenons les notations du lemme 2.2. et considérons la suite exacte forte de $\underline{b}$-modules : $\quad 0 \longrightarrow F'_{U_o} \longrightarrow F_{U_o} \longrightarrow E \longrightarrow 0.$

Je me propose de montrer que l'application $F_{U_o} \longrightarrow E$ définie par $f \longrightarrow f(p_0)$ est une injection en homologie, et que l'image de $H_q(b,F_{U_o})$ est $C_q(N_{x_0},E)$.

On a déjà vu au cours de la démonstration du lemme 2.2. que $f \in Z_q(\underline{b},F_{U_o})$ est un bord si et seulement si $f^0(p_0) = 0$. Montrons maintenant qu'en fait pour $f \in Z_q(\underline{b},F_{U_o})$, on a <u>toujours</u> $f^k(p_0) = 0$ pour $k>0$, ce qui fait que la condition $f^0(p_0) = 0$ peut s'écrire simplement $f(p_0) = 0$, et donc que l'on a bien l'injection annoncée, d'image $C_q(N_{x_0},E)$ (car on a vu au lemme 2.2. que l'application $f \longrightarrow f^0(p_0)$ était surjective de $Z_q(b,F_{U_o})$ vers $C_q(N_{x_0},E)$).

Soient donc $f \in Z_q(\underline{b},F_{U_o})$, et $k>0$. Ecrivons la condition de cycle, en reprenant les notations de 3.2.c. pour les multiindices :

$$\sum_{i\notin I} (-1)^{r_I(i)+1}(x'_i-x'_{0i})f^k_{I^i,J}(x') + \sum_{j\notin J} (-1)^{r_J(j)+k}(\varphi_j(x')-\varphi_j(x'_0))f^{k-1}_{I,J^j}(x')=0$$

pour tous $I \in \mathcal{P}_{k-1}(M)$, $J \in \mathcal{P}_l(M')$, $x' \in U_o$ (on a simplement écrit que $(\partial f)^{k-1} = 0$), où $\varphi(x') = (\varphi_1(x'),\dots,\varphi_{m'}(x'))$.

Lorsque l'on divise par $(x'_i-x'_{0i})$, et que l'on fait tendre x' vers x'_0 le long de la droite $x_0' + \mathbb{R}e_i$, on trouve :

$$(-1)^{r_I(i)} f^k_{Ii,J}(x_0') = \sum_{j\notin J} (-1)^{r_J(j)+k} \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i'}(x_0') f^{k-1}_{I,Jj}(x_0') .$$

Or il est clair que $\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i'}(x_0') = 0$ pour tous (i,j), car si on dérive la relation $(u(x),\varphi(u(x))) = x$ pour $x \in U$ (où $u : \underline{b}^* \longrightarrow T_{x_0}$ est la projection parallèlement à $\underline{q}_{x_0}$, cf. lemme 2.2.), on trouve que $(\zeta, d\varphi(\zeta)) = (\zeta,0)$ pour tout $\zeta \in T_{x_0}$. Donc on a bien $f^k_{Ii,J}(x_0') = 0$ pour $k>0$, comme annoncé.

c. Il résulte en particulier de ce qui précède que la classe de $f \in Z_q(\underline{b},F_{U_o})$ ne dépend que de $f(p_0)$. Comme $H_*(\underline{b},F_\alpha) = 0$ pour $\alpha \neq o$ d'après le lemme 2.2.(i) l'injection $F \longrightarrow \prod_\alpha F_\alpha$ donne encore une injection en homologie par projection sur le facteur F_o. Mais c'est aussi une surjection, car si f est un élement quelconque de $Z_q(\underline{b},F_{U_o})$, $f' = \theta_o f$ représente la même classe que f puisque $\theta_o(x_0) = 1$, et se prolonge à X tout entier en un élément de $Z_q(\underline{b},F)$ puisque θ_o a son support dans U_o. Comme d'autre part il est clair que l'application $F \longrightarrow E$ se factorise par $f \longrightarrow f_o$, il résulte de b. et de c. qu'elle induit une injection en homologie, d'image $C_q(N_{x_0},E)$. Dorénavant, à l'aide de cette application, on pourra donc identifier $H_q(\underline{b},F)$ à $C_q(N_{x_0},E)$.

d. Montrons enfin que le complexe $C_*(\underline{b},F')$ est lui aussi fort. En raisonnant comme en b. ci-dessus, on voit que si $f \in Z_q(\underline{b},F')$ est dans F le bord d'un certain élément $g \in C_{q+1}(\underline{b},F)$ (un tel g existe toujours puisque $f(x_0) = 0$), alors on a <u>nécessairement</u>

$$(1) \qquad (-1)^{r_I(i)+1} g^{k+1}_{Ii,J}(x_0') = \frac{\partial f^k_{I,J}}{\partial x_i'} (x_0')$$

pour tout $I \in \mathcal{P}_k(m)$, $J \in \mathcal{P}_l(M')$, $k+l=q$, et $i \notin I$. En d'autres termes, la valeur de g au point x_0 est entièrement déterminée par f, du moins à un élément de $C_{q+1}(N_{x_0},E)$ près. Choisissons alors $g = s(f)$, où s est la scission de l'application bord : $C_{q+1}(\underline{b},F) \longrightarrow B_q(\underline{b},F)$ qui se déduit naturellement du lemme 2.2. et des remarques faites en a. . On a déjà observé au cours de la démonstration du lemme 2.2.c. que pour un tel choix de s, on avait toujours $g^0(p_0) = 0$. Il est maintenant clair d'après (1) que f est un bord dans F' si et seulement si $\frac{\partial f^k_{I,J}}{\partial x'_i}(x'_0) = 0$ pour tout $i \notin I$, et si cette condition est vérifiée, g se trouve en fait dans $C_{q+1}(\underline{b},F')$. Par conséquent on obtient une scission de l'application $\partial : C_{q+1}(\underline{b},F') \longrightarrow B_q(\underline{b},F')$ en restreignant à $B_q(\underline{b},F')$ la scission trouvée en a. ci-dessus. Quant à une scission pour l'application : $Z_q(\underline{b},F') \longrightarrow H_q(\underline{b},F')$, elle résulte aussitôt de la surjection scindée :

$$C_{q+1}(b,E) \underset{\sigma}{\rightleftarrows} H_q(b,F') \longrightarrow 0.$$

Si u est une scission de $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow 0$, il suffit en effet de composer σ avec l'application $Z_{q+1}(b,E) = C_{q+1}(b,E) \longrightarrow Z_q(b,F')$ déduite du choix de u, pour avoir la scission voulue. Cqfd.

5. Conclusion : $\underline{b}$-cohomologie de $\mathrm{Hom}(F_1,E_2)$.

LEMME 2.3. Soient $\underline{g}$ une algèbre de Lie, V un $\underline{g}$-module topologique (i.e. un ELCS où $\underline{g}$ agit par opérateurs linéaires continus), V' un ELCS considéré comme $\underline{g}$-module trivial. Alors le foncteur $L \longrightarrow \mathrm{Hom}(L,V')$ transforme le complexe d'homologie du $\underline{g}$-module V en le complexe de cohomologie du $\underline{g}$-module $\mathrm{Hom}(V,V')$. En particulier, si $C_*(\underline{g},V)$ est fort, $C^*(\underline{g},\mathrm{Hom}(V,V'))$ est fort, et on peut identifier $H^q(\underline{g},\mathrm{Hom}(V,V'))$ à $\mathrm{Hom}(H_q(\underline{g},V),V')$.

Démonstration. Vérification immédiate.

PROPOSITION 2.3.

Revenons à la situation décrite dans l'introduction.

(i) Si $X_1 \neq X_2$, le complexe $C^*(\underline{b},\mathrm{Hom}(F_1,E_2))$ admet une homotopie contractante continue; en particulier, $\mathrm{Ext}^q_{\underline{b}}(F_1,E_2) = 0$ pour tout $q \geq 0$.

(ii) Si $X_1 = X_2$, on peut supposer que $x_1 = x_2 = x_0$. Le complexe $C^*(\underline{b},\mathrm{Hom}(F_1,E_2))$ est fort, et $H^q(\underline{b},\mathrm{Hom}(F_1,E_2)) \simeq C^q(N_{x_0},\mathrm{Hom}(E_1,E_2))$.

Plus précisément, plongeons le $\underline{b}$-module trivial $\mathrm{Hom}(E_1,E_2)$ dans le $\underline{b}$-module $\mathrm{Hom}(F_1,E_2)$ en faisant opérer $u \in \mathrm{Hom}(E_1,E_2)$ sur F_1 par $u(f) = u(f(1))$ ("mesure de Dirac"). Alors tout élément de $Z^q(\underline{b},\mathrm{Hom}(F_1,E_2))$ est homologue à un élément de $Z^q(\underline{b},\mathrm{Hom}(E_1,E_2)) = C^q(\underline{b},\mathrm{Hom}(E_1,E_2))$ (en d'autres termes, l'inclusion précédente induit une surjection en cohomologie), et un élément de $C^q(\underline{b},\mathrm{Hom}(E_1,E_2))$ est un cobord dans $\mathrm{Hom}(F_1,E_2)$ si et seulement si sa restriction à $\Lambda^q N_{x_0}$ est nulle; d'où l'isomorphisme entre $H^q(\underline{b},Hom(F_1,E_2))$ et $C^q(N_{x_0},Hom(E_1,E_2))$.

Démonstration.

Compte tenu du lemme 2.3., et du fait que tous les complexes qui interviennent sont forts, cela résulte aussitôt par transposition de la proposition 2.2. On obtient la suite exacte forte de $\underline{b}$-modules :

$$0 \longrightarrow Hom(E_1,E_2) \longrightarrow Hom(F_1,E_2) \longrightarrow Hom(F'_1,E_2) \longrightarrow 0.$$

D'où la longue suite exacte de cohomologie :

$$\cdots \longrightarrow Ext^q_{\underline{b}}(E_1,E_2) \longrightarrow Ext^q_{\underline{b}}(F_1,E_2) \longrightarrow Ext^q_{\underline{b}}(F'_1,E_2) \longrightarrow Ext^{q+1}_{\underline{b}}(E_1,E_2) \longrightarrow \cdots$$

avec maintenant les suites exactes :

$$0 \longrightarrow Ext^{q-1}_{\underline{b}}(F'_1,E_2) \longrightarrow Ext^q_{\underline{b}}(F_1,E_2) \longrightarrow Ext^q_{\underline{b}}(E_1,E_2) \longrightarrow 0 \quad \text{pour } q \geq 1$$

et $Ext^0_{\underline{b}}(F_1,E_2) = Ext^0_{\underline{b}}(E_1,E_2) = Hom(E_1,E_2)$.

Démonstration du théorème 2.1.

Les deux premières assertions sont contenues dans la proposition 2.3. car dans le cas (i), on a $E_2^{pq} = 0$ pour tous $p,q \geq 0$ dans la suite spectrale décrite au n° 2.

Quant à la dernière assertion, elle résulte de la proposition 1.3. en remarquant que si T_{x_0} admet un supplémentaire S-invariant dans $\underline{b}^*$, N_{x_0} admet un supplémentaire S-invariant dans $\underline{b}$, et alors les suites exactes :

$$0 \longrightarrow C^q_0(\underline{b},Hom(E_1,E_2)) \longrightarrow C^q(\underline{b},Hom(E_1,E_2)) \longrightarrow C^q(N_{x_0},Hom(E_1,E_2)) \longrightarrow 0$$

sont canoniquement scindées sous S, en prolongeant un élément de $C^q(N_{x_0},Hom(E_1,E_2))$ à $\underline{b}$ tout entier par 0 sur le supplémentaire en question ($C^q_0(\underline{b},Hom(E_1,E_2))$ désigne l'ensemble des $\omega \in C^q(\underline{b},Hom(E_1,E_2))$ qui sont des cobords dans $Hom(F_1,E_2)$)).

Chapitre III: L'opérateur d_2 de la suite spectrale.

1. Introduction.

Dans ce chapitre, je me propose de reprendre dans le cas particulier qui m'intéresse les considérations générales du chapitre I à propos de la suite spectrale d'un produit semidirect. Considérons donc la situation décrite dans l'introduction au ch. II.

D'après le théorème 1.2., l'application $d_2 : H^p(S, \mathrm{Ext}^q_{\underline{b}}(F_1, E_2)) \longrightarrow H^{p+2}(S, \mathrm{Ext}^{q-1}_{\underline{b}}(F_1, E_2))$ s'obtient par relèvement à travers la suite exacte à quatre termes de S-modules :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^{q-1}_{\underline{b}}(F_1, E_2) \longrightarrow C^{q-1}(\underline{b}, \mathrm{Hom}(F_1, E_2))/\ B^{q-1}(\underline{b}, \mathrm{Hom}(F_1, E_2)) \longrightarrow Z^q(\underline{b}, \mathrm{Hom}(F_1, E_2)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^q_{\underline{b}}(F_1, E_2) \longrightarrow 0 .$$

Le but de ce chapitre est de montrer que l'application d_2 est en fait gouvernée par deux classes de 2-cohomologie, de nature essentiellement géométrique.

La première est l'image par la représentation $\sigma_1 : \underline{s} \longrightarrow \mathrm{End}(E_1)$ (où l'on note $\underline{s}$ l'algèbre de Lie de S) de la classe de l'extension :

$$0 \longrightarrow \underline{s} \longrightarrow \underline{a} \longrightarrow \underline{b}^* \longrightarrow \underline{b}^*/T_{x_0} \longrightarrow 0$$

(la flèche du milieu est l'application $\xi \longrightarrow \xi x_0$). Elle est nulle lorsque T_{x_0} admet un supplémentaire S-invariant dans $\underline{b}^*$, ou lorsqu'il y a sur F_1 une connexion A-invariante (cf. n°3; c'est en particulier le cas lorsque $\underline{s}$ admet un supplémentaire S-invariant dans $\underline{a}$).

L'autre est en rapport avec la géométrie extrinsèque de la variété X plongée dans $\underline{b}^*$. Appelons β_0 la classe de l'extension $0 \longrightarrow N_{x_0} \longrightarrow \underline{b} \longrightarrow T^*_{x_0} \longrightarrow 0$, et soit $\beta = \beta_0 \smile \beta_0$, avec le cup-produit associé au couplage $(u,v) \longrightarrow w$ de $\mathrm{Hom}(T^*_{x_0}, N_{x_0}) \times \mathrm{Hom}(T^*_{x_0}, N_{x_0}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(S^2 T^*_{x_0}, \Lambda^2 N_{x_0})$ défini par $w(\lambda,\mu) = u(\lambda) \wedge v(\mu) + u(\mu) \wedge v(\lambda)$, pour tous $\lambda, \mu \in T^*_{x_0}$ (cf. 0.8. pour la définition du cup-produit).

Notons Q le "deuxième tenseur fondamental affine" de la variété X au point x_0, qui associe à $\nu \in N_{x_0}$ le Hessien au point x_0 de la fonction φ_ν , restriction à X de la forme linéaire $x \longrightarrow \langle x,\nu\rangle$ définie par ν.(On remarque que ceci a un sens intrinsèque car $d\varphi_\nu(x_0) = \nu|T_{x_0} = 0$). Q est un S-morphisme de N_{x_0} vers $S^2T^*_{x_0}$. Soit $Q^*(\beta) \in Ext^2_S(N_{x_0},\Lambda^2N_{x_0})$ l'image réciproque de β par Q : c'est la deuxième classe annoncée. Elle est nulle lorsque T_{x_0} admet un supplémentaire S-invariant dans $\underset{\sim}{b}^*$, ou encore lorsqu'il y a sur le fibré conormal NX une connexion A-invariante (notamment lorsque l'orbite est plate, i.e. ouverte dans un sous-espace affine, pour chacune de ses composantes connexes).

En outre $Q^*(\beta)$ n'intervient que pour $q \geq 2$, donc pour les orbites de codimension 1 l'application d_2 est entièrement déterminée par $\sigma_1(\alpha)$; de même le morphisme de transgression, qui n'est autre que l'application $d_2 : E_2^{01} \longrightarrow E_2^{20}$ ne dépend que de $\sigma_1(\alpha)$ (ce dernier point se trouvait déjà dans [4], théorème 6.1.).

La forme générale de l'application d_2 est donnée par le théorème suivant :

<u>THÉORÈME 3.1.</u>

Considérons le couplage : $N_{x_0} \otimes End(E_1) \times C^q(N_{x_0},Hom(E_1,E_2)) \longrightarrow C^{q-1}(N_{x_0},Hom(E_1,E_2))$ défini par "produit intérieur" :

$$(\nu\otimes u,\omega)(\nu_2,\dots,\nu_{q-1}) = \omega(\nu,\nu_2,\dots,\nu_{q-1}) \text{ ou}$$

pour tous $\nu,\nu_2,\dots,\nu_{q-1} \in N_{x_0}$, $u \in Hom(E_1,E_2)$, $\omega \in C^q(N_{x_0},Hom(E_1,E_2))$

et d'autre part le couplage $Hom(N_{x_0},\Lambda^2N_{x_0}) \times C^q(N_{x_0},Hom(E_1,E_2)) \longrightarrow C^{q-1}(N_{x_0},Hom(E_1,E_2))$ défini par :

$$(a,\omega)(\nu_1,\dots,\nu_{q-1}) = \sum_{j=1}^{q-1} (-1)^{j+1}\omega(a(\nu_j),\nu_1,\dots,\widehat{\nu_j},\dots,\nu_{q-1}).$$

Alors l'opérateur $d_2 : Ext^p_S(\Lambda^qN_{x_0},Hom(E_1,E_2)) \longrightarrow Ext^{p+2}_S(\Lambda^{q-1}N_{x_0},Hom(E_1,E_2))$ est donné pour $q \geq 2$ par :

$$d_2e = \sigma_1(\alpha)\smile e - \frac{1}{2}Q^*(\beta)\smile e ,$$ où α et β sont les classes décrites ci-dessus. Pour $q = 1$ on a simplement $d_2e = \sigma_1(\alpha)\smile e$.

(Démonstration à la fin du n° 7).

2. Jet d'un élément d'une représentation induite.

Soient G un groupe de Lie, H un sous-groupe fermé de G, E un H-module complet, $F = \mathrm{Ind}_{H\uparrow G} E$. Soit $X = G/H$, $x_0 = H$ le point distingué de X.

Soit $\mathcal{A} = C^\infty(X)$ muni de sa topologie usuelle; alors $\mathcal{A}$ opère sur F, qui devient un $\mathcal{A}$-module topologique. Soit $I_{x_0} = \{a \in \mathcal{A} \mid a(x_0) = 0\}$; c'est un idéal maximal fermé de $\mathcal{A}$. On pose $J^k_{x_0} F = F/I^{k+1}_{x_0} F$, et on l'appelle espace des k-jets de F au point x_0. On note $j^k_{x_0}(f)$ et on appelle k-jet de f au point x_0 l'image de $f \in F$ par l'application canonique $F \longrightarrow J^k_{x_0} F$. Comme x_0 est stabilisé par H, $J^k_{x_0} F$ est un H-module pour la structure quotient (on verra ci-après que $I^{k+1}_{x_0} F$ est fermé dans F donc que $J^k_{x_0} F$ est séparé). $J^0_{x_0} F$ s'identifie à E comme H-module par l'application $f \longrightarrow f(1)$, qui passe au quotient par $j^0_{x_0}$.

Donnons une autre interprétation de $J^k_{x_0} F$. Choisissons une scission σ pour la projection canonique $\pi : G \longrightarrow X$ au-dessus d'un ouvert U contenant x_0, telle que $\sigma(x_0) = 1$; prenons pour U un ouvert de carte et soit $\varphi : U \longrightarrow U'$ une carte de U, avec U' ouvert dans $\mathbb{R}^m$, $m = \dim(X)$.
Alors la restriction de $f \in F$ à $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$ s'identifie à une fonction $\tilde{f}$: $U' \longrightarrow E$, dite expression locale de f dans le repère σ et dans la carte φ.
On voit maintenant facilement que $f \in I^{k+1}_{x_0} F$ si et seulement si :

$$\frac{\partial^{|\alpha|}\tilde{f}}{\partial x'^{\alpha}}(x_0) = 0 \qquad \text{pour tout multiindice } \alpha \text{ tel que } |\alpha| =$$

$\alpha_1 + \ldots + \alpha_m \leq k$; cette condition ne dépend ni du choix de σ ni de celui de la carte φ. Il est clair maintenant que $I^{k+1}_{x_0} F$ est fermé dans F, et on a des suites exactes fortes de H-modules :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(S^k T_{x_0}, E) \longrightarrow J^k_{x_0} F \longrightarrow J^{k-1}_{x_0} F \longrightarrow 0 .$$

En effet lorsque $j^{k-1}_{x_0}(f) = 0$, on peut définir intrinsèquement $d^k f(x_0) \in \mathrm{Hom}(S^k T_{x_0}, E)$ comme étant $d^k\tilde{f}(x_0') \circ (d\varphi(x_0))^k$ (où $(d\varphi(x_0))^k$ désigne la puissance symétrique $k^{\text{ème}}$ de $d\varphi(x_0)$). Cela ne dépend ni du choix de la carte φ, ni de celui de σ. (Tout ceci est une généralisation naturelle de l'exposé fait dans [8] pour les fibrés vectoriels de dimension finie).

LEMME 3.1. Soient $a \in \mathcal{A}$, $f \in F$. Alors $j^k_{x_0}(af) - a(x_0)j^k_{x_0}(f)$ ne dépend que du k-1-jet de f, i.e. passe au quotient en une application de $J^{k-1}_{x_0}F \longrightarrow J^k_{x_0}F$.

Démonstration.

Il suffit de prouver que lorsque $j^{k-1}_{x_0}(f) = 0$, on a $j^k_{x_0}(af) = a(x_0)j^k_{x_0}(f)$. Or dans ce cas $j^k_{x_0}(f)$ et $j^k_{x_0}(af)$ s'identifient à $d^kf(x_0)$ et $d^k(af)(x_0)$ respectivement; en passant dans une carte et une trivialisation, on voit aussitôt que l'on a bien : $d^k(af)(x_0) = a(x_0)d^kf(x_0)$, puisque le k-1-jet de f en x_0 est nul.

3. Dérivations covariantes sur l'espace d'une représentation induite.

3.1. Soient X une variété différentiable, H un groupe de Lie, P un H-fibré principal au-dessus de X. Soit E un H-module. Comme au ch.II n°2, introduisons l'espace $F = \mathrm{Ind}_{H\uparrow P} E = \{f \in C^\infty(P,E) \mid f(ph) = h^{-1}f(p)\}$. Je me propose de définir dans ce cadre la notion de dérivation covariante sur F. Il s'agit d'une adaptation de [7] ch.III où l'on traite le cas où E est de dimension finie.

Le fibré tangent TP à P est un H-fibré vectoriel, c'est-à dire un fibré vectoriel au-dessus de P muni d'une action de H à droite telle que la projection naturelle du fibré vers P soit un H-morphisme. Notons VP (fibré vertical) le noyau de l'application $d\pi$, où $\pi : P \longrightarrow X$ est la projection; c'est un sous-H-fibré de TP.

Remarquons que l'on a une trivialisation naturelle de VP en associant à $A \in \underline{h}$ (algèbre de Lie de H) le champ de vecteurs A_* sur P défini par $A_*(p) = \frac{d}{dt}(pe^{At})\big|_{t=0}$. On identifiera dorénavant VP à $P \times \underline{h}$; l'action de H devient :

$$(p,A)h = (ph, h^{-1}A)$$

où H agit sur $\underline{h}$ par l'action adjointe.

Notons $\Omega^1(P,E)^H$ l'espace des 1-formes différentielles sur P à valeurs dans E vérifiant la condition de covariance : $\omega(Ah) = h^{-1}\omega(A)$ pour tous $A \in TP$, $h \in H$. (Remarquer que la restriction de ω à VP définit un élément de $\mathrm{Ind}_{H\uparrow P}\mathrm{Hom}(\underline{h},E)$).

Par abus de langage, je dirai qu'une <u>connexion</u> sur F est la donnée d'une 1-forme $\omega \in \Omega^1(P,\mathrm{End}(E))^H$ telle que :

$$\omega(p,A) = \rho(A) \qquad \text{pour tout } (p,A) \in VP$$

où $\rho : \underline{h} \longrightarrow \mathrm{End}(E)$ est la représentation de $\underline{h}$. (L'abus de langage consiste à parler de connexions sur F, qui en dimension finie correspond à l'espace des sections du fibré vectoriel $P \times_H E$ au-dessus de X; on parle plutôt de connexions sur le fibré lui-même).

La forme ω s'appelle la 1-forme de connexion; il en existe toujours, comme on le verra ci-après.

Lorsque l'on s'est donné une connexion sur F, on définit la dérivée covariante d'un élément $f \in F$ par la formule :

$$\nabla f = \omega f + df \qquad \in \Omega^1(P,E)^H .$$

(Cela veut dire la chose suivante : soit $A \in TP$ un vecteur tangent au point $p \in P$; alors : $\nabla f(A) = \omega(A)f(p) + df(p)(A)$).

Pour faire l'analogie avec le cas de la dimension finie, remarquons que ∇f passe au quotient par VP; en effet soit $A \in h$ et dérivons par rapport à h au point 1 et dans la direction A la relation : $f(ph) = h^{-1}f(p)$. On obtient : $df(p)(A) = -\rho(A)f(p) = -\omega(A)f(p)$. Donc en fait ∇f définit une application H-covariante de TP/VP vers E, ou encore un morphisme de H-fibrés vectoriels de TP/VP vers $X \times E$. Or TP/VP s'identifie naturellement à $\pi^*(TX)$, image réciproque par π du fibré tangent TX; lorsque E est de dimension finie il en résulte que l'on peut considérer ∇f comme une 1-forme sur X à valeurs dans le fibré vectoriel $P \times_H E$, et en outre on voit facilement que la définition ci-dessus coincide avec la définition classique. (D'ailleurs, c'est une des définitions classiques).

3.2. Rappelons (cf. [7] ch.II) qu'une connexion sur le fibré principal P est par définition la donnée d'un sous-H-fibré supplémentaire de VP dans TP, que l'on note alors HP (fibré horizontal). Un tel sous-fibré existe toujours ([7] ch.II §2). Compte tenu de la trivialisation canonique de VP, il est équivalent de se donner une 1-forme $\omega \in \Omega^1(P,\underline{h})^H$ telle que $\omega(p,A) = A$ pour tout $(p,A) \in VP$. La forme ω s'appelle encore la 1-forme de connexion. Posant $\tilde{\omega} = \omega \circ \rho$, on en déduit aussitôt une connexion sur F (ce qui montre l'existence de connexions sur toute représentation induite). Pour une telle connexion on a aussi :

$\nabla f = df \circ pr_h$, où pr_h est la projection de TP sur HP parallèlement à VP.
En effet $pr_h(A) = A - \omega(A)$, et comme on l'a vu : $df(\omega(A)) = -\tilde{\omega}(A)f(p)$ si A est un vecteur tangent au point p; donc : $df \circ pr_h(A) = df(A) + \tilde{\omega}(A)f(p) = \nabla f(A)$.

3.3. Considérons maintenant le cas où P est un groupe de Lie G, H un sous-groupe fermé de G, G étant considéré comme H-fibré principal au-dessus de $X = G/H$. G agit sur TG par translation à gauche; si on trivialise TG par translation à gauche justement, cette action devient $g(g',A) = (gg',A)$ pour tous $g,g' \in G$, $A \in \underline{g}$ (algèbre de Lie de G); l'action à droite de H s'écrit alors : $(g,A)h = (gh,h^{-1}A)$, H agissant sur $\underline{g}$ par l'action adjointe.
Donnons-nous une connexion sur F, et soit ω sa 1-forme de connexion. On dit que la connexion est <u>invariante</u> par G si la 1-forme ω est invariante par les translations à gauche de G.

<u>LEMME 3.2</u>. Il y a correspondance bijective entre l'ensemble des connexions invariantes sur F, et l'ensemble des H-morphismes $\underline{g} \longrightarrow \mathrm{End}(E)$ prolongeant ρ.

<u>Démonstration</u>. (cf. [7] ch.II §11 thm.11.5.)
Soit $\omega \in \Omega^1(G,\mathrm{End}(E))^H$ définissant une connexion invariante. On peut considérer ω comme une fonction C^∞ sur G à valeurs dans $\mathrm{Hom}(\underline{g},\mathrm{End}(E))$; alors la condition d'invariance dit tout simplement que cette fonction est <u>constante</u>. Or de toutes manières $\omega(1)$ prolonge ρ; comme ω doit être en plus H-covariante à droite, il faut en fait que $u = \omega(1)$ soit un H-morphisme prolongeant ρ. Réciproquement, si u est un tel prolongement, la 1-forme constante définie par $\omega(g) = u$ pour tout $g \in G$ définit une connexion invariante. Cqfd.

Exprimons maintenant en termes de cohomologie l'obstruction à l'existence d'une connexion invariante. Plus généralement, soit $0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \leftrightarrows V'' \longrightarrow 0$ une suite exacte forte de H-modules, W un autre H-module, et $u : V' \longrightarrow W$ un H-morphisme. Soit α la classe de l'extension; alors $u(\alpha) \in \mathrm{Ext}^1_H(V'',W)$ est l'obstruction au prolongement de u en un H-morphisme $\tilde{u}$ de V vers W.
En effet soit Gr(-u) le sous-module $(v',-u(v'))_{v' \in V'}$ de $V' \oplus W$. Alors $u(\alpha)$ est la classe de l'extension :

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow (W \oplus V)/Gr(-u) \longrightarrow V'' \longrightarrow 0 \qquad \text{(cf. [5] ch.I §10)}$$

Supposons cette extension scindée, et soit $\sigma : V'' \longrightarrow (W \oplus V)/Gr(-u)$ une scission. On définit alors $\tilde{u}(v)$ en prenant un représentant (w,v_1) de $\sigma(\dot{v})$ dans $W \oplus V$ et en posant : $\tilde{u}(v) = w - u(v-v_1)$. Il est clair que cela ne dépend pas du choix de v_1, que l'on peut faire dépendre linéairement et continûment de v. Réciproquement, si $\tilde{u} : V \longrightarrow W$ est un prolongement de u, $Gr(-\tilde{u})/Gr(-u)$ fournit un supplémentaire H-invariant de W dans $(W \oplus V)/Gr(-u)$.

Appelons α_1 la classe de l'extension de H-modules : $0 \longrightarrow \underline{h} \longrightarrow \underline{g} \longrightarrow \underline{g}/\underline{h} \longrightarrow 0$. Alors α_1 est l'obstruction à l'existence d'une connexion invariante sur le H-fibré principal G (cf. [7] ch.II thm. 11.1.; démonstration analogue à celle du lemme 3.2.), et d'après ce qui précède, $\rho(\alpha_1)$ est l'obstruction à l'existence d'une connexion invariante sur l'espace F.

On sait que pour un fibré vectoriel de dimension finie V au-dessus de X, la donnée d'une connexion sur V est équivalente au choix d'une scission pour la suite exacte de jet : $0 \longrightarrow \Omega^1(X,V) \longrightarrow J^1V \longrightarrow V \longrightarrow 0$. Montrons qu'ici on a encore un lien analogue :

<u>LEMME 3.3</u>. Identifions $\underline{g}/\underline{h}$ à T_{x_0} et $Hom(T_{x_0}, End(E))$ à $Hom(E,Hom(T_{x_0},E))$. Alors l'obstruction $\rho(\alpha_1)$ à l'existence d'une connexion invariante sur F s'identifie à la classe de l'extension :

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow Hom(T_{x_0},E) \longrightarrow J^1_{x_0}F \longrightarrow E \longrightarrow 0.$$

<u>Démonstration</u>.

Soit γ la classe de l'extension (1). Choisissons une section locale σ pour $\pi : G \longrightarrow H$, au-dessus d'un ouvert U contenant x_0, telle que $\sigma(x_0) = 1$. L'application linéaire tangente $d\sigma(x_0)$ donne alors une scission de la suite exacte $0 \longrightarrow \underline{h} \longrightarrow \underline{g} \longrightarrow T_{x_0} \longrightarrow 0$; d'où un cocycle $z \in Z^1(H,Hom(T_{x_0},\underline{h}))$ défini par :

$$z(s) = sd\sigma(x_0)s^{-1} - d\sigma(x_0), \text{ représentant } \alpha_1.$$

D'autre part, le choix de σ permet de définir une scission de la suite exacte (1). En effet à $f \in F|_U$ on peut associer $\tilde{f} = f \circ \sigma \in C^\infty(U,E)$; alors $r(f) = d\tilde{f}(x_0)$ donne la scission voulue, ou plutôt une rétraction de l'injection $Hom(T_{x_0},E) \longrightarrow J^1_{x_0}F$, ce qui est équivalent (la scission correspondante associe à $v \in V$ le 1-jet au point x_0 de l'élément de $F|_U$ représenté par la fonction constante égale à v dans cette trivialisation; on note $v \longmapsto u(v)$ cette scission).

Lorsque l'on a choisi une trivialisation locale du fibré principal, l'action de G sur F s'exprime à l'aide d'un "multiplicateur", de la manière suivante. Soit $V = \{(g,x) \in G \times X \mid g^{-1}x \in U\}$. V est un ouvert de $G \times X$ contenant $H \times \{x_0\}$. Définissons le multiplicateur m sur V par la condition :

$$g\sigma(g^{-1}x) = \sigma(x)m(g,x).$$

C'est donc une fonction C^∞ sur V à valeurs dans H. Il est maintenant facile de vérifier que pour $f \in F|_U$ et pour $(g,x) \in V$ on a :

$$(*) \qquad (gf)^{\sim}(x) = m(g,x)\tilde{f}(g^{-1}x).$$

On remarque que pour $h \in H$ on a $m(h,x_0) = h$. Dérivons par rapport à x au point x_0 la relation (*). On trouve :

$$d(hf)^{\sim}(x_0) = \rho(\frac{\partial m}{\partial x}(h,x_0)h^{-1})h\tilde{f}(x_0) + hd\tilde{f}(x_0)h^{-1}$$

Il en résulte que $d(hu(h^{-1}v) - u(v))(x_0) = \rho(\frac{\partial m}{\partial x}(h,x_0)h^{-1})v$, ce qui montre que le cocycle ζ représentant γ associé à u est donné par : $\zeta(h) = \rho(\frac{\partial m}{\partial x}(h,x_0)h^{-1})$

Or $m(h,x) = \sigma(x)^{-1}.h\sigma(h^{-1}x)$, d'où en dérivant :

$$\frac{\partial m}{\partial x}(h,x_0)h^{-1} = -d\sigma(x_0) + hd\sigma(x_0)h^{-1} = z(h)$$

Donc $\zeta(h) = \rho(z(h))$, et $\gamma = \rho(\alpha_1)$, ce qu'il fallait démontrer.

<u>Remarque 3.1</u>. Cela ne veut pas dire pour autant que $J^1_{x_0}F$ soit isomorphe à l'image directe de $\underline{g}$ par le morphisme ρ. Par exemple, si E est de dimension finie, $J^1_{x_0}F$ et $(\underline{h} \oplus End(E))/Gr\text{-}\rho)$ n'ont même pas même dimension en général ! C'est le problème de la <u>scission</u> de ces deux extensions qui est le même dans les deux cas.

4. Homomorphismes de support ponctuel et d'ordre fini.

Reprenons maintenant la situation décrite à l'introduction au chapitre II. Rappelons que d'après le théorème 1.2. on est conduit à l'étude de la première suite spectrale d'hypercohomologie du complexe de S-modules $C^*(\underline{b},Hom(F_1,E_2))$.

Pour tout $k \geq 0$, notons $D^{(k)}_{x_0} = \mathrm{Hom}(J^k_{x_0} F_1, E_2)$; en particulier $D^{(0)}_{x_0} = \mathrm{Hom}(E_1, E_2)$. Intuitivement $D^{(k)}_{x_0}$ correspond à l'espace des distributions de support $\{x_0\}$ et d'ordre $\leq k$. Lorsque E_1 et E_2 sont de dimension finie, c'est encore la fibre au point x_0 du fibré des opérateurs différentiels d'ordre $\leq k$ de $A \times_S E_1$ vers $A \times_S E_2$. C'est un sous-$B \times S$-module de $\mathrm{Hom}(F_1, E_2)$.
Notons $Z^q_0(\underline{b}, D^{(k)}_{x_0})$ l'ensemble des éléments de $Z^q(\underline{b}, D^{(k)}_{x_0})$ qui sont des cobords dans $\mathrm{Hom}(F_1, E_2)$. Le lemme suivant montre qu'il n'est pas nécessaire d'aller bien loin pour trouver une primitive d'un tel élément.

<u>LEMME 3.4</u>. On a des suites exactes fortes de S-modules :

$$0 \longrightarrow Z^q(b, D^{(k+1)}_{x_0}) \longrightarrow C^q(b, D^{(k+1)}_{x_0}) \longrightarrow Z^{q+1}_0(b, D^{(k)}_{x_0}) \longrightarrow 0.$$

<u>Démonstration</u>.

a. Le lemme dit que lorsqu'un élément de $Z^q(b, D^{(k)}_{x_0})$ est un cobord dans $\mathrm{Hom}(F_1, E_2)$, il est en fait déjà un cobord dans $D^{(k+1)}_{x_0}$.
Tout d'abord, soient $b \in \underline{b}$, $u \in \mathrm{Hom}(F_1, E_2)$. Soit $\varphi_b(x) = \langle x, b\rangle$ la restriction à X de la forme linéaire définie par b. Alors : $bu(f) = i\varphi_b(x_0)u(f) - iu(\varphi_b f)$. D'après le lemme 3.1. on voit maintenant que si $u \in D^{(k+1)}_{x_0}$, alors $bu \in D^{(k)}_{x_0}$ pour tout $b \in \underline{b}$. Donc le cobord d va bien de $C^q(\underline{b}, D^{(k+1)}_{x_0})$ dans $Z^{q+1}_0(\underline{b}, D^{(k)}_{x_0})$; tout consiste à montrer que c'est une <u>surjection</u>.

b. Identifions $T^*_{x_0}$ à b/N_{x_0}. Alors $d\varphi_b(x_0) = \dot{b}$, en désignant par $\dot{b}$ la classe de b dans $\underline{b}/N_{x_0}$. Soit $u \in D^{(k+1)}_{x_0}$, et déterminons la restriction de bu à $\mathrm{Hom}(S^k T_{x_0}, E_1) = S^k(\underline{b}/N_{x_0}) \otimes E_1$; on appellera <u>symbole principal</u> de bu cette restriction. Soit $f \in F_1$ telle que $j^{k-1}_{x_0}(f) = 0$. Alors $j^k_{x_0}((\varphi_b(x_0) - \varphi_b)f) = 0$, donc $d^{k+1}((\varphi_b(x_0) - \varphi_b)f)(x_0)$ est bien définie. On voit facilement à l'aide d'une trivialisation et d'une carte locales, que $d^{k+1}((\varphi_b(x_0) - \varphi_b)f)(x_0) = - d\varphi_b(x_0).d^k f(x_0)$, où le point désigne le produit symétrique des formes multilinéaires symétriques. D'où la formule :

$$ibu(\lambda\otimes v) = u(\dot{b}\lambda\otimes v)$$

pour tous $b\in \underline{b}$, $u\in D^{(k+1)}_{x_0}$, $\lambda\in S^k(\underline{b}/N_{x_0})$, $v\in E_1$, $\dot{b}\lambda$ désignant le produit dans l'algèbre symétrique de $\underline{b}/N_{x_0}$.

c. Choisissons maintenant des scissions pour les suites exactes :

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}(S^kT_{x_0},E_1)\longrightarrow J^k_{x_0}F_1\longrightarrow J^{k-1}_{x_0}F_1\longrightarrow 0.$$

On commence par démontrer le lemme pour $k = 0$. Je vais construire une application $\Phi : Z^{q+1}(\underline{b},D^{(0)}_{x_0})\longrightarrow C^q(\underline{b},D^{(1)}_{x_0})$ telle que $d(\Phi(\omega)) = \omega$ lorsque $\omega\in Z^{q+1}_0(\underline{b},D^{(0)}_{x_0})$.

Faisons encore choix d'un supplémentaire $\underline{b}_0$ de N_{x_0} dans $\underline{b}$. On a alors une décomposition : $\Lambda^q\underline{b} = \bigoplus_{q'+q''=q} \Lambda^{q'}\underline{b}_0\otimes\Lambda^{q''}N_{x_0}$. On définit le symbole principal de $\Phi(\omega)$ par la formule :

$$\Phi(\omega)(b,\nu,\lambda\otimes v) = \frac{i}{q'+1}\,\omega(u(\lambda)\wedge b,\nu,v)$$

pour tous $b\in\Lambda^{q'}\underline{b}_0$, $\nu\in\Lambda^{q''}N_{x_0}$, $q'+q''=q$, $v\in E_1$, où $u : \underline{b}/N_{x_0}\longrightarrow \underline{b}$ est la scission associée au choix de $\underline{b}_0$. Puis on prolonge $\Phi(\omega)$ à $J^1_{x_0}F_1$ tout entier grâce au choix de supplémentaire qui a été fait.

Soient $b = (b_0,\dots,b_{q'})$, $\nu = (\nu_1,\dots,\nu_{q''})$ avec $b_j\in\underline{b}_0$, $\nu_j\in N_{x_0}$. Notons :

$$b_{\hat{j}} = (b_0,\dots,b_{j-1},b_{j+1},\dots b_{q'})\qquad \text{pour } j\in\{0,\dots,q\}.$$

Alors : $d(\Phi(\omega))(b,\nu,v) = \sum_{j=0}^{q'}(-1)^j(b_j\Phi(\omega))(b_{\hat{j}},\nu,v)$ (les autres termes sont nuls)

$$= -i\sum_{j=0}^{q'}(-1)^j\Phi(\omega)(b_{\hat{j}},\nu,\dot{b}_j\otimes v)\qquad \text{(d'après le b.)}$$

$$= \frac{1}{q'+1}\sum_{j=0}^{q'}(-1)^j\omega(b_j,b_{\hat{j}},\nu,v) = \omega(b,\nu,v)$$

Donc $d(\Phi(\omega))$ coincide toujours avec ω sur $\bigoplus_{q'+q''=q}\Lambda^{q'+1}\underline{b}_0\otimes\Lambda^{q''}N_{x_0}$; il reste à considérer les restrictions à N_{x_0}. Il est clair que l'on a toujours $d(\Phi(\omega))|N_{x_0} = 0$. Or d'après la proposition 2.3., $Z^{q+1}_0(\underline{b},D^{(0)}_{x_0})$ est précisément l'ensemble des $\omega\in Z^{q+1}(\underline{b},D^{(0)}_{x_0})$ tels que $\omega|N_{x_0} = 0$; donc le lemme est démontré pour $k = 0$.

d. Faisons maintenant une récurrence sur k. Pour tout $k > 0$, je vais construire une application $\Phi : Z^{q+1}(\underline{b}, D_{x_0}^{(k)}) \longrightarrow C^q(\underline{b}, D_{x_0}^{(k+1)})$ telle que $\omega - d(\Phi(\omega)) \in Z^{q+1}(\underline{b}, D_{x_0}^{(k-1)})$ pour tout ω. Comme $\omega \in Z_0^{q+1}(\underline{b}, D_{x_0}^{(k)})$ si et seulement si $\omega - d(\Phi(\omega)) \in Z_0^{q+1}(\underline{b}, D_{x_0}^{(k-1)})$, on pourra conclure par hypothèse de récurrence.

Pour $b_1, \ldots, b_{q'} \in \underline{b}_0$, $\nu_1, \ldots, \nu_{q''} \in N_{x_0}$, $q' + q'' = q$, pour $\lambda_0, \ldots, \lambda_k \in \underline{b}/N_{x_0}$, et pour $v \in E_1$ on définit :

$$\Phi(\omega)(b,\nu,\lambda,v) = \frac{i}{(k+1)(q'+k+1)} \sum_{l=0}^{k} \omega(u(\lambda_l), b, \nu, \lambda_{\hat{l}}, v)$$

(cf. c. pour les notations $\lambda_{\hat{l}}$ et $u(\lambda_l)$).

On prolonge ensuite $\Phi(\omega)$ à $J_{x_0}^{k+1} F_1$ tout entier grâce au choix de supplémentaire qui a été fait. Il s'agit de démontrer que le symbole principal de $\omega - d(\Phi(\omega))$ est nul.

Soient $b_0, \ldots, b_{q'} \in \underline{b}_0$, $\nu_1, \ldots, \nu_{q''} \in N_{x_0}$, $q'+q'' = q$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \underline{b}/N_{x_0}$, et $v \in E_1$. Alors :

$$d(\Phi(\omega))(b,\nu,\lambda,v) = \sum_{j=0}^{q'} (-1)^j (b_j \Phi(\omega))(b_{\hat{j}}, \nu, \lambda, v)$$

$$= -i \sum_{j=0}^{q'} (-1)^j \sum_{l=1}^{k} \Phi(\omega)(b_{\hat{j}}, \nu, \lambda_1, \ldots, \lambda_{l-1}, \dot{b}_j, \lambda_l, \ldots, \lambda_k, v)$$

$$= -(k+1) i \sum_{j=0}^{q'} (-1)^j \Phi(\omega)(b_{\hat{j}}, \nu, \dot{b}_j, \lambda, v) \text{ car } \Phi(\omega) \text{ est symétrique en}$$

$(\dot{b}_j, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. Cela s'écrit encore :

$$\frac{1}{q'+k+1} \sum_{j=0}^{q'} (-1)^j [\omega(b_j, b_{\hat{j}}, \nu, \lambda, v) + \sum_{l=1}^{k} \omega(u(\lambda_l), b_{\hat{j}}, \nu, \dot{b}_j, \lambda_{\hat{l}}, v)]$$

Or, $\omega(b_j, b_{\hat{j}}, \nu, \lambda, v) = (-1)^j \omega(b, \nu, \lambda, v)$ pour tout j. Ecrivons par ailleurs pour l fixé la condition de cocycle : $d\omega(u(\lambda_l), b, \nu, \lambda_{\hat{l}}, v) = 0$. Cela donne :

$$\omega(b,\nu,\lambda,v) = \sum_{j=0}^{q'} (-1)^j \omega(u(\lambda_l), b_{\hat{j}}, \nu, \dot{b}_j, \lambda_{\hat{l}}, v)$$

Donc : $d(\Phi(\omega))(b,\nu,\lambda,v) = \dfrac{1}{q'+k+1}((q'+1)\omega(b,\nu,\lambda,v) + k\omega(b,\nu,\lambda,v)) = \omega(b,\nu,\lambda,v)$.

Pour conclure il ne reste plus qu'à considérer le cas où tous les arguments sont dans N_{x_0}. Mais on voit aussitôt que $d(\Phi(\omega))(\nu,\lambda,v) = 0$ pour tous $\nu_0,\ldots,\nu_q \in N_{x_0}$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_k \in \underline{b}/N_{x_0}$, $v \in E_1$; et en écrivant la condition $d\omega(b,\nu,\lambda_2,\ldots,\lambda_k,v) = 0$, on voit qu'il en est de même pour ω. Cqfd.

5. La surjection canonique $Z^q(\underline{b},D^{(1)}_{x_0}) \longrightarrow Ext^q_{\underline{b}}(F_1,E_2)$.

Il sera important pour la suite de connaître sous forme explicite l'application $\omega \longrightarrow [\omega]$ de $Z^q(\underline{b},D^{(1)}_{x_0})$ vers $Ext^q_{\underline{b}}(F_1,E_2)$ identifié à $C^q(N_{x_0},D^{(0)}_{x_0})$. On sait (prop. 2.3.) que l'application $\omega \longrightarrow [\omega]$ de $C^q(\underline{b},D^{(0)}_{x_0}) = Z^q(\underline{b},D^{(0)}_{x_0})$ vers $Ext^q_{\underline{b}}(F_1,E_2)$ n'est autre que l'application de restriction, sous cette identification. Il s'agira donc de trouver un cocycle équivalent à ω et prenant ses valeurs dans $D^{(0)}_{x_0}$, puis de restreindre ce cocycle à N_{x_0}; cette restriction est bien sûr indépendante du représentant choisi. Soit $\Phi : Z^q(\underline{b},D^{(1)}_{x_0}) \longrightarrow C^{q-1}(\underline{b},D^{(2)}_{x_0})$ l'application construite au lemme 3.4.d. ci-dessus; alors $\omega - d(\Phi(\omega))$ répond à la question. D'ailleurs $\omega|N_{x_0}$ prend déjà ses valeurs dans $D^{(0)}_{x_0}$ comme on l'a vu, ainsi que $d(\Phi(\omega))|N_{x_0}$; on aura donc $[\omega] = \omega|N_{x_0} - d(\Phi(\omega))|N_{x_0}$. On va expliciter le deuxième terme.

Reprenons les notations du lemme 3.4.a. Pour $\nu \in N_{x_0}$, notons $Q(\nu)$ le hessien au point x_0 de la fonction φ_ν (remarquons que ceci a un sens intrinsèque parce que $d\varphi_\nu(x_0) = \nu|T_{x_0} = 0$). Q est l'analogue affine du deuxième tenseur fondamental de la sous-variété X plongée dans $\underline{b}^*$, défini en géométrie riemannienne; il traduit au moins de manière qualitative la "courbure" de la sous-variété au point x_0. On vérifie facilement que Q est un S-morphisme de N_{x_0} dans $S^2T^*_{x_0}$.

Soient $\nu \in N_{x_0}$ et $f \in I^{k+1}_{x_0}F_1$; il est clair que $(\varphi_\nu(x_0) - \varphi_\nu)f \in I^{k+3}_{x_0}F_1$, et l'on a comme au lemme 3.4.b. : $d^{k+2}((\varphi_\nu(x_0) - \varphi_\nu)f)(x_0) = - d^2\varphi_\nu(x_0).d^kf(x_0)$.

Par conséquent pour $\nu \in N_{x_0}$, $u \in D^{(k)}_{x_0}$, νu est dans $D^{(k-2)}_{x_0}$ et on a la formule :

$$i\nu u(\lambda\otimes v) = u(Q(\nu)\lambda\otimes v)$$

pour tous $\nu \in N_{x_0}$, $u \in D_{x_0}^{(k)}$, $\lambda \in S^{k-2}(\underline{b}/N_{x_0})$, $v \in E_1$, $k \geq 2$; et $\nu u = 0$ si $u \in D_{x_0}^{(1)}$. On peut maintenant écrire la restriction de $d(\Phi(\omega))$ à N_{x_0} :

$$d(\Phi(\omega))(\nu,v) = \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j+1}(\nu_j\Phi(\omega))(\nu_{\hat{j}},v) = -i\sum_{j=1}^{q}(-1)^{j+1}\Phi(\omega)(\nu_{\hat{j}},Q(\nu_j)\otimes v).$$

Or remarquons que la condition de cocycle entraîne d'une part que le symbole principal de $\omega|N_{x_0}$ est nul, donc que ω définit une application :

$$\underline{b}/N_{x_0}\otimes\Lambda^{q-1}N_{x_0}\otimes\underline{b}/N_{x_0} \longrightarrow D_{x_0}^{(0)}$$

et d'autre part, en écrivant $d\omega(b_1,b_2,\nu,v) = 0$, que cette application est <u>symétrique</u> par rapport aux arguments dans $\underline{b}/N_{x_0}$. Ainsi ω définit un élément de $C^{q-1}(N_{x_0},\mathrm{Hom}(S^2T_{x_0}^*,D_{x_0}^{(0)}))$, que l'on notera ω_1.

En se souvenant de la définition de Φ, à savoir :

$$\Phi(\omega)(\nu,\lambda_1,\lambda_2,v) = \frac{i}{2}\left[\omega(u(\lambda_1),\nu,\lambda_2,v) + \omega(u(\lambda_2),\nu,\lambda_1,v)\right] = i\omega_1(\nu,\lambda_1,\lambda_2,v),$$

il est clair que l'on a démontré le lemme suivant :

<u>LEMME 3.5</u>. L'application $\omega \longrightarrow [\omega]$ de $Z^q(\underline{b},D_{x_0}^{(1)})$ dans $C^q(N_{x_0},D_{x_0}^{(0)})$ est donnée par :

$$\omega \longrightarrow \omega|N_{x_0} - Q\smile\omega_1$$

en désignant par $Q\smile\omega_1$ l'application :

$$(\nu_1,\dots,\nu_q,v) \longrightarrow \sum_{j=1}^{q}(-1)^{j+1}\omega_1(\nu_{\hat{j}},Q(\nu_j),v).$$

(C'est le cup-produit de N_{x_0} - cohomologie associé au couplage d'"évaluation": $S^2T_{x_0}^*\times\mathrm{Hom}(S^2T_{x_0}^*,D_{x_0}^{(0)}) \longrightarrow D_{x_0}^{(0)}$).

6. <u>Une suite exacte remarquable</u>.

Soit G un groupe de Lie, V un G-module de dimension finie. Soit V' un sous-G-module de V, $V'' = V/V'$, de sorte que l'on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$$

définissant un élément α de $\mathrm{Ext}_G^1(V'',V')$.

Le produit extérieur définit une application de $V'\otimes V$ dans $\Lambda^2 V$, dont on note $\Lambda(V',V)$ l'image. L'image réciproque de $\Lambda^2 V'$ par cette application est $V'\otimes V'$, de sorte que l'on a la suite exacte :

$$0 \to \Lambda^2 V' \to \Lambda(V,V') \to V'\otimes V'' \to 0.$$

Notons $S(V,V'')$ le G-module S^2V/S^2V'. On a une surjection de $S(V,V'')$ sur S^2V''. L'application de produit symétrique $V'\otimes V \to S^2V$ passe au quotient en une application injective $V'\otimes V'' \to S(V,V'')$, dont l'image s'identifie au noyau de la surjection $S(V,V'') \to S^2V''$. D'où une suite exacte à 4 termes :

(1) $$0 \to \Lambda^2 V' \to \Lambda(V',V) \to S(V,V'') \to S^2V'' \to 0.$$

(on aurait avec des notations analogues trois autres suites exactes :

$$0 \to S^2V' \to S(V',V) \to \Lambda(V,V'') \to \Lambda^2V'' \to 0$$

$$0 \to S^2V' \to S(V',V) \to S(V,V'') \to S^2V'' \to 0$$

$$0 \to \Lambda^2V' \to \Lambda(V',V) \to \Lambda(V,V'') \to \Lambda^2V'' \to 0\ ).$$

Je me propose maintenant de déterminer la classe de l'extension (1) en fonction de α.

<u>LEMME 3.6</u>. La classe de l'extension (1) est $\alpha\smile\alpha$, le cup-produit étant associé au couplage : $(u,v) \longmapsto u\wedge v - v\wedge u$ de $\mathrm{Hom}(V'',V')\times\mathrm{Hom}(V'',V')$ vers $\mathrm{Hom}(S^2V'',\Lambda^2V')$, en notant $u\wedge v$ l'application de $V''\otimes V''$ vers Λ^2V' définie par : $u\wedge v(x\otimes y) = u(x)\wedge v(y)$ (de sorte que $u\wedge v - v\wedge u$ est bien symétrique).

<u>Démonstration</u>.

On va déterminer successivement les classes des extensions :

(i) $$0 \to V'\otimes V'' \to S(V,V'') \to S^2V'' \to 0$$

(ii) $$0 \to \Lambda^2V' \to \Lambda(V',V) \to V'\otimes V'' \to 0.$$

Donnons-nous une scission r de la suite $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$, de sorte que $dr : g \to grg^{-1} - r \in Z^1(G,\mathrm{Hom}(V'',V'))$ représente α. On a alors une scission naturelle de (i), définie par :

$R_1 : (x,y) \to [r(x)r(y)]$ où $r(x)r(y)$ désigne le produit symétrique, et $[r(x)r(y)]$ la classe de $r(x)r(y)$ mod S^2V'.
Par différentiation on obtient :

$$dR_1(g,xy) = dr(g,x)\otimes y + dr(g,y)\otimes x$$

L'application $r \longrightarrow R_1$ est manifestement G-covariante, de sorte que le cup-produit par $[dR_1]$ de $H^p(G,S^2V'')$ vers $H^{p+1}(G,V'\otimes V'')$ se traduit par le cup-produit par $[dr] = \alpha$, à condition de remplacer le couplage d'évaluation $\mathrm{Hom}(S^2V'',V'\otimes V'')\times S^2V'' \longrightarrow V'\otimes V''$ par le couplage : $(u,xy) \longrightarrow ux\otimes y + uy\otimes x$ de $\mathrm{Hom}(V'',V')\times S^2V'' \longrightarrow V'\otimes V''$. (En d'autres termes, j'ai un G-morphisme $\mathrm{Hom}(V'',V') \longrightarrow \mathrm{Hom}(S^2V'',V'\otimes V'')$ défini par le couplage ci-dessus, et la classe de l'extension (i) est l'image de α par ce G-morphisme).

La donnée de r définit de même une scission R_2 de (ii) par : $R_2(x\otimes y) = x\wedge r(y)$. D'où : $dR_2(g,x\otimes y) = x\wedge dr(g,y)$. Comme ci-dessus, on en déduit que le relèvement à travers (ii) se fait par cup-produit avec α, associé au couplage : $(u,x\otimes y) \longrightarrow x\wedge uy$ de $\mathrm{Hom}(V'',V')\times V'\otimes V''$ vers Λ^2V'.
Mettre bout-à bout les deux couplages d'évaluation $\mathrm{Hom}(S^2V'',V'\otimes V'')\times S^2V'' \longrightarrow V'\otimes V''$ et $\mathrm{Hom}(V'\otimes V'',\Lambda^2V'')\times V'\otimes V'' \longrightarrow \Lambda^2V''$ revient donc à considérer le couplage $\mathrm{Hom}(V'',V')\times \mathrm{Hom}(V'',V')\times S^2V'' \longrightarrow \Lambda^2V''$ défini par :

$$(u,v,xy) = (u,vx\otimes y + vy\otimes x) = vx\wedge uy - vy\wedge ux = (u\wedge v)(xy)$$

Or la classe de (1) est précisément $[dR_2]\cup[dR_1]$ avec le couplage de composition, donc aussi $\alpha\cup\alpha$ avec le couplage du lemme. Cqfd.

7. Dévissage général de l'opérateur d_2.

7.1. D'après la proposition 1.3. du chapitre I, l'opérateur $d_2 : E_2^{pq} \longrightarrow E_2^{p+2,q-1}$ s'obtient en relevant $e \in H^p(S,\mathrm{Ext}^q_{\underline{b}}(F_1,E_2))$ à travers la suite exacte à quatre termes :

$$0 \longrightarrow Z^{q-1}(\underline{b},\mathrm{Hom}(F_1,E_2)) \longrightarrow C^{q-1}(\underline{b},\mathrm{Hom}(F_1,E_2)) \longrightarrow Z^q(\underline{b},\mathrm{Hom}(F_1,E_2)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^q_{\underline{b}}(F_1,E_2) \longrightarrow 0,$$

puis en appliquant la projection $Z^{q-1}(\underline{b},\mathrm{Hom}(F_1,E_2)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{q-1}_{\underline{b}}(F_1,E_2)$.
D'après la remarque 1.1., comme l'inclusion $D^{(0)}_{x_0} \subset \mathrm{Hom}(F_1,E_2)$ induit une surjection en cohomologie, on peut remplacer $Z^q(\underline{b},\mathrm{Hom}(F_1,E_2))$ par $Z^q(\underline{b},D^{(0)}_{x_0}) = C^q(\underline{b},D^{(0)}_{x_0})$; et d'après le lemme 3.4. pour k = 0, on peut ensuite remplacer $C^{q-1}(\underline{b},\mathrm{Hom}(F_1,E_2))$ par $C^{q-1}(\underline{b},D^{(1)}_{x_0})$. Finalement l'opérateur d_2 s'obtiendra donc par relèvement à travers la suite exacte à quatre termes :

$$0 \longrightarrow Z^{q-1}(\underline{b},D^{(1)}_{x_0}) \longrightarrow C^{q-1}(\underline{b},D^{(1)}_{x_0}) \longrightarrow Z^{q}(\underline{b},D^{(0)}_{x_0}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{q}_{\underline{b}}(F_1,E_2) \longrightarrow 0,$$

puis en appliquant la projection $Z^{q-1}(\underline{b},D^{(1)}_{x_0}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{q-1}_{\underline{b}}(F_1,E_2)$.

Je me propose dans ce numéro d'exprimer cette opération à l'aide de certains cup-produits.

7.2. On commence par considérer le relèvement à travers la suite exacte :

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow Z^{q}_{0}(\underline{b},D^{(0)}_{x_0}) \longrightarrow Z^{q}(\underline{b},D^{(0)}_{x_0}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{q}_{\underline{b}}(F_1,E_2) \longrightarrow 0.$$

Rappelons que d'après la proposition 2.3. $\mathrm{Ext}^{q}_{\underline{b}}(F_1,E_2)$ s'identifie à $C^{q}(N_{x_0},D^{(0)}_{x_0})$, et que $Z^{q}_{0}(\underline{b},D^{(0)}_{x_0})$ est l'ensemble des $\omega \in Z^{q}(\underline{b},D^{(0)}_{x_0})$ tels que $\omega|N_{x_0} = 0$.

En fait, comme on le verra ci-après, il suffira de considérer la restriction du relèvement à l'image $(\Lambda^{q}\underline{b})^{1}$ de $\underline{b}\otimes\Lambda^{q-1}N_{x_0}$ dans $\Lambda^{q}\underline{b}$; cela conduit au relèvement à travers la suite exacte :

$$(1') \quad 0 \longrightarrow C^{q-1}(N_{x_0},\mathrm{Hom}(T^{*}_{x_0},D^{(0)}_{x_0})) \longrightarrow \mathrm{Hom}((\Lambda^{q}\underline{b})^{1},D^{(0)}_{x_0}) \longrightarrow C^{q}(N_{x_0},D^{(0)}_{x_0}) \longrightarrow 0,$$

le noyau de l'application de restriction étant identifié à $C^{q-1}(N_{x_0},\mathrm{Hom}(T^{*}_{x_0},D^{(0)}_{x_0}))$ par la formule : $\omega(\nu_2,\dots,\nu_q,\lambda\otimes v) = \omega(R(\lambda),\nu_2,\dots,\nu_q,v)$ où R est une scission quelconque de la suite :

$$(\mathrm{I}) \qquad 0 \longrightarrow N_{x_0} \longrightarrow \underline{b} \longrightarrow T^{*}_{x_0} \longrightarrow 0$$

(cela ne dépend pas du choix de R car $\omega|N_{x_0} = 0$ si ω est dans le noyau).

LEMME 3.7. L'application de relèvement à travers la suite exacte (1') est obtenue par cup-produit avec l'opposé de la classe de (I), avec le cup-produit associé au couplage :

$$(u,\omega)(\nu_2,\dots,\nu_q,\lambda\otimes v) = \omega(u(\lambda),\nu_2,\dots,\nu_q,v)$$

de $\mathrm{Hom}(T^{*}_{x_0},N_{x_0}) \times C^{q}(N_{x_0},D^{(0)}_{x_0})$ vers $C^{q-1}(N_{x_0},\mathrm{Hom}(T^{*}_{x_0},D^{(0)}_{x_0}))$.

Démonstration.

La démonstration de ce lemme et des deux suivants sont analogues à celle du lemme 3.6.; en un sens ce sont des trivialités (car de simples questions de langage). Je me permettrai donc une rédaction un peu elliptique, pour éviter les longueurs insupportables et pour démystifier un peu l'utilisation des cup-produits.

A chaque scission R de la suite exacte (I) on associe une scission r de (1') définie par :

$$r(\alpha)(b,\nu_2,\ldots,\nu_q,v) = \alpha(b-R(\dot{b}),\nu_2,\ldots,\nu_q,v) .$$

On voit aussitôt que l'application $R \longrightarrow r$ est S-covariante. Le cobord de r s'exprime par la formule :

$$dr(s,\alpha)(b,\nu_2,\ldots,\nu_q,v) = -\alpha(dR(s,\dot{b}),\nu_2,\ldots,\nu_q,v) .$$

Comme prévu cela passe au quotient par N_{x_0}, i.e. $dr(s,\alpha)$ se trouve dans le noyau de l'application de restriction. Avec la description que l'on a donné de ce noyau on obtient donc :

$$dr(s,\alpha)(\nu_2,\ldots,\nu_q,\lambda\otimes v) = -\alpha(dR(s,\lambda),\nu_2,\ldots,\nu_q,v),$$ d'où le lemme.

7.3. Passons maintenant au relèvement à travers la suite :

(2) $$0 \longrightarrow Z^{q-1}(\underline{b},D^{(1)}_{x_0}) \longrightarrow C^{q-1}(\underline{b},D^{(1)}_{x_0}) \longrightarrow Z^q_0(\underline{b},D^{(0)}_{x_0}) \longrightarrow 0.$$

En fait on s'intéresse à la projection de ce relèvement sur $\mathrm{Ext}^{q-1}_{\underline{b}}(F_1,E_2)$; il ressort alors du n°5 que l'on doit considérer les deux restrictions suivantes du relèvement :

(a) la restriction à N_{x_0}

(b) le symbole principal de la restriction à $(\Lambda^{q-1}\underline{b})^1$.

Pour un élément de $Z^{q-1}(\underline{b},D^{(1)}_{x_0})$, la restriction (a) donne naissance à un élément de $C^{q-1}(N_{x_0},D^{(0)}_{x_0})$; quant à la restriction (b), elle passe au quotient par $\Lambda^{q-1}N_{x_0} \subset (\Lambda^{q-1}\underline{b})^1$, et définit ainsi un élément ω_1 de $C^{q-2}(N_{x_0},\mathrm{Hom}(S^2T^*_{x_0},D^{(0)}_{x_0}))$ (cf. n°5). On peut vérifier qu'en fait tous les éléments de $C^{q-1}(N_{x_0},D^{(0)}_{x_0})$ (resp. $C^{q-2}(N_{x_0},\mathrm{Hom}(S^2T^*_{x_0},D^{(0)}_{x_0}))$) sont ainsi atteints, d'où les deux suites exactes :

(2'a) $$0 \longrightarrow C^{q-1}(N_{x_0},D^{(0)}_{x_0}) \longrightarrow C^{q-1}(N_{x_0},D^{(1)}_{x_0}) \longrightarrow C^{q-1}(N_{x_0},\mathrm{Hom}(T^*_{x_0},D^{(0)}_{x_0})) \longrightarrow 0$$

(2'b) $$0 \longrightarrow C^{q-2}(N_{x_0},\mathrm{Hom}(S^2T^*_{x_0},D^{(0)}_{x_0})) \longrightarrow \mathrm{Hom}((\Lambda^{q-1}\underline{b})^1,\mathrm{Hom}(T^*_{x_0},D^{(0)}_{x_0})) \longrightarrow C^{q-1}(N_{x_0},\mathrm{Hom}(T^*_{x_0},D^{(0)}_{x_0})) \longrightarrow 0.$$

On voit que dans les deux cas il suffit de connaître la restriction de $\omega \in$

$Z_0^q(\underline{b}, D_{x_0}^{(0)})$ à $(\Lambda^q \underline{b})^1$, ce qui justifie le fait d'avoir considéré cette restriction au 7.2.

<u>LEMME 3.8</u>. L'opération de relèvement à travers la suite exacte (2'a) est donnée par cup-produit avec l'opposé de la classe de l'extension :

$$\text{(II)} \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(T_{x_0}, E_1) \longrightarrow J^1_{x_0} F_1 \longrightarrow E_1 \longrightarrow 0$$

identifiée à un élément de $\mathrm{Ext}^1_S(T_{x_0}, \mathrm{End}(E_1))$, le cup-produit étant associé au couplage :

$$(\lambda \otimes u, \omega)(\nu_2, \ldots, \nu_q) = \omega(\nu_2, \ldots, \nu_q, \lambda) \text{ ou}$$

de $(T^*_{x_0} \otimes \mathrm{End}(E_1)) \times C^{q-1}(N_{x_0}, \mathrm{Hom}(T_{x_0}, D^{(0)}_{x_0}))$ vers $C^{q-1}(N_{x_0}, D^{(0)}_{x_0})$.

<u>Démonstration</u>.

Rappelons comment on a construit une scission de la suite exacte (2) au lemme 3.4. On a choisi une scission R de (I) et on a posé :

$$\Phi(\omega)(\nu_2, \ldots, \nu_q, \lambda \otimes v) = \omega(R(\lambda), \nu_2, \ldots, \nu_q, v)$$

pour $\nu_2, \ldots, \nu_q \in N_{x_0}$, $\lambda \in T^*_{x_0}$, $v \in E_1$; ensuite on a prolongé $\Phi(\omega)$ à $J^1_{x_0} F_1$ tout entier grâce au choix d'une scission ρ de (II). En fait ici $\Phi(\omega)(\nu, \lambda \otimes v)$ ne dépend pas du choix de R puisque $\omega | N_{x_0} = 0$; $\Phi(\omega) | N_{x_0}$ n'est autre que l'élément de $C^{q-1}(N_{x_0}, \mathrm{Hom}(T^*_{x_0}, D^{(0)}_{x_0}))$ associé à ω en 7.2. Il s'agit donc simplement de prolonger $\omega(\nu)$, considéré comme symbole principal, à $J^1_{x_0} F_1$ tout entier, grâce au choix de ρ.

Calculons le cocycle associé à Φ. Pour $\nu \in \Lambda^{q-1} N_{x_0}$, $\ell \in J^1_{x_0} F_1$ on a :

$$d\Phi(s, \omega)(\nu, \ell) = -\,\omega(\nu, d\rho(s, \ell(x_0))).$$

Bien entendu cela vaut 0 lorsque $\ell(x_0) = 0$, d'où la formule :

$$d\Phi(s, \omega)(\nu, v) = -\,\omega(\nu, d\rho(s, v)) \quad , \text{ pour } v \in E_1.$$

Reste à montrer que si l'on identifie $\mathrm{Hom}(E_1, \mathrm{Hom}(T_{x_0}, E_1))$ à $\mathrm{Hom}(T_{x_0}, \mathrm{End}(E_1))$, le couplage naturel $(u, \omega)(\nu_2, \ldots, \nu_q) = \omega(\nu_2, \ldots, \nu_q)$ ou de $\mathrm{Hom}(E_1, \mathrm{Hom}(T_{x_0}, E_1)) \times C^{q-1}(N_{x_0}, \mathrm{Hom}(T^*_{x_0}, D^{(0)}_{x_0}))$ vers $C^{q-1}(N_{x_0}, D^{(0)}_{x_0})$ devient le couplage du lemme; mais cela est immédiat.

<u>LEMME 3.9</u>. L'opérateur de relèvement à travers la suite exacte (2'b) s'obtient

par cup-produit avec $-\frac{1}{2}$ fois la classe de l'extension :

(III) $\quad 0 \longrightarrow N_{x_0} \otimes T^*_{x_0} \longrightarrow S(\underline{b}, T^*_{x_0}) \longrightarrow S^2(T^*_{x_0}) \longrightarrow 0.$

(cf. n°6 pour les notations), le cup-produit étant associé au couplage :

$$(u,\omega)(\nu_2,\dots,\nu_{q-1},\lambda_1,\lambda_2,v) = a\omega(\nu_2,\dots,\nu_{q-1},u(\lambda_1,\lambda_2)\otimes v)$$

(où $a\omega(\nu_2,\dots,\nu_{q-1})(\nu\otimes\lambda\otimes v) = \omega(\nu,\nu_2,\dots,\nu_{q-1})(\lambda\otimes v))$,

de $\mathrm{Hom}(S^2T^*_{x_0}, N_{x_0}\otimes T^*_{x_0}) \times C^{q-1}(N_{x_0}, \mathrm{Hom}(T^*_{x_0}, D^{(0)}_{x_0}))$ vers $C^{q-2}(N_{x_0}, \mathrm{Hom}(S^2T^*_{x_0}, D^{(0)}_{x_0}))$.

Démonstration.

Reprenons la scission Φ de la suite exacte (2) définie au lemme 3.4. On doit maintenant considérer :

$$\Phi(\omega)(b,\nu_2,\dots,\nu_{q-1})(\mu\otimes v) \qquad \text{pour } b\in\underline{b},\ \nu_2,\dots,\nu_{q-1}\in N_{x_0},\ \mu\in T^*_{x_0}$$

et $v \in E_1$.

Choisissons une scission R de (I). Alors :

$\Phi(\omega)(b,\nu,\mu\otimes v) = \omega(R(\mu), b-R(\dot{b}),\nu,v) + \frac{1}{2}\,\omega(R(\mu),R(\dot{b}),\nu,v)$

Notons $R^{\Lambda 2}$ l'application : $\Lambda^2 T^*_{x_0} \longrightarrow \Lambda^2\underline{b}$ définie par $\lambda\wedge\mu \longrightarrow R(\lambda)\wedge R(\mu)$.

Alors :

$$\begin{aligned} d\Phi(s,\omega)(b,\nu,\mu\otimes v) &= \omega(dR(s,\mu),b,\nu,v) - \frac{1}{2}\,\omega(dR^{\Lambda 2}(s,\mu\wedge\dot{b}),\nu,v) = \\ &\quad -\omega(b,dR(s,\mu),\nu,v) + \frac{1}{2}\,\omega(dR^{\Lambda 2}(s,\dot{b}\wedge\mu),\nu,v) \end{aligned}$$

Cela passe au quotient par N_{x_0} (par rapport à b) d'où :

$$d\Phi(s,\omega)(\nu,\lambda,\mu,v) = -\,\omega(dR(s,\mu),\nu,\lambda\otimes v) + \frac{1}{2}\,\omega(dR^{\Lambda 2}(s,\lambda\wedge\mu),\nu,v)$$

On peut vérifier que cette expression est en fait symétrique en λ et μ; mais c'est évident à priori car $d\Phi(s,\omega)$ doit avoir cette propriété. Donc cela s'écrit encore :

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\,(\omega(dR(s,\mu),\nu,\lambda\otimes v) + \omega(dR(s,\lambda),\nu,\mu\otimes v)) \\ &= a\omega(\nu, -\frac{1}{2}\,[dR(s,\lambda)\otimes\mu + dR(s,\mu)\otimes\lambda]\otimes v). \end{aligned}$$

Or on a vu au lemme 3.6. que l'on avait un représentant de la classe de l'extension (III) par la formule :

$$z(s)(\lambda,\mu) = dR(s,\lambda)\otimes\mu + dR(s,\mu)\otimes\lambda.$$

D'où le lemme.

7.4. Démonstration du théorème 3.1.

On dispose maintenant de tous les ingrédients nécessaires au théorème 3.1. Le terme $\sigma_1(\alpha)\smile$ e provient des lemmes 3.5., 3.7. et 3.8. ; le terme $-\frac{1}{2}Q^*(\beta)\smile$ e provient des lemmes 3.5., 3.7. et 3.9. Il suffit de composer les couplages, en raisonnant par associativité.

8. Un cas de nullité de la classe $Q^*(\beta)$.

Appelons β_1 la classe de l'extension :

(1) $\quad 0 \longrightarrow T^*_{x_0} \otimes N_{x_0} \longrightarrow S^2\underline{b}/S^2N_{x_0} \longrightarrow S^2T^*_{x_0} \longrightarrow 0.$

PROPOSITION 3.1. $Q^*(\beta_1)$ n'est autre que l'opposé de la classe de l'extension :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(T_{x_0}, N_{x_0}) \longrightarrow J^1_{x_0}N \longrightarrow N_{x_0} \longrightarrow 0$$

où $J^1_{x_0}N$ est l'espace des 1-jets de sections du fibré NX au point x_0.

Démonstration.

Choisissons une scission r pour la suite exacte $0 \longrightarrow T_{x_0} \longrightarrow \underline{b}^* \longrightarrow N^*_{x_0} \longrightarrow 0$. Soit dr le cocycle correspondant, $dr(s) = srs^{-1} - r$. Du choix de r résulte une scission de la suite exacte de jet, définie comme suit .

Notons p la projection de $\underline{b}^*$ sur T_{x_0} parallèlement au supplémentaire défini par r, i.e. $p(x) = x - r\dot{x}$ pour $x \in \underline{b}^*$. Soit U un voisinage ouvert de x_0 dans X tel que $p|U$ soit un difféomorphisme de U sur un ouvert U' de T_{x_0}. Soit φ : $U' \longrightarrow U$ le difféomorphisme réciproque. Soit ω une forme différentielle sur b^*. Alors $p^*\varphi^*\omega$ est une forme différentielle sur $\tilde{U} = p^{-1}(U)$, et on voit que $\omega - p^*\varphi^*\omega$ est nulle sur les vecteurs tangents à U; en d'autres termes on dispose maintenant d'un moyen d'associer à une forme différentielle sa "partie normale" et sa "partie tangente".

Soit $\nu \in N_{x_0}$ et considérons ν comme forme différentielle sur $\underline{b}^*$. D'après ce qui précède, $\nu - p^*\varphi^*\nu$ est une section du fibré conormal NX au-dessus de U, prenant la valeur ν au point x_0. La scission de la suite exacte de jet annoncée est alors $\nu \longrightarrow R(\nu) = j^1_{x_0}(\nu - p^*\varphi^*\nu)$.

Il est clair que si l'on change r en srs^{-1}, p est changé en sps^{-1} et donc φ

en $s\varphi s^{-1}$, et R en sRs^{-1}. En d'autres termes, la construction que l'on vient de faire est S-covariante.

On a donc : $dR(s,\nu) = j^1_{x_0}(p^*\varphi^*\nu - sp^*\varphi^*s^{-1}\nu)$. Comme on a $p^*\varphi^*(x_0) = 1_{T^*_{x_0}}$,

il est clair que $dR(s,\nu)(x_0) = 0$ (de toutes manières il devait en être ainsi puisque R est une scission). Donc le 1-jet en question s'identifie à un élément de $\mathrm{Hom}(T_{x_0}, N_{x_0})$ que je noterai $d(p^*\varphi^*\nu - sp^*\varphi^*s^{-1}\nu)(x_0)$.

Il faut noter maintenant que par définition $p^*\varphi^*\nu(x) = \nu \circ d\varphi \circ dp(x) = d\varphi_\nu \circ dp(x)$, où on rappelle que φ_ν est la restriction à X de la forme linéaire $x \longrightarrow \langle x,\nu\rangle$. Or $d\varphi_\nu(x_0) = 0$; par conséquent $d(p^*\varphi^*\nu)(x_0) = d^2\varphi_\nu \circ (dp(x_0))^2 = Q(\nu) \circ (dp(x_0))^2$, (en désignant par $(dp(x_0))^2$ la puissance symétrique seconde de $dp(x_0)$). Comme $dp(x_0)$ n'est autre que la projection p elle-même, on trouve donc finalement : $d(p^*\varphi^*\nu)(x_0) = Q(\nu) \circ p^2$. Et de même : $d(sp^*\varphi^*s^{-1}\nu)(x_0) = Q(\nu) \circ (sps^{-1})^2$. On peut donc écrire :

$$dR(s,\nu) = - Q(\nu) \circ dp^2(s).$$

Or $a \longrightarrow a \circ dp^2(s)$ est précisément le 1-cocycle de (1) associé à r (cf. lemme 3.6. suite exacte (i), sous une forme légèrement différente mais équivalente). Par ailleurs l'image réciproque d'une suite exacte $0 \longrightarrow V' \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} V'' \longrightarrow 0$ de S-modules par un S-morphisme $u : W \longrightarrow V''$ se réalise dans $V \oplus W$ comme l'ensemble des (v,w) tels que $p(v) = u(w)$; alors si ρ est une scission pour p, ρ_1 : $w \longrightarrow (\rho u(w), w)$ est une scission naturelle pour l'image réciproque, et $d\rho_1(s) = (d\rho(s), 0)$. On voit donc que le cocycle trouvé pour la suite de jet est précisément le représentant de $-Q^*(\beta_1)$ naturellement associé à r. Cqfd.

<u>COROLLAIRE 3.1</u>. Si le fibré conormal admet une connexion invariante (en particulier si S agit trivialement sur N_{x_0}), on a $Q^*(\beta) = 0$.

<u>COROLLAIRE 3.2</u>. Si $\underset{\sim}{s}$ admet un supplémentaire S-invariant dans $\underset{\sim}{a}$, on a $d_2 = 0$.

<u>Démonstration</u> .

Il y a alors sur tout fibré vectoriel du type $A \times_S E$ (ou sur toute représentation du type $\mathrm{Ind}_{S\uparrow A}\, E$) une connexion invariante (cf. lemme 3.2.), et donc $\sigma_1(\alpha) = Q^*(\beta) = 0$.

Chapitre IV : Exemples et cas particuliers.

1. Introduction.

Dans ce chapitre, j'illustre par quelques exemples et cas particuliers les résultats qui précèdent. Je traite au n°3 le cas des orbites plates (i.e. ouvertes dans un sous-espace affine de $\underline{b}^*$); pour ces orbites la situation est considérablement simplifiée. Parmi les exemples, le plus riche est celui du groupe de Poincaré généralisé $\widetilde{SO}_o(1,n) \times \mathbb{R}^{n+1}$, traité par Guichardet dans [3] pour $n = 3$ et les 1-extensions. On y voit le rôle joué par les orbites coniques, les seules en codimension 1 pour lesquelles on ne puisse pas immédiatement écrire le résultat. A certains égards cependant cet exemple est encore beaucoup trop simple : en particulier, les orbites non triviales y sont toutes de codimension 1.

Un regret : je n'ai pas d'exemple pour lequel la classe $Q^*(\beta)$ définie au chapitre III soit non nulle; mais cela est certainement dû au fait que je ne connais pas sufisamment bien des groupes sufisamment compliqués.

2. Cas des orbites non connexes.

Je vais montrer dans ce n° que l'on peut toujours se ramener au cas où l'orbite est connexe. Soit A_o la composante neutre du groupe A. Alors $A_o x_O$ est connexe, donc contenu dans la composante connexe X_O de x_O dans X. Mais $A_o S$ est ouvert et fermé dans A (parce que c'est un sous-groupe localement ouvert et fermé). Donc $A_o x_O$ est ouvert et fermé dans X, et par conséquent $A_o x_O = X_O$.

LEMME 4.1. S stabilise la composante connexe X_O de x_O dans X.

Démonstration.

On a $X_O = A_o x_O$; donc $SX_O = SA_o x_O = SA_o S^{-1} x_O$, et comme A_o est distingué dans A, on a bien $SX_O = X_O$.

Notons A' le sous-groupe ouvert et fermé $A_o S$ de A, $G' = B \rtimes A'$. Pour $i = 1,2$, notons $F_i' = \mathrm{Ind}_{B \rtimes S \uparrow G'} E_i$.

PROPOSITION 4.1. Il y a un isomorphisme naturel de $\mathrm{Ext}^n_{G'}(F'_1,F'_2)$ avec $\mathrm{Ext}^n_G(F_1,F_2)$.

Démonstration.

D'après le lemme de Shapiro, $\mathrm{Ext}^n_{G'}(F'_1,F'_2)$ et $\mathrm{Ext}^n_G(F_1,F_2)$ sont respectivement isomorphes à $\mathrm{Ext}^n_{B\rtimes S}(F'_1,E_2)$ et $\mathrm{Ext}^n_{B\rtimes S}(F_1,E_2)$.

Or, l'application de restriction à A' donne un $B\rtimes S$-morphisme naturel de F_1 vers F'_1, d'où une application :

(1) $$\mathrm{Hom}(F'_1,E_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F_1,E_2) \quad .$$

Notons $X_1 = X\backslash X_0$, $A_1 = A\backslash A'$. On peut considérer A_1 comme un S-fibré principal au-dessus de X_1, et on peut définir avec les notations du chapitre III n°3 : $F''_1 = \mathrm{Ind}_{S\uparrow A_1} E_1$. On a d'autre part une action de S à gauche sur le S-fibré principal A_1, donc sur F''_1; et l'on voit aussitôt que l'application $f \longrightarrow (f',f'')$, avec $f' = f|A'$, $f'' = f|A_1$, est un isomorphisme de $B\rtimes S$-modules de F_1 sur $F'_1 \oplus F''_1$. Il en résulte en particulier que l'application (1) ci-dessus est une injection et que son image est facteur direct dans $\mathrm{Hom}(F_1,E_2)$ comme EVT et comme $B\rtimes S$-module.

Appliquant la suite spectrale de Hochschild-Serre par rapport à B, et compte tenu de la proposition 2.2.(i) du chapitre II on voit que l'injection (1) induit un isomorphisme au niveau des suites spectrales pour $r \geq 2$, et donc en cohomologie. Cqfd.

COROLLAIRE 4.1. Quitte à remplacer A par A', on peut supposer que l'orbite X est connexe, pour l'étude de la suite spectrale qui fait l'objet de ce travail.

3. Cas des orbites plates.

Je dirai que l'orbite (connexe) X est plate si elle est ouverte dans un sous-espace affine de $\underline{b}$.

LEMME 4.2. L'orbite X est plate si et seulement si le deuxième tenseur fondamental Q au point x_0 (chapitre II, n°5) est nul.

Démonstration.

a. La nécessité est évidente; en effet les fonctions φ_ν sont constantes sur X, donc $d^2\varphi_\nu(x_0) = 0$ (notations du chapitre II, n°5).

b. Démontrons maintenant la suffisance. En procédant en chaque point $x \in X$ comme en x_0, on peut définir le deuxième tenseur fondamental $Q \in \mathrm{Hom}(NX, S^2T^*X)$, morphisme de A-fibrés vectoriels. Il est clair que si $Q(x_0)$ est nul, Q est en fait <u>identiquement</u> <u>nul</u> à cause de la covariance. Notons $R \in \mathrm{Hom}(S^2TX, N^*X)$ sa transposée.

Choisissons maintenant une structure euclidienne quelconque sur $\underline{b}^*$, ce qui permet de "remonter" le fibré $\underline{b}^*/NX = N^*X$ en un fibré $N'X \subset X \times \underline{b}^*$, avec $N'_x = T_x^{\perp}$ (au sens de la métrique). R s'identifie alors à un élément V de $\mathrm{Hom}(S^2TX, N'X)$. Soit $\overline{\nabla}$ la dérivation covariante associée à la connexion riemannienne sur $\underline{b}^*$ (qui est ici la connexion plate, bien sûr), ∇ la dérivation covariante sur X obtenue à partir de $\overline{\nabla}$ par projection orthogonale sur TX (cf. [9] section 6.4.). Remarquons que l'on a :

$$\overline{\nabla}_\xi(\eta) = \nabla_\xi(\eta) + V(\xi,\eta)$$

pour tous champs de vecteurs ξ,η, sur X (cela se vérifie par exemple dans une carte locale), de sorte que $V(\xi,\eta)$ est la <u>partie</u> <u>normale</u> de $\overline{\nabla}_\xi(\eta)$, ce qui est bien par définition le deuxième tenseur fondamental (loc. cit.) de la sous-variété X plongée dans $\underline{b}^*$ (d'où la terminologie adoptée pour Q).

On voit ainsi que $Q = 0$ si et seulement si $\nabla = \overline{\nabla}$ le long de X. Mais cela entraîne que les géodésiques de ∇ dans X sont aussi des géodésiques de $\overline{\nabla}$ dans $\underline{b}^*$, c'est-à dire des segments de droite. En particulier tout point de X admet un voisinage qui est <u>convexe</u> (au sens habituel) dans $\underline{b}^*$, et qui est donc ouvert dans le sous-espace affine qu'il engendre. Ce sous-espace affine est localement constant, donc constant car on a pris X connexe. Cqfd.

<u>PROPOSITION 4.2</u>. Si l'orbite (connexe) X est plate, et si en outre on peut choisir une connexion invariante sur F_1, on a $d_r = 0$ pour tout $r \geq 2$.

<u>Démonstration</u>.

Reprenons dans ce cas la suite exacte :

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow Z^q(\underline{b}, D_{x_0}^{(k+1)}) \longrightarrow C^q(\underline{b}, D_{x_0}^{(k+1)}) \longrightarrow Z_0^{q+1}(\underline{b}, D_{x_0}^{(k)}) \longrightarrow 0$$

et les notations du lemme 3.4., chapitre III.

On remarque que N_{x_0} agit maintenant <u>trivialement</u> sur $\mathrm{Hom}(F_1,E_2)$ et donc sur tous les $D_{x_0}^{(k)}$. Mais alors $d(\Phi(\omega))(\nu_0,\ldots,\nu_q) = 0$ pour tous $\nu_0,\ldots,\nu_q \in N_{x_0}$

(alors qu'en général on a seulement nullité du symbole principal). Par une récurrence évidente, on voit maintenant que si $\omega \in Z^{q+1}(\underline{b},D_{x_0}^{(k)})$, $\omega|N_{x_0}$ prend ses valeurs dans $D_{x_0}^{(0)}$, et $[\omega] \in \mathrm{Ext}_{\underline{b}}^{q}(F_1,E_2)$ n'est autre que $\omega|N_{x_0}$.

Donc si l'on s'intéresse à la projection sur $\mathrm{Ext}_{\underline{b}}^{q}(F_1,E_2)$ du relèvement à travers la suite exacte (1), il suffit de connaître la restriction de ω à $(\Lambda^q\underline{b})^1$ (image de $\underline{b}\otimes\Lambda^q N_{x_0}$ dans $\Lambda^{q+1}\underline{b}$). Comme $\omega|N_{x_0} = 0$ lorsque $\omega \in Z_0^{q+1}(\underline{b},D_{x_0}^{(k)})$, cette restriction définit en fait un élément bien déterminé de $C^q(N_{x_0},T_{x_0}^{*}\otimes S^kT_{x_0}^{*}\otimes D_{x_0}^{(0)})$, et l'application Φ consiste simplement à symétriser cet élément, puis à lui associer un opérateur différentiel dont il sera le symbole principal, et ce grâce au choix d'une scission de la suite :

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow S^{k+1}T_{x_0}\otimes E_1 \longrightarrow J_{x_0}^{k+1}F_1 \longrightarrow J_{x_0}^{k}F_1 \longrightarrow 0$$

(c'est à dire une différentielle totale $k+1^{\text{ème}}$ au sens de [8] §9). Lorsque l'on a choisi une connexion sur l'espace F_1 <u>et</u> une connexion sur le fibré tangent, il en résulte une différentielle totale $k^{\text{ème}}$ canonique (loc. cit. théorème 7), et on voit aisément que si les deux connexions sont A-invariantes, ces différentielles totales sont des S-morphismes. Or, dans le cas d'une orbite plate, il y a toujours une connexion invariante sur le fibré tangent (par exemple la connexion plate, définie par le fait que sa forme de connexion est nulle en coordonnées affines). Par conséquent si F_1 admet une connexion invariante, les suites exactes (2) sont scindées sous S, et l'application $\omega \longrightarrow \Phi(\omega)|N_{x_0}$ est un S-morphisme. Ce qui veut dire que la projection sur $\mathrm{Ext}_{\underline{b}}^{q}(F_1,E_2)$ du relèvement d'une classe $\theta \in H^p(S,Z_0^{q+1}(\underline{b},D_{x_0}^{(k)}))$ est nulle.

La proposition résulte maintenant de la proposition 1.3.(b), compte tenu de la remarque 1.1. qui suit cette proposition.

4. <u>Cas des orbites de codimension 1</u>.

Supposons que l'orbite X soit de codimension 1 dans $\underline{b}^*$. Le sous-espace N_{x_0} de $\underline{b}$ est alors de dimension 1, ce qui entraîne d'après la proposition 2.3. que dans la suite spectrale de Hochschild-Serre seuls les termes E_r^{pq} pour $q \leq 1$ interviennent; en outre $d_r = 0$ pour $r \geq 3$, ce qui permet d'identifier E_3 à E_∞. D'autre part dans l'expression du d_2 n'intervient que la classe

$\sigma_1(\alpha)$ (cf. théorème 3.1.) et on peut réénoncer le théorème 3.1. sous la forme simplifiée suivante :

PROPOSITION 4.3. Supposons l'orbite X de codimension 1. On a alors, outre l'égalité $\mathrm{Hom}_G(F_1,F_2) = \mathrm{Hom}_S(E_1,E_2)$, la longue suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_S^1(E_1,E_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}_G^1(F_1,F_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(N_{x_0},\mathrm{Hom}(E_1,E_2)) \xrightarrow{d_2} \mathrm{Ext}_S^2(E_1,E_2) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow \mathrm{Ext}_S^p(N_{x_0},\mathrm{Hom}(E_1,E_2)) \xrightarrow{d_2} \mathrm{Ext}_S^{p+2}(E_1,E_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}_G^{p+2}(F_1,F_2) \longrightarrow \dots.$$

obtenue à l'aide de l'identification $E_3 = E_\infty$ et des suites exactes

$$0 \longrightarrow E_\infty^{p,0} \longrightarrow \mathrm{Ext}_G^p(F_1,F_2) \longrightarrow E_\infty^{p-1,1} \longrightarrow 0.$$

L'opérateur d_2 est donné par cup-produit avec la classe $\sigma_1(\alpha)$ du théorème 3.1., le cup-produit étant associé au couplage $(\omega,\nu\otimes u) \longrightarrow \omega(\nu)$ ou de $\mathrm{Hom}(N_{x_0},\mathrm{Hom}(E_1,E_2)) \times N_{x_0}\otimes \mathrm{End}(E_1)$ vers $\mathrm{Hom}(E_1,E_2)$.

La classe $\sigma_1(\alpha)$ est nulle si l'une des deux conditions suivantes est remplie :

(a) Le sous-espace T_{x_0} de $\underline{b}^*$ admet un supplémentaire S-invariant.

(b) Il y a sur F_1 une connexion A-invariante (cf. chapitre III n°3).

En fait la condition (a) ci-dessus est souvent remplie, comme le montre le lemme ci-dessous :

LEMME 4.3. (cf. [3] corollaire 7.4.)

Supposons l'orbite X de codimension 1. Alors si X n'est pas un cône de sommet O, T_{x_0} admet un supplémentaire S-invariant dans $\underline{b}^*$ (à savoir la droite $\mathbb{R}x_0$).

Démonstration.

Il s'agit de voir que x_0 n'est pas dans T_{x_0}. Supposons le contraire; alors $x_0 = Lx_0$, avec $L \in \underline{a}$, algèbre de Lie de A. Alors $\exp(tL)x_0 = e^t x_0$, donc X contient la demi-droite engendrée par x_0, et par conséquent est un cône, ce qui est contraire à l'hypothèse.

COROLLAIRE 4.2. Lorsque l'orbite X est de codimension 1 et n'est pas un cône de sommet O, on a $\mathrm{Ext}_G^n(F_1,F_2) = \mathrm{Ext}_S^n(E_1,E_2) \oplus \mathrm{Ext}_S^{n-1}(E_1,E_2)$.

5. Exemple 1 : le groupe affine.

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. Soient $A = GL(V)$, $B = V$, avec l'action naturelle de A sur B ; $G = V \rtimes GL(V)$ est alors le groupe affine de V.

Il ya deux orbites : $V^*\setminus\{0\}$, qui est ouverte, et $\{0\}$, qui est de dimension 0. Dans les deux cas, T_{x_0} admet évidemment un supplémentaire S-invariant.

1^er^ cas : $X = \{0\}$.

On a $S = GL(V) = A$, et $\mathrm{Ext}^n_G(F_1,F_2) = \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Ext}^p_A(\Lambda^q V,\mathrm{Hom}(E_1,E_2))$. On est donc ramené à un calcul de S-cohomologie.

2^e^ cas : $X = V^*\setminus\{0\}$.

Choisissons $x_0 \neq 0$ dans V^*, et soit $W = x_0^{\perp} \subset V$. Alors W est un hyperplan vectoriel de V, et S s'identifie à $W \rtimes GL(W)$; par ailleurs $E_2^{pq} = 0$ pour tout $q > 0$. Donc : $\mathrm{Ext}^n_G(F_1,F_2) = \mathrm{Ext}^n_S(E_1,E_2)$; c'est encore un calcul de S-cohomologie.

Comme S est à nouveau un produit semidirect, on est amené à prendre des représentations induisantes du type considéré dans ce travail. De proche en pro proche, on est ainsi ramené au cas où les E_i sont toutes deux associées à l'orbite triviale, c'est-à dire au premier cas.

Remarque 4.1. Si V possède une structure complexe (resp. quaternionique) on a les mêmes résultats en prenant $A = GL_{\mathbb{C}}(V)$ (resp. $GL_{\mathbb{H}}(V)$).
On peut aussi prendre $A = SL(V)$.

6. Exemple 2 : le groupe des déplacements d'un espace euclidien.

On prend maintenant pour V un espace vectoriel euclidien, et on prend $A = SO(V)$, $B = V$, toujours avec l'action naturelle de A sur B. Identifions V à V^* grâce au produit scalaire. Ici les orbites sont les sphères $\|x\| = \rho$, $\rho > 0$, et l'origine. Mis à part cette dernière, ce sont donc des hypersurfaces.

1^er^ cas : $X = \{0\}$.

Alors $S = A = SO(V)$. Comme S est compact, $\mathrm{Ext}^p_S(\Lambda^q V,\mathrm{Hom}(E_1,E_2)) = 0$ si $p > 0$.
Donc : $\mathrm{Ext}^n_G(F_1,F_2) = \mathrm{Hom}_S(\Lambda^n V,\mathrm{Hom}(E_1,E_2))$.

2^e^ cas : $X \neq \{0\}$.

Traitons le cas $\rho = 1$ par exemple. Choisissons $x_0 \in X$; soit $W = x_0^{\perp}$. Alors S s'identifie à $SO(W)$; c'est à nouveau un groupe compact. On a donc $E_2^{pq} = 0$ si $q > 1$ (car l'orbite est de codimension 1) ou si $p > 0$ (car S est compact).
Comme de plus l'action de S sur $N_{x_0} = \mathbb{R}x_0$ est triviale, on obtient :

$$\begin{cases} Ext^0_G(F_1,F_2) \simeq Hom_S(E_1,E_2) \\ Ext^1_G(F_1,F_2) \simeq Hom_S(E_1,E_2) \end{cases}$$

$Ext^n_G(F_1,F_2) = 0$ si $n > 1$.

7. Exemple 3 : le groupe de Poincaré généralisé $Spin(1,n) \times \mathbb{R}^{n+1}$.

7.1. On aborde maintenant une situation plus riche, mais encore relativement simple, où l'on aura un exemple de non-nullité de l'application d_2. Le groupe de Poincaré ordinaire $Spin(1,3) \rtimes \mathbb{R}^4$ est d'ailleurs celui qui a servi d'impulsion à l'article [4]. Pour ne pas m'encombrer de cas particuliers, je vais supposer $n \geq 3$, les cas $n = 1$ ou $n = 2$ pouvant se traiter par les mêmes méthodes (attention, pour $n = 2$ le revêtement universel de $SO_o(1,2)$ est à une infinité de feuillets; $\widetilde{SO}_o(1,2)$ est isomorphe à $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$).

Soit U un espace vectoriel réel de dimension n+1, muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée de signature (1,n), que l'on note $< \, , \, >$. On identifie U à U^* à l'aide de cette forme.
On choisit un vecteur e dans U tel que $<e,e> = 1$; il définit et oriente un "axe des temps". On note $V = e^{\perp}$; c'est un espace vectoriel de dimension n muni par restriction de $< \, , \, >$ d'une forme bilinéaire symétrique définie négative. On définit alors un produit scalaire sur V en posant $(v|v') = - <v,v'>$; on note $\|v\|$ la norme de v pour ce produit scalaire. Ainsi U s'identifie à la somme orthogonale $\mathbb{R} \perp V$, et on a : $<(t,v),(t',v')> = tt' - (v|v')$. Soit $Spin_o(U)$ le revêtement universel du groupe $SO_o(U)$ (groupe des automorphismes de U conservant $< \, , \, >$, de déterminant 1 et conservant le sens d'écoulement du temps, i.e. $<ae,e> > 0$ pour tout $a \in SO_o(U)$). $Spin_o(U)$ est un revêtement à deux feuillets de $SO_o(U)$.
On prend alors $A = Spin_o(U)$, $B = U$, avec l'action naturelle de A sur B.

7.2. Les orbites de A dans B sont de quatre types :

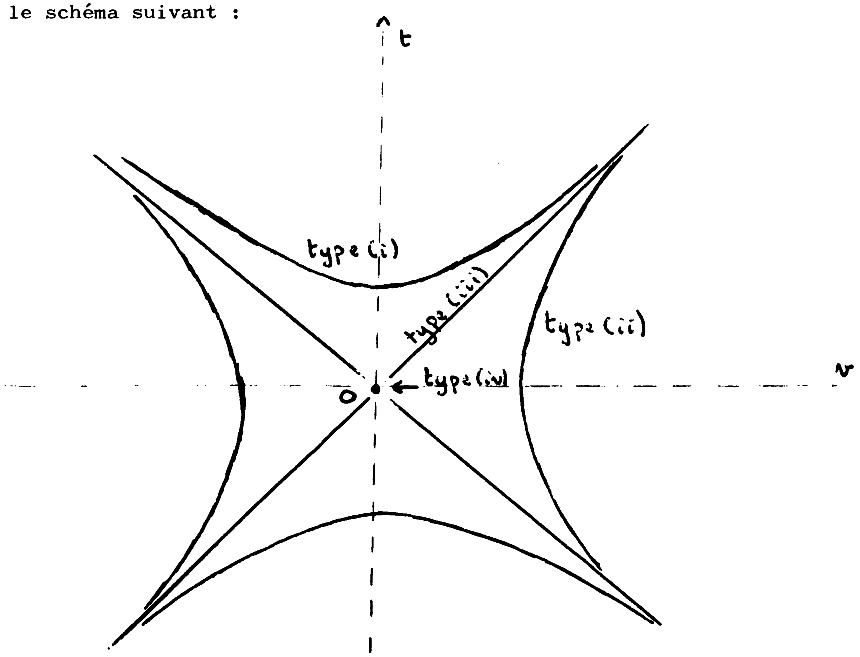
(i) une famille d'hyperboloides à deux nappes (chaque nappe est une orbite) définie par $t^2 - \|v\|^2 = \rho$, $\rho > 0$,

(ii) une famille d'hyperboloides à une nappe définie par $t^2 - \|v\|^2 = \rho$, $\rho < 0$,

(iii) deux demi-cônes épointés $t = \pm \|v\|$,

(iv) l'origine.

Les orbites des trois premiers types sont de codimension 1, et on peut faire le schéma suivant :



On va étudier successivement ces quatre cas, le plus difficile étant de loin le troisième.

7.3. Orbites de type (i).

On prend par exemple la nappe passant par e, et on choisit e = (1,0) comme point distingué. On a alors S = Spin(V) (image réciproque dans $Spin_o(U)$ de SO(V), qui s'identifie au revêtement universel de SO(V)).

On est dans un cas d'application du corollaire 4.2., d'où :

$$Ext^k_G(F_1,F_2) = Ext^k_S(E_1,E_2) \oplus Ext^{k-1}_S(E_1,E_2)$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} Hom_G(F_1,F_2) \simeq Hom_S(E_1,E_2) \\ Ext^1_G(F_1,F_2) \simeq Hom_S(E_1,E_2) \end{cases}$$

$$Ext^k_G(F_1,F_2) = 0 \text{ si } k > 1.$$

7.4. Orbites de type (ii).

On considère par exemple l'orbite d'équation $t^2 - \|v\|^2 = 1$, que l'on pointe en $x_0 = (0,v_0)$, avec $\|v_0\| = 1$.
Le stabilisateur est ici $\widetilde{SO}_o(U_o)$, avec $U_o = x_0^{\perp} = \mathbb{R}e \oplus W$ où W est l'orthogonal de v_0 dans l'espace euclidien V, et en notant $\breve{SO}_o(U_o)$ l'image réciproque de $SO_o(U_o)$ dans $Spin_o(U)$, c'est-à dire $Spin_o(U_o)$ si $n \geq 4$, et un certain revêtement à deux feuillets de $SO_o(U_o)$ si $n = 3$ (ce revêtement est d'ailleurs isomorphe à $SL(2,\mathbb{R})$).
On a là encore $Ext^k_G(F_1,F_2) \simeq Ext^k_S(E_1,E_2) \oplus Ext^{k-1}_S(E_1,E_2)$, ce qui ramène le problème à un calcul d'extensions entre représentations d'un groupe semi-simple, pour lequel de toutes autres méthodes seront bien entendu nécessaires.

7.5. L'orbite triviale.

Comme toujours $Ext^k_G(F_1,F_2) = \bigoplus_{p+q=k} Ext^p_S(\Lambda^q U, Hom(E_1,E_2))$, avec $S = Spin_o(U)$, ce qui ramène à nouveau le problème au cas d'un groupe semisimple.

7.6. Orbites de type (iii).

On choisit un point v_0 de la sphère unité de V, et on considère la nappe du cône passant par $x_0 = (1,v_0)$; x_0 est un vecteur isotrope de U. L'espace tangent T_{x_0} contient x_0 et est un hyperplan dégénéré de U. Soit $W = T_{x_0} \cap V$ (c'est aussi l'orthogonal de v_0 dans V); notons $\widetilde{SO}(W)$ l'image réciproque de $SO(W)$ dans $Spin_o(U)$.

a. Déterminons d'abord le stabilisateur S de x_0. Soit S_1 l'image de S dans $SO_o(U)$. Comme S_1 stabilise T_{x_0}, un élément $s_1 \in S_1$ possède dans la décomposition $U = \mathbb{R}e \oplus \mathbb{R}x_0 \oplus W$ une expression en "blocs" de la forme :

$$s_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & 1 & {}^t w \\ w_1 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

avec $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $w,w_1 \in W$ (on note ${}^t w$ la forme linéaire : $w' \longrightarrow (w'|w)$ définie sur W par w), et $\sigma \in O(W)$.
On sait (cf. [1] théorème 3.17.) que s_1 est entièrement déterminé par sa restriction à T_{x_0} ; donc α, β et w_1 doivent s'exprimer en fonction de w et σ.

Et en effet, en écrivant que s_1 conserve la forme $< \; , \; >$, on trouve :

$$\alpha = 1, \; \beta = \frac{1}{2}\|w\|^2 \; , \; w_1 = \sigma w \, .$$

Comme en outre s_1 doit être de déterminant 1, on doit avoir $\sigma \in SO(W)$. Réciproquement, si $\sigma \in SO(W)$ et $w \in W$ sont donnés, on définit un élément s_1 de S_1 en posant :

$$(1) \qquad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\|w\|^2 & 1 & {}^t w \\ \sigma w & 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

On voit donc que l'opération de restriction à T_{x_0} définit un isomorphisme de S_1 sur $W \rtimes SO(W)$, l'isomorphisme réciproque étant donné par la formule (1). Par conséquent le stabilisateur S s'identifie à $W \rtimes \widetilde{SO}(W)$.

b. Cherchons maintenant la classe de l'extension :

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow T_{x_0} \longrightarrow U \longrightarrow U/T_{x_0} \longrightarrow 0.$$

Prenons $[e]$ comme base de U/T_{x_0}. Il ressort de la formule (1) que S agit <u>trivialement</u> sur U/T_{x_0}, ce qui permettra d'identifier la classe de l'extension (2) à un élément de $H^1(S, T_{x_0})$. Choisissons la scission $[e] \longrightarrow e$ de la suite (1), et calculons le cocycle associé.

Pour plus de clarté dans les notations, notons $K = \widetilde{SO}(W)$ le compact maximal de S, $\underline{k}$ son algèbre de Lie. Alors $\underline{s}/\underline{k}$ s'identifie à W, comme espace vectoriel et comme K-module. D'après le théorème de van Est, on a $H^p(S, T_{x_0}) = H^p(\underline{s}, K, T_{x_0})$ pour tout $p \geq 0$. Le complexe de $(\underline{s}, K)$-cohomologie de T_{x_0} est donné par :

$$C^p(\underline{s}, K, T_{x_0}) = \mathrm{Hom}_K(\Lambda^p W, T_{x_0}),$$

et comme ici $\underline{s}$ est produit semidirect de $\underline{k}$ par W considéré comme algèbre de Lie commutative, le cobord s'écrit simplement :

$$d\omega(w_0, \ldots, w_p) = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j w_j \omega(w_0, \ldots, \hat{w}_j, \ldots, w_p).$$

Par conséquent le cocycle de (2) associé au choix de la scission ci-dessus (qui, comme on le constate aisément, est K-invariante), est :

$w \longrightarrow z_1(w) = we = w$ (d'après la formule (1), dérivée au point $(0,1)$ de $W \rtimes K$).

Comme W agit trivialement sur $(T_{x_0})^K = \mathbb{R}x_0$, on a $B^1(\underline{s},K,T_{x_0}) = 0$, et on peut donc identifier z_1 à sa classe de cohomologie. Dans cette identification, la classe de l'extension (2) est l'injection canonique $W \longrightarrow T_{x_0}$.

c. On poursuit le relèvement, en considérant la suite :

(3) $$0 \longrightarrow \underline{s} \longrightarrow \underline{a} \longrightarrow T_{x_0} \longrightarrow 0.$$

L'image de z_1 par relèvement à travers cette suite exacte donnera la classe α du théorème 3.1., dont il ne restera plus qu'à prendre l'image par la représentation σ_1.

Comme on a vu que z_1 prenait ses valeurs dans $W \subset T_{x_0}$, on peut en fait se restreindre à la suite :

(3') $$0 \longrightarrow \underline{k} \longrightarrow \underline{so}(V) \longrightarrow W \longrightarrow 0 \quad .$$

Une scission naturelle K-invariante de la suite exacte (3') est donnée par :

(4) $$w \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -{}^t w \\ w & 0 \end{pmatrix}$$

Il faut maintenant déterminer l'action de W, considérée comme sous-algèbre de $\underline{s}$, sur les éléments de la forme (4). Pour cela il sera commode de changer de décomposition de U et d'écrire toutes les matrices relativement à la décomposition : $U = \mathbb{R}e \oplus \mathbb{R}v_0 \oplus W$. Dans cette décomposition, le terme général de l'algèbre de Lie s s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & {}^t w \\ 0 & 0 & {}^t w \\ w & -w & M \end{pmatrix} \qquad \text{avec } w \in W,\ M \in \underline{k} = \underline{so}(W).$$

Si on note c la scission définie par la formule (4), il est maintenant clair que pour w, w' $\in$ W on a la formule :

$$w.c(w') = w \otimes {}^t w' - w' \otimes {}^t w \in \underline{k}.$$

On peut encore noter cela $w.c(w') = w \wedge w'$, dans l'identification naturelle de $\underline{k}$ avec $\Lambda^2 W$. Notons $z_2 = dc \in Z^2(\underline{s},K,\underline{s})$. Avec l'identification ci-dessus, on a donc $z_2 = 2.1_{\Lambda^2 W}$. Ici encore on voit facilement que $B^2(\underline{s},K,\underline{s}) = 0$, ce qui permet d'identifier z_2 à sa classe de cohomologie α.

d. On a maintenant en main tous les ingrédients qui interviennent dans la suite spectrale. A cause de l'action triviale de S sur N_{x_0}, la longue suite exacte de la proposition 4.3. peut s'écrire :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_S(E_1,E_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_G(F_1,F_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(E_1,E_2) \xrightarrow{d_2} \mathrm{Ext}^2_S(E_1,E_2) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow \mathrm{Ext}^p_S(E_1,E_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}^p_G(F_1,F_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{p-1}_S(E_1,E_2) \xrightarrow{d_2} \mathrm{Ext}^{p+1}_S(E_1,E_2) \longrightarrow \dots$$

la flèche d_2 étant le cup-produit avec $[2\sigma_1] \in \mathrm{Ext}^2_S(E_1,E_1)$, associé au couplage de composition $\mathrm{Hom}(E_1,E_2) \times \mathrm{End}(E_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}(E_1,E_2)$.

Ce n'est qu'ici que je vais me restreindre au cas où les représentations E_i sont elles-mêmes du type envisagé dans ce travail, associées au produit semidirect $S = W \rtimes K$.

* Si les E_i ne sont pas associées à la même orbite dans W, $\mathrm{Ext}^k_G(F_1,F_2) = 0$ pour tout $k \geq 0$.

* Si les E_i sont associées à la même orbite non triviale, on a vu au n°6 que $\mathrm{Ext}^2_S(E_1,E_1) = 0$. Par conséquent, aussi curieux que cela puisse paraître, le cocycle $2\sigma_1$ est en fait <u>trivial</u> (i.e. un cobord) dans ce cas, et donc $d_2 = 0$. Soit $w_0 \in W$ le point distingué de l'orbite considérée, K' le stabilisateur de w_0 dans K (K' est donc compact), E'_i la représentation de K' induisant E_i. Compte tenu du n°6 et du fait que $d_2 = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}_G(F_1,F_2) \simeq \mathrm{Hom}_{K'}(E'_1,E'_2) \\ \mathrm{Ext}^1_G(F_1,F_2) \simeq \mathrm{Hom}_{K'}(E'_1,E'_2) \oplus \mathrm{Hom}_{K'}(E'_1,E'_2) \\ \mathrm{Ext}^2_G(F_1,F_2) \simeq \mathrm{Hom}_{K'}(E'_1,E'_2) \end{cases}$$
$$\mathrm{Ext}^k_G(F_1,F_2) = 0 \text{ si } k \geq 3.$$

* Enfin si les E_i sont toutes deux associées à l'orbite triviale, on peut les considérer comme des K-modules sur lesquels W agit trivialement. Alors $\mathrm{Ext}^k_S(E_1,E_2) \simeq \mathrm{Hom}_K(\Lambda^k W, \mathrm{Hom}(E_1,E_2))$. Si on suppose les E_i irréductibles, par exemple, on est donc conduit à des questions concernant la décomposition des produits tensoriels de représentations irréductibles de <u>so</u>(W) (de K si $n = 3$; si $n \geq 4$ on peut remplacer K par son algèbre de Lie). C'est encore assez compliqué et je vais me restreindre à trois cas particuliers, toujours en supposant les E_i irréductibles :

(a) $\sigma_1 = 0$. Alors $\mathrm{Ext}^k_G(F_1,F_2) \simeq \mathrm{Hom}_K(\Lambda^k W, E_2) \oplus \mathrm{Hom}_K(\Lambda^{k-1} W, E_2)$.

(b) $k = 1$. Alors :
$\mathrm{Ext}^1_G(F_1,F_2) \simeq \mathrm{Hom}_K(W, \mathrm{Hom}(E_1,E_2))$ si $\sigma_1 \neq 0$ (car dans tous les cas l'applica-

tion $d_2 : E_2^{01} \to E_2^{20}$ est alors <u>injective</u>).

$Ext_G^1(F_1,F_2) \simeq Hom_K(W,E_2)$ si $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 \neq 0$.

$Ext_G^1(F_1,F_2) \simeq Hom_K(E_1,E_1) \simeq \mathbb{C}$ si $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$.

(c) $n = 3$. C'est le cas du groupe de Poincaré ordinaire. Alors W est de dimension 2, K est un revêtement d'ordre 2 de $SO(W)$. Notons χ_m, $m \in \mathbb{Z}$, les caractères de K, de sorte que $W_{\mathbb{C}} \simeq \chi_2 \oplus \chi_{-2}$. Soit $E_i = \chi_{m_i}$. Alors la longue suite exacte de la proposition 4.3. s'écrit (en posant $m = m_2 - m_1$) :

$$0 \to Hom_K(\chi_2 \oplus \chi_{-2},\chi_m) \to Ext_G^1(F_1,F_2) \to Hom_K(\chi_0,\chi_m) \xrightarrow{d_2} Hom_K(\chi_0,\chi_m) \to$$

$$Ext_G^2(F_1,F_2) \to Hom_K(\chi_2 \oplus \chi_{-2},\chi_m) \to 0 \to Ext_G^3(F_1,F_2) \to Hom_K(\chi_0,\chi_m) \to 0.$$

où la flèche d_2 est l'identité si $m_1 \neq 0$, 0 si $m_1 = 0$.

On a donc le résultat suivant :

Si $m \neq 0, \pm 2$, $Ext_G^k(F_1,F_2) = 0$ pour tout $k \geq 0$.

Si $m = \pm 2$, $\dim(Ext_G^1(F_1,F_2)) = \dim(Ext_G^2(F_1,F_2)) = 1$; $Ext_G^k(F_1,F_2) = 0$ si $k \neq 1,2$.

Si $m = 0$:

si $m_1 = m_2 = 0$, $\dim(Ext_G^k(F_1,F_2)) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq k \leq 3 \\ 0 \text{ si } k > 3 \end{cases}$

si $m_1 = m_2 \neq 0$, $\dim(Ext_G^k(F_1,F_2)) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 0 \text{ ou } 3 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Appendice : Construction directe d'une suite spectrale de Hochschild-Serre associée à un sous-groupe distingué fermé.

1. Position du problème.

Soit G un groupe de Lie, H un sous-groupe distingué fermé de G, E un G-module C^∞. On désire construire une suite spectrale convergeant vers $H^*(G,E)$ et dont le terme E_2 s'exprime à partir des groupes H et G/H.

Dans l'article originel de Hochschild et Serre [6] on donne deux méthodes pour y parvenir. La première, dite "méthode générale", a été exposée au chapitre I n° 7. Elle a l'avantage d'être élégante et rapide, mais elle est souvent moins adaptée aux calculs explicites que la seconde, dite "méthode directe"; c'est pourquoi je vais montrer dans cet appendice comment on peut adapter cette dernière au cas des groupes de Lie. Malheureusement, l'utilisation de sections locales oblige à compliquer encore les calculs par rapport à [6], ce qui n'est pas peu dire.

Les deux constructions conduisent au terme $E_2^{pq} = H^p(G/H, H^q(H,E))$; mais on ne sait pas à ma connaissance si les termes suivants coincident en général. Je montrerai cependant que lorsque G est un produit semidirect $G = K \ltimes H$, les deux suites spectrales sont isomorphes pour $r \geq 2$, ce qui explique que j'aie pu me contenter de la première dans ce travail. Je ne sais pas si ce résultat était déjà connu, même pour les groupes discrets (pour lesquels on peut faire une démonstration analogue).

Dans tout cet appendice, on suppose que les complexes de H-cohomologie de E admettent la résolution standard pour G/H (cf. ch. I n°5).

2. Définitions.

On travaille avec la résolution standard normalisée du G-module E, et on considère le complexe des cochaînes inhomogènes normalisées, noté $C^*(G,E)$ (cf. 0.3.). Comme dans [6], si k et l sont des entiers, $k \leq l$, et si $\gamma_k,\ldots,\gamma_l$ sont des éléments de G, on note γ_k^l pour $(\gamma_k,\ldots,\gamma_l)$.

On définit une filtration $(C_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ de $C = C^*(G,E)$ par :

$$C_p^n = C^n \text{ si } p \leq 0$$

$$C_p^n = \{f \in C^n \mid f(\gamma_1^q,\gamma_{q+1}\sigma_1,\ldots,\gamma_{q+p}\sigma_p) = f(\gamma_1^n) \text{ pour tous } \gamma_1,\ldots,\gamma_n \in G,$$
$$\sigma_1,\ldots,\sigma_p \in H,\ p+q = n\} \qquad \text{si } 0 \leq p \leq n.$$

$$C_p^n = 0 \text{ si } p > n.$$

On remarque notamment que comme les cochaînes sont normalisées, $f \in C_p^n$ s'annule dès que l'un des p derniers arguments est dans H.

On vérifie aussitôt que les C_p sont des sous-complexes de C. Il est clair que la condition de convergence de 0.6. est remplie, d'où une suite spectrale $(E_r)_{r\geq 0}$ convergeant vers $H^*(G,E)$.

3. Le terme E_0^{pq}

Par définition on a $E_0^{pq} = C_p^n/C_{p+1}^n$ (on utilise systématiquement la convention $n = p+q$). On a une application naturelle $F : C_p^n \longrightarrow C^p(G/H,C^q(H,E))$ en posant $F(f)(x_1^p,\sigma_1^q) = f(\sigma_1^q,\gamma_1^p)$, où γ_j est un représentant quelconque de x_j (en d'autres termes F(f) est l'application induite par f par passage au quotient).

Comme f est normalisée, on a $F(f) = 0$ si $f \in C_{p+1}^n$, d'où une application naturelle : $E_0^{pq} \longrightarrow C^p(G/H,C^q(H,E))$. En utilisant une section locale pour la projection $\pi : G \longrightarrow G/H$ au voisinage du point distingué $x_0 = H$, on vérifie aussitôt que cet homomorphisme est surjectif, et même fort.

D'autre part, pour $f \in C_p^n$:

$$df(\sigma_1^{q+1},\gamma_1^p) = \sigma_1 f(\sigma_2^{q+1},\gamma_1^p) + \sum_{i=1}^{q} (-1)^i f(\sigma_1^{i-1},\sigma_i\sigma_{i+1},\sigma_{i+2}^{q+1},\gamma_1^p) + (-1)^{q+1} f(\sigma_1^q,\sigma_{q+1}\gamma_1,\gamma_2^p)$$

(les autres termes sont nuls).

Or $f(\sigma_1^q,\sigma_{q+1}\gamma_1,\gamma_2^p) = f(\sigma_1^q,\gamma_1\gamma_1^{-1}\sigma_{q+1}\gamma_1\ \gamma_2^p) = f(\sigma_1^q,\gamma_1^p)$ donc on peut écrire :

$F(df) = d\circ F(f)$ si $d : C^q(H,E) \longrightarrow C^{q+1}(H,E)$ est la différentielle habituelle.

En d'autres termes, si on considère le complexe $C^\infty((G/H)^p,C^*(H,E))$ (dans les notations du chapitre I n°5), F est un morphisme de complexes de E_0^{p*} vers $C^\infty((G/H)^p,C^*(H,E))$. D'où un morphisme en cohomologie :

$$E_1^{pq} \longrightarrow C^p(G/H,H^q(H,E)).$$

4. Le terme E_1^{pq}

THEOREME A.1. (Hochschild-Serre).

L'application ci-dessus est un isomorphisme de E_1^{pq} vers $C^p(G/H,H^q(H,E))$.

a. Avant de commencer la démonstration de ce théorème, énonçons un lemme. Soit Γ un groupe, E un Γ-module. Soient $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$. Pour tout $f \in C^n(\Gamma,E)$, on pose :

$$\delta_k f(\alpha_1^{n-k+1},\beta_1^k) = \alpha_1 f(\alpha_2^{n-k+1},\beta_1^k) + \sum_{i=1}^{n-k} (-1)^i f(\alpha_1^{i-1},\alpha_i\alpha_{i+1},\alpha_{i+1}^{n-k+1},\beta_1^k).$$

(i.e. on tronque les k+1 derniers termes de la différentielle habituelle).

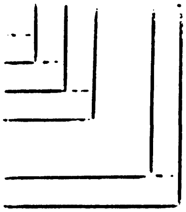
LEMME A.1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\delta_k^2 = 0$.

Démonstration.

Ecrivons en effet $\delta_k^2 f(\alpha_1^{n-k+2},\beta_1^k) = \alpha_1\delta_k f(\alpha_2^{n-k+2},\beta_1^k) +$

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} (-1)^i \delta_k f(\alpha_1^{i-1},\alpha_i\alpha_{i+1},\alpha_{i+2}^{n-k+2},\beta_1^k).$$

Si on développe chacun de ces n-k+3 termes en une ligne de n-k+2 termes, et si on écrit ces lignes l'une en dessous de l'autre en un tableau, on obtient 0 en ajoutant les termes de chaque "frange" dessinée ci-dessous :



les simplifications se faisant en partant des extrémités et en convergeant vers le centre. En d'autres termes, si on note t_{ij} le $j^{\text{ème}}$ terme de la $i^{\text{ème}}$ ligne, on trouve que $t_{ij} + t_{j+1,i} = 0$ (pour j fixé, i varie de 1 à j).

b. Démontrons maintenant le théorème A.1. La démonstration est une adaptation de la démonstration originelle de [6].

On fixe d'abord quelques notations. Soit (U_α) un recouvrement ouvert de $X = G/H$ par des ouverts trivialisants pour π; on suppose que x_0 appartient à <u>tous</u> les U_α. Soit s_α une scission de π au-dessus de U_α, avec $s_\alpha(x_0) = 1$. Soit (θ_α) une partition de l'unité C^∞ subordonnée à (U_α). Soient $\tilde{U}_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$, considéré comme H-fibré principal au-dessus de U_α, et $\tilde{\theta}_\alpha = \theta_\alpha \circ \pi$, de sorte que $(\tilde{\theta}_\alpha)$ est une partition de l'unité C^∞ subordonnée à $(\tilde{U}_\alpha)$, recouvrement ouvert de G. Soit τ_α : $\tilde{U}_\alpha \longrightarrow H$ la projection associée à s_α, i.e. $\tau_\alpha(\gamma) = s_\alpha(\pi\gamma)^{-1}.\gamma$.

La démonstration se fait en deux temps.

<u>Injectivité.</u>

Soit $f \in C^n_p$ telle que $df \in C^{n+1}_{p+1}$. Supposons que F(f) soit de la forme $d \circ u$, avec $u \in C^p(X, C^{q-1}(H,E))$; il faut montrer qu'il existe $g \in C^{n-1}_p$ telle que $f - dg \in C^n_{p+1}$

Soit $n = p+q$. Le cas $q = 0$ est trivial, car alors $u = 0$, et $F(f) = f$, donc $f = 0$.

Pour le cas $q = 1$, on a $u \in C^p(X,F)$. Soit $h = u \circ \pi$. Soit $\sigma \in H$, et écrivons la condition $df(\gamma,\sigma,\gamma_1^p) = 0$ (pour $\gamma, \gamma_1,\ldots,\gamma_p \in G$) :

$$\gamma f(\sigma,\gamma_1^p) - f(\gamma\sigma,\gamma_1^p) + f(\gamma,\gamma_1^p) = 0 \quad \text{(en tenant compte des propriétés de } f\text{)}.$$

D'où : $f(\gamma\sigma,\gamma_1^p) = \gamma(\sigma-1)h(\gamma_1^p) + f(\gamma,\gamma_1^p)$.

Or, $dh(\gamma\sigma,\gamma_1^p) = \gamma\sigma h(\gamma_1^p) +$ termes indépendants de σ. Donc $(f-dh)(\gamma\sigma,\gamma_1^p)$ est indépendant de σ, d'où $f - dh \in C_n^n$; $g = h$ convient.

Dans le cas général, on construit g par approximations successives. On pose encore $h = u \circ \pi$, donc $h \in C^q(H,C^p(G,E))$. On définit des extensions successives $h_0 = h$, $h_1,\ldots,h_{q-1}$ de h comme suit, par récurrence :

h_k est définie sur $G^k \times H^{q-1-k} \times G^p$ et :

$$h_k(\rho_1^{k-1},\rho,\sigma_{k+1}^{q-1},\gamma_1^p) = \sum_\alpha \tilde{e}_\alpha(\rho)h_k^\alpha(\rho_1^{k-1},\rho,\sigma_{k+1}^{q-1},\gamma_1^p)$$

où $\rho,\rho_1,\ldots,\rho_{k-1},\gamma_1,\ldots,\gamma_p \in G$, $\sigma_{k+1},\ldots,\sigma_{q-1} \in H$, et où h_k^α est définie sur $G^{k-1} \times \tilde{U}_\alpha \times F^{q-1-k} \times G^p$ par :

$$h_1^\alpha(\rho,\sigma_2^{q-1},\gamma_1^p) = s_\alpha(\pi\rho)h(\tau_\alpha(\rho),\sigma_2^{q-1},\gamma_1^p) - f(s_\alpha(\pi\rho),\tau_\alpha(\rho),\sigma_2^{q-1},\gamma_1^p)$$

si $k = 1$, et pour $k > 1$:

$$h_k^\alpha(\rho_1^{k-1},\rho,\sigma_{k+1}^{q-1},\gamma_1^p) = h_{k-1}(\rho_1^{k-2},\rho_{k-1}s_\alpha(\pi\rho),\tau_\alpha(\rho),\sigma_{k+1}^{q-1},\gamma_1^p) +$$
$$(-1)^k f(\rho_1^{k-1},s_\alpha(\pi\rho),\tau_\alpha(\rho),\sigma_{k+1}^{q-1},\gamma_1^p).$$

On utilise donc essentiellement la décomposition de ρ en produit au-dessus de U_α.

On veut montrer que $g = h_{q-1}$ convient.

Le fait que f soit normalisée et que $s_\alpha(x_0) = 1$, entraîne que h_k^α est bien un prolongement de h_{k-1}, et donc h_k aussi. Il en résulte aussi que dh_k prolonge dh_{k-1} sur $G^k \times H^{q-k} \times G^p$ (remarquer que le cobord d'une cochaîne définie sur

$G^k \times H^{q-k-1} \times G^p$ est bien défini sur $G^k \times H^{q-k} \times G^p$; de même dh_k^α est définie sur $G^{k-1} \times \tilde{U}_\alpha \times H^{q-k} \times G^p$, car $x_0 \in U_\alpha$).

Les h_k sont elles-mêmes normalisées. Pour $\rho = s_\alpha(x)$ on a $\tau_\alpha(\rho) = 1$. Donc :

(1) $\quad h_k^\alpha(\rho_1^{k-1}, s_\alpha(x), \sigma_{k+1}^{q-1}, \gamma_1^p) = 0.$

On se propose de démontrer par récurrence sur k que pour tout $0 \leq k \leq q-1$:

(2) $\quad (f-dh_k)(\rho_1^k, \sigma_{k+1}^q, \gamma_1^p) = 0$ pour tous $\rho_1, \ldots, \rho_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_p \in G$, $\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_q \in H$.

Pour $k = 0$ c'est clair. Supposons le résultat démontré pour les indices $< k$.

On écrit :

$$dh_k^\alpha(\rho_1^{k-1}, s_\alpha(x), \sigma_{k+1}^q, \gamma_1^p) = \delta_{p+q-k+1} h_k^\alpha(\rho_1^{k-1}, s_\alpha(x), \sigma_{k+1}^q, \gamma_1^p) +$$
$$(-1)^{k-1} h_k^\alpha(\rho_1^{k-2}, \rho_{k-1} s_\alpha(x), \sigma_{k+1}^q, \gamma_1^p) + (-1)^k h_k^\alpha(\rho_1^{k-1}, s_\alpha(x)\sigma_{k+1}, \sigma_{k+2}^q, \gamma_1^p)$$

(les autres termes étant nuls d'après (1).

L'avant-dernier terme s'écrit encore : $(-1)^{k-1} h_{k-1}(\rho_1^{k-2}, \rho_{k-1} s_\alpha(x), \sigma_{k+1}^q, \gamma_1^p)$

(car h_k^α prolonge h_{k-1}) et le dernier :

$$(-1)^k h_{k-1}(\rho_1^{k-2}, \rho_{k-1} s_\alpha(x), \sigma_{k+1}^q, \gamma_1^p) + f(\rho_1^{k-1}, s_\alpha(x), \sigma_{k+1}^q, \gamma_1^p).$$

D'où finalement :

(3) $$(f-dh_k^\alpha)(\rho_1^{k-1}, s_\alpha(x), \sigma_{k+1}^q, \gamma_1^p) = -\delta_{p+q-k+1} h_k^\alpha(\rho_1^{k-1}, s_\alpha(x), \sigma_{k+1}^q, \gamma_1^p)$$
$$= -\delta_{p+q-k+1} h_{k-1}(\rho_1^{k-1}, s_\alpha(x), \sigma_{k+1}^q, \gamma_1^p).$$

Voyons maintenant ce qui se passe quand on remplace $s_\alpha(x)$ par $\rho = s_\alpha(x)\tau_\alpha(\rho)$.

On exprime que :

$$d(f-dh_k^\alpha)(\rho_1^{k-1}, s_\alpha(x), \tau_\alpha(\rho), \sigma_{k+1}^q, \gamma_1^p) = 0$$

(car $d(f-dh_k^\alpha) = df$, et par hypothèse $df \in C_{p+1}^n$). En développant cette expression, les premiers termes sont nuls par hypothèse de récurrence. On trouve :

(4) $$(f-dh_k^\alpha)(\rho_1^{k-1}, \rho, \sigma_{k+1}^q, \gamma_1^p) = (f-dh_k^\alpha)(\rho_1^{k-1}, s_\alpha(x), \tau_\alpha(\rho)\sigma_{k+1}, \sigma_{k+2}^q, \gamma_1^p) +$$
$$\sum_{i=k+1}^{q-1} (-1)^{i-k}(f-dh_k^\alpha)(\rho_1^{k-1}, s_\alpha(x), \tau_\alpha(\rho), \sigma_{k+1}^{i-1}, \sigma_i\sigma_{i+1}, \sigma_{i+2}^q, \gamma_1^p) + \ldots$$

où dans tous les termes on a $s_\alpha(x)$ à la $k^{\text{ème}}$ place. Donc d'après (3) dans le

deuxième membre on peut remplacer $f-dh_k^{\alpha}$ par $-\delta_{p+q-k+1}$.
On utilise alors à nouveau l'hypothèse de récurrence pour exprimer chacun des termes qui apparaissent. Ainsi par exemple pour i donné on écrit :

$$(f-dh_{k-1})(\rho_1^{i-1},\rho_i\rho_{i+1},\rho_{i+2}^{k-1},s_\alpha(x),\tau_\alpha(\rho),\sigma_{k+1}^q,\gamma_1^p) = 0.$$

Cela permet d'exprimer la somme de tous les termes de (4) correspondant au $(i+1)^{\text{ème}}$ rang dans $-\delta_{p+q-k+1}$ par :

$$(-1)^{k-1}f(\rho_1^{i-1},\rho_i\rho_{i+1},\rho_{i+2}^{k-1},s_\alpha(x),\tau_\alpha(\rho),\sigma_{k+1}^q,\gamma_1^p) +$$
$$(-1)^k\delta_{p+q-k+2}h_{k-1}(\rho_1^{i-1},\rho_i\rho_{i+1},\rho_{i+2}^{k-1},s_\alpha(x),\tau_\alpha(\rho),\sigma_{k+1}^q,\gamma_1^p) +$$
$$h_{k-1}(\rho_1^{i-1},\rho_i\rho_{i+1},\rho_{i+2}^{k-2},\rho_{k-1}s_\alpha(x),\tau_\alpha(\rho),\sigma_{k+1}^q,\gamma_1^p) - h_{k-1}(\rho_1^{i-1},\rho_i\rho_{i+1},\rho_{i+2}^{k-1},\rho,\sigma_{k+1}^q,\gamma_1^p).$$

(avec des modifications évidentes pour les cas extrêmes).
Et donc la somme (4) s'écrit :

$$(-1)^{k-1}\delta_{p+q-k+2}f(\rho_1^{k-1},s_\alpha(x),\tau_\alpha(\rho),\sigma_{k+1}^q,\gamma_1^p) +$$
$$(-1)^k\delta^2_{p+q-k+2}h_{k-1}(\rho_1^{k-1},s_\alpha(x),\tau_\alpha(\rho),\sigma_{k+1}^q,\gamma_1^p)$$
$$+\ \delta_{p+q-k+1}h_{k-1}(\rho_1^{k-2},\rho_{k-1}s_\alpha(x),\tau_\alpha(\rho),\sigma_{k+1}^q,\gamma_1^p) - \delta_{p+q-k+1}h_{k-1}(\rho_1^{k-1},\rho,\sigma_{k+1}^q,\gamma_1^p).$$

D'après le lemme, le deuxième terme est nul. Or, on constate facilement que :

$$(f-dh_k)(\rho_1^{k-1},\rho,\sigma_{k+1}^q,\gamma_1^p) = \sum_\alpha \tilde{\theta}_\alpha(\rho)(f-dh_k^\alpha)(\rho_1^{k-1},\rho,\sigma_{k+1}^q,\gamma_1^p)$$

En remarquant que dans $\delta_{p+q-k+1}h_{k-1}(\rho_1^{k-2},\rho_{k-1}s_\alpha(x),\tau_\alpha(\rho),\sigma_{k+1}^q,\gamma_1^p)$ on peut remplacer h_{k-1} par h_{k-2}, car il n'y a à chaque fois que les k-2 premiers termes a priori en-dehors de H, on écrit :

$$(f-dh_k^\alpha)(\rho_1^{k-1},\rho,\sigma_{k+1}^q,\gamma_1^p) = \delta_{p+q-k+1}h_{k-2}(\rho_1^{k-2},\rho_{k-1}s_\alpha(x),\tau_\alpha(\rho),\sigma_{k+1}^q,\gamma_1^p) +$$
$$(-1)^{k-1}\delta_{p+q-k+2}f(\rho_1^{k-1},s_\alpha(x),\tau_\alpha(\rho),\sigma_{k+1}^q,\gamma_1^p) - \delta_{p+q-k+1}h_{k-1}(\rho_1^{k-1},\rho,\sigma_{k+1}^q,\gamma_1^p) =$$
$$\delta_{p+q-k+1}(h_{k-1}^\alpha(\rho_1^{k-1},\rho,\sigma_{k+1}^q,\gamma_1^p) - h_{k-1}(\rho_1^{k-1},\rho,\sigma_{k+1}^q,\gamma_1^p)).$$

Et quand on applique la partition de l'unité, on obtient bien 0 par définition de h_{k-1}^α et de h_{k-1}. Ainsi (2) est démontrée.

Il est maintenant facile de conclure. Soient $\sigma \in H$, $\rho_1,\dots,\rho_q,\gamma_1,\dots,\gamma_p \in G$.
On veut montrer que :

$$(f-dh_{q-1})(\rho_1^{q-1},\rho_q\sigma,\gamma_1^p) = (f-dh_{q-1})(\rho_1^q,\gamma_1^p).$$

Pour cela, on écrit $d(f-dh_{q-1})(\rho_1^q,\sigma,\gamma_1^p) = 0$. Quand on développe cela, les premiers et les derniers termes sont nuls, il ne reste que :

$$(-1)^q(f-dh_{q-1})(\rho_1^{q-1},\rho_q\sigma,\gamma_1^p) + (-1)^{q+1}(f-dh_{q-1})(\rho_1^q,\sigma\gamma_1,\gamma_2^p) = 0 \quad ,$$

et comme $(f-dh_{q-1})(\rho_1^q,\sigma\gamma_1,\gamma_2^p) = (f-dh_{q-1})(\rho_1^q,\gamma_1^p)$, on a gagné.

Surjectivité.

Soit maintenant $u \in C^p(G/H,Z^q(H,E))$. Il faut montrer que u se prolonge en $g \in C_p^n$ telle que $dg \in C_{p+1}^{n+1}$. Pour cela, on applique la construction ci-dessus avec $f = 0$, ce qui donne le résultat voulu. On voit même que l'on définit une application linéaire continue : $C^p(G/H,Z^q(H,E)) \longrightarrow Z^q(C_p/C_{p+1})$ inverse à l'application de restriction, donc compte tenu de l'injectivité déjà démontrée, on a un isomorphisme topologique : $E_1^{pq} \simeq C^p(G/H,H^q(H,E))$.

5. L'opérateur d_2 de la suite spectrale.

On peut maintenant procéder comme en [6], ch.II, §3 et 4 , qui sont de nature purement combinatoire, pour arriver au résultat suivant :

THEOREME A.2. Si on identifie E_1^{pq} à $C^p(G/H,H^q(H,E))$ comme ci-dessus, la différentielle $d_1 : E_1^{pq} \longrightarrow E_1^{p+1,q}$ est donnée par $d_1e = (-1)^q de$, où d est l'opérateur naturel de $C^*(G/H,H^q(H,E))$, considéré comme complexe standard du G/H-module $H^q(H,E)$, dans lui-même. Par conséquent $E_2^{pq} \simeq H^p(G/H,H^q(H,E))$.

6. Le cas du produit semidirect.

6.1. On suppose maintenant que G est un produit semidirect $G = K \ltimes H$, toujours avec H distingué. On va montrer que la suite spectrale construite ci-dessus est isomorphe, pour $r \geq 2$, à la première suite spectrale d'hypercohomologie du complexe de K-modules $C^*(H,E)$ (cf. ch.I n°7), donc à la suite spectrale construite au chapitre I.

Pour cela je suis obligé de revenir sur [6], ch.II, § 3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq p \leq n$, $q = n - p$. On note (β_1^q,α_1^p) un n-uplet d'éléments de G. On définit :

$$df(\beta_1^q,\alpha_1^{p+1}) = \alpha_1 f(\alpha_1^{-1}\beta_1^q\alpha_1,\ \alpha_2^{p+1}) + \sum_{i=1}^{p} (-1)^i f(\beta_1^q,\alpha_1^{i-1},\alpha_i\alpha_{i+1},\alpha_{i+2}^{p+1}) + (-1)^{q+1} f(\beta_1^q,\alpha_1^p)$$

(i.e. la différentielle de f considérée comme élément de $C^p(G,C^q(G,E))$), et aussi :

$$d \circ f(\beta_1^{q+1},\alpha_1^p) = \beta_1 f(\beta_2^{q+1},\alpha_1^p) + \sum_{j=1}^{q} (-1)^j f(\beta_1^{j-1},\beta_j\beta_{j+1},\beta_{j+2}^{q+1},\alpha_1^p) + (-1)^{q+1} f(\beta_1^q,\alpha_1^p)$$

ce qui est la "différentielle partielle" naturelle.

Soit $N = \{1,\dots,n\}$, $\mathcal{P}_p(N)$ l'ensemble des parties à p éléments de N. Un élément I de $\mathcal{P}_p(N)$ définit une unique permutation de N si on demande que $Q = \{1,\dots,q\}$ (resp. $P = \{q+1,\dots,n\}$) soit appliqué sur $N\setminus I$ (resp. I) en conservant l'ordre. On note σ_I cette permutation. Pour $i \in N$, on note $r_I(i)$ le nombre d'éléments de I précédant i (au sens large). Pour $1 \leq k \leq p$, on note $a_k = \alpha_1\dots\alpha_k$. Alors on définit :

$$f_I(\beta_1^q,\alpha_1^p) = f(\gamma_1^n) \text{ où } \gamma_i = \begin{cases} \alpha_{\sigma_I^{-1}(i)} = \alpha_{r_I(i)} & \text{si } i \in I \\ a_{r_I(i)}^{-1}\beta_{\sigma_I^{-1}(i)}a_{r_I(i)} & \text{si } i \notin I. \end{cases}$$

(de manière imagée, chaque fois qu'un α_i saute un β_j, il faut remplacer β_j par $\alpha_i^{-1}\beta_j\alpha_i$). Enfin on pose :

$$f_p = \sum_{I\in\mathcal{P}_p(N)} \varepsilon(\sigma_I)f_I \qquad (\varepsilon(\sigma_I) \text{ désigne la signature de } \sigma_I).$$

On a alors l'identité suivante, dont la démonstration est purement combinatoire, donc peut se faire exactement comme dans [6] :

<u>LEMME A.2</u>. Pour tout $f \in C^n(G,E)$: $(df)_p = (-1)^{q+1}df_p + d\circ f_p$.

Considérons d'autre part le complexe $C^*(H,E)$, qui est muni d'une action naturelle de G (à partir de l'action de G sur H par restriction des automorphismes intérieurs), donc de K par restriction. (C'est cette possibilité de faire agir K qui est propore aux produits semidirects). Par hypothèse, ce complexe admet la résolution standard. Si on l'écrit en cochaînes inhomogènes normalisées, cela donne le double complexe :

$$L^{**} = C^*(K,C^*(H,E)) \qquad \text{avec les différentielles :}$$

$d'f = (-1)^q df$ de $C^p(K,C^q(H,E))$ vers $C^{p+1}(K,C^q(H,E))$

$d''f = d\circ f$ de $C^p(K,C^q(H,E))$ vers $C^p(K,C^{q+1}(H,E))$.

On considère maintenant l'application $u : C^*(G,E) \longrightarrow L^{**}$ définie par :

$$u(f) = \sum_{p+q=n} f_{pq}$$

où f_{pq} est définie sur $K^p \times H^q$ par $f_{pq}(\alpha_1^p,\beta_1^q) = f_p(\beta_1^q,\alpha_1^p)$.

D'après le lemme A.2., il est clair que u est un morphisme de complexes. D'autre part, supposons que $f \in C_p$; alors $f_I | H^q \times K^p = 0$, sauf si $I = P$; donc dans ce cas $f_{pq}(\alpha_1^p, \beta_1^q) = f(\beta_1^q, \alpha_1^p)$ et de plus, si $j < p$, $f_j = 0$ sur $H^q \times K^p$, donc $u(f) \in {}'L_p$, si on filtre L par sa première filtration. Ainsi u est un morphisme de complexes filtrés.

Il est clair que le morphisme $E_0^{pq} \longrightarrow L^{pq}$ déduit de u est celui considéré au n°3, et donc que u induit un isomorphisme de E_1^{pq} vers ${}'E_1^{pq} = C^p(K, H^q(H,E))$ (théorème A.1.).

On peut donc énoncer le :

THÉORÈME A.3.

Soit $G = K \rtimes H$ un produit semidirect. de groupes de Lie, E un G-module. Alors les deux suites spectrales de Hochschild-Serre relativement à H sont isomorphes pour $r \geq 2$, et isomorphes à la première suite spectrale d'hypercohomologie du complexe de K-modules $C^*(H,E)$.

Bibliographie.

[1] Artin, E., Algèbre Géométrique, Gauthier-Villars, Paris, 1972.

[2] Cartan, H., Eilenberg, S., Homological Algebra, Princeton University Press, 1956.

[3] Godement, R., Théorie des Faisceaux, Hermann, Paris, 1958.

[4] Guichardet, A., Extensions des représentations induites des produits semidirects, J. fur Reine angew. Math., 310 (1979), pp. 7-32.

[5] Guichardet, A., Cohomologie des Groupes Topologiques et des Algèbres de Lie, Cedic/Fernand Nathan, Paris, 1980.

[6] Hochschild, G., Serre, J.-P., Cohomology of group extensions, Trans. Amer. Math. Soc., 74 (1953), pp. 110-134.

[7] Kobayashi, S., Nomizu, K., Foundations of Differential Geometry, vol. I et II, Interscience, New York, 1963.

[8] Palais, R., Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem, ch. IV, Ann. of Math. Studies 57 (1965).

[9] Hicks N., Notes on Differential Geometry, Van Nostrand, Princeton, 1965.

F.DU CLOUX
Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
91128 Palaiseau Cedex
France

PARTIE IV

EXTENSIONS ENTRE REPRESENTATIONS UNITAIRES IRREDUCTIBLES DES GROUPES DE LIE NILPOTENTS.

par

F. DU CLOUX

Astérisque 124-125 (1985)
Société Mathématique de France

Introduction

L'objet de ce travail est d'étudier dans le cas d'un groupe de Lie nilpotent G les espaces Ext^n entre G-modules unitaires irréductibles, et la catégorie des G-modules de longueur finie à sous-quotients simples unitaires irréductibles.

Citons deux autres situations où l'on possède des renseignements concernant ces deux problèmes : celle des groupes semi simples, avec les travaux de Gelfand - Ponomarev [18]-[20], Gelfand-Graiev-Ponomarev [21], Delorme-Kraljević [11], [28], B. Speh [33] ; celle des produits semidirects d'un groupe de Lie par un groupe vectoriel $\mathbb{R}^N$ (Guichardet [22], [24], du Cloux [9]). Les résultats obtenus dans ces deux cas suggèrent d'essayer de traiter ces problèmes dans le cadre de la méthode des orbites. Disons de façon vague que pour des modules irréductibles associés à des orbites distinctes "suffisamment éloignées" l'une de l'autre on s'attend à ce que les espaces Ext^n soient tous nuls ; d'autre part, pour des modules associés à une même orbite coadjointe, on cherchera à exprimer les espaces Ext^n à partir du stabilisateur $G(f)$ d'un point de l'orbite.

Le cas envisagé ici est celui d'un groupe de Lie G nilpotent connexe ; pour un tel groupe, la méthode des orbites marche de façon idéale (cf.[27]). Soient $\underline{g}$ l'algèbre de Lie de G, $f \in \underline{g}^*$ une forme G-entière (c'est-à-dire telle que if soit la différentielle d'un caractère de $G(f)$), et (E,π) la représentation unitaire irréductible de G associée à f par la théorie de Kirillov. On constate assez rapidement qu'on ne peut pas espérer aboutir à un résultat satisfaisant concernant les espaces Ext^n sans remplacer E par un G-module plus lisse. Dans le cas semisimple, on prend les vecteurs K-finis où K est un sous-groupe compact maximal de G, et on travaille dans la catégorie des $(\underline{g},K)$-modules ; dans le cas des produits semidirects, il n'y a pas encore de choix entièrement satisfaisant (mais on peut s'attendre à ce que tout choix "raisonnable" conduise au même résultat). Ici, on remplacera simplement (E,π) par la représentation différentiable associée, notée (E_∞,π).

Dans cette situation, A. Guichardet [23], [25] a énoncé les conjectures suivantes :

(C_o) $$\mathrm{Ext}^n_G(E_\infty,E_\infty) \simeq \mathrm{Ext}^n_{G(f)}(\mathbb{C}_{if}, \mathbb{C}_{if}) \ (= H^n(G(f),\mathbb{C}))$$

pour tout $n \geq 0$; on note $\mathbb{C}_{if}$ la représentation de dimension 1 de G(f) de différentielle if .

(C_1) $$\mathrm{Ext}^n(E_{1\infty}, E_{2\infty}) = 0 \quad \forall n \geq 0 \text{ si } E_1 \text{ et } E_2 \text{ ne sont pas équivalentes.}$$

et (au moins génériquement) :

(C_2) La catégorie des G-modules admettant une suite de Jordan-Hölder (en un sens qui sera précisé dans la partie III) dont tous les sous quotients simples sont isomorphes à un même E_∞ est équivalente à la catégorie des G(f)-modules de longueur finie à sous-quotients simples isomorphes à $\mathbb{C}_{if}$ (par tensorisation avec $\mathbb{C}_{-if}$, on se ramène d'ailleurs aussitôt à la catégorie analogue avec sous quotients simples triviaux).

A la suite de Guichardet, J. Rosenberg [32] a fait une conjecture qui dans le cas des polarisations réelles s'énonce comme suit :

(C') Soient $\underline{h}$ une polarisation réelle en f, $\underline{q}$ un idéal de $\underline{g}$ contenu dans $\underline{g}(f)$. Alors $H^n(\underline{h}/\underline{q}, \mathrm{Hom}(E_\infty,\mathbb{C}_{if})) \simeq H^n(\underline{g}(f)/\underline{q},\mathbb{C})$ pour tout $n \geq 0$.
(noter que $\underline{q}$ agit scalairement sur E_∞, par le caractère $\mathbb{C}_{if}$, ce qui donne un sens au premier membre de l'égalité).

Comme on le verra à la partie I, n°1.3, la conjecture (C_o) peut encore s'énoncer sous la forme suivante, qui se révèle plus souple à l'usage :

(C) Soit $\underline{q}$ un idéal de $\underline{g}$ contenu dans $\underline{g}(f)$. Alors :

$$H^n(\underline{g}/\underline{q}, \mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty)) \simeq H^n(\underline{g}(f)/\underline{q}, \mathbb{C}) \text{ pour tout } n \geq 0 .$$

Voici les résultats auxquels on aboutit concernant ces diverses conjectures.

(i) Les conjectures (C) et (C') sont équivalentes ; en effet, on construit un isomorphisme canonique $H^n(\underline{g}/\underline{q}, \mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty)) \simeq H^n(\underline{h}/\underline{q}, \mathrm{Hom}(E_\infty,\mathbb{C}_{if}))$ pour tout $n \geq 0$ (partie I, §5, cor.5.1.2). C'est un "lemme de Shapiro" dont la démonstration est rendue délicate par les conditions de croissance de type $\mathcal{S}$ qui entrent dans la définition des espaces E_∞ .

(ii) La conjecture (C_1) est vraie (partie I, n°3, th.3.1)

(iii) Les conjectures (C) et (C_2) sont génériquement vraies. Plus précisément, si l'orbite de f est de dimension maximale, on obtient un isomorphisme non canonique, mais conservant les cup-produits, entre $H^*(\underline{g}/\underline{q}, \mathrm{Hom}(E_\infty, E_\infty))$ et $H^*(\underline{g}(f)/\underline{q}, \mathbb{C})$ (partie II, §6, cor.6.1.2.). On y parvient en montrant séparément que chacune de de ces deux algèbres graduées est une algèbre extérieure, sur un espace vectoriel de même dimension (c'est trivial pour $H^*(\underline{g}(f)/\underline{q}, \mathbb{C})$, vu que $\underline{g}(f)/\underline{q}$ est commutative dans ce cas).

Sous la même hypothèse, on établit une équivalence de catégories entre $\mathrm{Ext}(G, E_\infty)$ et $\mathrm{Ext}(G(f), \mathbb{C}_{if})$, dans les notations de la partie III, n°1.1. (partie III, cor.2.1.2).

Cela nous ramène au problème de la classification des modules de dimension finie sur une algèbre de Lie commutative, à sous-quotients simples triviaux, qu'il faut considérer comme "sauvage" d'après Gelfand-Ponomarev [18] (dès que l'algèbre de Lie est de dimension ≥ 2). Ceci dit, c'est quand même ce que l'on peut espérer de mieux en général, en matière de classification.

(iv) La conjecture (C) est vraie lorsque l'orbite de f est plate (i.e. si $\underline{g}(f)$ est idéal dans $\underline{g}$) ; compte tenu de (i), cela se trouve déjà dans [32] (partie II, cor.7.1.2).

Dans ce cas on obtient même un isomorphisme canonique, mais qui ne conserve pas toujours le cup-produit. On a un contre-exemple pour les orbites de dimension 2 de l'algèbre notée $\underline{g}_{5,3}$ dans [15] : pour ces orbites, $\underline{g}(f)$ est commutative, donc $H^*(\underline{g}(f), \mathbb{C})$ est une algèbre extérieure, alors qu'il y a dans $H^1(\underline{g}, \mathrm{Hom}(E_\infty, E_\infty))$ un élément α tel que $\alpha \cup \alpha \neq 0$ (cf.n°8.3.).

On voit d'ailleurs facilement que pour ces orbites, la conjecture (C_2) est fausse. De façon générale, la conjecture (C_2) implique (C) avec conservation du cup-produit (partie III.cor.2.3.3.).

(v) La cohomologie $H^*(\underline{g}/\underline{q}, \mathrm{Hom}(E_\infty, E_\infty))$ possède des propriétés formelles qui la rapprochent beaucoup de $H^*(\underline{g}(f)/\underline{q}, \mathbb{C})$. Plus précisément, notons d' la dimension de $\underline{g}(f)/\underline{q}$. Alors on a $\dim H^n(\underline{g}/\underline{q}, \mathrm{Hom}(E_\infty, E_\infty)) \leq \binom{d'}{n}$ (coefficient binomial) pour tout $n \geq 0$; en particulier $H^n = 0$ pour $n > d'$. De plus, $H^{d'}$ est de dimension 1, et le cup-produit $H^n \times H^{d'-n} \longrightarrow H^{d'}$ fournit un couplage non-dégénéré de H^n avec $H^{d'-n}$ (qui ont donc même dimension). Enfin, la caractéristique d'Euler-Poincaré vaut 0, sauf dans le cas trivial où $d' = 0$ (auquel cas elle vaut 1). (partie II, th.2.1.1.)

(vi) la conjecture (C) est vraie pour toutes les orbites de toutes les algèbres $\underline{g}$ de dimension ≤ 6 . (partie I, th.6.1)

La vérité de la conjecture (C) en toute généralité reste une question ouverte.

Les méthodes que j'utilise sont essentiellement algébriques. Soient U l'algèbre enveloppante compléxifiée de $\underline{g}$, I le noyau de la représentation de U dans E_∞ ; alors I est un idéal primitif de U , et $A = U/I$ est une algèbre de Weyl $A_r(\mathbb{C})$. Le résultat essentiel de la partie I est que l'inclusion naturelle de U/I dans $\mathrm{Hom}(E_\infty, E_\infty)$ induit un isomorphisme en $\underline{g}/\underline{q}$-cohomologie.

On est donc ramené à un problème purement algébrique, à savoir le calcul de la $\underline{g}/\underline{q}$-cohomologie de U/I sous l'action adjointe de $\underline{g}$, qui fait l'objet de la partie II. En dehors du cas des orbites plates, ou plus généralement du cas où U/I est isomorphe à S/J (cf. partie II, §7) je n'ai pas réussi à faire intervenir $\underline{g}(f)$ dans cette question. Il m'a paru plus naturel d'utiliser des méthodes d'algèbre associative. Cela consiste essentiellement à montrer que A possède un relèvement R dans le complété I-adique de U (noté $\hat{U}$), puis à montrer que l'on a une décomposition en "produit tensoriel complété" : $\hat{U} = R \hat{\otimes} C$, où C est le commutant de R dans $\hat{U}$.

Compte tenu d'un lemme calculant la cohomologie de Hochschild $H^*(A,A)$ d'une algèbre de Weyl comme bimodule sur elle-même (on trouve que $H^n = 0$ si $n > 0$) on peut alors démontrer que

$H^n(\underline{g}, U/I) \simeq H^n(C, \mathbb{C})$ pour tout $n \geq 0$, et un résultat analogue dans le cas d'un idéal $\underline{q}$.

Tout ceci nécessite une étude détaillée du complété $\hat{U}$, du gradué I-adique de U et de l'algèbre C ; on trouve que C est essentiellement une algèbre de "séries formelles non-commutatives". Le résultat sur les orbites de dimension maximale provient du fait que dans ce cas on peut supprimer le "non" dans non-commutatives ; mais cela **demande** encore une démonstration assez compliquée, où l'on utilise à peu près tous les résultats connus sur le centre de l'algèbre enveloppante, et son corps de fractions.[1]

Enfin dans la partie III on étudie la conjecture (C_2) par ces méthodes. On montre d'abord que dans un contexte très général ce genre de problèmes consiste à décrire une catégorie abélienne finie au sens de Gabriel [16] (i.e. où tous les objets sont de longueur finie). Dans le cas qui nous intéresse, on montre directement que la catégorie dont il est question dans (C_2) est équivalente à la catégorie des modules de longueur finie sur C (qui est un anneau local noethérien complet, non-commutatif en général).

Au vu des résultats généraux de Gabriel, le fait de tomber sur une catégorie de modules sur un anneau de ce type n'est d'ailleurs pas très étonnant, l'intérêt est surtout que l'algèbre C est en principe accessible au calcul.

Je tiens à remercier l'équipe d'Algèbres enveloppantes de l'université de Paris-6, en particulier Thierry Levasseur, de m'avoir initié au monde semé d'embûches de l'algèbre non-commutative, et de l'intérêt qu'ils ont porté à la partie II de ce travail.

---

(1) Des questions voisines sont étudiées dans M.P. Malliavin, Caténarité et théorème d'intersection en algèbre non-commutative,LN 740, p.408-430, prop.5.4. par exemple.

SOMMAIRE

PARTIE I .

LES ESPACES $\mathrm{Ext}^n_G(E_\infty, E_\infty)$.

§ 1. NOTATIONS, RAPPELS.

1.1. On garde les notations de l'introduction.
On note $\underline{p}$ le noyau projectif de π dans $\underline{g}$, c'est-à-dire l'ensemble des $\xi \in \underline{g}$ tel que $\pi(\xi)$ soit scalaire. C'est aussi le plus grand idéal de $\underline{g}$ contenu dans $\underline{g}(f)$. On note Ω l'orbite de f dans $\underline{g}^*$. On note $\underline{z}$ le centre de $\underline{g}$, $\underline{z}_2$ le deuxième terme de la suite centrale ascendante. On note $\underline{q}$ un idéal de $\underline{g}$ contenu dans $\underline{p}$.

1.2. On prendra [24] comme référence pour tout ce qui concerne la cohomologie des groupes topologiques.
Soit A un groupe de Lie. On appelle A-module un espace localement convexe séparé (en abrégé ELCS) F muni d'une action de A telle que l'application $(a,v) \longrightarrow av$ soit continue de $A \times F$ dans F . Si F_1 et F_2 sont deux A-modules de Fréchet, on peut si on veut définir $\mathrm{Ext}^n_A(F_1,F_2)$ comme étant $H^n(A,\mathrm{Hom}(F_1,F_2))$, où $\mathrm{Hom}(F_1,F_2)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de F_1 vers F_2 , muni de la topologie de la convergence compacte (cf.[24]ch.III n°1.4). Si F_1 et F_2 sont des A-modules C^∞ , et si A n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, on peut appliquer le théorème de Van Est au A-module $\mathrm{Hom}(F_1,F_2)$, ce qui donne un isomorphisme $H^n(A,\mathrm{Hom}(F_1,F_2)) \simeq H^n(\underline{a},K, \mathrm{Hom}(F_1,F_2))$ (algébriquement et topologiquement), où $\underline{a}$ désigne l'algèbre de Lie de A , et K un sous-groupe compact maximal (loc.cit.ch.III cor.7.2.)

Soient E_1 et E_2 deux G-modules unitaires irréductibles. Ici K est contenu dans le centre de G , donc agit scalairement sur les E_j ; soit $\underline{k}$ son algèbre de Lie. Si l'action de K sur $\mathrm{Hom}(E_{1\infty},E_{2\infty})$ n'est pas triviale, on a immédiatement $H^n(G,\mathrm{Hom}(E_{1\infty},E_{2\infty})) = 0$ pour tout $n \geq 0$; dans le cas contraire, la cohomologie étudiée s'identifie finalement à $H^*(\underline{g}/\underline{k} , \mathrm{Hom}(E_{1\infty},E_{2\infty}))$. En particulier, pour $E_1 = E_2$, on est dans le cadre de la conjecture (C).

Comme cette dernière conjecture s'énonce en termes d'algèbres de Lie, je vais dorénavant supposer G simplement connexe (sauf au § 3 où l'on démontre la conjecture (C_1)). D'autre part, j'étudie les espaces $H^*(\underline{g}/\underline{q} , \mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty))$ de manière purement algébrique (i.e. sans chercher à déterminer leur topologie ; on verra qu'ils sont toujours de dimension finie, mais ils pourraient a priori être non séparés, ce que je renonce à élucider ici).

1.3. Comme on le signale à la partie II, n°1.4., le noyau de $if_{|\underline{q}}$ est un idéal $\underline{q}_1$ de $\underline{g}$, de codimension ≤ 1 dans $\underline{q}$. Il est clair que pour l'étude de la conjecture (C) on peut passer au quotient par $\underline{q}_1$, i.e. supposer que $\underline{q}_1 = 0$; mais alors $\underline{q}$ est un idéal central de $\underline{g}$; soit Q le sous-groupe analytique de G correspondant, et D le noyau du caractère de Q de différentielle if ; alors π passe au quotient par D, et :

$$H^n(\underline{g}/\underline{q}\ ,\ \mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty)) \simeq \mathrm{Ext}^n_{G/D}(E_\infty,E_\infty)$$

pour tout $n \geq 0$; de même $H^n(\underline{g}(f)/\underline{q}\ ,\ \mathbb{C}) \simeq H^n(G(f)/D\ ,\ \mathbb{C})$, ce qui prouve que la conjecture (C) rentre dans le cadre de (C_o). Donc en fait (C) et (C_o) sont équivalentes.

1.4. Le moyen d'attaque privilégié de toute question concernant les groupes nilpotents est la récurrence sur la dimension. L'objet de ce n est de fixer un certain nombre de notations pour ces démonstrations.

Dans cette première partie, on aura surtout à considérer le cas où $I \cap \underline{z} = 0$. Alors $\underline{z}$ est de dimension 1 . Soit z l'unique élément de $\underline{z}$ égal à 1 modulo I ; soit y un élément de $\underline{z}_2$ tel que $f(y) = 0$. Soit $\underline{g}'$ le centralisateur de y dans $\underline{g}$ et $x \in \underline{g}$ tel que $[x,y] = z$. Alors $\underline{g}'$ est un idéal de codimension 1 dans $\underline{g}$, et on a $\underline{g} = \mathbb{R}x \oplus \underline{g}'$. On note f' la restriction de f à $\underline{g}'$.

On note $\tilde{\underline{g}} = \underline{g}'/\mathbb{R}y$, $\tilde{U}$ l'algèbre enveloppante de $\tilde{\underline{g}}$, $\tilde{f}$ la forme induite par f' sur $\tilde{\underline{g}}$. Soit G'(resp.$\tilde{G}$) le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\underline{g}'$(resp. le groupe $G'/\exp \mathbb{R}y$). Soit (E',π') (resp.$(\tilde{E},\tilde{\pi})$) la représentation unitaire irréductible de G'(resp.$\tilde{G}$) correspondant à f'(resp.$\tilde{f}$). Alors E s'identifie à $\mathrm{Ind}_{G'\uparrow G}E'$ (induite au sens L^2). Soit $\tilde{I}$ le noyau de $\tilde{\pi}$ dans $\tilde{U}$.

L'application $(t,g') \longrightarrow \exp(tx).g'$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R} \times G'$ sur G , qui permet d'identifier G/G' à $\mathbb{R}$. Sous cette identification, l'espace E_∞ n'est autre que $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \tilde{E}_\infty)$, espace des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\tilde{E}_\infty$, à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées (noter que les représentations π' et $\tilde{\pi}$ opèrent dans le même espace). La topologie de E_∞ est définie par les seminormes :

$$p_{n,k,q}(\varphi) = \sup_{\alpha\leq k,\, t\in\mathbb{R}} (1+t^2)^n \quad q(D^\alpha\varphi(t))$$

où D désigne l'opérateur $\frac{d}{dt}$, n et k parcourent $\mathbb{N}$ et q parcourt une famille fondamentale de seminormes définissant la topologie de $\check{E}_\infty$.

Dans cette description, les éléments de U agissent par des opérateurs de la forme :

$$\pi(u) = \sum_{\alpha=o}^{N} P_\alpha(t)\, D^\alpha$$

où les P_α sont des polynômes à coefficients dans $\mathrm{Hom}(\check{E}_\infty, \check{E}_\infty)$. Plus précisément, x agit par $-\frac{d}{dt}$, y et z agissent respectivement par multiplication par $-it$ et par le scalaire i ; un élément quelconque $u \in U(\underline{g}')$ agit par multiplication par le polynôme :

$$\pi(u) = \pi'(u) - \pi'(\mathrm{ad}x(u))\ t + \frac{1}{2}\,\pi'((\mathrm{ad}x)^2(u))t^2 \ldots\ldots$$

que l'on peut abréger en $\pi'(\exp(-tx)u)$, ou simplement en $\exp(-tx)u$. Tout ceci résulte aussitôt de la définition des représentations induites.

Il faut remarquer que les coefficients des polynômes P_α se trouvent en fait dans la sous-algèbre $\check{U}/\check{I}$ de $\mathrm{Hom}(\check{E}_\infty , \check{E}_\infty)$; il résulte d'ailleurs de [13] ch.4 § 7 lemme 4.7.8 que l'image de U/I par π est exactement $\check{U}/\check{I}[t,\frac{d}{dt}]$.

1.5 Soient $\underline{a}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps k de caractéristique 0 , $\underline{b}$ une sous-algèbre de $\underline{a}$, M un $\underline{a}$-module. D'après [26] il y a une suite spectrale convergeant vers $H^*(\underline{a},M)$ dont le terme E_1^{pq} s'écrit :

$$E_1^{pq} = H^q(\underline{b},C^p(\underline{a}/\underline{b},M)) \ .$$

Lemme 1.5. Si l'on a $E_1^{pq} = 0$ pour tout $q > 0$, l'application naturelle $C^*(\underline{a},\underline{b},M) \longrightarrow C^*(\underline{a},M)$ induit un isomorphisme en cohomologie (où $C^*(\underline{a},\underline{b},M)$ désigne le complexe de cohomologie relative).

Démonstration. Si l'on a $E_1^{pq} = 0$ pour tout $q > 0$, la suite spectrale est dégénérée, et le morphisme de bord est un isomorphisme de E_2^{no} sur $H^n(\underline{a},M)$ (et on déduit facilement de la description de E_2^{no} de [26], §2, remarques suivant le cor. au th.2, que le morphisme de bord $E_2^{no} \longrightarrow H^n(\underline{a},M)$ n'est autre que le morphisme canonique $H^n(\underline{a},\underline{b},M) \longrightarrow H^n(\underline{a},M)$).

1.6.1. Soient A un groupe de Lie, B un sous-groupe fermé de A, $\underline{a}$ et $\underline{b}$ les algèbres de Lie correspondantes, E un B-module de dimension finie. Soit $F = \mathrm{Ind}_{B\uparrow A}^{C^\infty} E$; on considérera indifféremment F comme l'espace des fonctions φ C^∞ sur A à valeurs dans E vérifiant $\varphi(ab) = b^{-1}\varphi(a)$ pour tous $a \in A$, $b \in B$, ou comme l'espace des sections C^∞ du fibré vectoriel $V = A \times_B E$ au-dessus de $X = A/B$.

Soit E' un autre B-module de dimension finie, et considérons le B-module $\mathrm{Hom}(F,E')$. On a une notion évidente de support pour les éléments de F, donc pour les éléments de $\mathrm{Hom}(F,E')$ (d'ailleurs on voit facilement que les éléments de $\mathrm{Hom}(F,E')$ sont en fait tous à support compact ; on peut les considérer comme des généralisations naturelles des distributions à support compact). Soit x_o le point distingué de X, et notons $\mathrm{Hom}_{x_o}(F,E')$ l'ensemble des $u \in \mathrm{Hom}(F,E')$ de support $\{x_o\}$; c'est un sous-espace fermé de $\mathrm{Hom}(F,E')$ stable sous l'action de B.

Lorsque $E = E'$, $\mathrm{Hom}_{x_o}(F,E)$ contient un élément distingué, à savoir l'évaluation au point 1 de A, que l'on note δ. Il résulte aussitôt de la description des distributions de support ponctuel que $u \in \mathrm{Hom}(F,E')$ est de support $\{x_o\}$ si et seulement si u passe au quotient par un $\mathfrak{J}_{x_o}^{k+1} F$, avec $k \in \mathbb{N}$, où $\mathfrak{J}_{x_o}$ est l'idéal de $C^\infty(X)$ formé des fonctions nulles en x_o (en d'autres termes, $u(s)$ ne dépend que du jet d'ordre k de s en x_o). On dira alors que u est d'ordre $\leq k$. En particulier les éléments d'ordre 0 sont mis en bijection avec $\mathrm{Hom}(E,E')$ par la formule

$$u_o \in \mathrm{Hom}(E,E') \longrightarrow u_o\delta .$$

1.6.2. On peut faire agir $U(\underline{a})$ à droite sur $\mathrm{Hom}(F,E')$ par la formule $ua = u\circ a_F$, où a_F est l'endomorphisme de F défini par $a \in U(\underline{a})$. Comme $\underline{a}$ agit sur F par opérateurs différentiels d'ordre 1, l'action de $U(\underline{a})$ respecte les supports ; donc $\mathrm{Hom}_{x_o}(F,E')$ est stable sous $U(\underline{a})$.

<u>Lemme 1.6.2.</u> <u>Faisons agir</u> B <u>sur</u> $U(\underline{a})$ <u>par l'action adjointe</u>. <u>Alors la formule</u> :

$$u_o \otimes a \longrightarrow u_o \delta a_F$$

<u>définit une surjection de</u> B-<u>modules de</u> $\mathrm{Hom}(E,E') \otimes U(\underline{a})$ <u>vers</u> $\mathrm{Hom}_{x_o}(F,E')$.

<u>Démonstration</u>. Comme δ est invariant sous l'action de B, il est clair que l'on a défini une flèche de B-modules. Montrons qu'elle est surjective.

Remarquons que le fibré vectoriel End(V) possède une section distinguée, consistant à prendre l'identité dans chaque fibre de V . Cela permet de considérer TX (fibré tangent de X) comme sous-fibré de TX⊗End V . Disons maintenant qu'un opérateur différentiel D sur V, d'ordre 1 , est à symbole principal scalaire si son symbole principal σ_D , vu comme section de TX⊗End V , est en fait une section de TX .

Soit $D_1,\dots,D_m$ une famille d'opérateurs différentiels d'ordre 1 sur V à symbole principal scalaire, et supposons que les $\xi_j = \sigma_{D_J}$ forment une trivialisation locale de TX au voisinage de x_o . Il est alors clair que $s \in F$ est dans $\mathfrak{J}^{k+1}_{x_o} F$ si et seulement si $D_{j_1}\dots D_{j_\ell} s(x_o) = 0$ pour tous $j_1,\dots,j_\ell \in \{1,\dots,m\}$, et $\ell \leq k$. Donc si $u \in \mathrm{Hom}_{x_o}(F,E')$ est d'ordre $\leq k$, u(s) ne dépend que des $D_{j_1}\dots D_{j_\ell}(s)(x_o)$; mais cela veut dire que u est somme d'éléments de la forme $u_{o,j_1,\dots,j_\ell}\,\delta\, D_{j_1}\dots D_{j_\ell}$ avec $u_{o,j_1,\dots,j_\ell} \in \mathrm{Hom}(E,E')$. En d'autres termes, les éléments d'ordre 0 engendrent $\mathrm{Hom}_{x_o}(F,E')$ sous l'action de $D_1,\dots,D_m$.

Si maintenant $\xi_1,\dots,\xi_m$ est une base d'un supplémentaire de $\underline{b}$ dans $\underline{a}$, les opérateurs ξ_{jF} possèdent les propriétés ci-dessus ; d'où le lemme.

1.6.3. Remarque 1.6.3. On peut en fait donner une description un peu plus précise du $\underline{b}$-module $\mathrm{Hom}_{x_o}(F,E')$. Supposons d'abord que $E' = \mathbb{C}$ soit le $\underline{b}$-module trivial. Alors à condition de la transformer en action à gauche par l'antiautomorphisme principal de $U(\underline{a})$, l'action de $\underline{a}$ sur $\mathrm{Hom}_{x_o}(F,\mathbb{C})$ prolonge celle de $\underline{b}$. Le sous-$\underline{b}$-module fermé des éléments d'ordre 0 s'identifie à E^* ; d'où un morphisme de $\underline{a}$-modules de $U(\underline{a})\otimes_{\underline{b}} E^*$ vers $\mathrm{Hom}_{x_o}(F,\mathbb{C})$, en vertu de la propriété universelle des modules induits au sens des algèbres de Lie ([13] ch.5 prop.5.1.3). D'après le lemme, cette application est surjective ; mais de plus, si on munit $U(\underline{a})\otimes_{\underline{b}} E^*$ de la filtration déduite de celle de $U(\underline{a})$, et $\mathrm{Hom}_{x_o}(F, \mathbb{C})$ de la filtration définie par l'ordre, la démonstration du lemme montre qu'en fait elle est surjective en toute filtration. Un décompte de dimensions entraîne alors que c'est un isomorphisme.

Donc $\mathrm{Hom}_{x_o}(F,\mathbb{C})$ s'identifie à $U(\underline{a})\otimes_{\underline{b}} E^*$ sur lequel on n'a gardé que l'action de $\underline{b}$. Dans le cas général $\mathrm{Hom}_{x_o}(F,E')$ peut s'écrire $\mathrm{Hom}_{x_o}(F,\mathbb{C})\otimes E'$; donc il s'identifie à $(U(\underline{a})\otimes_{\underline{b}}E^{*})\otimes E'$.

1.6.4. Soit $F' = \mathrm{Ind}_{B\uparrow A}^{C^{\infty}} E'$. A tout $u \in \mathrm{Hom}(F,F')$ on associe une fonction C^{∞} sur A à valeurs dans $\mathrm{Hom}(F,E')$ par la formule :

$$u(a)(s) = u(as)(a). \quad \text{pour tous } a \in A \text{ , } s \in F \text{ .}$$

Cela permet d'identifier $\mathrm{Hom}(F,F')$ à $\mathrm{Ind}_{B\uparrow A}^{C^{\infty}} \mathrm{Hom}(F,E')$. Dans cette description, le sous-module fermé $\mathrm{Ind}_{B\uparrow A}^{C^{\infty}} \mathrm{Hom}_{x_o}(F,E')$ de $\mathrm{Hom}(F,F')$ s'identifie à l'ensemble des u pour lesquels $u(s)(x)$ ne dépend que du germe de s en x , pour tout $x \in X$; ce qui est une caractérisation classique des opérateurs différentiels (voir par exemple [12] ch.17 § 13 n°17.13.1).

On écrira donc $\mathrm{Ind}_{B\uparrow A}^{C^{\infty}} \mathrm{Hom}_{x_o}(F,E') = \mathrm{Diff}(F,F')$, ou encore $\mathrm{Diff}(V,V')$, où V' est le fibré vectoriel $A\times_B E'$.

1.6.5. Soit maintenant E un B-module unitaire (de dimension finie), et posons $F = \mathrm{Ind}_{B\uparrow A}^{L^2} E$. Soit $\Delta(b) = |\det(\mathrm{Ad}_{\underline{a}/\underline{b}} b)|$, de sorte que $\mathrm{Ind}_{B\uparrow A}^{C^{\infty}} \Delta^{-1}$ est l'espace des densités C^{∞} sur X . On sait alors que les vecteurs C^{∞} de F s'identifient à certaines sections C^{∞} du fibré $\tilde{V} = A\times_B(\Delta^{-\frac{1}{2}} \otimes E)$; à savoir, celles qui sont de carré intégrable après action de n'importe quel élément de $U(\underline{a})$. En particulier, F_{∞} contient toutes les sections C^{∞} à support compact du fibré $\tilde{V}$.

On peut comme ci-dessus introduire $\mathrm{Hom}_{x_o}(F_{\infty},E')$; comme tout est concentré au voisinage de x_o , il est clair que la description du lemme 1.6.2. reste valable.

§ 2 MODULES ALGÉBRIQUES.

2.1. On munit G de la structure de variété algébrique réelle obtenue en identifiant $\underline{g}$ à G par l'application exponentielle ; on obtient ainsi un groupe algébrique (précisément, il faudrait dire que G est l'ensemble des points réels d'un groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$). On a donc une notion de fonction régulière sur G à valeurs dans un espace vectoriel complexe E : ce sont les fonctions qui deviennent polynomiales une fois transférées sur $\underline{g}$ par composition avec l'application exponentielle. On note $A(G,E)$ l'espace des fonctions régulières sur G à valeurs dans

E .

Soit E un G-module C^∞ . On dira qu'un vecteur v de E est algébrique, si l'application $g \longrightarrow gv$ est dans A(G,E). On note E_{alg} le sous-G-module de E formé des vecteurs algébriques.

De même, soit E un $\underline{g}$-module. On note E_{alg} le sous-module de E formé des vecteurs annulés par une puissance de U_+ (l'idéal d'augmentation de U) . Si E provient d'un G-module C^∞ , il est facile de voir que les deux définitions coincident. On dira qu'un $\underline{g}$-module E est algébrique, si tous ses vecteurs sont algébriques.

Enfin on dira qu'un espace vectoriel (sans topologie) muni d'une action de G est un G-module algébrique, s'il est réunion de sous-G-modules unipotents continus de dimension finie. On voit facilement que tout $\underline{g}$-module algébrique peut-être muni d'une façon et d'une seule d'une action de G qui en fait un G-module algébrique, et qui redonne l'action de $\underline{g}$ par différentiation.

2.2. On définit la catégorie des G-modules algébriques en prenant pour morphismes les applications linéaires quelconques commutant à l'action de G . Bien entendu cette catégorie est équivalente à celle des $\underline{g}$-modules algébriques, mais il sera souvent avantageux de se placer du point de vue "groupes". On note Mod_G^{alg} cette catégorie. On voit aussitôt que c'est une catégorie abélienne.

Soient H un sous-groupe fermé connexe de G, E un H-module algébrique. On pose :

$$\mathrm{Ind}_{H\uparrow G}^{alg} E = \{f \in A(G,E) \mid f(gh) = h^{-1}f(g) \text{ pour tous } h \in H,\ g \in G\}$$

et on le munit d'une structure de G-module algébrique par l'action régulière gauche de G . Il est clair que $\mathrm{Ind}_{H\uparrow G}^{alg}$ E vérifie la propriété universelle des objets coinduits dans la catégorie des modules algébriques. Cela veut dire que si V est un G-module algébrique, et $u : V \longrightarrow E$ un H-morphisme, il existe un unique G-morphisme $\tilde{u} : V \longrightarrow \mathrm{Ind}_{G\uparrow H}^{alg}$ E rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Ind}_{H\uparrow G}^{alg} E \arrow[d] \\ V \arrow[ur, "\tilde{u}"] \arrow[r, "u"'] & E \end{tikzcd}$$

où l'application $\mathrm{Ind}_{H\uparrow G}^{alg} E \longrightarrow E$ est l'évaluation au point 1 .

En particulier, prenant $H = \{1\}$, on voit que A(G,E) muni de l'action régulière gauche est injectif dans Mod_G^{alg} , et que E s'injecte dans A(G,E) par l'application $v \longrightarrow f_v$, où $f_v(g) = g^{-1} v$. Donc la catégorie Mod_G^{alg} possède assez d'injectifs.

On notera $H^n_{alg}(G,E)$ l'image de E par le $n^{ième}$ foncteur dérivé du foncteur $E \longrightarrow E^G$ (où E^G désigne l'espace des invariants de E) ; on l'appelle le $n^{ième}$ espace de cohomologie de E à coefficients algébriques. Cette appellation est justifiée par le fait que l'on peut calculer $H^*_{alg}(G,E)$ à l'aide des cochaines homogènes ou inhomogènes algébriques sur G à valeurs dans E , comme le cas continu ou C^∞ (cf.[24]ch.III, § 1, prop.1.2., et 1.5.). Par exemple, l'utilisation des cochaines homogènes consiste à considérer la résolution "standard algébrique" :

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\varepsilon} A(G,E) \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow A(G^{n+1},E) \longrightarrow \cdots\cdots$$

où la différentielle $d : A(G^{n+1},E) \longrightarrow A(G^{n+2},E)$ est donnée par :

$$df(g_o,\ldots,g_{n+1}) = \sum_{i=o}^{n+1} (-1)^i f(g_o,\ldots,\hat{g}_i,\ldots,g_{n+1})$$

et l'augmentation ε par $\varepsilon(v)$ $(g) = v$ pour tous $g \in G$, $v \in E$. On fait agir G sur $A(G^{n+1},E)$ par la formule (gf) $(g_o,\ldots,g_n) = g.f(g^{-1}g_o,\ldots,g^{-1}g_n)$; on montre comme dans le cas continu que l'on obtient bien un objet injectif dans la catégorie Mod_G^{alg} .

On démontre sans mal un "lemme de Shapiro" :

$$H^*_{alg}(G, \mathrm{Ind}^{alg}_{H\uparrow G} E) \simeq H^*_{alg}(H,E) \quad ;$$

on peut par exemple utiliser la méthode d'induction des résolutions ([24] ch.I, §5, remarque 5.2.)

2.3 On veut maintenant démontrer un "théorème de Van Est" : $H^*_{alg}(G,E) = H^*(\underline{g},E)$ pour tout G-module algébrique E .

Cela résulte immédiatement de [17] prop.2.7. : en effet cette proposition entraine que l'enveloppe injective (comme $\underline{g}$-module) d'un $\underline{g}$-module algébrique E est encore un $\underline{g}$-module algébrique (cf. partie II, lemme 5.2.2.); c'est donc encore l'enveloppe injective de E vu comme $\underline{g}$-module algébrique, et par conséquent $H^*_{alg}(G,E)$ et $H^*(\underline{g},E)$ peuvent être calculés par un même complexe.

Si on préfère, on peut calquer la démonstration de [24] ch.III, § 7,prop. 7.2. en considérant la résolution de E par les formes différentielles sur G à valeurs dans E , et à coefficients algébriques ; le lemme de Poincaré correspondant est classique, et on voit que $H^*_{alg}(G,E)$ se calcule par le complexe standard $C^*(\underline{g},E)$.

Ceci nous permet de réécrire le lemme de Shapiro sous la forme utile par la suite :

$$H^*(\underline{g},\ \mathrm{Ind}^{alg}_{H\uparrow G}\ E) \simeq H^*(\underline{h},E).$$

2.4. Lemme 2.4. Soit E un H-module algébrique muni d'une topologie d'ELCS dans laquelle l'action de H est continue (de sorte que E est aussi un H-module C^∞). Alors $\mathrm{Ind}^{alg}_{H\uparrow G}\ E = (\mathrm{Ind}^{C^\infty}_{H\uparrow G}\ E)_{alg}$ par l'inclusion naturelle.

Démonstration : C'est évident, car dire qu'une fonction C^∞ de G vers E est algébrique (pour l'action régulière gauche de G) revient à dire qu'elle est dans A(G,E).

§ 3 CAS DE DEUX ORBITES DISTINCTES.

Rappelons que dans ce paragraphe on suppose G connexe, mais non nécessairement simplement connexe. On se propose de démontrer la conjecture (C_1).

Théorème 3.1. Soient Ω_1,Ω_2 deux orbites coadjointes G-entières distinctes, (E_j,π_j) la représentation correspondant à Ω_j . Alors $\mathrm{Ext}^n_G(E_{1\infty},E_{2\infty}) = 0$ pour tout $n \geq 0$.

Démonstration.

a) On doit calculer $H^*(\underline{g},K,\ \mathrm{Hom}(E_{1\infty},E_{2\infty}))$, dans les notations du n° 1.2 . Soit λ_j le caractère de $\underline{k}$ donnant l'action de $\underline{k}$ dans $E_{j\infty}$. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, le résultat est évident : le complexe de cohomologie relative $C^*(\underline{g},K,\mathrm{Hom}(E_{1\infty},E_{2\infty}))$ est déjà réduit à 0 . On suppose donc dorénavant que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, et on doit montrer que $H^n(\underline{g}/\underline{k}\ ,\ \mathrm{Hom}(E_{1\infty},E_{2\infty})) = 0$ pour tout $n \geq 0$.

b) Introduisons l'algèbre U_λ comme au n° 1.4. de la partie II, et notons M le U_λ-bimodule $\mathrm{Hom}(E_{1\infty},E_{2\infty})$; d'après le lemme 1.4.1. de la partie II, la cohomologie étudiée s'identifie à la cohomologie de Hochschild $H^*(U_\lambda,M)$ (voir le n° 1.2. de la partie II pour les conventions de notation).

Remarquons que M est annulé à gauche par l'idéal J_2 de U_λ , à droite par l'idéal J_1 , où J_j désigne le noyau de l'action de U_λ dans $E_{j\infty}$. Donc M est annulé par l'idéal $J = J_2 \otimes U_\lambda^o + U_\lambda \otimes J_1$ de U_λ^e (J_1 étant vu comme idéal de U_λ^o).

Il est clair que l'idéal J est engendré par une suite centralisante. On voit alors comme dans le lemme 5.2.2. de la partie II, c'est-à-dire essentiellement par application de [17] prop.2.7., que le U_λ^e-module M admet une résolution injective :

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow X$$

où chaque terme de X est localement annulé par une puissance de J .

Comme le passage de Ω à I est injectif (cf.[13], introduction), les idéaux J_1 et J_2 sont distincts. Alors J_2 contient un élément u congru à 1 mod. J_1 (car l'image de J_2 dans U_λ/J_1 est $\neq 0$, et tous sous-$\underline{g}$-module non nul de U_λ/J_1 contient les constantes). Mais alors chaque $H^o(U_\lambda, X^n)$ est nul. En effet si $x \in H^o(U_\lambda, X^n)$, on a $u^k x = (u \otimes 1)^k x = 0$ pour k assez grand, puisque x est annulé par une puissance de J . Alors on a aussi $x\, u^k = 0$; mais x est annulé à droite par une puissance J_1^ℓ de J_1 , et u^k est inversible dans U_λ^o modulo J_1^ℓ ; donc $x u^k = 0$ entraine $x = 0$, comme annoncé.

Comme le complexe $H^o(U_\lambda\ , X) = \mathrm{Hom}_{U_\lambda^e}(U_\lambda, X)$ calcule la cohomologie étudiée, le théorème est démontré.

<u>Remarque 3.2</u>. La démonstration ci-dessus n'est pas tellement dans l'esprit de cette première partie ; on peut d'ailleurs,si l'on veut,faire une démonstration par récurrence sur la dimension de $\underline{g}$, comme pour le th.4.1. Mais elle a l'avantage de rester valable en remplaçant $E_{j\infty}$ par n'importe quel G-module C^∞ annulé par I_j (ou même localement annulé par une puissance de I_j) ; par ailleurs elle reste valable aussi en algèbre, c'est-à-dire en remplaçant le Hom considéré ici par l'espace de toutes les applications linéaires, disons de M_1 vers M_2 , où M_j est un $\underline{g}$-module annulé par I_j .

§ 4 ALGÉBRISATION DU PROBLÈME.

4.1. L'objet de ce paragraphe est la démonstration du théorème suivant :

Théorème 4.1. L'application $\pi : U/I \longrightarrow \mathrm{Hom}(E_\infty, E_\infty)$ induit un isomorphisme :

$$H^n(\underline{g}/\underline{q}, U/I) \simeq H^n(\underline{g}/\underline{q}, \mathrm{Hom}(E_\infty, E_\infty)) \quad \text{pour tout } n \geq 0 .$$

La cohomologie de U/I sera étudiée systématiquement au cours de la deuxième partie, et on en tirera les résultats annoncés dans l'introduction concernant la conjecture (C).

4.2. Supposons le théorème démontré pour $\underline{q} = \underline{p}$, et passons au cas général. On considère la suite spectrale de Hochschild-Serre par rapport à l'idéal $\underline{p}/\underline{q}$ de $\underline{g}/\underline{q}$. Comme $\underline{p}/\underline{q}$ agit trivialement sur $\mathrm{Hom}(E_\infty, E_\infty)$, on obtient :

$$E_2^{pq} = H^p(\underline{g}/\underline{p}, H^q(\underline{p}/\underline{q}, \mathbb{C}) \otimes \mathrm{Hom}(E_\infty, E_\infty)) \Longrightarrow H^*(\underline{g}/\underline{q}, \mathrm{Hom}(E_\infty, E_\infty)) .$$

On procède de même pour U/I. Il est clair que la flèche induite au niveau E_2^{pq} par π n'est autre que la flèche induite en $\underline{g}/\underline{p}$-cohomologie par :

$$1 \otimes \pi : H^q(\underline{p}/\underline{q}, \mathbb{C}) \otimes U/I \longrightarrow H^q(\underline{p}/\underline{q}, \mathbb{C}) \otimes \mathrm{Hom}(E_\infty, E_\infty) .$$

Or $H^q(\underline{p}/\underline{q}, \mathbb{C})$ est un $\underline{g}/\underline{p}$-module nilpotent de dimension finie. Alors une récurrence sur la dimension de $H^q(\underline{p}/\underline{q}, \mathbb{C})$ et un argument de lemme des cinq montrent que si π induit un isomorphisme en $\underline{g}/\underline{p}$-cohomologie il en va de même pour l'application $1 \otimes \pi$ ci-dessus. Donc π induit un isomorphisme au niveau du terme E_2^{pq} de la suite spectrale, et le théorème est démontré.

4.3. Supposons donc que $\underline{q} = \underline{p}$. On raisonnera par récurrence sur la dimension de $\underline{g}$, et on supposera donc le théorème démontré pour toutes les algèbres nilpotentes de dimension plus petite. Comme l'assertion à démontrer passe au quotient par $\underline{p} \cap I$, on peut supposer $\underline{p} \cap I = 0$; cela entraine que $\underline{z}$ est de dimension 1 et que $\underline{z} \cap I = 0$ (on a même $\underline{p} = \underline{z}$ en fait). On introduit donc les notations du n°1.4.

Notons de la même façon les images de x et y dans $\underline{g}/\underline{p}$, et soit $\underline{m}$ la sous-algèbre commutative de dimension 2 de $\underline{g}/\underline{p}$ engendrée par x et y . La première étape de la démonstration est le lemme suivant :

Lemme 4.3 : L'application canonique $C^*(\underline{g}/\underline{p}+\underline{m},\mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty)) \longrightarrow C^*(\underline{g}/\underline{p},\mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty))$ induit un isomorphisme en cohomologie.

D'après le n° 1.5. il suffit pour cela de montrer que dans la suite spectrale de Hochschild-Serre relativement à $\underline{m}$ on a $E_1^{pq} = 0$ pour tout $q > 0$. Or ce terme E_1^{pq} s'écrit $H^q(\underline{m},C^p(\underline{g}/\underline{r},\mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty)))$, en notant $\underline{r}$ la sous-algèbre $\underline{p}\oplus\mathbb{R}x\oplus\mathbb{R}y$ de $\underline{g}$. Comme $\underline{g}/\underline{r}$ est un $\underline{m}$-module nilpotent de dimension finie, par des raisonnements de longue suite exacte, on est ramené à prouver que $H^q(\underline{m},\mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty)) = 0$ pour $q > 0$.

4.4. Commençons par étudier la $\mathbb{R}y$-cohomologie. Notons $\mathrm{Hom}_o(E_\infty,E_\infty)$ l'espace des morphismes de la forme :

$$u(\varphi)\ (t) = u(t)\ \varphi(t)$$

où $t \longrightarrow u(t)$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathrm{Hom}(\tilde{E}_\infty,\tilde{E}_\infty)$, avec la propriété de multiplier $\mathcal{S}(\mathbb{R},\tilde{E}_\infty)$ dans lui-même (on dira qu'une telle fonction est "à croissance lente" ; lorsque E_∞ est de dimension 1, c'est l'espace $\mathcal{O}_M$ de Schwartz (cf.[23] §3 lemme 3.1.)).

Lemme 4.4. $H^o(\mathbb{R}y,\mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty)) = \mathrm{Hom}_o(E_\infty,E_\infty)$

$H^1(\mathbb{R}y,\mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty)) = 0$.

Démonstration : Il est clair que les éléments de $\mathrm{Hom}_o(E_\infty,E_\infty)$ commutent à l'action de y . Réciproquement, soit $u \in H^o(\mathbb{R}y,\mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty))$. Soit $t_o \in \mathbb{R}$. Comme u commute évidemment à la multiplication par les constantes, il commute à la multiplication par $t-t_o$. Mais si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\tilde{E}_\infty)$ vérifie $\varphi(t_o) = 0$, elle s'écrit $\varphi = (t-t_o)\ \psi$ avec $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\tilde{E}_\infty)$; donc $u(\varphi)\ (t_o) = [(t-t_o)u(\psi)](t_o) = 0$. Ainsi $u(\varphi)(t_o)$ ne dépend que de $\varphi(t_o)$, et peut s'écrire $u(t_o)\ \varphi(t_o)$, avec $u(t_o) \in \mathrm{Hom}(\tilde{E}_\infty,\tilde{E}_\infty)$. Il est maintenant facile de vérifier que $t \longrightarrow u(t)$ est une fonction C^∞, et par définition elle est à croissance lente. Donc $u \in \mathrm{Hom}_o(E_\infty,E_\infty)$.

Démontrons maintenant que $H^1(\mathbb{R}y,\mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty)) = 0$, c'est-à-dire que $\mathbb{R}y$ agit surjectivement sur $\mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty)$. Il s'agit en fait d'un problème de "division de distributions".

Soit $v \in \mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty)$. Pour tout $t_o \in \mathbb{R}$, on définit $v(t_o) \in \mathrm{Hom}(E_\infty,\tilde{E}_\infty)$ par $\varphi \longrightarrow v(\varphi)(t_o)$. On voit aussitôt que l'on obtient ainsi une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathrm{Hom}(E_\infty,\tilde{E}_\infty)$. On cherche à construire $u \in \mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty)$ telle que $yu = v$. Cela s'écrit :

$$- t_o u(t_o)\varphi + u(t_o)(t\varphi) = v(t_o)\varphi \quad \text{pour tout } t_o \in \mathbb{R} .$$

Soit encore :

$$u(t_o)[(t-t_o)\varphi] = v(t_o)\ \varphi .$$

Par conséquent lorsque $\varphi(t_o) = 0$, on a nécessairement :

$$u(t_o)(\varphi) = v(t_o)\ (\frac{1}{t-t_o}\ \varphi)$$

Il s'agit de prolonger cette définition. Choisissons une fois pour toutes une fonction $\alpha \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, à valeurs dans $[0,1]$, égale à 1 sur un voisinage de 0 .

Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\widetilde{E}_\infty)$ donnée, on note $A_\varphi(t_o)$ la fonction $t \longrightarrow \varphi(t)-\alpha(t-t_o)\varphi(t_o)$. Lorsque t_o varie, on obtient ainsi une fonction A_φ , qui est C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans E_∞ ; il est clair que $A_\varphi(t_o)$ est nulle en t_o . De plus la fonction A_φ est <u>bornée</u> : en effet si $p_{n,k,q}$ est une seminorme définissant la topologie de E_∞ , on a :

$$p_{n,k,q}(\alpha(t-t_o)\varphi(t_o)) \leq M(1+t_o^2)^n\ p_{n,k}(\alpha)q(\varphi(t_o)) \leq M'$$

puisque φ est à décroissance rapide. De même les dérivées de A_φ par rapport à t_o sont bornées.

Posons maintenant $B_\varphi(t_o) = \dfrac{A_\varphi(t_o)}{t-t_o}$, et définissons enfin $u(\varphi)$ par :

$$u(\varphi)\ (t_o) = v(t_o)B_\varphi(t_o) .$$

En écrivant $B_\varphi(t_o)(t) = \int_0^1 (\frac{d}{dt}\ A_\varphi(t_o))(t_o + \theta(t-t_o))d\theta$ on voit immédiatement que que la fonction $t_o \longrightarrow B_\varphi(t_o)$ est encore bornée ainsi que toutes ses dérivées, et qu'elle est de classe C^∞ .

Donc $u(\varphi)$ est bien une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\widetilde{E}_\infty$. Remarquons que la fonction $t_o \longrightarrow v(B_\varphi(t_o))$ à valeurs dans E_∞ , est bornée puisque B_φ l'est et que v est continue. Donc :

$$p_{n,o,q}\ v(B_\varphi(t_o)) = \sup_{s\in\mathbb{R}}\ (1+ s^2)^n\ q(v(s)B_\varphi(t_o))$$

est borné lorsque t_o parcourt $\mathbb{R}$, pour n et q fixés.

Faisant $s = t_o$ dans cette expression, on voit que :

$$(1+t_o^2)^n \; q(u(\varphi)(t_o))$$

est borné, donc que $u(\varphi)$ est à décroissance rapide. Enfin en écrivant que :

$$\frac{d}{dt_o} u(\varphi) = \frac{dv}{dt_o}(B_\varphi(t_o)) + v(t_o) \frac{dB_\varphi}{dt_o}$$

on voit qu'il en est de même pour les dérivées de $u(\varphi)$.

Donc $u(\varphi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\tilde{E}_\infty)$. Comme les applications $\varphi \to u(t_o)\varphi$ sont manifestement continues, u est continue d'après le théorème du graphe fermé ; donc $u \in \mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty)$.

Si $\varphi(t_o) = 0$, on a $u(\varphi)(t_o) = v(\frac{\varphi}{t-t_o})$. Donc si φ est quelconque :

$(yu)(\varphi)(t_o) = u[(t-t_o)\varphi](t_o) = v(t_o)\varphi$, et le lemme est démontré.

4.5. En faisant si on veut une suite spectrale par rapport à l'idéal $\mathbb{R}y$ de $\underline{m}$, il résulte du lemme 4.4. que $H^q(\underline{m},\mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty))$ s'identifie à $H^q(\mathbb{R}x,\mathrm{Hom}_o(E_\infty,E_\infty))$, où x agit sur $\mathrm{Hom}_o(E_\infty,E_\infty)$ par $-\frac{d}{dt}$. On identifie les fonctions constantes à $\mathrm{Hom}(\tilde{E}_\infty,\tilde{E}_\infty)$.

<u>Lemme 4.5</u>. $H^o(\mathbb{R}x, \mathrm{Hom}_o(E_\infty,E_\infty)) = \mathrm{Hom}(\tilde{E}_\infty,\tilde{E}_\infty)$

$H^1(\mathbb{R}x, \mathrm{Hom}_o(E_\infty,E_\infty)) = 0$

<u>Démonstration</u> : La première assertion est évidente.

Pour la deuxième, il suffit de voir que si $v \in \mathrm{Hom}_o(E_\infty,E_\infty)$, et si on pose $u(t) = -\int_o^t v(t)dt$ (intégrale qui a un sens parce que $\mathrm{Hom}(\tilde{E}_\infty,\tilde{E}_\infty)$ muni de la topologie de la convergence compacte est complet), on obtient encore une fonction à croissance lente. En d'autres termes, il faut vérifier que pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\tilde{E}_\infty)$, la fonction $t \to u(t)\varphi(t)$ est encore dans $\mathcal{S}(\mathbb{R},\tilde{E}_\infty)$.

Comme $\frac{d}{dt}(u(t)\varphi(t)) = -v(t)\varphi(t) + u(t)\frac{d\varphi}{dt}$, et des formules analogues pour les dérivées ultérieures, on peut se contenter de prouver que $\lim_{|t|\to\infty} (1+t^2)^n\, u(t)\varphi(t)=0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et quitte à remplacer φ par $(1+t^2)^n\,\varphi$ on peut supposer $n = 0$.

Soit q une seminorme définissant la topologie de $\tilde{E}_\infty$.

On a : $q(u(t)\varphi(t)) \le \int_o^t q(v(s)\varphi(t))ds$.

Pour $\xi \in \tilde{E}_\infty$ fixé, on va estimer la fonction $s \to q(v(s)\xi)$.

Puisque v est une application linéaire continue de E_∞ dans E_∞, il existe une seminorme $p_{n,k,q'}$ et une constante $M > 0$ tels que l'on ait pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\tilde{E}_\infty)$ et tout $\tau \in \mathbb{R}$:

$$q(v(\tau)\psi(\tau)) \leq Mp_{n,k,q'}(\psi) = M \sup_{\sigma\in\mathbb{R},\, j\leq k} (1+\sigma^2)^n \, q'(\frac{d^j\psi}{d\sigma^j})$$

Fixons une fonction $\alpha \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, à valeurs dans $[0,1]$ et égale à 1 sur un voisinage de 0, et appliquons ce qui précède à la fonction $\psi(\tau) = \alpha(\tau-s)\,\xi$

Cela donne une constante M' ne dépendant que de α, telle que :

$$q(v(\tau)\alpha(\tau-s)\xi) \leq M'(1+s^2)^n \, q'(\xi)$$

et en particulier pour $\tau = s$:

$$q(v(s)\xi) \leq M'(1+s^2)^n \, q'(\xi) \quad \text{pour tous } s \in \mathbb{R},\ \xi \in \tilde{E}_\infty .$$

Reportant cette majoration dans l'intégrale, on trouve :

$$q(u(t)\varphi(t)) \leq M' \, q'(\varphi(t)) \int_0^t (1+s^2)^n \, ds$$

et comme φ est à décroissance rapide, cette expression tend bien vers 0 quand $|t| \to \infty$.

4.6. On a donc maintenant démontré le lemme 4.3. On peut faire des raisonnements analogues, mais bien plus simples parce que purement algébriques, en remplaçant $\mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty)$ par U/I (cf. 2ème partie, n°2.3), de manière à obtenir un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^n(\underline{g}/\underline{p},U/I) & \longrightarrow & H^n(\underline{g}/\underline{p},\mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty)) \\ \uparrow\wr & & \uparrow\wr \\ H^n(\underline{g}/\underline{p},\underline{m},U/I) & \longrightarrow & H^n(\underline{g}/\underline{p},\underline{m},\mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty)) \end{array}$$

où les deux flèches verticales sont des isomorphismes. On est donc ramené à démontrer l'isomorphisme en cohomologie relative.

4.7. Passons à la seconde étape de la démonstration.

Remarquons que l'idéal $\underline{p}$ est contenu dans $\underline{g}'$ et ne contient pas y.

Soit $\underline{\tilde{q}}$ l'image de $\underline{p}$ dans $\underline{\tilde{g}}$. On définit un morphisme de complexes

$$C^*(\underline{g}/\underline{p},\underline{m},\mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty)) \longrightarrow C^*(\underline{\tilde{g}}/\underline{\tilde{q}},\mathrm{Hom}(\tilde{E}_\infty,\tilde{E}_\infty))$$

de la manière suivante. Soit $\omega \in C^n(\underline{g}/\underline{p},\underline{m},\mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty))$. La restriction de ω à $\underline{g}'$ définit une n-cochaîne sur $\underline{g}'/\underline{p}\oplus\mathbb{R}y$ à valeurs dans $\mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty)$. On peut identifier $\underline{g}'/\underline{p}\oplus\mathbb{R}y$ à $\underline{\tilde{g}}/\underline{\tilde{q}}$. Par ailleurs la condition de y-covariance s'exprime en disant que ω prend ses valeurs dans $\mathrm{Hom}_o(E_\infty,E_\infty)$, et en écrivant aussi la x-covariance on voit que l'on peut identifier le complexe $C^*(\underline{g}/\underline{p},\underline{m},\mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty))$ à $C^*_{\mathbb{R}x}(\underline{\tilde{g}}/\underline{\tilde{q}},\mathrm{Hom}_o(E_\infty,E_\infty))$.

Rappelons que les éléments de $\mathrm{Hom}_o(E_\infty,E_\infty)$ sont considérés comme des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathrm{Hom}(\tilde{E}_\infty,\tilde{E}_\infty)$.

<u>Lemme 4.7.</u> <u>L'évaluation en</u> $t = 0$ <u>définit un isomorphisme</u> :

$$C^*_{\mathbb{R}x}(\underline{\tilde{g}}/\underline{\tilde{q}},\mathrm{Hom}_o(E_\infty,E_\infty)) \xrightarrow{\sim} C^*(\underline{\tilde{g}}/\underline{\tilde{q}},\mathrm{Hom}(\tilde{E}_\infty,\tilde{E}_\infty)) \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Soit $V_N = V \supset V_{N-1} \supset\ldots\supset V_1 \supset V_o = 0$ une suite de Jordan-Hölder du $\mathbb{R}x$-module $V = \Lambda^n\, \underline{\tilde{g}}/\underline{\tilde{q}}$; soit $e_1,\ldots,e_N$ une base adaptée. Comme x agit par $-\frac{d}{dt}$ sur $\mathrm{Hom}_o(E_\infty,E_\infty)$, la condition de $\mathbb{R}x$-covariance s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\,\omega(e_j) = \omega(xe_j) \quad \text{pour } j = 1,\ldots,N \;.$$

ce qui prouve que $\omega(e_j)$ est entièrement déterminé par la donnée des $\omega(e_k)$ pour $k < j$ et par $\omega(e_j)$ (0) ; d'où l'injectivité du morphisme considéré.

La surjectivité est évidente, $\omega(e_j)(0)$ pouvant être pris arbitraire (On remarque d'ailleurs que les fonctions $t \to \omega(e_j)(t)$ sont polynomiales sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathrm{Hom}(\tilde{E}_\infty,\tilde{E}_\infty)$). D'où le lemme.

Procédant de même pour U/I (cf. partie II, fin du n°2.3) on aboutit à un nouveau diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^n(\underline{g}/\underline{p},\underline{m},U/I) & \longrightarrow & H^n(\underline{g}/\underline{p},\underline{m},\mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty)) \;. \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ H^n(\underline{\tilde{g}}/\underline{\tilde{q}},\tilde{U}/\tilde{I}) & \longrightarrow & H^n(\underline{\tilde{g}}/\underline{\tilde{q}},\mathrm{Hom}(\tilde{E}_\infty,\tilde{E}_\infty)) \;. \end{array}$$

ce qui permet de conclure, en appliquant l'hypothèse de récurrence à $\underline{\tilde{g}}$ et à $\underline{\tilde{q}}$.

§ 5 . ÉQUIVALENCE DES CONJECTURES (C) ET (C').

5.1. Soit $\underline{h}$ une polarisation réelle en f, H le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\underline{h}$. Réalisons E comme $\mathrm{Ind}_{H\uparrow G}^{L^2} \mathbb{C}_{if}$; alors les éléments de E_∞ s'identifient à certaines sections du fibré en droites complexes $V = G \times_H \mathbb{C}_{if}$ au-dessus de G/H ; on peut voir en fait que dans une paramétrisation convenable de la situation E s'identifie à l'espace $L^2(\mathbb{R}^m)$, et E_∞ à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ (avec $m = \dim \underline{g} - \dim \underline{h}$) (cf.remarque 5.4.1.)

On se propose d'étudier dans cette situation un "lemme de Shapiro". Introduisons comme au n° 1.6.5. l'espace $\mathrm{Hom}_{x_o}(E_\infty, \mathbb{C}_{if})$, où x_o est le point distingué de G/H ; notons Diff(V,V) l'espace des opérateurs différentiels de V dans lui-même (cf. n° 1.6.4).

Théorème 5.1.1.

(i) L'injection canonique $\mathrm{Hom}_{x_o}(E_\infty, \mathbb{C}_{if}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(E_\infty, \mathbb{C}_{if})$ induit un isomorphisme en $\underline{h}/\underline{q}$ -cohomologie.

(ii) Le H-module $\mathrm{Hom}_{x_o}(E_\infty, \mathbb{C}_{if})$ est algébrique, et le sous-module $\mathrm{Ind}_{H\uparrow G}^{alg} \mathrm{Hom}_{x_o}(E_\infty, \mathbb{C}_{if})$ de Diff(V,V) est exactement l'image de U/I par la représentation π .

Corollaire 5.1.2. On a un isomorphisme naturel
$H^n(\underline{g}:\underline{q}, \mathrm{Hom}(E_\infty, E_\infty)) \simeq H^n(\underline{h}/\underline{q}, \mathrm{Hom}(E_\infty, \mathbb{C}_{if}))$ pour tout $n \geq 0$.

Démonstration : Il suffit de composer les isomorphismes :

$H^n(\underline{g}/\underline{q}, \mathrm{Hom}(E_\infty, E_\infty)) \simeq H^n(\underline{g}/\underline{q}, U/I)$ (th.4.1.) ;

$H^n(\underline{g}/\underline{q}, U/I) \simeq H^n(\underline{h}/\underline{q}, \mathrm{Hom}_{x_o}(E_\infty, \mathbb{C}_{if}))$ (cela résulte du lemme de Shapiro pour l'induction algébrique, tel qu'il est énoncé à la fin du n°2.3., compte tenu de l'assertion (ii) du théorème) ;
$H^n(\underline{h}/\underline{q}, \mathrm{Hom}_{x_o}(E_\infty, \mathbb{C}_{if})) \simeq H^n(\underline{h}/\underline{q}, \mathrm{Hom}(E_\infty, \mathbb{C}_{if}))$ (assertion (i) du théorème).

5.2. Les n°s 5.2. et 5.3 sont consacrés à la démonstration de l'assertion (i), par récurrence sur la dimension de $\underline{g}$. Lorsque $\dim \underline{g} = 0$, il n'y a rien à démontrer ; supposons donc $\dim \underline{g} > 0$, et le théorème démontré pour toutes les algèbres $\underline{g}$ de dimension plus petite.

Comme pour le théorème 4.1. on se ramène au cas $\underline{q} = \underline{p}$. Grâce à l'hypothèse de récurrence, cela permet de supposer que $\underline{z}$ est de dimension 1, et que $I \cap \underline{z}=0$. Introduisons les notations du n°1.4., et notons $\tilde{\underline{q}}$ l'image de $\underline{p}$ dans $\tilde{\underline{g}}$ (remarquer que $\underline{p} \subset \underline{g}'$).

Suivant la position de $\underline{h}$ par rapport à $\underline{g}'$, il y a deux cas à distinguer.

a) $\underline{h} \subset \underline{g}'$

Alors $\underline{h}$ contient $\mathbb{R}y$, et $\tilde{\underline{h}} = \underline{h}/\mathbb{R}y$ est une polarisation de $\tilde{\underline{g}}$ en $\tilde{f}$. On démontre comme au lemme 4.4., mais beaucoup plus simplement, que $H^0(\mathbb{R}y,\mathrm{Hom}(E_\infty,\mathbb{C}_{if})) \simeq \mathrm{Hom}(\tilde{E}_\infty,\mathbb{C}_{if})$ (dans les notations du n°1.4., ce sont les applications qui se factorisent par $\varphi \longrightarrow \varphi(0)$), et que $H^1(\mathbb{R}y,\mathrm{Hom}(E_\infty,\mathbb{C}_{if})) = 0$. On note δ, ou δ_H , l'élément $s \longrightarrow s(1)$ de $\mathrm{Hom}(E_\infty,\mathbb{C}_{if})$, associé à la réalisation de E définie par H (il dépend de H) ; on note $\tilde{\delta}$ l'élément analogue de $\mathrm{Hom}(\tilde{E}_\infty,\mathbb{C}_{i\tilde{f}})$, associé à $\tilde{H} = \exp(\tilde{\underline{h}})$. Il est clair que $\delta(\varphi) = \tilde{\delta}(\varphi(0))$ pour tout $\varphi \in E_\infty$.

D'après le lemme 1.6.2. et la description de l'action de $U(\underline{g})$ faite à la fin du n°1.4., $\mathrm{Hom}_{x_o}(E_\infty,\mathbb{C}_{if})$ est l'ensemble des applications de la forme

$$\varphi \longrightarrow \sum_{j=o}^{N} u_j \left(\frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!}\right), \text{ avec } u_j \in \mathrm{Hom}_{\tilde{x}_o}(\tilde{E}_\infty,\mathbb{C}_{i\tilde{f}})$$ (le fait que l'on obtienne toutes les applications de cette forme provient de ce que l'application naturelle $U/I \longrightarrow \tilde{U}/\tilde{I}[t, \frac{d}{dt}]$ est surjective, comme signalé au n°1.4.). On voit alors immédiatement que $H^0(\mathbb{R}y,\mathrm{Hom}_{x_o}(E_\infty,\mathbb{C}_{if})) \simeq \mathrm{Hom}_{\tilde{x}_o}(\tilde{E}_\infty,\mathbb{C}_{i\tilde{f}})$, et $H^1(\mathbb{R}y,\mathrm{Hom}_{x_o}(E_\infty,\mathbb{C}_{if})) = 0$.

D'après le lemme 1.5 on est donc ramené à prouver que l'application $C^*(\underline{h}/\underline{p}\ ,\ \mathbb{R}y\ ,\ \mathrm{Hom}_{x_o}(E_\infty,\mathbb{C}_{if})) \longrightarrow C^*(\underline{h}/\underline{p}\ ,\mathbb{R}y\ ,\mathrm{Hom}\ (E_\infty,\mathbb{C}_{if}))$ induit un isomorphisme en cohomologie. Or y agit trivialement sur $\underline{h}/\underline{p}$; comme $\underline{h}/\underline{p} \oplus \mathbb{R}y$ s'identifie à $\tilde{\underline{h}}/\tilde{\underline{q}}$, et $H^0(\mathbb{R}y,\ \mathrm{Hom}(E_\infty,\mathbb{C}_{if}))$ à $\mathrm{Hom}(\tilde{E}_\infty,\mathbb{C}_{if})$ d'après ce qui précède, le complexe $C^*(\underline{h}/\underline{p},\mathbb{R}y,\mathrm{Hom}(E_\infty,\mathbb{C}_{if}))$ s'identifie à $C^*(\tilde{\underline{h}}/\tilde{\underline{q}},\mathrm{Hom}(\tilde{E}_\infty,\mathbb{C}_{i\tilde{f}}))$. Faisant la même identification pour l'autre membre, on conclut donc en appliquant l'hypothèse de récurrence à $\tilde{\underline{g}}$, $\tilde{f}$, $\tilde{\underline{h}}$ et $\tilde{\underline{q}}$.

b) $\underline{h} \not\subset \underline{g}'$

Alors, on peut supposer $x \in \underline{h}$, et on n'a jamais $y \in \underline{h}$; quitte à remplacer x par $x-f(x)z$, on peut supposer $f(x) = 0$.

Soit $\underline{\tilde{h}}$ l'image de $\underline{h} \cap \underline{g}'$ dans $\underline{\tilde{g}}$; $\underline{\tilde{h}}$ est une polarisation de $\underline{\tilde{g}}$ en $\tilde{f}$.

On va maintenant relativiser par rapport à la sous-algèbre $\mathbb{R}x$ de $\underline{h}$. La situation est duale de celle du cas précédent via la transformation de Fourier ; on trouve $H^o(\mathbb{R}x\ ,\ \mathrm{Hom}(E_\infty, \mathbb{C}_{if})) \simeq \mathrm{Hom}(\tilde{E}_\infty, \mathbb{C}_{i\tilde{f}})$ (ce sont les applications qui se factorisent par $\varphi \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt$), et $H^1(\mathbb{R}x,\ \mathrm{Hom}(E_\infty, \mathbb{C}_{if})) = 0$.

Le complexe de cohomologie relative, auquel on est ramené d'après ce qui précède (cf.lemme 1.5.), peut être identifié à $C^*_{\mathbb{R}x}(\underline{\tilde{h}}/\underline{\tilde{q}}, \mathrm{Hom}(E_\infty, \mathbb{C}_{if}))$. Soit $M_N = M \supset M_{N-1} \supset \ldots \supset M_1 \supset M_o = 0$ une suite de Jordan-Hölder du $\mathbb{R}x$-module $M = \Lambda^n\ \underline{\tilde{h}}/\underline{\tilde{q}}$, et $\omega \in C^n_{\mathbb{R}x}\ (\underline{\tilde{h}}/\underline{\tilde{q}}, \mathrm{Hom}(E_\infty, \mathbb{C}_{if}))$. Puisque $\omega(x^N \xi) = 0$ pour tout $\xi \in M$, on a $\omega(\xi)\ (\frac{d^N}{dt^N}\varphi) = 0$ pour tout $\varphi \in E_\infty$. Cela entraîne que $\omega(\xi)$ est de la forme :

$$\varphi \longrightarrow \sum_{j=o}^{N-1} \tilde{\omega}_j(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^i}{j!}\ \varphi(t)\ dt$$

avec $\tilde{\omega}_o, \ldots, \tilde{\omega}_{N-1} \in C^n(\underline{\tilde{h}}/\underline{\tilde{q}}, \mathrm{Hom}(\tilde{E}_\infty, \mathbb{C}_{i\tilde{f}}))$. Et la condition de $\mathbb{R}x$-covariance entraîne que les $\tilde{\omega}_j$ s'expriment tous à partir de $\tilde{\omega}_o$, suivant la formule :

$$\tilde{\omega}_j(\xi) = (-1)^j\ \tilde{\omega}_o(x^j\xi).$$

D'où finalement l'expression :

$$\omega(\xi)(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\omega}_o(\exp(-tx)\xi)\varphi(t)dt$$

où l'on considère $\exp(-tx)\xi$ comme un polynôme sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans M , que l'on compose avec $\tilde{\omega}_o$ pour obtenir un polynôme à valeurs dans $\mathrm{Hom}(\tilde{E}_\infty, \mathbb{C}_{i\tilde{f}})$, que l'on peut intégrer contre la fonction φ .

Cela conduit à considérer l'application qui à tout $\tilde{\omega} \in C^n(\underline{\tilde{h}}/\underline{\tilde{q}}, \mathrm{Hom}(\tilde{E}_\infty, \mathbb{C}_{i\tilde{f}}))$ associe la cochaîne $\omega \in C^q(\tilde{h}/\tilde{q}, \mathrm{Hom}(E_\infty, \mathbb{C}_{if}))$ définie par la formule :

$$\omega(\xi)(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\omega}(\exp(-tx)\xi)\varphi(t)dt\ .$$

On vérifie aussitôt que $\omega \in C^n_{\mathbb{R}x}(\underline{\tilde{h}}/\underline{\tilde{q}}, \mathrm{Hom}(E_\infty, \mathbb{C}_{if}))$; et d'après ce que l'on vient de voir, l'application $\tilde{\omega} \longrightarrow \omega$ est surjective. On voit facilement qu'elle est injective.

Lemme 5.2. L'application $\tilde{\omega} \longrightarrow \omega$ définie ci-dessus est un isomorphisme de complexes de $C^*(\underline{\tilde{h}}/\underline{\tilde{q}}, \mathrm{Hom}(\tilde{E}_\infty, \mathbb{C}_{i\tilde{f}}))$ sur $C^*(\underline{h}/\underline{q}, \mathbb{R}x, \mathrm{Hom}(E_\infty, \mathbb{C}_{if}))$.

Démonstration : Etant donné ce qui précède, il suffit de vérifier que l'application $\tilde{\omega} \longrightarrow \omega$ commute aux différentielles. Mais cela est immédiat sur l'expression explicite de la différentielle, compte tenu de la formule pour l'action de $\underline{g}'$ donnée au n°1.4. : un élément $\eta \in \underline{g}'$ agit justement par multiplication par le polynôme à coefficients opérateurs $\exp(-tx)\eta$.

5.3. Pour terminer la démonstration de l'assertion (i) du théorème, il nous reste maintenant à montrer que la restriction du procédé précédent à $\mathrm{Hom}_{x_o}(E_\infty, \mathbb{C}_{if})$ donne encore un isomorphisme de $H^*(\underline{h}/\underline{q}, \mathrm{Hom}_{x_o}(E_\infty, \mathbb{C}_{if}))$ vers $H^*(\underline{\tilde{h}}/\underline{\tilde{q}}, \mathrm{Hom}_{\tilde{x}_o}(\tilde{E}_\infty, \mathbb{C}_{i\tilde{f}}))$. Il s'agit d'abord d'identifier, dans la réalisation de E_∞ considérée au n°1.4., quels sont les éléments de $\mathrm{Hom}(E_\infty, \mathbb{C}_{if})$ de support $\{x_o\}$.

Lemme 5.3. $\mathrm{Hom}_{x_o}(E_\infty, \mathbb{C}_{if})$ s'identifie à l'ensemble des applications de la forme :

$$\varphi \longrightarrow \sum_{j=o}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^i}{j!} u_j(\varphi(t))dt$$

avec $u_o, \dots, u_N \in \mathrm{Hom}_{\tilde{x}_o}(\tilde{E}_\infty, \mathbb{C}_{i\tilde{f}})$ (de façon imagée, ce sont les intégrales contre les polynômes à coefficients dans $\mathrm{Hom}_{x_o}(\tilde{E}_\infty, \mathbb{C}_{i\tilde{f}})$).

Démonstration : Soient $\underline{h}'$ la sous-algèbre $\underline{h} \cap g' \oplus \mathbb{R}y$ de $\underline{g}$, H' le sous-groupe analytique de G correspondant ; alors $\underline{h}'$ est une nouvelle polarisation de $\underline{g}$ en f , contenue dans $\underline{g}'$, de sorte que E peut encore se réaliser comme $\mathrm{Ind}^{L^2}_{H'\uparrow G}\, \mathbb{C}_{if}$, et E' comme $\mathrm{Ind}^{L^2}_{H'\uparrow G'}\, \mathbb{C}_{if}$, (la description du n°1.4. correspond à cette nouvelle réalisation). Soit G_1 le sous-groupe HH' de G, dans lequel H et H' sont deux sous-groupes distingués de codimension 1 . D'après le principe d'induction par étages, pour établir un isomorphisme entre les deux réalisations de E , il suffit d'établir un isomorphisme entre $\mathrm{Ind}^{L^2}_{H\uparrow G_1}\, \mathbb{C}_{if}$ et $\mathrm{Ind}^{L^2}_{H'\uparrow G_1}\, \mathbb{C}_{if}$. Cela se fait par transformation de Fourier. Si on identifie G_1/H' à $\mathbb{R}$ grâce à la décomposition $G_1 = \exp(\mathbb{R}x) \ltimes H'$, et de même G_1/H à $\mathbb{R}$ grâce à la décomposition $G_1 = \exp(\mathbb{R}y) \ltimes H$, on obtient un isomorphisme $\mathrm{Ind}^{L^2}_{H'\uparrow G_1}\, \mathbb{C}_{if} \longrightarrow \mathrm{Ind}^{L^2}_{H\uparrow G_1}\, \mathbb{C}_{if}$ par la formule :

$$\varphi \longrightarrow \psi \text{ où } \psi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} \varphi(t)dt$$

(noter que dans $(\mathrm{Ind}_{H\uparrow G_1}^{L^2}\mathbb{C}_{if})_\infty$ x agit par multiplication par is, et y par $-\frac{d}{ds}$).

En particulier, l'évaluation au point 1 de G_1 s'écrit, via cet isomorphisme :

$$\varphi \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt .$$

L'application $\delta_H : \varphi \longrightarrow \varphi(1)$ de E_∞ vers $\mathbb{C}_{if}$ peut se factoriser en $\varphi \longrightarrow \varphi|_{G_1} \longrightarrow \varphi|_{G_1}(1)$, où $\varphi|_{G_1} \in (\mathrm{Ind}_{H\uparrow G_1}^{L^2}\mathbb{C}_{if})_\infty \simeq (\mathrm{Ind}_{H'\uparrow G_1}^{L^2})_\infty$. Dans cette dernière description, il est immédiat de voir que l'application de restriction à G_1 n'est autre que $\varphi \longrightarrow \tilde{\delta}\circ\varphi$, où $\tilde{\delta} : \tilde{E}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_{i\tilde{f}}$ est l'évaluation en 1. Finalement, on a donc :

$$\delta_H(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\delta}(\varphi(t))dt .$$

Au vu du lemme 1.6.2., et de la description de l'action de $\underline{g}$ dans E_∞, cela montre déjà que tout $u \in \mathrm{Hom}_{x_o}(E_\infty,\mathbb{C}_{if})$ est de la forme indiquée. La réciproque provient de la remarque faite à la fin du n°1.4., qui montre que tout opérateur de la forme $\varphi \longrightarrow \sum_{j=o}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^j}{j!} u_j(\varphi(t))dt$ est de la forme $\delta_H(u\varphi)$, avec $u \in U$. Cqfd.

Il est maintenant facile de conclure. En effet si $u \in \mathrm{Hom}_{x_o}(E_\infty,\mathbb{C}_{if})$ est l'intégration contre $P(t) = \sum_{j=o}^{N} u_j \frac{t^j}{j!}$, xu est l'intégration contre $-\frac{dP}{dt}$; on en déduit que $H^o(\mathbb{R}x,\mathrm{Hom}_{x_o}(E_\infty,\mathbb{C}_{if})) \simeq \mathrm{Hom}_{\tilde{x}_o}(\tilde{E}_\infty,\mathbb{C}_{i\tilde{f}})$, et $H^1(\mathbb{R}x,\mathrm{Hom}_{x_o}(E_\infty,\mathbb{C}_{if})) = 0$.

Quant à l'isomorphisme de complexes construit au lemme 5.2., il est clair qu'il applique $C^*(\underline{\tilde{h}}/\underline{\tilde{q}},\mathrm{Hom}_{\tilde{x}_o}(\tilde{E}_\infty,\mathbb{C}_{i\tilde{f}}))$ dans $C^*(\underline{h}/\underline{q},\mathbb{R}x,\mathrm{Hom}_{x_o}(E_\infty,\mathbb{C}_{if}))$; et c'est un isomorphisme entre ces deux complexes, car pour obtenir un $\omega \in C^n(\underline{h}/\underline{q},\mathbb{R}x,\mathrm{Hom}_{x_o}(E_\infty,\mathbb{C}_{if}))$ donné il suffit de prendre pour $\tilde{\omega}$ le $\tilde{\omega}_o$ introduit au n°5.2. ; le lemme 5.3. nous assure que cet $\tilde{\omega}_o$ prend bien ses valeurs dans $\mathrm{Hom}_{\tilde{x}_o}(\tilde{E}_\infty,\mathbb{C}_{i\tilde{f}})$ (car les u_j sont entièrement déterminés par u).

On obtient finalement un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
C^n(\underline{h}/\underline{p},\mathbb{R}x,\mathrm{Hom}_{x_o}(E_\infty,\mathbb{C}_{if})) \arrow[r] & C^n(\underline{h}/\underline{p},\mathbb{R}x,\mathrm{Hom}(E_\infty,\mathbb{C}_{if})) \\
C^n(\underline{\tilde{h}}/\underline{\tilde{q}},\mathrm{Hom}_{\tilde{x}_o}(\tilde{E}_\infty,\mathbb{C}_{i\tilde{f}})) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & C^n(\underline{\tilde{h}}/\underline{\tilde{q}},\mathrm{Hom}(\tilde{E}_\infty,\mathbb{C}_{i\tilde{f}})) \arrow[u, "\wr"]
\end{tikzcd}$$

d'où la conclusion, en appliquant l'hypothèse de récurrence à $\tilde{\underline{g}}$, $\tilde{f}$,$\tilde{\underline{h}}$ et $\tilde{\underline{q}}$.

5.4. Passons à la démonstration de l'assertion (ii).
Comme l'action adjointe de H sur U est algébrique, il résulte du lemme 1.6.2. avec $E = E' = \mathbb{C}_{if}$ que $\mathrm{Hom}_{x_o}(E_\infty,\mathbb{C}_{if})$ est un H-module algébrique (en fait, on a

$\mathrm{Hom}_{x_o}(E_\infty,\mathbb{C}_{if}) = \mathrm{Hom}(E_\infty,\mathbb{C}_{if})_{alg}$, mais nous n'aurons pas besoin de ce résultat).

On peut donc définir $\mathrm{Ind}^{alg}_{H\uparrow G}\,\mathrm{Hom}_{x_o}(E_\infty,\mathbb{C}_{if})$, qui s'identifie à $\mathrm{Diff}(V,V)_{alg}$ d'après le n°1.6.4. et le lemme 2.4.

D'autre part, U agit sur E_∞, vu comme sous-espace de l'espace des sections C^∞ de V , par opérateurs différentiels, évidemment algébriques sous l'action de G . Il suffira donc de démontrer le lemme suivant :

<u>Lemme 5.4.1</u>. <u>L'inclusion naturelle</u> $U/I \hookrightarrow \mathrm{Diff}(V,V)_{alg}$ <u>donnée par</u> π <u>est un isomorphisme</u>.

<u>Démonstration</u> : Montrons d'abord que $H^o(\underline{g},\mathrm{Diff}(V,V)) = \mathbb{C}$ (opérateurs de multiplication par une fonction constante). D'après le lemme de Shapiro pour l'induction C^∞ , il suffit de montrer que $H^o(\underline{h}, \mathrm{Hom}_{x_o}(E_\infty,\mathbb{C}_{if})) = \mathbb{C}\,\delta$, δ étant l'évaluation au point 1. Identifions $\mathrm{Hom}_{x_o}(E_\infty,\mathbb{C}_{if})$ à $(U\otimes_{\underline{h}}\mathbb{C}_{-if})\otimes\mathbb{C}_{if}$ (cf. remarque 1.6.3.).

D'après [13] ch.6 prop.6.2.9. le $\underline{g}$-module $U\otimes_{\underline{h}}\mathbb{C}_{-if}$ est simple, donc à commutant scalaire (loc.cit.ch.2 prop.2.6.9.) ; en d'autres termes, $\mathrm{Hom}_{\underline{g}}(U\otimes_{\underline{h}}\mathbb{C}_{-if},U\otimes_{\underline{h}}\mathbb{C}_{-if}) = \mathbb{C}$. D'après la propriété universelle des modules induits (au sens des algèbres de Lie ; voir [13]ch.5 prop.5.1.3) ceci s'écrit encore $\mathrm{Hom}_{\underline{h}}(\mathbb{C}_{-if},U\otimes_{\underline{h}}\mathbb{C}_{-if}) = \mathbb{C}\delta$, et notre assertion est démontrée.

Il est maintenant facile de conclure. Soit B l'algèbre $\mathrm{Diff}(V,V)_{alg}$; par définition B est munie d'une action de $\underline{g}$ par dérivations localement nilpotentes, et on a $H^o(\underline{g},B) = \mathbb{C}$. Soit U_+ l'idéal d'augmentation de U , et pour tout $n \geq 0$, soit $B_n = \{b \in B \mid U_+^{n+1}\, b = 0\}$. Il suffira de montrer que pour tout $n \geq 0$, $B_n \subset U/I$; d'après ce qu'on vient de voir, c'est vrai pour $n = 0$. Supposons le contraire et soit N le plus petit entier tel que $B_N \not\subset U/I$; soit $b \in B_N$, $b \notin U/I$. Pour tout $\xi \in \underline{g}$, on a $[b,\xi] \in B_{N-1} \subset U/I$; et comme $\underline{g}$ engendre U/I , on a $[b,u] \in U/I$ pour tout $u \in U/I$. Mais alors ad b définit une dérivation de U/I , et d'après [13] ch.4 lemme 4.6.8. il existe $a \in U/I$ tel que $[b,u] = [a,u]$ pour tout $u \in U/I$, ce qui s'écrit encore $[b-a,u] = 0$. En particulier b-a commute à tout $\xi \in \underline{g}$; donc b-a est un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$, et $b = \lambda + a$ est dans U/I , ce qui est absurde. D'où le lemme.

Remarque 5.4.2. Soit $\underline{g} = \underline{g}_o \supset \underline{g}_1 \supset \ldots \supset \underline{g}_m = \underline{h}$ une suite décroissante de sous-algèbres de $\underline{g}$, avec $\underline{g}_j$ de codimension 1 dans $\underline{g}_{j-1}$; pour $j=1,\ldots,m$, soit e_j une base d'un supplémentaire de $\underline{g}_j$ dans $\underline{g}_{j-1}$. Alors $(e_1,\ldots,e_m)$ est une base coexponentielle à $\underline{h}$ dans $\underline{g}$ (cf.[2] ch.I n°2.5.) ; il est même facile de voir que l'application $(t_1,\ldots,t_m,h) \longrightarrow \exp t_1e_1 \ldots \exp t_me_m \cdot h$ établit un isomorphisme de variétés algébriques réelles entre $\mathbb{R}^m \times H$ et G (il est clair que cette assertion n'a rien à voir avec le fait que $\underline{h}$ soit une polarisation, ce qui permet de raisonner par récurrence sur m). Cela permet d'identifier la variété algébrique G/H à $\mathbb{R}^m$. On vérifie facilement que la mesure de Lebesgue $dt_1\ldots dt_m$ sur $\mathbb{R}^m$ est invariante sous l'action de G ; donc l'espace de la représentation s'identifie à $L^2(\mathbb{R}^m)$. Par ailleurs, les opérateurs différentiels algébriques sur $\mathbb{R}^m$ sont ceux qui sont à coefficients polynomiaux ; d'après le lemme 5.4.1. U/I s'identifie donc dans cette réalisation à l'algèbre de tous les opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux sur $\mathbb{R}^m$, et cela entraîne facilement que l'espace E_∞ s'identifie à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. On retrouve ainsi des résultats de [10] .

5.5. Voici une application du théorème 5.1.

Théorème 5.5.1. *Supposons qu'il existe une polarisation réelle commutative en f . Alors la conjecture (C) est vraie.*

Démonstration : On raisonne par récurrence sur la dimension de $\underline{g}$. Si $\dim \underline{g} = 0$, c'est immédiat. Supposons donc $\dim \underline{g} > 0$. Soit $\underline{h}$ une polarisation réelle commutative en f .

a) Supposons le théorème démontré pour $\underline{q}$, et montrons qu'il est encore vrai pour un idéal $\underline{q}'$ de $\underline{g}$, contenu dans $\underline{q}$ et de codimension 1 dans $\underline{q}$.

Ecrivons la suite spectrale de Hochschild - Serre relativement à l'idéal $\underline{q}/\underline{q}'$ de $\underline{h}/\underline{q}'$. On trouve :

$$E_2^{pq} = H^p(\underline{h}/\underline{q},H^q(\underline{q}/\underline{q}',\mathbb{C})\otimes \mathrm{Hom}(E_\infty,\mathbb{C}_{if})) \Longrightarrow H^*(\underline{h}/\underline{q}',\mathrm{Hom}(E_\infty,\mathbb{C}_{if})) .$$

On a ici $E_2^{pq} = 0$ pour $q > 1$. Alors la suite spectrale donne naissance à une longue suite exacte :

$$0 \longrightarrow E_2^{10} \longrightarrow H^1(\underline{h}/\underline{q}',\mathrm{Hom}(E_\infty,\mathbb{C}_{if})) \longrightarrow E_2^{01} \longrightarrow E_2^{20} \longrightarrow H^2(\underline{h}/\underline{q}',\mathrm{Hom}(E_\infty,\mathbb{C}_{if})) \longrightarrow \ldots$$

où l'application $E_2^{n-2,1} \longrightarrow E_2^{n,0}$ est donnée par cup-produit avec $-\beta$, où β est la classe de l'extension centrale :

$$0 \longrightarrow \underline{q}/\underline{q}' \longrightarrow \underline{h}/\underline{q}' \longrightarrow \underline{h}/\underline{q} \longrightarrow 0 .$$

(β est un élément de $H^2(\underline{h}/\underline{q},\underline{q}/\underline{q}')$, donc donne par cup-produit une application $H^p(\underline{h}/\underline{q},\mathrm{Hom}(\underline{q}/\underline{q}',\mathbb{C})\otimes M) \longrightarrow H^{p+2}(\underline{h}/\underline{q},M)$ pour tout $\underline{h}/\underline{q}$-module M) (cf. par exemple [26] §4,th.8). Dans le cas présent, $\beta = 0$ puisque $\underline{h}/\underline{q}'$ est commutative, d'où des suites exactes :

$$0 \longrightarrow E_2^{n,0} \longrightarrow H^n(\underline{h}/\underline{q}',\mathrm{Hom}(E_\infty,\mathbb{C}_{if})) \longrightarrow E_2^{n-1,1} \longrightarrow 0 \quad \text{pour tout } n \geq 1 .$$

En notant d' la dimension de $\underline{g}(f)/\underline{q}'$, cela donne bien :

$$\dim H^n(\underline{h}/\underline{q}',\mathrm{Hom}(E_\infty,\mathbb{C}_{if})) = \binom{d'-1}{n-1} + \binom{d'-1}{n} = \binom{d'}{n}$$

les cas $n = d'$ et $n = 0$ se vérifiant facilement à part.

b) On peut donc supposer $\underline{q} = \underline{p}$, $\dim \underline{z} = 1$, $I \cap \underline{z} = 0$, et introduire les notations du n°1.4. Remarquons que si $\underline{h} \not\subset \underline{g}'$, $\underline{h}' = \underline{h} \cap \underline{g}' \oplus \mathbb{R}y$ est encore une polarisation commutative en f . Comme $\dim H^n(\underline{h}/\underline{q},\mathrm{Hom}(E_\infty,\mathbb{C}_{if}))$ ne dépend pas du choix de la polarisation d'après le théorème 5.1., on peut donc supposer $\underline{h} \subset \underline{g}'$.

Notons $\tilde{\underline{q}}$ l'image de $\underline{p}$ dans $\tilde{\underline{g}}$. Alors on a vu au cours de la démonstration du théorème 5.1., cas a) que l'on a :

$$H^n(\underline{h}/\underline{p},\mathrm{Hom}(E_\infty,\mathbb{C}_{if})) \simeq H^n(\tilde{\underline{h}}/\tilde{\underline{q}},\mathrm{Hom}(\tilde{E}_\infty,\mathbb{C}_{i\tilde{f}}))$$

pour tout $n \geq 0$. Comme par ailleurs $\underline{g}(f)/\underline{p} = \tilde{\underline{g}}(\tilde{f})/\tilde{\underline{q}}$, le théorème résulte de l'hypothèse de récurrence appliquée à $\tilde{\underline{g}}$, $\tilde{f}$,$\tilde{\underline{h}}$ et $\tilde{\underline{q}}$.

Remarque 5.5.2. Plus généralement, la même démonstration montre que la conjecture (C) est vraie pour tous les idéaux $\underline{q}$ pour lesquels on peut trouver une polarisation réelle $\underline{h}$ telle que $\underline{h}/\underline{q}$ soit commutative ; par exemple, si $\underline{h}$ est un idéal dans $\underline{g}$, on peut prendre pour $\underline{q}$ le noyau dans $\underline{g}$ de la représentation π .

§ 6. CAS DES ALGÈBRES DE PETITE DIMENSION

6.1. Le théorème suivant montre qu'un contre-exemple à la conjecture (C) ne peut avoir lieu que pour une algèbre assez compliquée :

Théorème 6.1. La conjecture (C) est vraie pour toutes les orbites de toutes les algèbres $\underline{g}$ de dimension ≤ 6 .

6.2. Faisons d'abord quelques remarques générales concernant les orbites de dimension 2 (voir aussi [8]).

Supposons Ω de dimension 2 . Soit $\underline{h}$ une polarisation réelle de $\underline{g}$ en f ; alors $\underline{h}$ est un idéal de codimension 1 dans $\underline{g}$, et on peut choisir $e \in \underline{g}$ tel que $\underline{g} = \mathbb{R}e \ltimes \underline{h}$, avec $f(e) = 0$. Soit $\underline{n}$ le noyau de la représentation π dans $\underline{g}$, et notons encore f la forme induite par f sur $\underline{g}/\underline{n}$. Le centre de $\underline{g}/\underline{n}$ est de dimension 1, et la restriction de f à ce centre est non nulle. Du fait que $\underline{h}$ est un idéal dans $\underline{g}$, il résulte alors que $\underline{h}/\underline{n}$ est une algèbre de Lie commutative, de dimension $m+1$ avec $m \geq 1$. On peut toujours choisir une base $e_o,\ldots,e_m$ de $\underline{h}/\underline{n}$ telle que $[e,e_j] = e_{j-1}$ pour $1 \leq j \leq m$, $[e,e_o] = 0$ et $f = e_o^*$; on fixe une telle base dans toute la suite de ce n° . L'algèbre $\underline{g}(f)$ contient $\underline{n}$ et $\underline{g}(f)/\underline{n}$ est l'espace vectoriel de base $e_o,e_2,\ldots,e_m$; le noyau projectif $\underline{p}$ est l'image réciproque dans $\underline{g}$ de $\mathbb{R}e_o$.

Soit $M = \mathrm{Hom}_{x_o}(E_\infty,\mathbb{C}_{if})$ le $\underline{h}$-module introduit dans le théorème 5.1.1. D'après la remarque 1.6.3 les δe^n quand n parcourt $\mathbb{N}$ forment une base de M. Il sera plus suggestif d'identifier M à $\mathbb{C}[t]$ en identifiant δe^n à t^n.On vérifie sans mal que dans cette écriture, e_o agit trivialement et e_j par $\frac{(-i)^j}{j!}\frac{d^j}{dt^j}$ (e_o agissant dans E_∞ par le scalaire i).

En particulier, on a $H^o(\mathbb{R}\bar{e}_1,M) = \mathbb{C}$, $H^1(\mathbb{R}\bar{e}_1,M) = 0$; donc d'après le lemme 1.5., $H^*(\underline{h}/\underline{q},M)$ s'identifie à $H^*(\underline{h}/\underline{q},\mathbb{R}\bar{e}_1,M)$. (ici $\bar{e}_1$ désigne un vecteur de $\underline{h}$ se projetant sur e_1 , et on note de la même façon son image dans $\underline{h}/\underline{q}$). Comme on a une décomposition $\underline{h}/\underline{q} = \mathbb{R}\bar{e}_1 \ltimes \underline{g}(f)/\underline{q}$, on voit finalement que la cohomologie étudiée est calculée par le complexe :

$$C^*_{\mathbb{R}\bar{e}_1}(\underline{g}(f)/\underline{q},M) .$$

En fait il s'agit d'un complexe de dimension finie. Plus précisément, l'évaluation des polynômes au point 0 définit un isomorphisme d'espaces vectoriels de $C^*_{\mathbb{R}\bar{e}_1}(\underline{g}(f)/\underline{q},M)$ sur $C^*(\underline{g}(f)/\underline{q},\mathbb{C})$; malheureusement on n'obtient pas ainsi un isomorphisme de complexes en général.

Cependant, lorsque $\bar{e}_1$ agit trivialement sur $\underline{g}(f)/\underline{q}$, tout $\omega \in C^n_{\mathbb{R}\bar{e}_1}(\underline{g}(f)/\underline{q},M)$ prend ses valeurs dans $\mathbb{C}$; dans ce cas, on voit aussitôt que l'on a bien un isomorphisme de complexes avec $C^*(\underline{g}(f)/\underline{q},\mathbb{C})$ (et donc la conjecture (C) est vraie). De même lorsque $\bar{e}_1^2$ agit trivialement sur $\Lambda\underline{g}(f)/\underline{q}$ (car l'action de $\underline{g}(f)$ sur M se fait par opérateurs différentiels d'ordre ≥ 2). Dans cet ordre d'idées, on peut démontrer le lemme suivant :

Lemme 6.2.1. Supposons $m \geq 3$, dans les notations ci-dessus. Alors si $\underline{g}(f)/\underline{q}$ est commutative, $\underline{h}/\underline{q}$ est commutative, (et donc la conjecture (C) est vraie pour un tel $\underline{q}$, d'après la remarque que l'on vient de faire).

Démonstration : Il s'agit de montrer que l'action adjointe de $\underline{h}$ dans $\underline{h}/\underline{q}$ est triviale.

Montrons d'abord que $\underline{h}$ agit trivialement sur $\underline{n}/\underline{n} \cap \underline{q}$. Soit $\underline{a}$ le noyau de la représentation adjointe de $\underline{h}$ dans $\underline{n}/\underline{n} \cap \underline{q}$. Alors $\underline{a}$ est un idéal de $\underline{g}$, et par hypothèse $\underline{a}$ contient $\underline{g}(f)$, puisque $\underline{n}/\underline{n} \cap \underline{q} \subset \underline{g}(f)/\underline{q}$. On a donc $\underline{n} \subset \underline{a}$, et $\underline{a}/\underline{n}$ contient les éléments $e_o, e_2, \ldots, e_m$ de $\underline{g}/\underline{n}$. Mais comme $\underline{a}/\underline{n}$ est un idéal de $\underline{g}/\underline{n}$, il contient alors aussi $[e, e_2] = e_1$, et on a bien $\underline{a} = \underline{h}$.

Soit maintenant $\underline{a}'$ le noyau de la représentation adjointe de $\underline{h}$ dans $\underline{h}/\underline{q}$; c'est encore un idéal de $\underline{g}$, et d'après ce qui précède $\underline{a}'$ contient $\underline{n}$. On peut donc définir sans ambigüité un crochet tel que $[e_j, \xi]$, pour $\xi \in \underline{h}/\underline{q}$; et cela ne dépend que de ξ mod. $\underline{n} + \underline{q}$. Notant encore e_j l'image de e_j mod $\underline{n} + \underline{q}$, pour montrer que $e_j \in \underline{a}'/\underline{n}$, il suffit de prouver que $[e_j, e_1] = 0$. (quand $j \neq 1$).

Comme $[e_3, e_2] = 0$ à cause de la commutativité de $\underline{g}(f)/\underline{q}$, on a :

$[e,[e_3,e_2]] = [e_2,e_2] + [e_3,e_1] = [e_3,e_1] = 0$. Donc e_3 appartient à $\underline{a}'/\underline{n}$. Mais alors $[e,e_3] = e_2$ et $[e,e_2] = e_1$ appartiennent aussi à $\underline{a}'/\underline{n}$; donc tous les crochets $[e_1,e_j]$ sont nuls, d'où $\underline{a}' = \underline{h}$ et le lemme est démontré.

Remarque 6.2.2. Dans le cas où $m = 1$ ou 2, $\underline{g}(f)$ peut être commutative sans que $\underline{h}$ le soit : les orbites de dimension 2 de $\underline{g}_{5,3}$ donnent un exemple où $m = 1$ (avec un noyau $\underline{n}$ de dimension 2) ; les orbites de dimension 2 non plates de $\underline{g}_{5,4}$ donnent un exemple où $m = 2$. (On utilise les notations de [15]). Mais pour $m \leq 2$ on a toujours $U/I \simeq S/J$ (cf.[8]), et donc la conjecture (C) est encore vraie (partie II,th.7.1.1.).

6.3. Démontrons maintenant le théorème 6.1. Soit $\underline{g}$ de dimension ≤ 6, et Ω une orbite de G dans $\underline{g}^*$. Alors Ω est de dimension 0,2 ou 4 .

Si Ω est de dimension 0 , il n'y a rien à démontrer. Si Ω est de dimension 4, elle est de dimension maximale, et on peut appliquer le cor.6.1.2. de la partie II. Supposons donc Ω de dimension 2, et introduisons les notations du n°6.2. Si

$m \leq 2$, on applique le th.7.1.1. de la partie II, comme on l'a dit à la remarque 6.2.2. On peut donc supposer $m \geq 3$, c'est à dire dim $\underline{n} \leq 1$. Si dim $\underline{n} = 0$, $\underline{g}$ est de la forme $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^{m+1}$ avec $m = 4$, comme on l'a vu au n°6.2 ; donc la conjecture (C) est vraie par application du th.5.5.1.

Reste donc le cas où $\underline{n}$ est de dimension 1 ; on va montrer que $\bar{e}_1^2$ agit trivialement sur $\Lambda\, \underline{g}(f)/\underline{q}$, ce qui suffit d'après la remarque précédant le lemme 6.2.1. On peut supposer que $\underline{h}$ est non-commutative. Alors $\underline{h}$ est ou bien une algèbre de Heisenberg de dimension 5 , $\underline{g}_{5,1}$, ou bien le produit de $\mathbb{R}^2$ avec une algèbre de Heisenberg $\underline{g}_3$ de dimension 3 . Dans les deux cas, le noyau de l'action de ad $\bar{e}_1$ dans $\underline{g}(f)/\underline{q}$ est de codimension ≤ 1 . On voit alors facilement que $\bar{e}_1^2$ agit trivialement sur chacun des $\Lambda^n(\underline{g}(f)/\underline{q})$; d'où le théorème .

PARTIE II

ÉTUDE DE LA COHOMOLOGIE DE $U(\underline{g})/I$.

§ 0. INTRODUCTION.

Au cours de la première partie, on a ramené la conjecture (C) à un problème purement algébrique : le calcul de la $\underline{g}$-cohomologie de $U(\underline{g})/I$. On va maintenant étudier ce problème, essentiellement par des méthodes d'algèbre associative.

Dorénavant, $\underline{g}$ désigne une algèbre de Lie nilpotente de dimension finie sur un corps commutatif k de caractéristique 0 , U son algèbre enveloppante, I un idéal primitif de U rationnel sur k ([13] ch.4 n°4.5.8). Soient $\underline{p}$ l'idéal de $\underline{g}$ formé des éléments de $\underline{g}$ scalaires modulo I , et $\underline{q}$ un idéal de $\underline{g}$ contenu dans $\underline{p}$. On s'intéresse au calcul de $H^*(\underline{g}/\underline{q},U/I)$, où $\underline{g}$ agit sur U par l'action adjointe.

Dans ce contexte, la conjecture (C) s'énonce comme suit :
"Soient Ω l'orbite coadjointe associée à I([13] ch.6 n°6.3.3. et prop.6.3.2.), f un élément de Ω , $\underline{g}(f)$ le stabilisateur de f dans $\underline{g}$. Alors pour tout $n \geq 0$:

$$\dim_k H^n(\underline{g}/\underline{q},U/I) = \dim_k H^n(\underline{g}(f)/\underline{q} , k) . "$$

On a déjà esquissé dans ses grandes lignes la démarche de cette partie II au cours de l'introduction générale. Je me contenterai ici de conseiller au lecteur de se reporter au §8 s'il ressent le besoin de voir ce que donnent les diverses constructions dans le cas de quelques exemples simples. Le cas des orbites plates, traité au §7 , est lui aussi très instructif ; on y décrit un processus de "déformation", dont la nature profonde m'est restée mystérieuse, qui permet de passer de l'algèbre $H^*(\underline{g}(f),k)$ à $H^*(\underline{g},U/I)$, et du gradué de $U(\underline{g}(f))$ en l'idéal défini par le caractère $f_{|\underline{g}(f)}$, au gradué du commutant C en $\underline{m}$.

§ 1. NOTATIONS, RAPPELS, CONVENTIONS.

1.1. Notations . Les notations et conventions de langage introduites dans le n°1.1. seront utilisées plus ou moins librement dans toute la suite de la partie II. Le reste du §1 est conçu pour être consulté lorsque le besoin s'en fait sentir dans la suite.

1.1.1. On garde les notations de l'introduction.

. On note $\underline{z}$ le centre de $\underline{g}$. On note Z le centre de U , K son corps de fractions ; rappelons que K est une extension transcendante pure de k ([13] ch.4 prop.4.4.8 et cor.4.7.2).

. On note r le poids de I ([13] ch.4 n°4.7.10) et $d = \dim \underline{g} - 2r$ la codimension de l'orbite coadjointe associée à I ; si f est un élément de cette orbite, on a donc $\dim \underline{g}(f) = d$.

. On note A la k-algèbre U/I . Par définition du poids, A est une algèbre de Weyl $A_r(k)$; rappelons que c'est la k-algèbre définie par les générateurs $p_1,\ldots,p_r$, $q_1,\ldots,q_r$ et les relations $[p_i,p_j] = 0$, $[q_i,q_j] = 0$, $[p_i,q_j] = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker) (cf.[13],ch.4, §4.6.). On en obtient une réalisation explicite comme l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux sur k^r , en appliquant p_i sur $\frac{\partial}{\partial x_i}$, q_j sur x_j .

. On note $\hat{U} = \varprojlim_{n\geq 0} U/I^{n+1}$ le séparé-complété I-adique de U ; on rappellera d'ailleurs au n°4.1. que U est déjà séparé pour la topologie I-adique, de sorte que l'on parlera simplement du complété de U . On note $\mathrm{gr}\, U = \bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}$ le gradué I-adique de U (avec la convention $I^o = U$). A partir du §4 , on désignera par R un relèvement de A dans $\hat{U}$, et par C le commutant de R (cf.n°4.3.). On verra que C est un anneau local non nécessairement commutatif, dont on note $\underline{m} = I \cap C$ l'idéal maximal.

1.1.2. Les produits tensoriels sans indice seront toujours supposés pris sur k . Dans une k-algèbre associative, on dira "idéal" pour "idéal bilatère". Soient B une k-algèbre (associative), I un idéal de B, M un B-module (à gauche). On dit que M est localement annulé par une puissance de I, si tout élément de M est annulé par une puissance de I .

On note B^o l'algèbre opposée, et $B^e = B\otimes B^o$ l'algèbre "enveloppante" de B au sens de [6] ch.IX (je n'utiliserai pas cette expression, pour ne pas créer de confusions avec l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie). On identifie les B-bimodules aux B^e-modules à gauche.

Soit X un B-bimodule. On désigne par $H^*(B,X)$ la cohomologie de Hochschild de B à valeurs dans X , c'est-à-dire par définition $\mathrm{Ext}^*_{B^e}(B,X)$ (cf.[6] ch.IX).

Soient M un B-module à gauche, $x_1,\ldots,x_n$ des éléments de M . On désignera indifféremment par $(x_1,\ldots,x_n)$ ou par $Bx_1+\ldots+Bx_n$ le sous-module engendré par

$x_1,\dots,x_n$.

Soit z un élément central de B non diviseur de 0 . On note B_z l'algèbre $B[\frac{1}{z}]$, localisée de B par rapport à la partie multiplicative formée par les puissances de z (cf.[13] ch.3, §6, n°3.6.3).

1.1.3. Soient C_1,C_2,C trois complexes de k-espaces vectoriels. Un couplage de complexes $C_1 \times C_2 \longrightarrow C$ est par définition une application k-bilinéaire, notée $(\omega,\varphi) \longrightarrow \omega \cup \varphi$ de $C_1 \times C_2$ vers C , appliquant $C_1^p \times C_2^q$ dans C^{p+q} et vérifiant $d(\omega \cup \varphi) = d\omega \cup \varphi + (-1)^p \omega \cup d\varphi$ pour tous $\omega \in C_1^p$, $\varphi \in C_2$.

1.1.4. Soit L une extension de k . On note $\dim.\mathrm{al}_k$ L le degré de transcendance de L sur k (c'est un entier ou $+\infty$).

1.2. Suites centralisantes .

1.2.1. Soit B une k-algèbre, X un B-bimodule. Par définition, $H^0(B,X)$ est l'ensemble des $x \in X$ tels que $bx = xb$ pour tout $b \in B$; on dira qu'un tel élément de X est central.

On dira qu'une suite $(x_1,\dots,x_n)$ d'éléments de X est centralisante, si pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$ x_j est central module $Bx_{j+1}+\dots+Bx_n$ (noter que par une récurrence évidente partant de $j = n$, $Bx_{j+1}+\dots+Bx_n$ est en fait un sous-bimodule de X , et se confond avec $x_{j+1}B+\dots+x_nB$). En particulier, x_n est central dans X .

Disons qu'un élément $x \in X$ est non-diviseur de 0 si $bx = 0$, ou $xb = 0$, avec $b \in B$, entraine $b = 0$ (c'est à dire si les applications $b \longrightarrow bx$ et $b \longrightarrow xb$ sont injectives). On dit alors qu'une suite centralisante $(x_1,\dots,x_n)$ est régulière, si pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$ x_j est non-diviseur de 0 modulo $Bx_{j+1}+\dots+Bx_n$.

1.2.2. Lemme 1.2.2. Soit B une k-algèbre.

On suppose que B est un anneau local de radical $\underline{r}$, avec $B/\underline{r} = k$, que $\underline{r}$ est défini par une suite centralisante régulière $x_1,\dots,x_d$ et enfin que B est séparé et complet pour la topologie $\underline{r}$-adique.

(i) Soit $f : k[[t_1,\dots,t_d]] \longrightarrow B$ l'application linéaire continue définie par $f(t^\alpha) = x_1^{\alpha_1}\dots x_d^{\alpha_d}$ (multipliés dans cet ordre) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, et prolongée par linéarité et continuité. Alors f est bijective.

(ii) L'anneau B est intègre et nœthérien .

Démonstration : On procède par récurrence sur d . Pour $d = 0$, il n'y a rien à démontrer.

Soit $B' = B/Bx_d$, et $\underline{r}'$ l'image de $\underline{r}$ dans B' . Alors B' est un anneau local de radical $\underline{r}'$, on a $B'/\underline{r}' = k$, et $\underline{r}'$ est défini par la suite centralisante régulière $x'_1,\ldots,x'_{d-1}$, où x'_j désigne l'image de x_j dans B' . De plus B' est complet pour la topologie $\underline{r}'$-adique.

Soit $f' : k[[t_1,\ldots,t_{d-1}]] \to B'$ la composée de f avec la surjection naturelle $B \longrightarrow B'$. Il est clair que f' est l'application $k[[t_1,\ldots,t_{d-1}]] \longrightarrow B'$ associée à la suite $x'_1,\ldots,x'_{d-1}$. Donc, par hypothèse de récurrence, f' est une bijection.

Il en résulte aussitôt que f est surjective. Supposons maintenant $f(u)=0$, et écrivons $u = \sum_{n=o}^{\infty} u_n t_d^n$, avec u_n dans $k[[t_1,\ldots,t_{d-1}]]$. Alors $f(u) = \sum_{o}^{\infty} f(u_n)x_d^n$, comme on le voit immédiatement. En écrivant que $f(u) = 0 \bmod (x_d)$ on obtient $f'(u_o) = 0$, d'où $u_o = 0$. Mais alors on peut mettre x_d en facteur, et écrire :

$f(u) = x_d \sum_{n=1}^{\infty} f(u_n)\, x_d^{n-1}$. Par hypothèse, x_d ne divise pas 0 dans B . Donc $f(u) = 0$ entraîne $\sum_{n=1}^{\infty} f(u_n)x_d^{n-1} = 0$; poursuivant ainsi de proche en proche, on voit que $u_n = 0$ pour tout n , d'où $u = 0$.

Quant à l'assertion (ii), remarquons qu'il résulte immédiatement de ce qui précède que le gradué de B en l'idéal Bx_d s'identifie à $B'[\overline{x}_d]$; en particulier $gr_{Bx_d} B$ est intègre. Donc B est intègre. Pour montrer que B est noethérien, on procède comme pour la noethérianité des anneaux de séries formelles, en algèbre commutative (par récurrence sur d).

1.3. Quelques lemmes sur les suites spectrales.

Dans ce n° on établit quelques lemmes (sûrement connus, mais pour lesquels je n'ai pas trouvé de référence) concernant le comportement de la caractéristique d'Euler et du cup-produit au cours d'une suite spectrale.

1.3.1. Dans ce n° on appelle complexe un complexe de k-espaces vectoriels, avec une différentielle de degré + 1 et de dimension (totale) finie sur k .

Si M est un k-espace vectoriel gradué sur $\mathbb{Z}$ et de dimension totale finie on note $\chi(M) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \dim M^n$ la caractéristique d'Euler de M .

Lemme 1.3.1.1. Soit C un complexe, H sa cohomologie. Alors $\chi(H) = \chi(C)$.

Démonstration :

$$\chi(H) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \left[\dim(Z^n)-\dim(B^n)\right] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \left[\dim(Z^n) + \dim(B^{n+1})\right]$$

$$= \chi(C) \quad \text{car } \dim Z^n + \dim B^{n+1} = \dim C^n .$$

Lemme 1.3.1.2. Considérons k comme un complexe en donnant à tous ses éléments le degré 0 , et en posant $d = 0$. Soit $\cup : C_1 \times C_2 \longrightarrow k$ un couplage de complexes non dégénéré (de sorte que C_1^n est mis en dualité avec C_2^{-n}). Alors le couplage correspondant : $H(C_1) \times H(C_2) \longrightarrow k$ est encore non-dégénéré.

Démonstration : immédiat.

Lemme 1.3.1.3. Soit $\cup : C_1 \times C_2 \longrightarrow C$ un couplage de complexes. Supposons que pour un certain $\ell \in \mathbb{Z}$, C^ℓ soit de dimension 1, et que $C^n = 0$ pour $n > \ell$. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\cup : C_1^n \times C_2^{\ell-n} \longrightarrow C^\ell$ soit non-dégénéré, et que $H^\ell(C) \neq 0$. Alors le cup-produit induit en cohomologie donne encore un couplage non-dégénéré $H^n(C_1) \times H^{\ell-n}(C_2) \longrightarrow H^\ell(C)$.

Démonstration : Soit C' l'espace vectoriel gradué $\bigoplus_{n<\ell} C^n$. L'hypothèse sur $H^\ell(C)$ entraîne que C' est un sous-complexe de C , et C/C' s'identifie au translaté $k(\ell)$ du complexe k défini au lemme 1.3.1.2. Le couplage $C_1 \times C_2(-\ell) \longrightarrow k$ qui en résulte est non-dégénéré d'après les hypothèses, d'où le résultat d'après le lemme 1.3.1.2.

1.3.2. Dans ce n°, on appelle complexe un complexe de k-espaces vectoriels, qui soit un complexe de cochaînes (non nécessairement de dimension finie) et qui soit muni d'une filtration telle que le terme E_2 de la suite spectrale correspondante[1] soit de dimension totale finie. On note $(C_p)_{p\geq 0}$ la filtration. On suppose que la filtration est inférieure à la graduation, c'est-à-dire que $C_p^n = 0$ pour $p > n$. Lorsqu'il sera question de morphismes ou de couplages de complexes, on les supposera toujours compatibles avec les filtrations ; en particulier un couplage $\cup : C_1 \times C_2 \longrightarrow C$ induit un couplage encore noté $\cup$:

$$E_r^{p_1 q_1}(C_1) \times E_r^{p_2 q_2}(C_2) \longrightarrow E_r^{p_1+p_2, q_1+q_2}(C) \quad \text{pour tout } r \geq 0 .$$

[1] Pour la définition de la suite spectrale d'un complexe filtré on pourra se reporter à R. Godement, Théorie des faisceaux (3^e éd.), Paris, Hermann, 1973 (Ch.I, §4).

Quand on considèrera E_r comme espace vectoriel gradué, on le munira de sa graduation totale, obtenue en posant

$$E_r^n = \bigoplus_{p+q=n} E_r^{pq} \;;$$

(E_r, d_r) devient ainsi un complexe de cochaînes, dont la cohomologie s'identifie à E_{r+1}.

Lemme 1.3.2.1. Soit C un complexe, H sa cohomologie. Alors pour tout $r \geq 2$ on a $\chi(E_r) = \chi(H)$.

Démonstration : Comme E_{r+1} s'identifie à la cohomologie de (E_r, d_r), on a $\chi(E_{r+1}) = \chi(E_r)$ pour tout $r \geq 2$, d'après le lemme 1.3.1.1. Donc $\chi(E_r) = \chi(E_2)$ pour tout $r \in \mathbb{N}$. Mais $E_r = E_\infty$ pour r assez grand, et $\chi(E_\infty) = \chi(H)$. D'où le lemme.

Lemme 1.3.2.2. Soit $\cup : C_1 \times C_2 \longrightarrow C$ un couplage de complexes. Supposons que le couplage induit au niveau E_2 vérifie les hypothèses du lemme 1.3.1.3. et que $H^\ell(C)$ soit non nul. Alors le couplage $H^n(C_1) \times H^{\ell-n}(C_2) \longrightarrow H^\ell(C)$ induit en cohomologie est non-dégénéré.

Démonstration : D'après le lemme 1.3.1.3., le couplage $E_3^n \times E_3^{\ell-n} \longrightarrow E_3^\ell$ est encore non-dégénéré, et comme $H^\ell(C) \neq 0$, $H^\ell(E_3(C)) = E_4^\ell(C)$ est encore non nul. Donc on peut à nouveau appliquer le lemme 1.3.1.3. au couplage induit au niveau E_3, et ainsi de suite pour tous les E_r. Comme $E_r = E_\infty$ pour r assez grand, on en déduit que le couplage :

$$E_\infty^n \times E_\infty^{\ell-n} \longrightarrow E_\infty^\ell$$

est non-dégénéré. Or c'est le couplage induit au niveau des gradués par le couplage en cohomologie ; il en découle que ce dernier est lui aussi non-dégénéré.

1.3. Rappels sur les cup-produits en théorie de Hochschild
(cf.[6] ch.XI exercices 1 et 2).

1.3.1. Soient B une k-algèbre, M et M' des B-bimodules. Il est clair que l'on peut considérer $M \otimes_B M'$ comme B-bimodule à partir de l'action de B à gauche sur M et à droite sur M'. On se propose de définir un cup-produit:

$$\cup : H^p(B,M) \times H^q(B,M') \longrightarrow H^{p+q}(B,M\otimes_B M') .$$

Pour cela, considérons une résolution libre X du bimodule B (par exemple la résolution standard). Remarquant que $B\otimes_B B$ s'identifie canoniquement à B comme B-bimodule, on voit que $X\otimes_B X$ est encore une résolution libre de B .

Or on a un couplage de complexes

$$\cup : \mathrm{Hom}_{B^e}(X,M) \times \mathrm{Hom}_{B^e}(X,M') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{B^e}(X\otimes_B X, M\otimes_B M')$$

défini par la formule : $(u \cup u')(x\otimes x') = u(x)\otimes u'(x')$. Le cup-produit cherché est celui induit en cohomologie par le couplage ci-dessus ; on vérifie aussitôt qu'il ne dépend pas de la résolution choisie.

Dans le cas où X est la résolution standard, on peut encore écrire les choses un peu différemment. Rappelons qu'on l'obtient en prenant pour X_n le B-bimodule $B\otimes T^n(B)\otimes B$ où $T^n(B)$ est la puissance tensorielle $n^{\text{ième}}$ du k-espace vectoriel B . L'augmentation $X_o \longrightarrow B$ est l'application définie par $x\otimes y \longrightarrow xy$; et la différentielle $\partial : X_n \longrightarrow X_{n-1}$, $n \geq 1$, est l'unique morphisme de bimodules prolongeant l'application $T^n(B) \longrightarrow X_{n-1}$ définie par :

$$x_1\otimes\ldots\otimes x_n \longrightarrow x_1\otimes(x_2\otimes\ldots\otimes x_n)\otimes 1 + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \, 1\otimes(x_1\otimes\ldots\otimes x_i x_{i+1}\otimes\ldots\otimes x_n)\otimes 1 +$$
$$+ (-1)^n \, 1\otimes(x_1\otimes\ldots\otimes x_{n-1})\otimes x_n .$$

(cf.[6]ch.IX §6). Le lemme de comparaison des résolutions nous dit que de toutes façons il y aura un morphisme de complexes de B-bimodules $X \longrightarrow X\otimes_B X$ au-dessus de B ; mais dans le cas de la résolution standard ont peut le réaliser de manière particulièrement naturelle. En effet le coproduit de la bigèbre T(B) ([3]ch.III §11 n°1 , exemple 5) est une application k-linéaire $T(B) \longrightarrow T(B)\otimes T(B)$ que l'on peut considérer comme prenant ses valeurs dans $T(B)\otimes B\otimes T(B)$. D'où un morphisme de B-bimodules gradués $X \longrightarrow X\otimes_B X$ dont on vérifie aussitôt que c'est un morphisme de complexes au-dessus de B . En composant avec ce morphisme le couplage défini ci-dessus, on obtient un couplage au niveau du complexe standard :

$$\cup : C^p(B,M) \times C^q(B,M') \longrightarrow C^{p+q}(B,M\otimes_B M')$$

donné par la formule :

$$\omega \cup \varphi(x_1,\ldots,x_{p+q}) = \omega(x_1,\ldots,x_p) \otimes \varphi(x_{p+1},\ldots,x_{p+q}) .$$

(ici bien sûr $C^*(B,M)$ désigne $\mathrm{Hom}_{B^e}(X,M)$ qui s'identifie encore à $\mathrm{Hom}_k(T(B),M)$). Ce couplage induit donc en cohomologie le cup-produit de la théorie de Hochschild.

1.3.2. Soit $\varphi : B \longrightarrow B'$ un morphsime de k-algèbres. Soit M un B'-bimodule. On peut construire un "pull-back" (ou morphisme de restriction, lorsque B est une sous-algèbre de B' et φ l'injection canonique) $\varphi^* : H^*(B',M) \longrightarrow H^*(B,M)$ ([6] ch.IX, §5) ; on peut d'ailleurs réaliser φ^* au niveau des complexes standard en composant simplement les cochaînes avec φ .

On voit alors aussitôt à l'aide de la description du cup-produit donnée à la fin du n°1.3.1., que φ^* commute au cup-produit.

1.4.1. Soient $\underline{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur k, B son algèbre enveloppante, $\underline{b}$ un idéal de $\underline{a}$, λ un caractère de $\underline{b}$. Considérons la catégorie $\mathcal{C}_\lambda$ des $\underline{a}$-modules sur lesquels $\underline{b}$ agit scalairement, par le caractère λ . Supposons que $\mathcal{C}_\lambda$ contienne un objet non nul ; alors le caractère λ est invariant sous l'action de $\underline{a}$, et en particulier le noyau $\underline{b}'$ de λ est un idéal de $\underline{a}$, de codimension ≤ 1 dans $\underline{b}$.

Notons $\underline{b}_\lambda$ l'ensemble des éléments de B de la forme $\xi - \lambda(\xi)$ avec $\xi \in \underline{b}$; c'est un sous-espace vectoriel ad $\underline{a}$-stable de B . Notons B_λ l'algèbre $B/B\underline{b}_\lambda$. Il est clair que la donnée d'un objet de $\mathcal{C}_\lambda$ est équivalente à la donnée d'un B_λ-module. Par exemple, si $\underline{a}$ est une algèbre de Heisenberg, $\underline{b}$ le centre de $\underline{a}$, et λ un caractère non nul de $\underline{b}$, B_λ est une algèbre de Weyl $A_n(k)$, où 2n+1 est la dimension de $\underline{a}$.

Soit X un B_λ-bimodule. On munit X d'une action de $\underline{a}$ par la formule :

$$[\xi,x] = \xi x - x\xi \quad \text{pour tous } \xi \in \underline{a} ,\ x \in X .$$

Il est clair que cette action passe au quotient par $\underline{b}$.

<u>Lemme 1.4.1.</u> <u>On a</u> $H^n(\underline{a}/\underline{b}, X) \simeq H^n(B_\lambda, X)$ <u>pour tout</u> $n \geq 0$.

<u>Démonstration</u> : On fait une adaptation de l' "inverse process" de [6] ch.X, § 6 ; d'ailleurs la construction qui va suivre se réduit à l' "inverse process" pour l'algèbre de Lie $\underline{a}/\underline{b}$ lorsque $\lambda = 0$.

Considérons l'application $\xi \longrightarrow \bar{\xi} \otimes 1 - 1 \otimes \bar{\xi}$ de $\underline{a}$ dans B_λ^e , où $\bar{\xi}$ désigne l'image de ξ dans B_λ . C'est un homomorphsime d'algèbres de Lie, qui passe au quo-

tient par $\underline{b}$, donc donne naissance à un morphisme d'algèbres de B_o vers B_λ^e , en notant B_o l'algèbre enveloppante de $\underline{a}/\underline{b}$. On va montrer que B_λ^e considéré comme B_o-module à droite via ce morphisme, est libre. Soit $e_1,\dots,e_s,f_1,\dots,f_t$ une base du k-espace vectoriel $\underline{a}$, où $f_1,\dots,f_t$ est une base de $\underline{b}$. Comme B_λ n'est autre que $\mathrm{Ind}_{\underline{b}\uparrow\underline{a}}\, k_\lambda$, les $\bar{e}^\alpha = \bar{e}_1^{\alpha_1}\dots\bar{e}_s^{\alpha_s}$ forment une base du k-espace vectoriel B_λ lorsque α parcourt $\mathbb{N}^s$ ([13] ch.5 §1, n°5.1.6.). En particulier l'algèbre B_λ est engendrée par $\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_s$, ce qui permet de la considérer comme algèbre filtrée, et l'algèbre graduée associée est une algèbre de polynômes (commutatifs) en s indéterminées ; si on note T_j l'image de $\bar{e}_j$ dans gr B_λ on pourra écrire gr $B_\lambda = k[T_1,\dots,T_s]$(peut-être faut-il souligner que dans cette démonstration il n'est pas question de gradués I-adiques, mais de gradués associés à une filtration croissante, du type de celle qui existe sur une algèbre enveloppante (cf.[13]ch.2 §2.3.)). Si on munit B_λ^e de la filtration associée aux générateurs $\bar{e}_j\otimes 1$ et $1\otimes\bar{e}_k$, on aura de même
gr $B_\lambda^e = k[T_1,\dots,T_s]\otimes k[T_1,\dots,T_s]$; et on a un résultat analogue pour B_o , qui d'ailleurs correspond au cas $\lambda = 0$.

L'action de B_o sur B_λ^e commute aux filtrations, d'où une action de gr B_o sur gr B_λ^e qui n'est autre que l'action à droite déduite du morphisme gr $B_o \longrightarrow$ gr B_λ^e défini par :

$$T_j \longrightarrow T_j\otimes 1 - 1\otimes T_j \ .$$

Il est évident que gr B_λ^e est un gr B_o-module libre à droite sous cette action, de base $\{T^\alpha\otimes 1\}$, où α parcourt $\mathbb{N}^s$. Donc B_λ^e est un B_o-module libre à droite, de base les $\bar{e}^\alpha\otimes 1$ lorsque α parcourt $\mathbb{N}^s$.

Il est maintenant facile de conclure. Considérons k comme B_o-module trivial. Si on considère B_o comme sous-algèbre de B_λ^e , le bimodule B_λ contient le B_o-module k ; d'où un morphisme de bimodules : $B_\lambda^e\otimes_{B_o} k \longrightarrow B_\lambda$ dont on voit aussitôt que c'est un isomorphisme, compte tenu de ce qui précède (ce n'est autre que l'augmentation canonique $B_\lambda^e \longrightarrow B_\lambda$, qui passe au quotient). Alors la conclusion provient du lemme de Shapiro ([6]ch.XVI n°5, Case 3, formule $(3)_3$ et la remarque qui suit, ou ch.VI prop.4.1.3.), puisque par définition $H^n(\underline{a}/\underline{b},X) = \mathrm{Ext}^n_{B_o}(k,X)$, et $H^n(B_\lambda,X) = \mathrm{Ext}^n_{B_\lambda^e}(B_\lambda,X)$.

1.4.2. <u>Corollaire 1.4.2.</u> <u>Soient</u> M,M' <u>deux</u> B_λ<u>-modules.</u>
<u>Alors</u> $\mathrm{Ext}^n_{B_\lambda}(M,M') = H^n(\underline{a}/\underline{b},\mathrm{Hom}(M,M'))$.

1.4.3. Il n'est pas difficile de montrer que l'isomorphisme ci-dessus préserve les cup-produits. Voici comment on procède.

Soit $F \to k \to 0$ la résolution standard du B_o-module k ; en tant que B_o-module gradué, F est égal à $B_o \otimes \Lambda\, \underline{a}/\underline{b}$, où $\Lambda\, \underline{a}/\underline{b}$ est l'algèbre extérieure du k-espace vectoriel $\underline{a}/\underline{b}$. Soient M et M' deux B_λ-bimodules ; il s'agit de comparer les deux cup-produits $H^*(M) \times H^*(M') \to H^*(M \otimes_{B_\lambda} M')$ qui apparaissent d'une part en théorie de Hochschild, d'autre part en cohomologie d'algèbres de Lie.

Comme en 1.3.1. on a un couplage de complexes.

$$\mathrm{Hom}_{B_o}(F,M) \times \mathrm{Hom}_{B_o}(F,M') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{B_o}(F\otimes F,\ M\otimes_{B_\lambda} M') \ .$$

Procédant comme en 1.3.1., mais en utilisant cette fois la structure de cogèbre de $\Lambda\, \underline{a}/\underline{b}$([3],ch.3, §11, n°1, exemple 7) on constate que ce couplage induit en cohomologie le cup-produit usuel de la théorie des algèbres de Lie (cf.[26] §1). D'autre part, soit $X = B_\lambda^e \otimes_{B_o} F$. Comme B_λ^e est un B_o-module libre à droite, X est une résolution libre du B_λ^e-module B_λ (notons en passant que l'on obtient ainsi une résolution libre bien plus économique que la résolution standard). On vérifie aussitôt que $X \otimes_{B_\lambda} X$ est isomorphe à $B_\lambda^e \otimes_{B_o} (F\otimes F)$ (après choix d'un isomorphisme d'espaces vectoriels de B_o sur B_λ) ; alors le couplage ci-dessus devient :

$$\mathrm{Hom}_{B_\lambda^e}(X,M) \times \mathrm{Hom}_{B_\lambda^e}(X,M') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{B_\lambda^e}(X\otimes_{B_\lambda} X, M\otimes_{B_\lambda} M')$$

qui donne bien en cohomologie le cup-produit de la théorie de Hochschild, réalisé à l'aide de la résolution X).

1.5. Epinglage de la récurrence

Beaucoup de résultats de ce travail se démontrent par récurrence sur la dimension de $\underline{g}$. Il sera agréable de fixer une fois pour toutes un certain nombre de notations pour ces démonstrations.

Il s'agira de ramener une question concernant l'idéal rationnel I de U à la même question pour un idéal rationnel dans l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie de dimension plus petite. On distinguera toujours deux cas :

a) $I \cap \underline{z} \neq 0$.

On choisit alors un élément z non nul dans $I \cap \underline{z}$. On pose $\underline{g}' = \underline{g}/kz$, $U' = U(\underline{g}')$.

Alors $U' = U/Uz$; l'idéal $I' = I/Uz$ est un idéal rationnel de U' noté I' . Le quotient $A' = U'/I'$ s'identifie canoniquement à $A = U/I$.

b) $I \cap \underline{z} = 0$ (avec $\dim \underline{g} > 1$).

Ce cas ne peut se produire que si $\underline{z}$ est de dimension 1 et non contenu dans I . Il y a un unique $z \in \underline{z}$ tel que $z \equiv 1 \pmod I$. Soit $\underline{z}_2$ le deuxième terme de la suite centrale ascendante de $\underline{g}$. On choisit un élément y dans $\underline{z}_2 \backslash \underline{z}$, et on note $\underline{g}'$ le centralisateur de y dans $\underline{g}$; on pose $\tilde{\underline{g}} = \underline{g}'/ky$. On choisit un $x \in \underline{g}$ tel que $[x,y] = z$; alors $\underline{g} = kx \ltimes \underline{g}'$. On note U' (resp. $\tilde{U}$) l'algèbre enveloppante de $\underline{g}'$ (resp. $\tilde{\underline{g}}$), et $\tilde{z}$ l'image de z dans $\tilde{\underline{g}}$.

On note encore x et y les images de ces éléments dans $\underline{g}/\underline{p}$: elles engendrent une sous-algèbre commutative de dimension 2 que l'on note $\underline{m}$.

Soit φ l'homomorphisme de U dans $U \otimes A_1$ défini par les conditions :

$$\varphi(x) = 1 \otimes p$$

$$\varphi(u) = \sum_{j=o}^{\infty} \frac{1}{j!} (D_x^j u) \otimes q^j \qquad \text{si } u \in U'$$

où D_x désigne la dérivation localement nilpotente de U' donnée par l'action adjointe de x ([13] ch.4 lemme 4.7.8.). Alors φ se prolonge en un isomorphisme, que je noterai encore φ , de U_z sur $\tilde{U}_{\tilde{z}} \otimes A_1$.

On peut identifier les idéaux de U_z aux idéaux de U ne contenant pas z . On a donc la notion d'idéal rationnel de U_z , et de poids d'un tel idéal. A cause de [13] ch.4 lemme 4.5.1., φ définit une bijection de l'ensemble des idéaux de U_z sur l'ensemble des idéaux de $\tilde{U}_{\tilde{z}}$, dont il est facile de voir qu'elle respecte les idéaux rationnels. Notons $I_1 \longrightarrow \tilde{I}_1$ cette bijection ; alors le poids de $\tilde{I}_1$ est poids$(I_1)-1$. On note $\tilde{A} = \tilde{U}/\tilde{I}$, de sorte que $A \simeq \tilde{A} \otimes A_1$ par φ .

<u>Lemme 1.5.</u> <u>Si</u> I <u>est de poids maximal dans</u> U , $\tilde{I}$ <u>est de poids maximal dans</u> $\tilde{U}$; <u>en particulier</u> $\underline{g}$ <u>et</u> $\tilde{\underline{g}}$ <u>ont même indice.</u>

<u>Démonstration</u> : D'après ce qui précède, $\tilde{I}$ est certainement de poids maximal dans $\tilde{U}_{\tilde{z}}$, c'est-à-dire parmi les idéaux rationnels ne contenant pas $\tilde{z}$. Or les idéaux rationnels contenant $\tilde{z}$ correspondent aux orbites contenues dans l'hyperplan $\tilde{f}(\tilde{z}) = 0$ de $\tilde{\underline{g}}^*$; comme les orbites de dimension maximale forment un ouvert de Zariski dans $\tilde{\underline{g}}^*$, il y en a certainement qui ne sont pas contenues dans cet hyperplan. En d'autres termes, les idéaux rationnels de poids maximal dans $\tilde{U}_{\tilde{z}}$ sont déjà de poids maximal vus comme idéaux de $\tilde{U}$, et le lemme est démontré.

§ 2. PROPRIÉTÉS FORMELLES DE $H^{*}(\underline{g}/\underline{q}\ ,\ U/I)$.

2.1. Soit d' la dimension de $\underline{g}(f)/\underline{q}$.

Le but de ce paragraphe est démontrer un certain nombre de propriétés formelles de la cohomologie étudiée, qui la rapprochent beaucoup de la cohomologie à coefficients triviaux d'une algèbre de Lie nilpotente de dimension d' .

Théorème 2.1.1. Soit d' la dimension de $\underline{g}(f)/\underline{q}$.

(i) On a $\dim H^n(\underline{g}/\underline{q}\ ,\ U/I) \leq \binom{d'}{n}$ (coefficient binomial) pour tout $n \geq 0$. En particulier $H^n(\underline{g}/\underline{q}, U/I)$ est toujours de dimension finie, et nul si $n > d'$.

(ii) $\dim H^o(\underline{g}/\underline{q}\ ,\ U/I) = \dim H^{d'}(\underline{g}/\underline{q}\ ,\ U/I) = 1$.

(iii) Soit χ la caractéristique d'Euler du $\underline{g}/\underline{q}$-module U/I . Alors $\chi = 0$, sauf si $d' = 0$, auquel cas $\underline{q} = \underline{g}(f)$, l'orbite correspondant à I est plate, les H^n sont tous nuls pour $n > 0$, et $\chi = 1$.

(iv) Le cup-produit induit en cohomologie par le produit de l'algèbre U/I définit un couplage non-dégénéré :

$$H^n \times H^{d'-n} \longrightarrow H^{d'} .$$

En particulier, H^n et $H^{d'-n}$ ont même dimension.

Remarque 2.1.2. Par contre, le cup-produit ci-dessus n'est pas toujours "super-commutatif", i.e. on n'a pas toujours $\alpha \cup \beta = (-1)^{pq}\ \beta \cup \alpha$ pour $\alpha \in H^p$, $\beta \in H^q$. On peut le voir sur l'exemple des orbites plates de $\underline{g}_{5,3}$ (cf.n°8.3), où il y a des éléments $\alpha \in H^1$ tels que $\alpha \cup \alpha \neq 0$. Ce genre de phénomène est même plutôt courant pour les orbites plates de dimension > 0 mais non maximale (cf.§7). Il est d'autant plus remarquable que la propriété (iv) ait lieu.

2.2. La démonstration du théorème se fait par récurrence sur la dimension de $\underline{g}$, en utilisant le fait qu'il s'agit de propriétés qui se comportent bien vis-à-vis des suites spectrales. Lorsque $\dim \underline{g} = 0$, il n'y a rien à démontrer. On suppose donc $\dim \underline{g} > 0$ et le théorème démontré pour toutes les algèbres $\underline{g}$ de dimension plus petite.

Au cours du n°2.2. on va se ramener au cas $\underline{q} = \underline{p}$.

Soit $\underline{q}'$ un idéal de $\underline{g}$ tel que $\underline{p} \supset \underline{q}' \supset \underline{q}$ et que $\underline{q}$ soit de codimension 1 dans $\underline{q}'$. Supposons le théorème démontré pour $\underline{q}'$, et montrons qu'il est encore vrai pour $\underline{q}$; de proche en proche on sera ainsi ramené au cas $\underline{q} = \underline{p}$.

Considérons la suite spectrale de Hochschild-Serre relativement à l'idéal $\underline{q}'/\underline{q}$ de $\underline{g}/\underline{q}$. On obtient :

$$E_2^{pq} = H^p(\underline{g}/\underline{q}' , H^q(\underline{q}'/\underline{q} , k) \otimes U/I) \Longrightarrow H^*(\underline{g}/\underline{q}, U/I).$$

(remarquer que $\underline{q}'$ agit trivialement sur U/I). On est dans la situation où $E_2^{pq} = 0$ pour $q > 1$; comme on l'a déjà signalé au cours de la démonstration du th.5.5.1. de la partie I , la suite spectrale donne alors naissance à une longue suite exacte :

$$\cdots \longrightarrow E_2^{n,o} \longrightarrow H^n(\underline{g}/\underline{q} , U/I) \longrightarrow E_2^{n-1,1} \xrightarrow[d_2]{} E_2^{n+1,o} \longrightarrow \cdots$$

Comme $H^o(\underline{q}'/\underline{q}\ k) = k$, $H^1(\underline{q}'/\underline{q} , k) \simeq k$, on peut identifier $E_2^{n,o}$ et $E_2^{n,1}$ à $H^n(\underline{g}/\underline{q}' ,U/I)$.

Les assertions (i) et (ii) sont maintenant immédiates. Pour l'assertion (iii), il faut distinguer deux cas.

a) Si $\underline{q}' = \underline{g}(f)$, on a $E_2^{pq} = 0$ pour $p > 0$. On a $d' = 1$, et les espaces $H^o(\underline{g}/\underline{q} ,U/I)$ et $H^1(\underline{g}/\underline{q},U/I)$ sont tous deux de dimension 1 d'après (ii). Donc $\chi = 0$.

b) Si $\underline{q}' \neq \underline{g}(f)$, la caractéristique d'Euler χ_2 au niveau E_2 de la suite spectrale est nulle, par application de l'assertion (iii) à $\underline{q}'$. Donc $\chi = 0$ (cf.§1, lemme 1.3.2.1.).

Enfin l'assertion (iv) provient du lemme 1.3.2.2., étant donné que (dans les notations de ce lemme) le couplage induit au niveau E_2 de $E_2^n \times E_2^{d'-n} \longrightarrow E_2^{d'}$ n'est autre que le cup-produit de $\underline{g}/\underline{q}'$-cohomologie ; par exemple

$$H^n(\underline{g}/\underline{q}' ,U/I) \times H^{d'-1-n}(\underline{g}/\underline{q}' ,U/I) \longrightarrow H^{d'-1}(\underline{g}/\underline{q}' ,U/I)$$

donne le couplage $E_2^{n,o} \times E_2^{d'-1-n,1} \longrightarrow E_2^{d'-1,1}$ (noter que la valeur de d' correspondant à $\underline{q}'$ est d'-1, et que $E_2^{d'}$ se réduit au terme $E_2^{d'-1,1}$) .

2.3. On peut donc dorénavant supposer que $\underline{q} = \underline{p}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on peut alors supposer que $\dim \underline{z} = 1$, et que $I \cap \underline{z} = 0$; on introduit les notations du n°1.5., cas b). Soit $\underline{\tilde{q}}$ l'image de $\underline{p}$ dans $\underline{\tilde{g}}$; on va établir un isomorphisme respectant les cup-produits entre $H^*(\underline{g}/\underline{p}, U/I)$ et $H^*(\underline{\tilde{g}}/\underline{\tilde{q}},\tilde{U}/\tilde{I})$, ce qui donnera le résultat par application de l'hypothèse de récurrence à $\underline{\tilde{g}}$.

On procède comme dans la démonstration du théorème 4.1. de la partie I . Démontrons d'abord que l'injection canonique $C^*(\underline{g}/\underline{p},\underline{m},U/I) \longrightarrow C^*(\underline{g}/\underline{p},U/I)$ induit un isomorphisme en cohomologie, et pour cela que $H^q(\underline{m},U/I) = 0$ pour tout $q > 0$ (partie I , lemme 1.5.). On pourrait faire comme à la partie I , mais en fait il suffit de remarquer que la décomposition $U/I \simeq \widetilde{U}/\widetilde{I} \otimes A_1$ fait apparaître le $\underline{m}$-module U/I comme une somme directe (infinie, en général) d'exemplaires du $\underline{m}$-module A_1 , où $\underline{m}$ agit sur A_1 par $x \longrightarrow \mathrm{ad}\, p$, $y \longrightarrow \mathrm{ad}\, q$. Comme la cohomologie des algèbres de Lie de dimension finie passe aux sommes directes (même infinies), il suffit de montrer que $H^q(\underline{m},A_1) = 0$ pour $q > 0$. Si on note $\underline{h}$ la sous-algèbre de $\underline{g}$ engendrée par x, y et z, $\underline{m}$ s'identifie à $\underline{h}/kz$, et le résultat provient de la proposition 3.1. ci-dessous.

La seconde étape consiste à définir un isomorphisme de complexes respectant les cup-produits entre $C^*(\underline{g}/\underline{p},\underline{m},U/I)$ et $C^*(\widetilde{\underline{g}}/\widetilde{\underline{q}},\widetilde{U}/\widetilde{I})$. Tout d'abord, on peut identifier $(\underline{g}/\underline{p})/\underline{m}$ à $\underline{g}/(ky \oplus \underline{p})$ puis à $\widetilde{\underline{g}}/\widetilde{\underline{q}}$; et on écrit U/I sous la forme $\widetilde{U}/\widetilde{I} \otimes A_1$.

Comme y agit trivialement sur $\widetilde{\underline{g}}/\widetilde{\underline{q}}$, le complexe de cohomologie relative s'identifie finalement à :

$$C^*_{kx}(\widetilde{\underline{g}}/\widetilde{\underline{q}},\ H^0(ky,\ U/I)) = C^*_{kx}(\widetilde{\underline{g}}/\widetilde{\underline{q}}\ ,\widetilde{U}/\widetilde{I}[q]) \ .$$

L'évaluation au point $q = 0$ est un morphisme de $\widetilde{\underline{g}}/\widetilde{\underline{q}}$-modules de $\widetilde{U}/\widetilde{I}[q]$ vers $\widetilde{U}/\widetilde{I}$; elle induit donc un morphisme de complexes de $C^*(\widetilde{\underline{g}}/\widetilde{\underline{q}}\ ,\widetilde{U}/\widetilde{I}[q])$ vers $C^*(\widetilde{\underline{g}}/\widetilde{\underline{q}},\widetilde{U}/\widetilde{I})$, et on voit aussitôt, du fait que x agit par $\frac{d}{dq}$, que la restriction de ce morphisme à $C^*_{kx}(\widetilde{\underline{g}}/\widetilde{\underline{q}},\widetilde{U}/\widetilde{I}[q])$ est un isomorphisme. Le théorème 2.1.1. est donc démontré.

§ 3. COHOMOLOGIE D'UNE ALGÈBRE DE WEYL COMME BIMODULE SUR ELLE-MÊME.

La proposition ci-après est un corollaire du lemme 1.4.1. Je lui accorde tout de même un paragraphe à part à cause de son importance dans toute la suite.

Proposition 3.1. Soit $A_r(k)$ l'algèbre de Weyl d'indice r sur k (cf.n°1.1.1.). Alors
$$H^n(A_r(k),A_r(k)) = \begin{cases} k \text{ si } n = 0 \\ 0 \text{ si } n > 0 \ . \end{cases}$$

Démonstration : Soit $\underline{h}$ l'algèbre de Heisenberg de dimension $2r + 1$ sur k , B son algèbre enveloppante, z une base du centre de $\underline{h}$. On peut alors réaliser $A_r(k)$ comme $B/B(z-1)$.

D'après le lemme 1.4.1. on a donc $H^*(A_r(k),A_r(k)) = H^*(\underline{h}/kz,A_r(k))$. On peut compléter z en une base $x_1,\ldots,x_r$, $y_1,\ldots,y_r$,z de $\underline{h}$, de telle sorte que si p_i(resp.q_j) est l'image de x_i (resp.y_i) dans $B/B(z-1)$, les p_i et q_j forment un système de générateurs canoniques de l'algèbre de Weyl $B/B(z-1)$. Alors x_i agit par $\frac{\partial}{\partial q_i}$, y_i par $-\frac{\partial}{\partial p_j}$ quand on écrit les éléments de $B/B(z-1)$ sous la forme $\sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^r} a_{\alpha,\beta}\, p^\alpha q^\beta$. On est ainsi ramené au complexe de de Rham de $k[p_i,q_j]$ (p_i et q_j étant maintenant considérées comme variables commutatives), d'où le résultat. Pour $n = 1$, cela exprime que toutes les dérivations de $A_r(k)$ sont intérieures, ce qui est le lemme 4.6.8. de [13] ch.4 .

§ 4. DÉCOMPOSITION DE gr U ET DE $\hat{U}$.

4.1. Préliminaires

Dans ce paragraphe, on va étudier la structure des algèbres gr U et $\hat{U}$. Les raisonnements qui vont suivre relèvent essentiellement de la technique des suites centralisantes. Comme on aura besoin de les appliquer à des algèbres un peu plus générales que des algèbres enveloppantes (pour tenir compte de l'idéal $\underline{q}$), on va élargir un peu le cadre.

Dans ce paragraphe, B désignera une k-algèbre nœthérienne, et I un idéal de B ; on note $A = B/I$. On suppose que I est engendré par une suite centralisante, et que A est une algèbre de Weyl sur k . On introduit comme au n°1.1.1. les algèbres $\operatorname{gr} B = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I^n/I^{n+1}$ et $\hat{B} = \varprojlim B/I^{n+1}$.

Rappelons le résultat suivant :

Lemme 4.1.1. (propriété d'Artin-Rees).

Soient M un B-module nœthérien , M' un sous-module de M . Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $I^{N+n} M \cap M' \subset I^N M'$ (en d'autres termes, la topologie I-adique sur M' est équivalente à la topologie induite par la topologie I-adique sur M).

Démonstration : cf.[17] cor.2.8.

Corollaire 4.1.2. $\bigcap_{n\geq 0} I^n = 0$. (loc.cit.).

La topologie I-adique sur B est donc séparée. Cela entraîne que l'application canonique de B dans $\hat{B}$ est injective ; on dira donc que $\hat{B}$ est le complété de B pour la topologie I-adique. On note $\hat{I}$ l'idéal $\varprojlim I/I^n$ de $\hat{B}$; c'est aussi l'adhérence de I dans $\hat{B}$. Comme I est de type fini en tant que B-module, on a $\hat{I} = \hat{B}I$; on a $\hat{B}/\hat{I} = B/I = A$.

Lemme 4.1.3. Soit $u \in B$. Si u n'est pas diviseur de 0 dans B , il n'est pas diviseur de 0 dans $\hat{B}$.

Démonstration : Comme en algèbre commutative. Montrons que u n'est pas diviseur de 0 à droite dans $\hat{B}$. Soit $x \in \hat{B}$ tel que $xu = 0$. Par hypothèse, l'application $y \longrightarrow yu$ de B dans lui-même est injective ; d'après le lemme d'Artin-Rees, c'est un homéomorphisme de B sur Bu muni de la topologie induite. Soit (x_n) une suite d'éléments de B convergeant vers x . Alors $x_n u$ tend vers 0 dans $\hat{B}$, donc dans B , et $x_n \longrightarrow 0$; d'où $x = 0$ comme annoncé.

Lemme 4.1.4. L'anneau $\hat{B}$ est noethérien.

Démonstration : cf.[29] partie II th. 1.7.(par récurrence sur la longueur d'une suite centralisante engendreant I).

4.2. Décomposition du gradué.

Lemme 4.2.1. Soit X un A-bimodule. Supposons que X soit engendré par une suite centralisante (cf.n°1.2.). Alors l'application naturelle $A \otimes H^0(A,X) \longrightarrow X$ est un isomorphisme (en d'autres termes, le bimodule X est somme directe finie de sous-bimodules isomorphes à A) .

Démonstration : On raisonne par récurrence sur la longueur de la suite centralisante. Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une suite centralisante engendreant X . Si $x_n = 0$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, comme A n'a pas d'idéaux bilatères non triviaux, le sous-bimodule Ax_n de X est isomorphe à A . Soit $X' = X/Ax_n$. On a alors une suite exacte de A-bimodules :

$$0 \longrightarrow Ax_n \longrightarrow X \longrightarrow X' \longrightarrow 0 .$$

Par hypothèse de récurrence, $X' \simeq A \otimes H^0(A,X')$ est isomorphe à une somme directe de copies de A . Mais d'après la prop.3.1. on a $H^1(A,A) = \mathrm{Ext}^1_{A^e}(A,A) = 0$. Donc la suite exacte ci-dessus est scindée, et le lemme est démontré.

Proposition 4.2.2. Soit $T = H^0(A, \mathrm{gr}\, B)$ le commutant de A dans gr U . Alors l'application naturelle $A \otimes T \longrightarrow \mathrm{gr}\, B$ est un isomorphisme d'algèbres graduées ; de plus T est engendrée par ses éléments de degré 1 .

Démonstration : Comme I est engendré par une suite centralisante, le A-bimodule I/I^2 est engendré par une suite centralisante, et il en va de même pour chaque I^n/I^{n+1} ; donc $I^n/I^{n+1} \simeq A\otimes H^o(A,I^n/I^{n+1})$ d'après le lemme 4.2.1., et $\mathrm{gr}\, B \simeq A\otimes T$.

Puisque le bimodule A est irréductible, tout bimodule X de la forme $A\otimes H^o(A,X)$ est un A^e-module semi simple Considérons la surjection naturelle du A-bimodule $I/I^2 \otimes_A I/I^2 \otimes_A \dots \otimes_A I/I^2$ (n fois) vers I^n/I^{n+1} , donnée par la multiplication dans gr B . L'application qui s'en déduit au niveau H^o est la multiplication $T_1\otimes\dots\otimes T_1 \longrightarrow T_n$ (en notant $T_n = H^o(A,I^n/I^{n+1})$, et d'après ce qui précède, elle est encore surjective. Donc T est engendrée par ses éléments d'ordre 1 .

4.3. Relèvement de A dans $\hat{B}$.

Proposition 4.3.1. *L'algèbre A se relève dans* $\hat{B}$.

Démonstration : On procède par approximations successives. Soit $p : \hat{B} \to A$ la projection canonique. On commence par choisir un inverse à droite k-linéaire quelconque de p , appliquant 1 sur 1 , que l'on note ρ_o .

L'écart à ce que ρ_o soit un homomorphisme d'algèbres, modulo $\hat{I}^2$, s'exprime par un certain 2-cocycle $\omega_1 \in Z^2(A,I/I^2)$. Or on a vu à la proposition 4.2.2. que le bimodule I/I^2 est somme directe finie de facteurs isomorphes à A . Comme par ailleurs $H^2(A,A) = 0$ d'après la prop.3.1. , ω_1 est un cobord. Cela veut dire que l'on peut corriger ρ_o par une application linéaire à valeurs dans $\hat{I}$, pour obtenir cette fois un inverse à droite ρ_1 de p , qui relève A modulo $\hat{I}^2$. Poursuivant ainsi de proche en proche, on obtient une suite de relèvements (ρ_n), ρ_n relèvement de A modulo $\hat{I}^{n+1}$, qui converge dans la topologie $\hat{I}$-adique vers le relèvement cherché.

On choisit dorénavant un relèvement[(1)] R de A dans $\hat{B}$; R est donc une sous-algèbre de $\hat{B}$ isomorphe à une algèbre de Weyl. On note C le commutant de R dans $\hat{B}$; c'est une sous-algèbre fermée pour la topologie I-adique ; on note $\underline{m}$ l'idéal $I \cap C$; c'est l'idéal maximal de l'anneau local C (non commutatif en général).

Proposition 4.3.2. *Soit R' un autre relèvement de A dans* $\hat{B}$. *Il existe alors un automorphisme* Φ *de* $\hat{B}$ *appliquant* $\hat{I}$ *sur* $\hat{I}$, *et induisant l'identité sur A , qui applique R sur R' . En particulier* Φ *donne un isomorphisme de C sur C', compatible avec les augmentations.*

---

(1) On appelle relèvement indifféremment un homomorphisme d'algèbres $\rho : A \to \hat{B}$ inverse à droite de p , ou son image dans $\hat{B}$.

Démonstration : On remarque que pour $u \in \hat{I}$, on définit un automorphisme e^{adu} de $\hat{B}$ par la formule :

$$e^{adu} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} (adu)^n$$

Soit ρ (resp. ρ') : $A \longrightarrow \hat{B}$ le relèvement correspondant à R(resp. R'). On a $\rho'(a) = \rho(a) + \Delta_1(a)$, où $\Delta_1 : A \longrightarrow \hat{I}$ est une application linéaire ; on voit aussitôt que la condition d'homomorphisme entraîne que :

$$\Delta_1(ab) = \rho(a)\Delta_1(b) + \Delta_1(a)\rho(b) \pmod{\hat{I}^2} .$$

donc Δ_1 définit un élément de $Z^1(A, I/I^2)$. Comme $H^1(A, I/I^2) = 0$, il existe u_1 dans $\hat{I}$ tel que :

$$\Delta_1(a) = [u_1, \rho(a)] \pmod{\hat{I}^2} \text{ pour tout } a \in A .$$

Alors : $\rho'(a) = e^{adu_1} \rho(a) \pmod{\hat{I}^2}$.

Appelons ρ_1 le relèvement $e^{adu_1} \rho$ de A dans $\hat{B}$. On peut maintenant écrire :

$$\rho'(a) = \rho_1(a) + \Delta_2(a) , \text{ avec } \Delta_2 \text{ à valeurs dans } \hat{I}^2 .$$

Poursuivant de proche en proche, on construit une suite (ρ_n) avec $\rho_n = e^{adu_n} \ldots e^{adu_1} \rho$, $u_n \in \hat{I}^n$, telle que $\rho'(a) = \rho_n(a) + \Delta_{n+1}(a)$, Δ_{n+1} à valeurs dans $\hat{I}^{n+1}$. Si on pose $\Phi_n = e^{adu_n} \ldots e^{adu_1} \in GL(\hat{B})$, il est clair que la suite (Φ_n) converge dans $End(\hat{B})$ (l'espace des endomorphismes de $\hat{B}$ muni de la topologie de la convergence simple) vers un automorphisme Φ ayant les propriétés voulues.

4.4. Décomposition de $\hat{B}$.

Lemme 4.4.1. On a $I^n \cap C = \underline{m}^n$, et le gradué de C pour la topologie $\underline{m}$-adique s'identifie au commutant de A dans gr B (c'est l'algèbre T de la prop. 4.2.2.)

Démonstration : Posons $\underline{m}_n = I^n \cap C$; la suite d'idéaux $(\underline{m}_n)$ définit une filtration de l'algèbre C. Soit T_n la composante homogène de degré n de l'algèbre T ; alors l'application naturelle $I^n \longrightarrow I^n/I^{n+1}$ définit une injection de $\underline{m}_n/\underline{m}_{n+1}$ dans T_n, dont on voit comme au n° précédent que c'est un isomorphisme (cela consiste à montrer que les invariants de I^n/I^{n+1} se relèvent dans $\hat{I}^n$).

Donc T s'identifie au gradué de C pour la filtration définie par les $\underline{m}_n$; le fait que T soit engendré par ses éléments de degré 1 s'exprime alors en disant que $\underline{m}_n = \underline{m}^n$.

Appelons base topologique de C une suite $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$, telle que e_o soit une base de C modulo $\underline{m}$, $e_1,\dots,e_{\alpha_1}$ une base de $\underline{m}$ modulo $\underline{m}^2$, et ainsi de suite. Il est clair que tout élément $c \in C$ a alors une expression unique :

$$c = \sum_{\alpha=o}^{\infty} c_\alpha e_\alpha \quad \text{avec } c_\alpha \in k \quad \text{(somme convergeant dans C).}$$

<u>Lemme 4.4.2.</u> <u>Soit</u> $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ <u>une base topologique de</u> C . <u>Alors tout élément de</u> $\hat{B}$ <u>a une expression unique</u> : $u = \sum_{\alpha=o}^{\infty} u_\alpha e_\alpha$, <u>avec</u> $u_\alpha \in R$; <u>on écrira</u> $\hat{B} = R\hat{\otimes}C$.

<u>Démonstration</u> : On construit les u_α de proche en proche, en remarquant que pour $\alpha_{n-1} < \alpha \leq \alpha_n$ les images des e_α dans $\underline{m}^n/\underline{m}^{n+1}$ forment une base de $T_n = \underline{m}^n/\underline{m}^{n+1}$, et en appliquant la décomposition $I^n/I^{n+1} = A \otimes T_n$ provenant de la prop.4.2. L'unicité est claire pour la même raison.

<u>Remarque 4.4.3</u> On a ainsi décomposé le R-bimodule $\hat{B}$ en produit (fini ou dénombrable) de facteurs isomorphes à R .

4.5. <u>Structure du commutant</u> (cas régulier).

On suppose dans ce n° que I est engendré par une suite centralisante régulière $(y_1,\dots,y_d)$ de longueur d .

<u>Proposition 4.5.1.</u> (i) <u>L'anneau</u> C <u>est un anneau local séparé et complet pour la topologie</u> $\underline{m}$<u>-adique</u>.

(ii) <u>L'idéal</u> $\underline{m}$ <u>est engendré par une suite centralisante régulière</u> $(x_1,\dots,x_d)$ <u>de longueur</u> d (cf.n° 1.2.)

(iii) <u>L'anneau</u> C <u>est intègre et nœthérien.</u>

<u>Démonstration</u> : (i) Comme la topologie $\underline{m}$-adique sur C coincide avec la topologie I-adique d'après le lemme 4.4.1., C est séparé et complet pour la topologie $\underline{m}$-adique.

(iii) résulte de (i) et (ii) compte tenu du lemme 1.2.2.

(ii) On procède par récurrence sur d . On peut supposer d > 0 . Soit $B' = B/By_d$, $I' = I/By_d$, et soit y'_j l'image de y_j dans B' , pour $1 \leq j \leq d-1$.

Alors $(y'_1,\dots,y'_{d-1})$ est une suite centralisante régulière engendreant I' . Soit R' l'image de R dans B' ; alors R' est un relèvement de A dans B' . On note C' le commutant correspondant.

Considérons la suite exacte $0 \longrightarrow By_d \longrightarrow B \longrightarrow B' \longrightarrow 0$, vue comme suite exacte de B-modules. A cause du lemme d'Artin-Rees on en déduit une suite exacte $0 \longrightarrow (By_d)^\wedge \longrightarrow \hat{B} \longrightarrow \hat{B}' \longrightarrow 0$ (cf.[1] ch.10 prop.10.12), et comme By_d est de type fini, $(By_d)^\wedge = \hat{B}y_d$. D'où finalement une suite exacte :

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow \hat{B}y_d \longrightarrow \hat{B} \longrightarrow \hat{B}' \longrightarrow 0 .$$

Comme y_d n'est pas diviseur de 0 dans $\hat{B}$ (lemme 4.1.3.) on a $C \cap \hat{B}y_d = Cy_d$. Démontrons un lemme :

<u>Lemme 4.5.2.</u> <u>L'application</u> $C/Cy_d \longrightarrow C'$ <u>qui se déduit de la suite exacte ci-dessus est surjective.</u>

<u>Démonstration</u> : Faisant agir A sur $\hat{B}$ (resp.$\hat{B}'$) par l'intermédiaire de R (resp.R'), on peut considérer la suite exacte (1) comme une suite exacte de A-bimodules, et il s'agit alors de savoir si tous les élements de $H^0(A,\hat{B}')$ se relèvent dans B . L'obstruction à un tel relèvement se trouve dans $H^1(A,\hat{B}y_d)$. Comme y_d est central et non-diviseur de 0 dans $\hat{B}$ d'après le lemme 4.1.3., le A-bimodule $\hat{B}y_d$ est isomorphe à $\hat{B}$. Mais d'après la remarque 4.4.3. , $\hat{B}$ est isomorphe à un produit fini ou dénombrable d'exemplaires de A . Comme la cohomologie commute aux produits on a donc $H^1(A,\hat{B}) = 0$ (prop.3.1.) d'où le lemme.

On a donc une suite exacte $0 \rightarrow Cy_d \rightarrow C \rightarrow C' \rightarrow 0$. Par hypothèse de récurrence, l'idéal $\underline{m}' = \underline{m}/Cy_d$ de C' est engendré par une suite centralisante régulière $(x'_1,\dots,x'_{d-1})$ de longueur d-1. Si on note x_j un représentant quelconque de x'_j dans C , la suite $(x_1,\dots,x_{d-1},y_d)$ répond à la question.

4.6. <u>Application aux algèbres</u> U <u>et</u> U_λ .

On revient maintenant aux notations générales du n°1.1.1. Tout élément de l'idéal $\underline{q}$ est scalaire modulo I ; on définit ainsi un caractère λ de $\underline{q}$. Introduisons comme au n°1.4. l'algèbre U_λ , et soit I_λ l'image de I dans U_λ . Soit $d' = d-\dim \underline{q}$.

<u>Lemme 4.6.1.</u> <u>L'idéal</u> I_λ <u>est engendré par une suite centralisante régulière de longueur</u> d' .

Démonstration : (voir aussi [29] th.6.) Par récurrence sur la dimension de $\underline{g}$. On introduit les notations de 1.5. Si $I \cap \underline{z} \neq 0$, soit $\underline{q}'$ l'image de $\underline{q}$ dans $\underline{g}'$, λ' le caractère de $\underline{q}'$ défini par I' . On distingue deux cas.

a) $I \cap \underline{q} \neq 0$. Alors on peut prendre z dans $I \cap \underline{q}$; dans ces conditions U_λ s'identifie à $U'_{\lambda'}$, I_λ à $I'_{\lambda'}$, et on applique l'hypothèse de récurrence.

b) $I \cap \underline{q} = 0$. Alors $\underline{q}$ est un idéal central de dimension ≤ 1 dans $\underline{g}$. On a une surjection naturelle de U_λ sur $U'_{\lambda'}$, dont le noyau est l'image de Uz dans U_λ , c'est-à-dire $U_\lambda \bar{z}$, si $\bar{z}$ est l'image de z dans U_λ . Il suffira donc de démontrer que $\bar{z}$ n'est pas diviseur de 0 dans U_λ . Pour cela, il suffit de reprendre la démonstration du lemme 1.4.1. On y montre que si $e_1,\dots,e_m$ est une base d'un supplémentaire de $\underline{q}$ dans $\underline{g}$, les produits $\bar{e}_1^{\alpha_1}\dots\bar{e}_m^{\alpha_m}$ forment une base de U_λ ; en particulier, on a $\bar{z} \neq 0$, et l'anneau U_λ est intègre. Donc $\bar{z}$ n'est pas diviseur de 0 dans U_λ .

Reste le cas où $I \cap \underline{z} = 0$. Dans ce cas, le centre de $\underline{g}$ est de dimension 1, et on a $\underline{q} = 0$ ou $\underline{q} = \underline{z}$. Lorsque $\underline{q} = \underline{z}$, l'isomorphisme $\varphi : U_z \longrightarrow \tilde{U}_{\tilde{z}} \otimes A_1$ passe en un isomorphisme de U_λ sur $\tilde{U}_{\tilde{\lambda}} \otimes A_1$ (avec $\tilde{\underline{q}} = k\tilde{z}$, $\tilde{\lambda}$ le caractère correspondant à $\tilde{I}$). D'où le résultat, en appliquant l'hypothèse de récurrence à $\tilde{I}_{\tilde{\lambda}}$.

Lorsque $\underline{q} = 0$, il suffit de montrer que l'idéal $I/U(z-1)$ de $U/U(z-1)$ est engendré par une suite centralisante régulière de longueur $d-1$, et on est ramené au cas précédent.

Corollaire 4.6.2. Les propositions 4.2.,4.3.1.,4.3.2.,4.5.1. s'appliquent avec $B = U_\lambda$ (et en particulier avec $B = U$).

4.7. Remarque 4.7. Il est clair que tous les résultats de ce § restent valables en supposant seulement que I est un idéal maximal de B engendré par une suite centralisante (régulière au n°4.5.), et que $H^1(A,A) = H^2(A,A) = 0$. Pour la prop.4.2. il suffit même de savoir que $H^1(A,A) = 0$.

§ 5. L'ISOMORPHISME $H^*(\underline{g}/\underline{q},U/I) \simeq H^*(C,k)$.

5.1. Les notations sont celles de 1.1.1. Soit λ le caractère de $\underline{q}$ défini par I , et introduisons l'algèbre U_λ comme au n°1.4. Soit I_λ l'image de I dans U_λ . On choisit un relèvement R de A dans $\hat{U}_\lambda$, et on note C le commutant de R dans $\hat{U}_\lambda$(§4,cor.4.6.2.) L'algèbre C possède une unique représentation irréductible, que l'on notera simplement k (le "module trivial") ; c'est le module associé à l'idéal maximal $\underline{m}$ de C .

L'objet de ce paragraphe est la démonstration du résultat suivant :

<u>Théorème 5.1. Il y a un isomorphisme canonique</u> $H^*(\underline{g}/\underline{q}, A) \simeq H^*(C,k)$, <u>préservant les cup-produits</u> (cf.n°1.3. <u>pour la définition du cup-produit en théorie de Hochschild</u>).

Comme on l'a signalé au n°1.4.3., l'identification de $H^*(\underline{g}/\underline{q}, A)$ avec $H^*(U_\lambda, A)$ respecte les cup-produits. On va donc travailler en cohomologie de Hochschild, et comparer les algèbres $H^*(U_\lambda, A)$ et $H^*(C,k)$.

5.2. <u>Passage au complété</u>.

Le lemme suivant se déduit facilement de [17] :

<u>Lemme 5.2.1. Soit</u> M <u>un</u> U_λ<u>-bimodule localement annulé à gauche et à droite par</u> I_λ (cf.n°1.1.2.) <u>Soit</u> $0 \longrightarrow M \longrightarrow E$ <u>une enveloppe injective du bimodule</u> M ([18] § 1 n°9 déf.4). <u>Alors</u> E <u>a encore la même propriété</u>.

<u>Démonstration</u> : Il est clair que l'idéal $I_\lambda \otimes U_\lambda^o + U_\lambda \otimes I_\lambda$ de U_λ^e est engendré par une suite centralisante. Si M est annulé à gauche et à droite par I_λ, on peut donc appliquer [17] prop.2.7. Dans le cas général, soit $N = \{x \in M \mid I_\lambda x = xI_\lambda = 0\}$. Alors N est un sous-bimodule de M, et comme l'extension $0 \longrightarrow N \longrightarrow M$ est essentielle, i.e. tout sous-module non nul de M a une surjection non nulle avec N, $0 \longrightarrow N \longrightarrow E$ est encore une enveloppe injective de N. D'où le lemme.

<u>Lemme 5.2.2. Soit</u> E <u>un</u> U_λ<u>-bimodule injectif localement annulé par une puissance de</u> I_λ <u>à gauche et à droite. Alors</u> E <u>est encore injectif vu comme</u> $\hat{U}_\lambda$<u>-bimodule</u>.

<u>Démonstration</u> : Soit $0 \longrightarrow E \longrightarrow \hat{E}$ une enveloppe injective du $\hat{U}_\lambda$-bimodule E. D'après le lemme 4.1.4., l'anneau $\hat{U}_\lambda$ est nœthérien ; et l'idéal $\hat{I}_\lambda$ de $\hat{U}_\lambda$ est engendré par une suite centralisante (à savoir celle qui engendre I_λ). Comme le $\hat{U}_\lambda$-bimodule E est localement annulé par une puissance de $\hat{I}_\lambda$, $\hat{E}$ a encore la même propriété, d'après le lemme 5.2.1., qui s'applique en remplaçant U_λ par un anneau nœthérien quelconque et I_λ par un idéal de U_λ engendré par une suite centralisante.

Comme le U_λ-bimodule E est injectif, il a un supplémentaire dans $\hat{E}$, et on peut écrire $\hat{E} = E \oplus N$, sous l'action de U_λ. Mais comme tout élément de $\hat{E}$ est annulé à gauche et à droite par une puissance de $\hat{I}_\lambda$, tout sous-U_λ-bimodule de $\hat{E}$ est en fait un sous-$\hat{U}_\lambda$-bimodule. Comme $\hat{E}$ est une enveloppe injective, on a donc $N = 0$, et $E = \hat{E}$, ce qui démontre le lemme.

<u>Lemme 5.2.3. L'application de restriction</u> $H^*(\hat{U}_\lambda, A) \longrightarrow H^*(U_\lambda, A)$ (cf.n°1.3.2.) <u>est un isomorphisme préservant les cup-produits</u>.

Démonstration : L'opération de restriction commute de toutes façons aux cup-produits. Il suffira donc de montrer que c'est un isomorphisme.

Pour cela, voyons comment on peut réaliser le morphisme de restriction à l'aide des résolutions injectives. Soit $0 \longrightarrow A \longrightarrow Y$ une résolution injective du $\hat{U}_\lambda$-bimodule A , et $0 \longrightarrow A \longrightarrow X$ une résolution injective du U_λ-bimodule A . Considérant Y comme un complexe acyclique de U_λ-bimodules, on obtient d'après le lemme de comparaison des résolutions ([6] ch.V, prop.1.1a) un morphisme de complexes de U_λ-bimodules $Y \longrightarrow X$ au-dessus de A, d'où un morphisme en cohomologie $H^*(Y^{U_\lambda}) \longrightarrow H^*(X^{U_\lambda})$. En composant avec l'application canonique de $H^*(Y^{\hat{U}_\lambda})$ dans $H^*(Y^{U_\lambda})$, on obtient donc un morphisme de $H^*(\hat{U}_\lambda,A)$ dans $H^*(U_\lambda,A)$, dont on vérifie sans mal qu'il ne dépend pas des choix faits.

Soit $F \longrightarrow U_\lambda \longrightarrow 0$ (resp. $\hat{F} \longrightarrow \hat{U}_\lambda \longrightarrow 0$) la résolution standard du U_λ^e-module U_λ (resp. du $\hat{U}_\lambda^e$-module $\hat{U}_\lambda$). Prenant $X = \mathrm{Hom}_k(F,A)$, $Y = \mathrm{Hom}_k(\hat{F},A)$, il est clair que le morphisme ci-dessus n'est autre que le morphisme de restriction.

Considérons maintenant une résolution injective minimale $0 \longrightarrow A \longrightarrow X$ du U_λ-bimodule A ; cela veut dire que $0 \longrightarrow A \longrightarrow X^0$ est une enveloppe injective de A , $0 \longrightarrow X^0/A \longrightarrow X^1$ une enveloppe injective de X^0/A, etc. D'après le lemme 5.2.1., chaque terme de la résolution est localement annulé à gauche et à droite par une puissance de I_λ . Mais alors, d'après le lemme 5.2.2., X est encore une résolution injective de A vu comme $\hat{U}_\lambda$-bimodule, d'où le lemme.

5.3. Démonstration du théorème.

Le lemme 5.2.3. nous conduit jusqu'à $H^*(U_\lambda,A)$. Mais on peut aussi considérer $\hat{U}_\lambda$ comme le complété de $R \otimes C$ en l'idéal $R \otimes \underline{m}$; reprenant le raisonnement ci-dessus, ce qui est loisible parce que $R \otimes C$ est encore un anneau nœthérien (comme produit tensoriel d'un anneau nœthérien avec une algèbre de Weyl), et que l'idéal $R \otimes \underline{m}$ est engendré par une suite centralisante (prop.4.5.1.), on obtient un isomorphisme $H^*(\hat{U}_\lambda,A) \simeq H^*(R \otimes C,A)$, conservant les cup-produits.

Dans une telle situation décomposée en produit tensoriel, il est très facile de construire une suite spectrale convergeant vers $H^*(R \otimes C,A)$, avec :

$$E_2^{pq} = H^q(C,H^p(R,A)) \ .$$

Il suffit de prendre comme résolution libre de $R \otimes C$ le produit tensoriel d'une résolution libre du R^e-module R et d'une résolution libre du C^e-module C , et de prendre la deuxième suite spectrale du double complexe qui en résulte pour le calcul de $H^*(R \otimes C,A)$. D'ailleurs, cette construction montre aussitôt que la suite spectrale en question est compatible avec les cup-produits.

D'après la prop.3.1., on a $H^p(R,A) = 0$ pour tout $p > 0$, et $H^0(R,A) = k$.

Donc la suite spectrale dégénère, et on a bien $H^n(R \otimes C, A) \simeq E_2^{on} = H^n(C,k)$ avec conservation du cup-produit, cqfd.

§ 6 CAS DES IDÉAUX DE POIDS MAXIMAL.

6.1. On garde les notations du n°5.1. en plus de celles de 1.1.1. On note $d' = d - \dim \underline{q}$. Identifiant les idéaux de U_λ aux idéaux de U contenant le noyau de l'application canonique $U \longrightarrow U_\lambda$, il est clair que l'on a la notion d'idéal rationnel de U_λ , et celle de poids d'un tel idéal (cf.introduction). Dans la correspondance entre idéaux rationnels et orbites coadjointes, les idéaux rationnels de U_λ correspondent aux orbites contenues dans le sous-espace affine $f + \underline{q}^\perp$ de $\underline{g}^*$. Rappelons que le poids d'un idéal rationnel est la demi-dimension de l'orbite correspondante.

L'objet de ce paragraphe est la démonstration du théorème suivant :

Théorème 6.1.1. *Si l'idéal I_λ est de poids maximal (dans U_λ), le commutant C coincide avec le centre de $\hat{U}_\lambda$; en particulier, C est indépendant du choix de R .*

Corollaire 6.1.2. *Si l'idéal I_λ est de poids maximal, l'algèbre $H^*(\underline{g}/\underline{q},U/I)$ est isomorphe à une algèbre extérieure sur un espace vectoriel de dimension d' .*

En particulier, $\dim H^n(\underline{g}/\underline{q},U/I) = \begin{cases} \binom{d'}{n} & \text{si } 0 \leq n \leq d' \\ 0 & \text{si } n > d' . \end{cases}$

Démonstration : Il résulte du lemme 1.2.2. (applicable à C en vertu de la prop. 4.5.1. (ii)) que lorsque C est commutatif, c'est une algèbre de séries formelles en d' indéterminées sur k(ce qui entraine que $\hat{U}$ est une algèbre de séries formelles sur une algèbre de Weyl, d'après le lemme 4.4.2.).
Alors le calcul de $H^*(C,k)$ est classique (on peut par exemple considérer C comme le complété de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie commutative en l'idéal d'augmentation, et appliquer le lemme 5.2.3.) et on conclut à l'aide du th.5.1.

Corollaire 6.1.3. *Si I_λ est de poids maximal, la conjecture (C) est vraie, avec conservation du cup-produit.*

Démonstration : En effet, $\underline{g}(f)/\underline{q}$ est elle aussi commutative dans cette situation. Pour le voir, soit $\underline{n}$ le noyau de la représentation π dans $\underline{g}$. Passant au quotient par $\underline{q} \cap \underline{n}$, on peut supposer que $\underline{q}$ est un idéal central de dimension ≤ 1 . Si $\underline{q} = 0$,

$\underline{g}(f)$ est le stabilisateur d'un élément régulier de $\underline{g}^*$, donc elle est commutative ([13]ch.1 prop.1.11.10). Sinon, soit $z \in \underline{q}$ tel que $\lambda(z) = 1$. Comme les orbites de dimension maximale forment un ouvert de $\underline{g}^*$, dont les éléments s'appellent les éléments réguliers de $\underline{g}^*$, il y a un f_1 régulier tel que $f_1(z) \neq 0$. Multipliant au besoin f_1 par un scalaire, on peut supposer que $f_1(z) = 1$. Donc l'hyperplan $f + \underline{q}^\perp$ contient des éléments réguliers de $\underline{g}^*$, ce qui prouve que I est de poids maximal dans U ; alors $\underline{g}(f)$ est commutative d'après ce qui précède, et $\underline{g}(f)/\underline{q}$ à plus forte raison.

6.2.Préliminaires.

Il est clair que si C est commutatif, il coincide avec le centre de $\hat{U}_\lambda$. Il suffira donc de montrer que si I_λ est de poids maximal, C est commutatif. Dans les notations de la démonstration du cor.6.1.3., on peut passer au quotient par $\underline{q} \cap \underline{n}$ et supposer que $\underline{q} \cap \underline{n} = 0$; dans ce cas on a vu que I_λ est de poids maximal dans U_λ si et seulement si I est de poids maximal dans U . On peut relever R en un relèvement $\overline{R}$ de A dans $\hat{U}$; si $\overline{C}$ est le commutant correspondant, on voit comme au lemme 4.5.2. que l'application $\overline{C} \longrightarrow C$ est surjective. Par conséquent C est commutatif si $\overline{C}$ est commutatif, et on peut supposer $\underline{q} = 0$, ce que je ferai désormais.

Le théorème se démontre par récurrence sur la dimension de $\underline{g}$. Il sera commode de dégager d'abord quelques propriétés du commutant en supposant le théorème démontré, que l'on utilisera ensuite au cours du pas de récurrence.

Dans toute la suite du n° , I est un idéal rationnel de poids maximal dans U et on suppose C commutative. Comme on l'a dit, C est alors un anneau de séries formelles en d indéterminées sur k, et d est égal à l'indice de $\underline{g}$ ([13],ch.1 n°1.11.6. ; c'est la définition même de l'indice) ; de plus, C ne dépend pas du choix du relèvement. On note F le corps de fractions de C . On choisit une suite centralisante régulière $(x_1,\dots,x_d)$ engendreant $\underline{m}$, de sorte que C s'identifie à $k[[x_1,\dots,x_d]]$ (lemme 1.2.2.), et F à $k((x_1,\dots,x_d))$.

Puisque le gradué $\underline{m}$-adique de C est intègre dans le cas présent, on peut parler de la valuation $\underline{m}$-adique sur C , qui n'est autre d'ailleurs que l'ordre en 0 des séries formelles, dans l'écriture ci-dessus ; elle se prolonge en une valuation sur F , qui devient un corps valué. Les dérivations continues de F/k (i.e. k-linéaires) forment un F-espace vectoriel à gauche de dimension d , de base $\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_d}$, noté $\Delta(F/k)$. Remarquons que toute dérivation de C/k est automatiquement continue pour la topologie $\underline{m}$-adique, donc définit un unique élément de $\Delta(F/k)$.

Lemme 6.2.1. On a $\dim.\mathrm{al}_k K = d$.

La démonstration est laissée au lecteur (par récurrence sur la dimension de $\underline{g}$ par exemple).

Lemme 6.2.2. Soit $\underline{p}$ un idéal premier minimal de Z , L le corps résiduel de Z en $\underline{p}$. Alors $\dim.\mathrm{al}_k L = d-1$.

Démonstration : C'est une propriété bien connue des algèbres de type fini sur k ([35]ch.VI §14, lemme) ; mais Z n'est pas toujours de type fini ([13]ch.4 § 9 n°4.9. 20).

Identifions Z à l'algèbre des éléments ad.$\underline{g}$-invariants de S , où S est l'algèbre symétrique de l'espace vectoriel $\underline{g}$([13] ch.4 § 8 prop.4.8.12.). On sait que Z est un anneau factoriel ([14] cor. au th.1) ; plus précisément, il ressort de la démonstration de ce corollaire que les facteurs premiers dans S de tout élément $a \in Z$ sont déjà dans Z . Tout idéal premier minimal $\underline{p}$ de Z est donc de la forme Zp , avec p extrémal dans Z , donc dans S d'après ce qu'on vient de dire.

Comme S est intègre, on a $p^n S \cap Z = p^n Z$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; en d'autres termes, la valuation p-adique sur Z est la restriction à Z de la valuation p-adique sur S . Soit E le corps de fractions de S , E' le corps résiduel de S en Sp . D'après [5] ch.VI,§10, n°3 , th.1 , on a $\dim.\mathrm{al}_k E - \dim.\mathrm{al}_k K \geq \dim\ \mathrm{al}_k E' - \dim.\mathrm{al}_k L$. Mais comme S est une k-algèbre de type fini, $\dim.\mathrm{al}_k E' = \dim.\mathrm{al}_k E - 1$; donc $\dim.\mathrm{al}_k K - \dim.\mathrm{al}_k L \leq 1$, et comme l'inégalité en sens contraire est triviale, le lemme est démontré.

Corollaire 6.2.3. Soit z un élément non nul de $\underline{z}$, $\underline{g}' = \underline{g}/kz$, Z' le centre de $U(\underline{g}')$, K' le corps de fractions de Z', et L le corps résiduel de Z en l'idéal premier minimal zZ. Si l'indice de $\underline{g}'$ est d-1 (c'est-à-dire si z est contenu dans un idéal rationnel de poids maximal de U), K' est une extension algébrique finie de L .

Démonstration : K' est de toutes façons une extension de type fini de k , donc de L . D'après le lemme, $\dim.\mathrm{al}_k L = d-1$; d'où le corollaire d'après le lemme 6.2.1.

Remarque 6.2.4. Comme le montre l'exemple de l'algèbre notée $\underline{g}_4$ dans [15], on peut avoir $L \neq K'$ dans la situation du corollaire. Cependant, d'après [14] th.2 , cela ne peut arriver que pour des z appartenant à un nombre fini de droites exceptionnelles dans $\underline{z}$.

Notons $\Delta(F/K)$ l'espace des dérivations continues de F , nulles sur K ; c'est un sous-F-espace vectoriel de $\Delta(F/k)$.

Lemme 6.2.5. On a $\Delta(F/K) = 0$.

Démonstration : Par récurrence sur la dimension de $\underline{g}$ (notations 1.5.).

a) $I \cap \underline{z} = 0$. Choisissons un relèvement $\tilde{R}$ de $\tilde{A}$ dans $(\tilde{U})^{\wedge}$. Comme φ passe en un isomorphisme de $\hat{U}$ sur $\varprojlim(\tilde{U}/\tilde{I}^{n+1}\otimes A_1)$, on en déduit un relèvement $R = \tilde{R}\otimes A_1$ de A dans $\hat{U}$. Soit $\tilde{C}$ le commutant de $\tilde{R}$ dans $(\tilde{U})^{\wedge}$; alors φ donne un isomorphisme de C sur $\tilde{C}$, de sorte que $\tilde{C}$ est encore commutatif ; par ailleurs, d'après le lemme 1.5., $\tilde{I}$ est encore de poids maximal. D'après l'hypothèse de récurrence, $\Delta(\tilde{F}/\tilde{K}) = 0$.

Mais il est clair que φ induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow[\varphi]{\sim} & \tilde{K} \\ \cap & & \cap \\ F & \xrightarrow[\varphi]{\sim} & \tilde{F} \end{array}$$

et que la flèche $F \longrightarrow \tilde{F}$ est un homéomorphisme. Donc $\Delta(F/K) = 0$.

b) $I \cap \underline{z} \neq 0$. On peut toujours choisir la suite $(x_1,\dots,x_d)$ telle que $x_d = z$. Soit alors $D \in \Delta(F/K)$, et écrivons :

$$D = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_d \frac{\partial}{\partial x_d} \quad \text{avec } a_j \in F \quad \text{pour } 1 \leq j \leq d .$$

En écrivant que $D(z) = 0$, on voit déjà que $a_d = 0$. Supposons que $D \neq 0$. Il existe alors un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $z^n D$ ait tous ses coefficients dans l'anneau local C_{Cz}, mais non tous dans zC_{Cz} . Soit R' l'image de R dans $\hat{U}'$, C' le commutant de R'.

D'après le lemme 4.5.2., la suite exacte $0 \longrightarrow \hat{U}z \longrightarrow \hat{U} \longrightarrow \hat{U}' \longrightarrow 0$ se restreint en une suite exacte $0 \longrightarrow Cz \longrightarrow C \longrightarrow C' \longrightarrow 0$. Cela entraine déjà que C' est commutative, et de plus que le corps résiduel de C en l'idéal premier Cz est F' .

En considérant $z^n D$ comme une dérivation de C_{Cz} respectant zC_{Cz}, on voit qu'elle induit par passage au quotient une dérivation :

$$D' = a'_1 \frac{\partial}{\partial x'_1} + \dots + a'_{d-1} \frac{\partial}{\partial x'_{d-1}}$$

de F' (où x'_j est l'image de x_j dans C'), avec des a'_j non tous nuls. Comme D est nulle sur K , D' est en tous cas nulle sur le corps résiduel L de Z en l'idéal premier zZ . Mais comme z est contenu dans un idéal rationnel de poids maximal, le cor.6.2.3. s'applique et K' est une extension algèbrique de L. Donc D' est encore nulle sur K' . Comme I' est encore de poids maximal dans U' , l'hypothèse de récurrence s'applique et on a $D' = 0$, ce qui est absurde.

Il faut donc que $D = 0$, et le lemme est démontré.

6.3. Démonstration du théorème . En supposant I de poids maximal dans U , on a à démontrer que C est commutatif. On procède par récurrence sur la dimension de $\underline{g}$ (notations 1.5.). Si dim $\underline{g} = 1$, U est commutatif et il n'y a rien à démontrer ; supposons donc dim $g > 1$.

a) $I \cap \underline{z} = 0$. D'après le lemme 1.5., $\check{I}$ est encore de poids maximal dans $\underline{\check{g}}$; et comme on l'a vu dans la démonstration du lemme 6.2.5., en prenant un relèvement R de la forme $\tilde{R}\otimes A_1$, φ donne un isomorphisme de C sur $\tilde{C}$. Pour un tel relèvement, C est donc commutatif, et comme on l'a dit c'est alors vrai pour tout relèvement.

b) $I \cap \underline{z} \neq 0$. Soit R' l'image de R dans $\hat{U}'$, C' le commutant correspondant ; comme I' est de poids maximal dans U' , C' est commutatif par hypothèse de récurrence.

Comme on l'a rappelé dans la démonstration du lemme 6.2.5. on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow Cz \longrightarrow C \longrightarrow C' \longrightarrow 0 .$$

Puisque l'intersection des idéaux Cz^n de C est réduite à 0 , pour montrer que C est commutatif il suffit de montrer que chaque C/Cz^n est commutatif ; on fait cela par récurrence sur n . Pour $n = 1$, c'est la commutativité de C' . Considérons le passage de n à $n + 1$.

Comme C est intègre (prop.4.5.1.), le gradué de C en l'idéal Cz s'identifie à $C'[\bar{z}]$, où $\bar{z}$ est l'image de z dans Cz/Cz^2 et $\bar{z}$ est algébriquement indépendant sur C' . Donc le C'-module Cz^n/Cz^{n+1} est libre de base $(\bar{z})^n$.

Pour tout $y \in C$, on définit $D_y : C \longrightarrow C'$ par la formule :

$$\operatorname{ad} y(x) = D_y(x)\bar{z}^n \pmod{Cz^{n+1}} .$$

Cela a un sens d'après ce que l'on vient de dire et la commutativité de C/Cz^n .

Toujours d'après la commutativité de C/Cz^n , D_y passe au quotient par Cz en une dérivation de C'/k , notée de la même manière, puis se prolonge à F' en un élément de $\Delta(F'/k)$. Il est clair que D_y est nulle sur Z/zZ, donc sur son corps de fractions L , donc sur K' qui est une extension algébrique de L d'après le cor.6.2.3.

En d'autres termes, $D_y \in \Delta(F'/K')$; mais alors d'après le lemme 6.2.5. $D_y = 0$, et le théorème est démontré.

§ 7 . RELATION AVEC $H^*(\underline{g}/\underline{q}$, S/J) ; CAS DES ORBITES PLATES .

7.1. On note S l'algèbre symétrique de l'espace vectoriel $\underline{g}$, J l'idéal de S défini par Ω ; on fait agir $\underline{g}$ sur S et sur S/J par l'action adjointe. On note G le groupe algébrique défini sur k obtenu en munissant $\underline{g}$ d'une structure de groupe via la formule de Campbell-Hausdorff. Alors G agit sur $\underline{g}$ et $\underline{g}^*$ et on peut encore considérer Ω comme une orbite de G dans $\underline{g}^*$. Soient P, Q, G(f) les sous-groupes de G obtenus en restreignant la formule de Campbell-Haussdorff à $\underline{p}$, $\underline{q}$, $\underline{g}(f)$ respectivement. Alors G(f) est le stabilisateur de f dans G , de sorte que la variété algébrique Ω s'identifie à G/G(f).

Comme S/J s'identifie à l'algèbre des fonctions régulières sur Ω , le $\underline{g}/\underline{q}$-module S/J n'est autre que $\mathrm{Ind}^{alg}_{(G(f)/Q)\uparrow(G/Q)}$ k , dans les notations du § 2 de la partie I (dont il est clair que la partie purement algébrique garde un sens pour un corps de base de caractéristique 0 quelconque). D'après le lemme de Shapiro pour l'induction algébrique (partie I, §2, n°s 2.2. et 2.3.) on a $H^*(\underline{g}/\underline{q}, S/J) \simeq H^*(\underline{g}(f)/\underline{q},k)$. On peut donc encore énoncer la conjecture (C) sous la forme suivante :

(C) "On a dim $H^n(\underline{g}/\underline{q},U/I)$ = dim $H^n(\underline{g}/\underline{q}$, S/J) pour tout $n \geq 0$ "

On sait que la symétrisation est un isomorphisme de $\underline{g}$-modules de S sur U (pour l'action adjointe sur U) ([13] ch.2 prop.2.10), mais qu'en général elle n'envoie pas J sur I ([13] ch.6 n°6.6.10 montre que c'est déjà faux pour l'algèbre $\underline{g}_4$ de [15]). Pis encore, il y a des cas où $\mathrm{Hom}_{\underline{g}}(S/J,U/I) = \mathrm{Hom}_{\underline{g}}(U/I,S/J) = 0$, pour certaines orbites de l'algèbre $\underline{g}_{5,5}$ par exemple (cf.[8]). En général la comparaison de U/I et S/J n'est donc pas facile ; ceci dit, on vient tout de même de démontrer le théorème suivant :

Théorème 7.1.1. Lorsque $U/I \simeq S/J$, la conjecture (C) est vraie.

Corollaire 7.1.2. Lorsque l'orbite Ω est plate (c'est-à-dire un sous-espace affine de $\underline{g}^*$) , ce qui est équivalent au fait que $\underline{g}(f)$ soit un idéal dans $\underline{g}$, la conjecture (C) est vraie.

Démonstration : En effet, soit $e_1,\dots,e_d$ une base de $\underline{g}(f)$. Alors I et J sont tous deux engendrés par les $e_j - f(e_j)$, considérés respectivement dans U et dans S . Par conséquent la symétrisation applique J dans I , et on a bien $U/I \simeq S/J$.

7.2. Tout n'est pas dit pour autant en ce qui concerne les orbites plates. En effet, l'isomorphisme ci-dessus ne nous dit rien sur les cup-produits. D'autre part, on verra à la partie III, cor.2.3.2. que l'assertion de la conjecture (C_2) revient à comparer l'algèbre C avec $U(\underline{g}(f))^\wedge$, complété de $U(\underline{g}(f))$ en l'idéal défini par le caractère if (dans le cas d'un corps de base quelconque, on peut par exemple remplacer π_∞ par $U \otimes_{\underline{h}} k_f$, où $\underline{h}$ est une polarisation en f , et if par f). Ce sont ces questions que je me propose d'examiner dans la suite du paragraphe.

On suppose donc dorénavant que Ω est plate. On a alors $\underline{g}(f) = \underline{p}$, et je garderai plutôt la notation $\underline{p}$. Soit λ le caractère de $\underline{p}$ défini par I (c'est-à-dire $\lambda = f_{|\underline{p}}$), et notons encore λ la restriction de λ à $\underline{q}$. Soit $\underline{n}$ le noyau de λ dans $\underline{p}$. On introduit les notations du n°5.1. On note P l'algèbre enveloppante de $\underline{p}$, P_λ l'image de P dans U_λ , $\underline{a}$ le noyau du caractère de P_λ défini par λ , $\hat{P}_\lambda$ le complété $\underline{a}$-adique de P_λ

Comme on l'a déjà dit, I est dans le cas présent engendré par les $\xi - \lambda(\xi)$, pour ξ parcourant $\underline{p}$ (pour le voir, on peut passer au quotient par $\underline{n}$, puis faire une récurrence évidente sur la dimension). Soit $\underline{p} = \underline{p}_0 \supset \underline{p}_1 \supset \ldots \supset \underline{p}_{d'} = \underline{q} \supset \ldots \supset \underline{p}_d = 0$ une suite de Jordan-Hölder du $\underline{g}$-module $\underline{p}$, passant par $\underline{q}$. Soit $e_1, \ldots, e_{2r}$, $e_{2r+1}, \ldots, e_{2r+d}$ une base de $\underline{g}$, où les e_{2r+j} pour $1 \leq j \leq d$ forment une base de $\underline{p}$ adaptée à la suite de Jordan-Hölder . Soit $x_j = e_{2r+j} - \lambda(e_{2r+j})$. Pour $d'+1 \leq j \leq d$, les x_j forment un système de générateurs pour le noyau de l'application naturelle de U vers U_λ . Notons de la même façon les images des e_i et des x_j dans U_λ ; alors les monômes $e^\alpha x^\beta = e_1^{\alpha_1} \ldots e_r^{\alpha_r} x_1^{\beta_1} \ldots x_{d'}^{\beta_{d'}}$ forment une base de l'espace vectoriel U_λ (cf. la démonstration du lemme 1.4.1.). Dans cette écriture P_λ est la sous-algèbre de U_λ engendrée par $x_1, \ldots, x_{d'}$, et $\underline{a}$ l'idéal de P_λ engendré par $x_1, \ldots, x_{d'}$.

<u>Lemme 7.2.1.</u> <u>On a</u> $P_\lambda \cap I_\lambda^n = \underline{a}^n$ <u>pour tout</u> $n \in \mathbb{N}$.

<u>Démonstration</u> : L'inclusion $\underline{a}^n \subset P_\lambda \cap I_\lambda^n$ est évidente, il s'agit de montrer l'inclusion dans l'autre sens.

On peut toujours supposer que la suite de Jordan-Hölder de $\underline{p}/\underline{q}$ avec laquelle on travaille est plus fine que la suite centrale descendante $\underline{p}/\underline{q} = C^1(\underline{p}/\underline{q}) \supset C^2(\underline{p}/\underline{q}) \supset \ldots \supset C^s(\underline{p}/\underline{q}) = 0$. Disons alors que x_j est de poids k s'il est dans C^k mais non dans C^{k+1} , et définissons de manière évidente le poids d'un monôme x^β (noté $|\beta|$).D'après [34]prop.1 les monômes de poids n forment une base de $\underline{a}^n$ modulo $\underline{a}^{n+1}$.D'autre part, on a $I_\lambda = U_\lambda \underline{a}$, et comme $\underline{a}$ est stable sous l'action adjointe de $\underline{g}$, $I_\lambda^n = U_\lambda \underline{a}^n$. D'après ce qui précède, les monômes $e^\alpha x^\beta$ avec α quelconque et β de poids $\geq n$ forment donc une base du k-espace vectoriel I_λ^n . Par raison d'indépendance linéaire, une combinaison linéaire $\sum_{\alpha, |\beta|\geq n} u_{\alpha\beta} e^\alpha x^\beta$ ne peut être de la forme $\sum_\beta v_\beta x^\beta$ que si et seulement si $u_{\alpha\beta} = 0$ pour $\alpha \neq 0$; d'où le lemme.

D'après le lemme, l'application naturelle $\mathrm{gr}\, P_\lambda \longrightarrow \mathrm{gr}\, U_\lambda$ est injective ; d'ailleurs il ressort de la démonstration que les images des monômes x^β de poids n dans I^n/I^{n+1} forment une base du A-module à gauche I^n/I^{n+1} ; comme ils forment une suite centralisante (cf.n°1.2.) ils sont aussi une base de I^n/I^{n+1} comme A-module à droite. En d'autres termes, l'application $u\otimes v \longrightarrow uv$ (resp.$v\otimes u \longrightarrow vu$) est un isomorphisme d'espaces vectoriels (mais non d'algèbres, en général !) de $A\otimes \mathrm{gr}\, P_\lambda$ (resp. $\mathrm{gr}\, P_\lambda \otimes A$) sur $\mathrm{gr}\, U_\lambda$.

<u>Proposition 7.2.2.</u> <u>L'anneau</u> $\mathrm{gr}\, U_\lambda$ <u>est intègre et noethérien</u> .

<u>Démonstration</u> : Tout d'abord, il est clair que $\mathrm{gr}\, P_\lambda$ est intègre et nœthérien . En effet, l'application qui à $\xi \in \underline{p}$ associe $\xi-\lambda(\xi)$ se prolonge en un isomorphisme de P qui applique l'idéal d'augmentation sur le noyau de λ ; on se ramène ainsi au cas où $\lambda = 0$, et d'après [34] prop.1.1. le gradué de $U(\underline{p}/\underline{q})$ en l'idéal d'augmentation s'identifie à l'algèbre enveloppante de $\mathrm{gr}(\underline{p}/\underline{q})$, l'algèbre de Lie graduée associée à la filtration de $\underline{p}/\underline{q}$ par la suite centrale descendante.

Soit $\underline{g}_o = \underline{g} \supset \underline{g}_1 \supset \dots \supset \underline{g}_{2r} = \underline{p} \supset \dots \supset \underline{g}_{2r+d} = 0$ une suite de Jordan-Hölder du $\underline{g}$-module $\underline{g}$ prolongeant celle précédemment choisie pour $\underline{p}$, et choisissons $e_1,\dots,e_{2r}$ adaptés à cette suite. Pour $0 \leq j \leq 2r$, soit B_j la sous-algèbre de $\mathrm{gr}\, U_\lambda$ engendrée par $\mathrm{gr}\, P_\lambda$ et $e_{j+1},\dots,e_{2r}$ (avec $B_{2r} = \mathrm{gr}\, P_\lambda$). Il est clair que l'action adjointe de e_j définit une dérivation D_j de B_j , et à cause de la décomposition $\mathrm{gr}\, U_\lambda = P_\lambda\otimes A$, on voit aussitôt que B_{j-1} s'identifie à $B_{j,D_j}[e_j]$ dans les notations de [13] ch.4 n°4.4.4., c'est-à-dire une algèbre de polynômes sur B_j avec la relation $[e_j,b] = D_j(b)$ pour tout $b \in B_j$. Par récurrence sur j à partir de $j = 2r$, B_j est intègre et noethérien, et comme $B_o = \mathrm{gr}\, U_\lambda$, la proposition est démontrée.

7.3. Voici une autre façon de retrouver le cor.7.1.2. On veut calculer $H^*(\underline{g}/\underline{q}, A)$. Pour cela,on considère la suite spectrale de Hochschild-Serre par rapport à l'idéal

$\underline{p}/\underline{q}$. Elle donne :

$$E_2^{pq} = H^p(\underline{g}/\underline{p}\ ,\ H^q(\underline{p}/\underline{q}\ ,k) \otimes A) \Longrightarrow H^*(\underline{g}/\underline{q}\ ,\ A)\ .$$

D'après le théorème 2.1.1. (i), avec $\underline{q} = \underline{p}$, ce qui donne ici d' = 0 à cause de la platitude de l'orbite, on a

$$H^j(\underline{g}/\underline{p}\ ,\ A) = \begin{cases} k & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{si } j > 0\ . \end{cases}$$

Comme $H^q(\underline{p}/\underline{q}\ ,\ k)$ est un $\underline{g}/\underline{p}$ module nilpotent de dimension finie, un argument de longue suite exacte montre alors que :

$$E_2^{pq} = 0 \quad \text{si } p > 0\ ;\ \dim E_2^{on} = \dim H^n(\underline{p}/\underline{q},k)\ .$$

Donc la suite spectrale dégénère, et on a l'égalité voulue au niveau des dimensions (ce raisonnement se trouve déjà dans [32]).

Mais cette démonstration nous dit d'avantage : elle nous permet aussi de calculer le cup-produit. En effet, celui-ci n'est autre que le produit de l'algèbre $H^o(\underline{g}/\underline{p}\ ,\ H^*(\underline{p}/\underline{q}\ ,\ k)\otimes A)$, considérée comme sous-algèbre (de dimension finie) du produit tensoriel $H^*(\underline{p}/\underline{q}\ ,k)\otimes A$.

De même, on a remarqué au n° 7.2. la décomposition gr U_λ=gr $P_\lambda \otimes A$; considérant gr P_λ comme $\underline{g}/\underline{p}$-module via l'action adjointe, ceci est une décomposition de $\underline{g}/\underline{p}$-modules, d'où :

$$\mathrm{gr}\ C = H^o(\underline{g}/\underline{p}\ ,\ \mathrm{gr}\ P_\lambda \otimes A)$$

C'est encore une apparition du même foncteur $V \longrightarrow H^o(g/\underline{p}\ ,\ V\otimes A)$ de la catégorie des $\underline{g}/\underline{p}$-modules nilpotents de dimension finie vers la catégorie des k-espaces vectoriels.

Cette fois, il est un peu plus difficile de reconstruire le produit sur gr C , vu que gr U_λ n'est pas produit direct des algèbres gr P_λ et A , mais seulement une espèce de "produit semidirect" . Je ne le fais pas ici.

Rappelons qu'on appelle série de Hilbert d'une algèbre graduée $B = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} B_n$ de type fini sur k la série formelle à coefficients entiers positifs $\sum_{n=o}^{\infty} (\dim B_n)t^n$. Pour l'algèbre gr P_λ on a

$\dim \underline{a}^n/\underline{a}^{n+1} = \#\ \{(\beta_1,\ldots,\beta_{d'})\,|\,k_1\beta_1+\ldots+k_{d'}\beta_{d'} = n\ \}$ où k_j est le poids de x_j (dans les notations de la démonstration du lemme 7.2.1.).

Proposition 7.3.1. Les algèbres gr C et gr P_λ ont même série de Hilbert.

Démonstration : Le foncteur $V \longrightarrow H^o(\underline{g}/\underline{p}\ , V \otimes A)$ conserve les dimensions.

Remarque 7.3.2. Les méthodes ci-dessus donnent un procédé d'application purement mécanique permettant de "déformer" $H^*(\underline{p}/\underline{q}\ ,k)$ en $H^*(\underline{g}/\underline{q}, A)$ et gr P_λ en gr C ; on en verra un exemple (très simple) au n°8.3. Les effets de cette déformation peuvent êtres assez violents ; on peut par exemple passer d'un gr P_λ commutatif à un gr C non-commutatif.

Il est d'autant plus remarquable que C soit isomorphe à $\hat{P}_\lambda$ lorsque l'orbite plate Ω est de dimension maximale (démonstration du cor.6.1.2.). Cela impose des restrictions très sévères à l'action de $\underline{g}/\underline{p}$ sur $\underline{p}$ pour une telle orbite.

Il résulte de la prop.7.2.2. que l'anneau gr C est intègre et nœthérien pour une orbite plate ; c'est vrai aussi pour une orbite de dimension maximale, mais je ne sais pas si cela reste vrai pour une orbite quelconque.

La description de C lui-même est un peu plus compliquée, à cause de l'absence d'une action naturelle de $\underline{g}/\underline{p}$ sur $\hat{U}_\lambda$.

§ 8 EXEMPLES.

8.1. Algèbres de Heisenberg.

Soit $\underline{g}$ l'algèbre de Lie de dimension 2n + 1, de base $x_1,\dots,x_n$, $y_1,\dots,y_n,z$, dont les crochets non nuls des éléments de base pris dans cet ordre sont $[x_j,y_j] = z$ pour $j = 1,\dots,n$.

Les orbites coadjointes sont les hyperplans $f(z) = \lambda$ pour $\lambda \neq 0$ dans k , et les points de l'hyperplan $f(z) = 0$.

Il est clair que pour ces algèbres les conjectures (C), (C_1), (C_2) sont vraies : pour les orbites de domension 0 c'est trivial ; les autres sont de dimension maximale, et on leur applique le th.6.1.1. Bien entendu, dans un cas aussi simple, on peut en fait tout faire à la main. Si on prend par exemple l'orbite d'équation $f(z) = 1$, on constate que A se relève déjà dans $U_z \subset \hat{U}$; en effet si p_j (resp.q_j) est l'image de x_j (resp.y_j) dans A , ils forment un système de générateurs canoniques et on obtient un relèvement par les formules $p_j \longrightarrow x_j$, $q_j \longrightarrow y_j\ z^{-1}$ (si on se place dans $\hat{U}$, on exprimera plutôt z^{-1} en série entière par rapport à $(z-1) \in I$) . On en déduit que l'orbite en question est régulière au sens de [17] n°6.1. (cf.n° 8.2. ci-dessous).

On a $\underline{g}(f) = \underline{p} = \underline{z}$. Si on prend $\underline{q} = \underline{z}$, $U_\lambda = A$ et il n'y a plus rien à dire. Si on prend $\underline{q} = 0$, C est l'algèbre des séries formelles en (z-1), puisque z-1 est un élément central engendreant I . On a dim $H^0(\underline{g},A) = \dim H^1(\underline{g},A) = 1$, les H^j étant nuls pour $j > 1$.
On voit d'ailleurs facilement par récurrence sur la dimension que si $\underline{g}$ a des orbites hyperplanes de dimension > 0 , et si z est une base de $\underline{z}$ (qui est de dimension 1 dans ce cas), U_z est une algèbre de Weyl sur Z_z ; il en résulte que tout se passe pour les orbites hyperplanes comme dans le cas des algèbres de Heisenberg.

8.2. Orbites régulières.

Suivant [17] n° 6.1. on dira qu'un idéal premier $\underline{r}$ de Z est régulier,si l'algèbre $U_{\underline{r}} = U \otimes_Z Z_{\underline{r}}$ est une algèbre de Weyl sur $Z_{\underline{r}}$. On voit facilement que les idéaux réguliers forment un ouvert de Zariski dans Spec Z , non-vide puisque 0 est régulier ([13] ch.4 n°4.7.17. avec P = 0). Si $\underline{r}$ est un idéal premier régulier, il existe un unique idéal premier P de U tel que $\underline{r} = P \cap Z$;
on dira encore qu'un tel P est régulier. Il est clair que tout idéal premier régulier de U a même poids que 0 , c'est-à-dire est de poids maximal.

Il n'est pas vrai que tous les idéaux rationnels de poids maximal soient réguliers (cf.[29] prop.6.5.). C'est bien dommage, car pour les idéaux réguliers, on peut déjà relever A dans $U_{\underline{r}}$ avec $\underline{r} = I \cap Z$, idéal maximal de Z , et alors le commutant est $Z_{\underline{r}}$, dont la commutativité est évidente. Dans ce cas, C n'est autre que le complété $\underline{r}$-adique de Z , I est engendré par des éléments centraux, et toute la situation se simplifie notablement.

8.3. Cas de l'algèbre $\underline{g}_{5,3}$.

Il s'agit de l'algèbre de Lie de dimension 5 de base $e_1,\dots,e_5$ dont la table de multiplication est la suivante

$$[e_1,e_2] = e_4 \qquad [e_1,e_4] = e_5 \qquad [e_2,e_3] = e_5 \ .$$

(on donne le crochet $[e_i,e_j]$ seulement pour $i < j$ et seulement s'il est $\neq 0$) ; cf. [15] .

Les suites centrales descendantes et ascendantes de $\underline{g}$ sont :

$$C^2\underline{g} = ke_4 + ke_5 ,\ C^3\underline{g} = ke_5 \ .$$

$$\underline{z}(\underline{g}) = ke_5 \ , \qquad \underline{z}_2(\underline{g}) = ke_3 + ke_4 + ke_5 \ .$$

Les orbites coadjointes de $\underline{g}$ sont toutes plates. Soit $f \in \underline{g}^*$; si $f(e_4) = f(e_5) = 0$,

f est un caractère. Si $f(e_5) = 0$, $f(e_4) \neq 0$ l'orbite de f est plate de dimension 2 ; si $f(e_5) \neq 0$, l'orbite de f est un hyperplan.

On s'intéresse aux orbites de dimension 2 . L'algèbre quotient $\underline{g}/ke_5$ est le produit direct d'une algèbre commutative ke_3 et d'une algèbre de Heisenberg $ke_1 + ke_2 + ke_4$ (on identifie les e_j à leur image dans le quotient). Par conséquent les orbites en question ont pour équation $f(e_3) = \text{cte}$, $f(e_4) = \text{cte.} \neq 0$; $\underline{g}(f)$ est toujours $ke_3 + ke_4 + ke_5$; c'est un idéal commutatif de dimension 3 de $\underline{g}$.

Prenons par exemple $f = e_4^*$, et déterminons l'algèbre $H^*(\underline{g},U/I)$ et le commutant C par les méthodes du § 7 (on prend $\underline{q} = 0$, le cas $\underline{q} \neq 0$ étant trivial). L'algèbre $H^*(\underline{g}(f),k)$ est une algèbre extérieure engendrée par les générateurs e_3^* , e_4^* , e_5^* , et l'algèbre P est une algèbre de polynômes ; on prend ici la suite centralisante $x_1 = e_3$, $x_2 = e_4 -1$, $x_3 = e_5$ pour engendrer I , et on a donc $P = k[e_3,e_4-1,e_5]$.

Soit p (resp.q) l'image de e_1 (resp.e_2) dans A ; on obtient des générateurs canoniques de l'algèbre de Weyl $A = A_1(k)$.

L'action de $\underline{g}/\underline{g}(f)$ sur $\underline{g}(f)$ et $\underline{g}(f)^*$ est donnée par :

$$e_1(e_4) = e_5 \qquad\qquad e_2(e_3) = e_5$$

$$e_1(e_5^*) = - e_4^* \qquad\qquad e_2(e_5^*) = - e_3^*$$

l'action étant nulle sur les autres éléments de base.

On en déduit une base pour les invariants de $H^1(\underline{g}(f),k)\otimes A$:

$$e_3^*\otimes 1 \ , \ e_4^*\otimes 1 \ , \ e_5^*\otimes 1 - e_3^*\otimes p + e_4^*\otimes q$$

(remarquer que si ω est un élément de $H^n(\underline{g}(f),k)$ on obtient un invariant de $H^n(\underline{g}(f),k)\otimes A$ par la "formule de Taylor" :

$$\sum_{\alpha,\beta} (-1)^\beta \ (e_1^\beta \ e_2^\alpha) \ \omega \otimes \frac{p^\alpha}{\alpha!} \ \frac{q^\beta}{\beta!} \quad)$$

De même, on a les bases d'invariants :

$$e_3^*\wedge e_4^*\otimes 1 \ , \ e_3^*\wedge e_5^* \otimes 1 + e_3^*\wedge e_4^*\otimes q \ , \ e_4^*\wedge e_5^* \otimes 1 + e_3^*\wedge e_4^* \otimes p$$

pour $H^2(\underline{g}(f),k) \otimes A$, et

$$e_3^* \wedge e_4^* \wedge e_5^* \quad \text{pour } H^3(\underline{g}(f),k) \otimes A .$$

Si α_1 , α_2 , α_3 est la base de H^1 , les cup-produits de ces éléments sont donnés par :

$$\alpha_1 \cup \alpha_2 = - \alpha_2 \cup \alpha_1 = e_3^* \wedge e_4^* \otimes 1$$

$$\alpha_1 \cup \alpha_3 = - \alpha_3 \cup \alpha_1 = e_3^* \wedge e_5^* \otimes 1 + e_3^* \wedge e_4^* \otimes q$$

$$\alpha_2 \cup \alpha_3 = - \alpha_3 \cup \alpha_2 = e_4^* \wedge e_5^* \otimes 1 + e_3^* \wedge e_4^* \otimes p$$

$$\alpha_1 \cup \alpha_1 = \alpha_2 \cup \alpha_2 = 0 \ ; \quad \alpha_3 \cup \alpha_3 = - e_3^* \wedge e_4^* \neq 0 .$$

En particulier, la non nullité de $\alpha_3 \cup \alpha_3$ prouve que $H^*(\underline{g},A)$ n'est pas une algèbre extérieure ; cela entraine que l'algèbre C n'est pas commutative, donc non-isomorphe à l'algèbre $\hat{P}$, et comme on le verra plus en détail dans la partie III, on déduit de cela que la conjecture (C_2) est fausse pour ces orbites. Il n'est pas difficile de donner d'autres exemples analogues.

Passons à l'étude de C . On a une base d'invariants de $\underline{a}/\underline{a}^2 \otimes A$ en prenant :

$$t_1 = \bar{x}_1 \otimes 1 + \bar{x}_3 \otimes p \qquad t_2 = \bar{x}_2 \otimes 1 - \bar{x}_3 \otimes q \qquad t_3 = \bar{x}_3 \otimes 1$$

où $\bar{x}_j$ est l'image de x_j dans $\underline{a}/\underline{a}^2$ (notations 7.2.)

Donc $\mathrm{gr}\, C = k[t_1,t_2,t_3]$ avec la relation $[t_1,t_2] = t_3^2$ (pour voir que t_1, t_2, t_3 pris dans cet ordre sont algébriquement indépendants dans $\mathrm{gr}\, C$, on peut par exemple appliquer la prop.7.3.1.). On retrouve bien le fait que $\mathrm{gr}\, C$ (donc a fortiori C) n'est pas commutatif.

On obtient un relèvement de A dans $\hat{U}$ par les formules :

$$p \longrightarrow e_1 e_4^{-1} \qquad q \longrightarrow e_2$$

(où l'on note e_4^{-1} l'élément $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (e_4-1)^k$ de $\hat{U}$) .

On identifie dorénavant p et q à leurs images dans $\hat{U}$.
On note D_p (resp.D_q) la dérivation ad p (resp. ad q) de $\hat{U}$. La procédure pour construire le commutant est maintenant la même que dans le gradué. On a :

$$D_p(e_3) = 0 . \qquad D_q(e_3) = e_5$$

$$D_p(e_4-1) = e_4^{-1}e_5 \qquad D_q(e_4-1) = 0 .$$

$$D_p^j(e_4-1) = (-1)^{j-1} \; 1.3.\dots.(2j-3)e_4^{-2j+1} \; e_5^j \text{ pour } j \geq 2 .$$

D'où les éléments de C :

$$x_1 = e_3 + p\, e_5$$

$$x_2 = e_4 -1 -q\, e_4^{-1} \; e_5 - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{q^j}{j!} \; 1.3\dots(2j-3) \; e_4^{-2j+1} \; e_5^j$$

$$x_3 = e_5$$

qui forment une suite centralisante régulière engendrant $\underline{m}$.

Avec une convention de notation évidente, on peut encore écrire :

$$x_2 = - 1 + e_4(1-2q \; e_4^{-2} \; e_5)^{\frac{1}{2}}$$

On trouve la relation : $[x_1,x_2] = e_4^{-1} \; e_5^2 \; (1-2qe_4^{-2} \; e_5)^{-\frac{1}{2}} = (1+x_2)^{-1} \; x_3^2$ ce qui donne une description complète de l'algèbre C .

PARTIE III

DESCRIPTION DE CATÉGORIE $\mathrm{Ext}(E_\infty)$

§ 0. CONVENTIONS

0.1. G-modules.

Soit G un groupe topologique séparé. Un G-module E est un espace localement convexe séparé (en abrégé ELCS) sur $\mathbb{C}$, muni d'une action de G telle que l'application $(g,x) \longrightarrow gx$ soit continue de $G \times E$ dans E. Si E et E' sont deux G-modules, on note $\mathrm{Hom}(E,E')$ (resp. $\mathrm{Hom}_G(E,E')$) l'espace des applications linéaires continues de E vers E' (resp. celles qui commutent à l'action de G), muni de la topologie de la convergence compacte. Tout sous-espace vectoriel d'un ELCS sera muni de la topologie induite, et tout quotient de la topologie quotient (sauf mention du contraire).

On note Mod_G la catégorie des G-modules, où les morphismes sont donnés par les espaces $\mathrm{Hom}_G(E,E')$; c'est manifestement une catégorie additive. Soit u : $E \longrightarrow E'$ un morphisme ; il est clair que $\mathrm{Ker}u$ est un noyau pour u dans la catégorie Mod_G, et on vérifie sans mal que $E'/\overline{\mathrm{Im}u}$ (quotient de E' par l'adhérence du sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}u$) est un conoyau pour u(cf. par exemple [31] ch.8). Ainsi Mod_G est une catégorie additive avec noyaux et conoyaux, donc avec images et coimages ; comme l'image de u dans la catégorie Mod_G est l'adhérence $\overline{\mathrm{Im}u}$ de son image "algébrique" (i.e. dans la catégorie des espaces vectoriels sans topologie) on gardera la notation $\overline{\mathrm{Im}u}$. Bien entendu Mod_G n'est pas une catégorie abélienne en général.

0.2. Suites de composition fortes.

On dit qu'une suite exacte de G-modules $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ est forte, si la suite exacte d'ELCS sous-jacente est scindée. Alors E s'identifie comme ELCS à la somme directe $E' \oplus E''$. On exprimera cette condition en disant que E' est topologiquement supplémentable dans E.

De même, on dira que $E = E_n \supset E_{n-1} \supset \dots \supset E_1 \supset E_o = 0$ est une suite de composition forte du G-module E si chaque E_{j-1} est un sous-module de E_j, fermé et topologiquement supplémentable dans E_j. En particulier, E s'identifie comme ELCS à la somme directe $\bigoplus_{j=1}^{n} E_j/E_{j-1}$.

0.3. Equivalences de catégories (cf.[31] ch. 4 § 4) .

Sauf mention du contraire, un foncteur $T : C \to C'$ entre deux catégories additives C et C' sera toujours supposé additif. On dit que T est une équivalence de catégories s'il existe un foncteur $T' : C' \to C$ tel que $T'T \simeq 1_C$, $T'T \simeq 1_{C'}$ où 1_C (resp. $1_{C'}$) est le foncteur identité de C (resp. C').

Disons que T est fidèle (resp. pleinement fidèle) si pour tout couple (X,X') d'objets de C l'application $\mathrm{Hom}_C(X,X') \to \mathrm{Hom}_{C'}(TX,TX')$ donnée par le foncteur T est injective (resp. bijective). Disons que T est essentiellement surjectif si tout objet Y de C' est isomorphe à un objet de la forme TX avec X objet de C . On a alors la proposition suivante :

Proposition 0.3. ([31]ch.4 §4 th.1) Un foncteur $T : C \to C'$ est une équivalence de catégories si et seulement si il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

§ 1 LES CATÉGORIES $\mathrm{Ext}(\mathcal{E})$.

1.1. Soit G un groupe topologique séparé, et $\mathcal{E}$ un ensemble de G-modules. On suppose vérifiée la condition suivante :

(S) Soient E,E' dans $\mathcal{E}$. Alors $\mathrm{Hom}_G(E,E') = 0$ si $E \neq E'$, et tout élément non nul de $\mathrm{Hom}_G(E,E)$ est inversible.
(Cette condition entraîne en particulier que les éléments de $\mathcal{E}$ sont indécomposables et deux à deux non isomorphes).

Par analogie avec [25] on note $\mathrm{Ext}(\mathcal{E})$ la sous-catégorie pleine de Mod_G dont les objets sont les G-modules qui admettent une suite de composition forte :

$$V = V_n \supset V_{n-1} \supset \dots \supset V_1 \supset V_o = 0$$

dont chaque sous-quotient V_j/V_{j-1} appartient à $\mathcal{E}$, à isomorphisme près.

On dira qu'une telle suite est une suite de Jordan-Hölder de V (relativement à $\mathcal{E}$). Cette appellation est justifiée par le corollaire au lemme suivant :

Lemme 1.1.1. Soient V un objet de $\mathrm{Ext}(\mathcal{E})$, $E \in \mathcal{E}$ et $u \in \mathrm{Hom}_G(E,V)$. Alors $u(E)$ est fermé et topologiquement supplémentable dans V , et si $u \neq 0$, V admet une suite de Jordan-Hölder commençant par $u(E)$ (i.e. telle que $V_1 = u(E)$).

Démonstration : On peut supposer $u \neq 0$. Partons d'une suite de Jordan-Hölder $V = V_n \supset V_{n-1} \supset \dots \supset V_1 \supset V_o = 0$ de V . Soit j le plus petit indice tel que

$u(E) \subset V_j$, et p la projection de V_j sur V_j/V_{j-1} . Alors $pu \in \mathrm{Hom}_G(E,V_j/V_{j-1})$ et comme il est non nul il est inversible. Soit $s = u(pu)^{-1}$; c'est une scission pour p, de sorte que V_j s'identifie à $V_{j-1} \oplus s(V_j/V_{j-1}) = V_{j-1} \oplus u(E)$, topologiquement et comme G-module. En particulier $u(E) = \mathrm{Ker}(1-sp)$ est fermé et topologiquement supplémentable dans V_j , donc dans V ; et il est clair que

$$0 \subset u(E) \subset u(E) \oplus V_1 \subset \dots \subset u(E) \oplus V_{j-1} \subset V_{j+1} \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

est une suite de Jordan-Hölder de V commençant par u(E), d'où le lemme.

<u>Corollaire 1.1.2.</u> <u>Soit</u> V <u>un objet de</u> Ext($\mathcal{E}$). <u>Toutes les suites de Jordan-Hölder de</u> V <u>relativement à</u> $\mathcal{E}$ <u>ont même longueur</u>, <u>et mêmes sous-quotients</u> V_j/V_{j-1} , <u>à l'ordre près</u> .

<u>Démonstration</u> : Supposons le corollaire démontré pour tous les objets V admettant une suite de Jordan-Hölder de longueur < n , et démontrons-le lorsque V admet une suite de Jordan-Hölder de longueur n , soit $V = V_n \supset V_{n-1} \supset \dots \supset V_1 \supset V_o = 0$.

Soit $V = V'_m \supset V'_{m-1} \supset \dots \supset V'_1 \supset V'_o = 0$ une autre suite de Jordan-Hölder de V relativement à $\mathcal{E}$. Alors d'après la démonstration du lemme 1.1.1., il y a un indice $j \in \{1,\dots,n\}$ tel que $V'_1 = V_j/V_{j-1}$; et V admet une suite de Jordan-Hölder $V = V''_n \supset V''_{n-1} \supset \dots \supset V''_1 \supset V''_o = 0$, de longueur n et commençant par V'_1 . En outre on voit aussitôt que les sous-quotients V''_i/V''_{i-1} pour $i = 2,\dots,n$ ne sont autres que les V_k/V_{k-1} pour $k = 1,\dots,j-1, j+1,\dots,n$. Appliquant le corollaire à $V/V'_1 = V/V''_1$ on en déduit que $n-1 = m-1$, donc $n = m$, et que les sous-quotients V_k/V_{k-1} et V'_k/V'_{k-1} sont bien les mêmes à l'ordre près.

On appellera <u>longueur</u> de V (relativement à $\mathcal{E}$) la longueur d'une suite de Jordan-Hölder de V .

<u>Remarque 1.1.3.</u> Le G-module V peut très bien admettre d'autres suites de composition, éventuellement de longueur infinie (en particulier les éléments de $\mathcal{E}$ peuvent ne pas être irréductibles) ; mais les sous-quotients d'une telle suite ne pourraient pas tous appartenir à $\mathcal{E}$.

1.2. Démontrons maintenant le résultat suivant :

<u>Théorème 1.2.1.</u> <u>La catégorie</u> Ext($\mathcal{E}$) <u>est abélienne</u>.

1.2.2. Lemme 1.2.2. Soient V, V' deux objets de $\mathrm{Ext}(\mathcal{E})$, $u : V \to V'$ un morphisme. Alors V' admet une suite de Jordan-Hölder passant par $u(V)$ (i.e. dont l'un des V'_j est égal à $u(V)$). En particulier, $u(V)$ est fermé et topologiquement supplémentable dans V'.

Démonstration : On procède par récurrence sur la somme des longueurs de V et de V'. Si $V = 0$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, soit $V = V_n \supset V_{n-1} \supset \ldots \supset V_1 \supset V_o = 0$ une suite de Jordan-Hölder de V. Si $u(V_1) = 0$, u se factorise par V/V_1 qui est évidemment un objet de $\mathrm{Ext}(\mathcal{E})$, et on applique l'hypothèse de récurrence. Si $u(V_1) \neq 0$, d'après le lemme 1.1.1., V' admet une suite de Jordan-Hölder $V' = V'_m \supset V'_{m-1} \supset \ldots \supset V'_1 \supset V'_o = 0$ commençant par $u(V_1)$ (qui est donc fermé et topologiquement supplémentable dans V'). Soit $v : V \to V'/V'_1$ la composée de u avec la projection canonique. D'après l'hypothèse de récurrence, $V'' = V'/V'_1$ admet une suite de Jordan-Hölder $V'' = V''_{m-1} \supset \ldots \supset V''_1 \supset V''_o = 0$ passant par $v(V)$; l'image réciproque dans V' de cette suite de Jordan-Hölder répond à la question.

1.2.3. Passons à la démonstration du théorème. Il est clair que $\mathrm{Ext}(\mathcal{E})$ est une sous-catégorie additive de Mod_G (cela consiste à vérifier qu'elle est stable par somme directe). Pour voir que $\mathrm{Ext}(\mathcal{E})$ est une catégorie avec noyaux et conoyaux, il suffira de vérifier que si V et V' sont deux objets de $\mathrm{Ext}(\mathcal{E})$, et $u : V \to V'$ un morphisme, le noyau et le conoyau de u vu comme morphisme dans Mod_G, sont dans $\mathrm{Ext}(\mathcal{E})$; pour démontrer le théorème, il faudra enfin vérifier que le morphisme $\bar{u} : V/\mathrm{Ker}\, u \to \overline{\mathrm{Im}\, u}$ induit par u est un isomorphisme.

L'assertion sur le conoyau est une conséquence immédiate du lemme 1.2.2. Montrons que $\mathrm{Ker}\, u$ est dans $\mathrm{Ext}(\mathcal{E})$, toujours par récurrence sur la somme des longueurs de V et V'. Supposons $V \neq 0$, et soit $V = V_n \supset V_{n-1} \supset \ldots \supset V_1 \supset V_o = 0$ une suite de Jordan-Hölder de V. Si $u(V_1) = 0$, u se factorise par un morphisme u' : $V/V_1 \to V'$, et on a une suite exacte forte :

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow \mathrm{Ker}\, u \longrightarrow \mathrm{Ker}\, u' \longrightarrow 0 .$$

D'où le résultat par hypothèse de récurrence. Si $u(V_1) \neq 0$, on choisit comme dans le lemme 1.2.2. une suite de Jordan-Hölder $V' = V'_m \supset V'_{m-1} \supset \ldots \supset V'_1 \supset V'_o = 0$ de V' commençant par $u(V_1)$, et on note v la composée de u avec la projection canonique $V' \to V'/V'_1$. Par hypothèse de récurrence, $\mathrm{Ker}\, v = u^{-1}(V'_1)$ est dans $\mathrm{Ext}(\mathcal{E})$. Soit β l'isomorphisme inverse de l'isomorphisme $V_1 \to V'_1$ induit par u. Alors $\beta u : \mathrm{Ker}\, v \to V_1$ est une rétraction à l'injection canonique de V_1 dans $\mathrm{Ker}\, v$, de noyau $\mathrm{Ker}\, u$; en d'autres termes, le G-module $\mathrm{Ker}\, v$ s'identifie à la somme directe

$\mathrm{Ker}\, u \oplus V_1$, et notre assertion est démontrée. Donc $\mathrm{Ext}(\mathcal{E})$ est une catégorie additive avec noyaux et conoyaux.

Supposons que Ker u = Coker u = 0, et montrons que u est un isomorphisme. Cela entraine déjà que u est une bijection de l'espace vectoriel V sur l'espace vectoriel V' , à cause du lemme 1.2.2. ; plus précisément, si $V = V_n \supset V_{n-1} \supset \ldots \supset V_1 \supset V_o = 0$ est une suite de Jordan-Hölder de V , l'application du lemme à chaque V_j , avec $V' = u(V_{j+1})$, montre que $V' = u(V) \supset u(V_{n-1}) \supset \ldots \supset u(V_1) \supset u(V_o) = 0$ est une suite de Jordan-Hölder de V'. A cause des décompositions de V et V' en sommes directes topologiques $V = \bigoplus_{j=1}^{n} V_j/V_{j-1}$, $V' = \bigoplus_{j=1}^{n} u(V_j)/u(V_{j-1})$, il est clair que u est un homéomorphisme de V sur V' . Mais on vérifie immédiatement que l'inverse d'un G-morphisme topologiquement inversible est encore un G-morphisme, donc u est bien un isomorphisme.

1.2.4. <u>Remarque 1.2.4.</u> Il ressort de ce qui précède, notamment du lemme 1.2.2., que tous les morphismes de la catégorie $\mathrm{Ext}(\mathcal{E})$ sont forts au sens de [24]ch.III appendice D déf.D.1. ; si $u : V \longrightarrow V'$ est un tel morphisme, cela veut dire que Ker u est topologiquement supplémentable dans V , que Im u est fermé et topologiquement supplémentable dans V', et que $\bar{u} : V/\mathrm{Ker}\, u \longrightarrow \mathrm{Im}\, u$ est un isomorphisme. En particulier toute suite exacte $0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$ de G-modules dont les trois termes sont des objets de $\mathrm{Ext}(\mathcal{E})$ est automatiquement forte.

1.3. <u>Cas des groupes de Lie</u>.

1.3.1. Supposons maintenant que G soit un groupe de Lie avec un nombre fini de composantes connexes, d'algèbre de Lie $\underline{g}$, et que les éléments de $\mathcal{E}$ soient des G-modules C^∞ de Fréchet (i.e. dont l'ELCS sous-jacent est un espace de Fréchet). On va donner une description de la catégorie $\mathrm{Ext}(\mathcal{E})$ en termes d'algèbres de Lie .

Soit K un sous-groupe compact maximal de G . Notons $\mathrm{Mod}_{\underline{g},K}$ la catégorie des espaces de Fréchet munis d'une action de $\underline{g}$ par endomorphismes continus, et en outre d'une action C^∞ de K , compatible au sens usuel avec l'action de $\underline{g}$. Les morphismes de la catégorie sont les applications linéaires continues commutant aux actions de $\underline{g}$ et de K (si G est connexe, il suffit de le vérifier pour l'action de $\underline{g}$). Par abus de langage, on appellera $\underline{g}$-module un objet de $\mathrm{Mod}_{\underline{g},K}$ (l'appellation $(\underline{g},K)$-module risquant de prêter à confusion).

Disons qu'une suite exacte $0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$ de $\underline{g}$-modules est forte, si elle est scindée sous l'action de K ; en fait il suffit pour cela qu'elle soit scindée en tant que suite d'espaces de Fréchet ([24]ch.III § 2 prop.2.2.). On définit de manière analogue la notion de suite de composition forte d'un $\underline{g}$-module.

1.3.2. Notons provisoirement $\mathrm{Ext}(G,\mathcal{E})$ la catégorie définie à partir de $\mathcal{E}$ au n°1.1., et $\mathrm{Ext}(\underline{g},\mathcal{E})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}_{\underline{g},K}$ dont les objets sont les $\underline{g}$-modules V admettant une suite de composition forte $V = V_n \supset V_{n-1} \supset \ldots \supset V_1 \supset V_o = 0$ où chaque sous-quotient V_j/V_{j-1} est isomorphe à un élément de $\mathcal{E}$, considéré comme $\underline{g}$-module.

Il est clair que tout objet de $\mathrm{Ext}(G,\mathcal{E})$ définit un objet de $\mathrm{Ext}(\underline{g},\mathcal{E})$ par dérivation, et restriction à K , de l'action de G . Montrons que le foncteur ainsi obtenu est une équivalence de catégories (cf.n°0.3.). Il est clair que c'est un foncteur pleinement fidèle, puisque $\mathrm{Hom}_G(V,V') = \mathrm{Hom}_{\underline{g},K}(V,V')$ quels que soient les G-modules C^∞ de Fréchet V et V' (cf.[24] ch.III § 7 cor.7.6. par exemple, avec $n = 0$) ; reste à voir qu'il est essentiellement surjectif.

Soit V un objet de $\mathrm{Ext}(\underline{g},\mathcal{E})$; il s'agit de montrer que l'on peut munir V d'une action C^∞ de G qui redonne l'action de $\underline{g}$ par dérivation, et celle de K par restriction. Il est clair que l'on peut démontrer dans $\mathrm{Ext}(\underline{g},\mathcal{E})$ l'analogue du cor.1.1.2., ce qui permet de raisonner par récurrence sur la longueur de V . Le cas où V est de longueur 1 est immédiat, puisque par hypothèse tous les éléments de $\mathcal{E}$ sont des G-modules. Supposons V de longueur > 1 . Soit $V = V_n \supset V_{n-1} \supset \ldots \supset V_1 \supset V_o = 0$ une suite de Jordan-Hölder de V , et considérons la suite exacte forte :

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V \longrightarrow V/V_1 \longrightarrow 0 .$$

Par hypothèse de récurrence, V_1 et V/V_1 proviennent de $\mathrm{Ext}(G,\mathcal{E})$. Or la différentiation des cocycles donne une bijection entre les 1-cocycles C^∞ sur G , nuls sur K, à valeurs dans $\mathrm{Hom}(V/V_1,V_1)$, et les éléments de $Z^1(\underline{g},K,\mathrm{Hom}(V/V_1,V_1))$. ([24]ch.III §7 prop.7.4.). Vu la réalisation de V à l'aide d'un 1-cocycle relatif à valeurs dans $\mathrm{Hom}(V/V_1,V_1)$ qui résulte du choix d'une scission de la suite exacte (1), on en déduit que V provient aussi d'un G-module ; d'où l'équivalence de catégories entre $\mathrm{Ext}(G,\mathcal{E})$ et $\mathrm{Ext}(\underline{g},\mathcal{E})$.

§ 2 CAS DES GROUPES NILPOTENTS.

2.1. Replaçons-nous dans la situation de la partie I (cf.introduction). Dorénavant, G est un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, (E,π) une représentation unitaire irréductible de G . Soit $\underline{q}$ un idéal de $\underline{g}$ contenu dans le noyau projectif de π (cf. partie I n°1.1.) et Q_1 le noyau du caractère de Q de différentielle if (où Q désigne le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\underline{q}$) ; noter que si $f|_{\underline{q}} \neq 0$ Q_1 n'est pas connexe, et que Q_1 agit trivialement dans E . On considère la catégorie $\mathrm{Ext}(G/Q_1,\mathcal{E})$ obtenue en prenant pour $\mathcal{E}$ l'ensemble réduit au seul élément E_∞ (cf. n°1.1.), que l'on notera simplement $\mathrm{Ext}(G/Q_1, E_\infty)$.

En plus des notations de l'introduction générale, on introduit celles de la partie II, n°4.6. On note R un relèvement de A dans $\hat{U}_\lambda$, C le commutant de R dans $\hat{U}_\lambda$; d'après le lemme 4.4.2. de la partie II, on a une décomposition :

(2) $$\hat{U}_\lambda = R \hat{\otimes} C$$

On sait d'après des résultats généraux de Gabriel (cf. [16], [16']) que toute catégorie abélienne dont tous les objets sont de longueur finie est équivalente à une catégorie de modules de longueur finie (avec une condition topologique en général) sur un anneau topologique séparé complet convenable. Le théorème suivant précise cet anneau dans le cas de la catégorie $\mathrm{Ext}(G/Q_L, E_\infty)$. La démonstration fait l'objet du n°2.2.

Théorème 2.1.1. La catégorie $\mathrm{Ext}(G/Q_1, E_\infty)$ est équivalente à la catégorie des C-modules de longueur finie, via l'application $W \longrightarrow E_\infty \otimes W$ qui à tout C-module de longueur finie W associe le $\hat{U}_\lambda$-module $E_\infty \otimes W$ (sur lequel $\hat{U}_\lambda$ agit grâce à la décomposition (2)).

Dans cet énoncé, on a utilisé la description de la catégorie $\mathrm{Ext}(G/Q_1, E_\infty)$ en termes d'algèbres de Lie (cf. n°1.3.). On remarquera que Q/Q_1 est l'unique sous-groupe compact maximal de G/Q_1 ; donc $\underline{q}$ agit scalairement sur les objets de $\mathrm{Ext}(G/Q_1, E_\infty)$ par le caractère $if_{|\underline{q}}$ (qui est justement le λ servant à définir U_λ). Cela fait que l'on peut encore définir $\mathrm{Ext}(G/Q_1, E_\infty)$ comme la catégorie des espaces de Fréchet V munis d'une action de U_λ par endomorphismes continus, et admettant une suite de composition forte $V = V_n \supset V_{n-1} \supset \dots \supset V_1 \supset V_o = 0$ à sous-quotients V_j/V_{j-1} tous isomorphes à E_∞ ; comme chaque objet de $\mathrm{Ext}(G/Q_1, E_\infty)$ est annulé par une puissance de I_λ, on pourra de façon équivalente le considérer comme $\hat{U}_\lambda$-module.

Corollaire 2.1.2. Si l'orbite coadjointe associée à π est de dimension maximale (dans $\underline{g}/\underline{q} \cap \underline{n}$, où $\underline{n}$ est le noyau de π dans $\underline{g}$), la catégorie $\mathrm{Ext}(G/Q_1, E_\infty)$ est équivalente à la catégorie des $\underline{g}(f)/\underline{q}$-modules de longueur finie à sous-quotients simples triviaux, et $\underline{g}(f)/\underline{q}$ est commutative.

Démonstration : D'après la démonstration du cor. 6.1.2 de la partie II, l'algèbre C est dans ce cas isomorphe à une algèbre de séries formelles en d' indéterminées, où d' est la dimension de $\underline{g}(f)/\underline{q}$; et d'après [13] ch.1 prop.1.11.10. $\underline{g}(f)/\underline{q}$ est commutative dans ce cas.

Remarque 2.1.3. On ne gagne rien en remplaçant $\mathcal{E} = \{E_\infty\}$ par $\mathcal{E} = \{E_\infty ; E \in \hat{G}_\lambda\}$ où $\hat{G}_\lambda$ désigne l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de G où $\underline{q}$ agit par le caractère λ. En effet, d'après le th.3.1. de la partie I la catégorie $\mathrm{Ext}(G/Q_1,\mathcal{E})$ est somme directe $\bigoplus_{E \in \hat{G}_\lambda} \mathrm{Ext}(G/Q_1,E_\infty)$.

2.2. Démonstration du théorème.

Soit V un objet de $\mathrm{Ext}(G/Q_1,E_\infty)$. D'après la remarque 5.4.2. de la partie I on peut réaliser la représentation π dans un espace $L^2(\mathbb{R}^m)$ de telle sorte que E_∞ s'identifie à l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ et A à l'algèbre de tous les opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux, agissant sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ par son action naturelle. D'après la partie II, prop.3.1. on a $H^*(A,\mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty)) \simeq H^*(\underline{n}/\underline{z},\mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty))$, où $\underline{n}$ est l'algèbre de Heisenberg de dimension 2m+1, $\underline{z}$ son centre. Comme l'action de $\underline{n}$ sur E_∞ correspond à une orbite hyperplane, on a $H^n(\underline{n}/\underline{z},\mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty)) = 0$ pour $n > 0$ (partie II,th.2.1.1. (i) par exemple) ; en particulier, $H^1(A, \mathrm{Hom}(E_\infty,E_\infty)) = 0$.

Il en résulte que sous l'action de R, V s'écrit $E_\infty \otimes W$ où W est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et où R agit sur le premier facteur. Comme de plus $\mathrm{Hom}_A(E_\infty,E_\infty) = \mathbb{C}$, on a $\mathrm{Hom}_R(V,V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W,W)$, ce qui entraîne que dans l'écriture $E_\infty \otimes W$ l'algèbre C agit sur le deuxième facteur ; en d'autres termes, W est muni d'une structure de C-module de longueur finie. Cela montre que le foncteur $W \longrightarrow E_\infty \otimes W$ est essentiellement surjectif.

Par le même raisonnement, on voit que si $V = E_\infty \otimes W$ et $V' = E_\infty \otimes W'$, on a $\mathrm{Hom}_{\underline{g}}(V,V') = \mathrm{Hom}_C(W,W')$, ce qui exprime que le foncteur $W \longrightarrow E_\infty \otimes W$ est pleinement fidèle, et donc finalement une équivalence de catégories (cf.n°0.3.).

2.3. Reformulation de la conjecture (C_2).

Soit $\hat{U}(\underline{g}(f)/\underline{q})$ le complété de l'algèbre enveloppante de $\underline{g}(f)/\underline{q}$ en l'idéal d'augmentation $\underline{a}$. Alors la catégorie des $\underline{g}(f)/\underline{q}$-modules de longueur finie à sous-quotients simples triviaux s'identifie à la catégorie des $\hat{U}(\underline{g}(f)/\underline{q})$-modules de longueur finie. D'après le théorème 2.1.1., il s'agit donc dans la conjecture (C_2) convenablement modifiée pour tenir compte de l'idéal $\underline{q}$ de comparer la catégorie des C-modules de longueur finie et la catégorie des $\hat{U}(\underline{g}(f)/\underline{q})$-modules de longueur finie.

Lemme 2.3.1. Soit $\mathcal{C}$ (resp.$\mathcal{C}'$) la catégorie des C (resp.$\hat{U}(\underline{g}(f)/\underline{q})$)-modules de longueur finie. Alors les catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont équivalentes si et seulement si les algèbres C et $\hat{U}(\underline{g}(f)/\underline{q})$ sont isomorphes.

Démonstration : Soit $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ une équivalence de catégories. Soit $\mathcal{C}_n$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ fermée des C-modules de longueur finie annulés par $\underline{m}^n$ (rappelons que $\underline{m}$ désigne l'unique idéal maximal de C), et définissons de même $\mathcal{C}'_n$. Si on note s(W) le socle d'un objet de $\mathcal{C}$ (c'est-à-dire la somme de ses sous-modules irréductibles), et par récurrence sur n $s^n(W)$ l'image réciproque dans W du socle de $W/s^{n-1}(W)$, on voit facilement que $\mathcal{C}_n$ est formée des objets W tels que $W = s^n(W)$ (par exemple, $\mathcal{C}_1$ est la sous-catégorie des objets semisimples de $\mathcal{C}$.). On en déduit que F applique $\mathcal{C}_n$ dans $\mathcal{C}'_n$.

Soit I_n le C-module $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(C/\underline{m}^n, \mathbb{C})$, où C agit à partir de son action à droite sur $C/\underline{m}^n$. Comme $\mathcal{C}_n$ s'identifie à la catégorie des $C/\underline{m}^n$-modules de longueur finie, vue comme sous-catégorie de $\mathcal{C}$, I_n est un objet injectif dans la catégorie $\mathcal{C}_n$; avec l'injection canonique $\mathbb{C} \longrightarrow I_n$ provenant de l'augmentation de $C/\underline{m}^n$, I_n est une enveloppe injective du module trivial.

Soit I'_n l'objet analogue construit dans la catégorie $\mathcal{C}'$. Lorsque n parcourt les entiers > 1, les $F(I_n)$ (resp. les I'_n) forment un système inductif dans $\mathcal{C}'$ (les inclusions proviennent des surjections canoniques $C/\underline{m}^{n+1} \longrightarrow C/\underline{m}^n$ (resp. $\hat{U}(\underline{g}(f)/\underline{q})/\underline{a}^{n+1} \longrightarrow \hat{U}(\underline{g}(f)/\underline{q})/\underline{a}^n$). Construisons un isomorphisme $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ du système inductif $F(I_n)$ sur (I'_n). Comme $I_1 = \mathbb{C}$ est irréductible, $F(I_1)$ est irréductible, et comme $\mathcal{C}'$ a un unique objet irréductible à isomorphisme près, il y a un isomorphisme $\varphi_1 : F(I_1) \longrightarrow I'_1 = \mathbb{C}$. Supposons φ_n donné, et construisons φ_{n+1}. En composant φ_n avec l'injection canonique $I'_n \longrightarrow I'_{n+1}$, on obtient un diagramme :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F(I_n) \arrow[r] \arrow[d] & F(I_{n+1}) \\ & I'_{n+1} & \end{tikzcd}$$

d'où $\varphi_{n+1} : F(I_{n+1}) \longrightarrow I'_{n+1}$ par injectivité de I'_{n+1} dans $\mathcal{C}'_{n+1}$. Noter que $F(I_{n+1})$ est une enveloppe injective dans $\mathcal{C}'_{n+1}$ de son socle $F(I_1)$; donc φ_{n+1} est injective puisque φ_1 l'est, et comme toutes les enveloppes injectives sont isomorphes, $F(I_{n+1})$ a même longueur que $F(I_n)$, c'est-à-dire même dimension sur $\mathbb{C}$, ce qui entraine que φ_{n+1} est un isomorphisme.

Pour conclure, il suffit de remarquer que l'action à gauche de $C/\underline{m}^n$ sur lui-même induit un isomorphisme de l'algèbre $(C/\underline{m}^n)^o$ opposée à $C/\underline{m}^n$ sur $\mathrm{End}_C(I_n)$. A l'aide de F et des φ_n on en déduit un isomorphisme de $\varprojlim (C/\underline{m}^n)^o$ sur $\varprojlim (\hat{U}(\underline{g}(f)/\underline{q})/\underline{a}^n)^o$, donc finalement de C sur $\hat{U}(\underline{g}(f)/\underline{q})$.

L'assertion dans l'autre sens est évidente.

Corollaire 2.3.2. L'assertion de la conjecture (C_2) est équivalente à la suivante

(C_2') L'algèbre C est isomorphe à l'algèbre $\hat{U}(\underline{g}(f)/\underline{q})$.

Corollaire 2.3.3. La conjecture (C_2) implique la conjecture (C), avec conservation des cup-produits.

Démonstration : D'après la partie II, th.5.1., on peut calculer $H^*(\underline{g}/\underline{q},U/I)$ avec son cup-produit à l'aide de l'algèbre C . Il est clair que l'on calcule de même $H^*(\underline{g}(f)/\underline{q}\ ,\ \mathbb{C})$ à l'aide de $\hat{U}(\underline{g}(f)/\underline{q})$; cela revient à prendre $\underline{g} = g(f)$ et $I = \underline{a}$.

****

RÉFÉRENCES

[1] M. Atiyah, I.G. Mc Donald, Introduction to commutative algebra, Addison-Wesley, Reading, Mass.,1969.

[2] P. Bernat et al., Représentations des groupes de Lie résolubles, Monographies de la Société Mathématique de France, 4, Dunod, Paris, 1972.

[3] N. Bourbaki, Algèbre, ch. 1-3, Hermann, Paris, 1970.

[4] N. Bourbaki, Algèbre, ch. 10, Masson, Paris, 1980.

[5] N. Bourbaki, Algèbre commutative, ch. 5-6, Hermann, Paris 1964.

[6] H. Cartan, S. Eilenberg, Homological algebra, Princeton University press, 1964.

[7] F. du Cloux, Sur une conjecture de Guichardet, C.R. Acad. Sci. ,292, 1981, p. 983-986.

[8] F. du Cloux, Non-isomorphisme entre U(g)/I et S(g)/J, C.R. Acad. Sci, 293, 1981, p. 5-8.

[9] F. du Cloux, Sur les n-extensions des représentations induites des produits semidirects,Thèse de 3e cycle, Université de Paris-Sud, 1980.

[10] L. Corwin, P. Greenleaf, R. Penney, A general character formula for irreducible projections on L^2 of a nilmanifold, Math.Ann., 225, 1977, p. 21-32.

[11] P. Delorme, Sur les représentations des groupes de Lie semi-simples complexes, Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, 1980.

[12] J. Dieudonné, Eléments d'analyse, vol.3 (2^e éd.), Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[13] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[14] J. Dixmier, Sur l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente, Arch. Math. 10, 1959, p. 321-326.

[15] J. Dixmier, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents III, Canadian J. Math. 10, 1958, p.321-348.

[16] P. Gabriel, Des catégories abéliennes, Bull.Soc.Math. France, 90, 1962, p. 323-448.

[16'] P. Gabriel, Indecomposable representations II, in Symposia Math. vol.XI, pp.81-104, Academic Press, London, 1973.

[17] P. Gabriel, Y. Nouazé, Idéaux premiers de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente, J. Alg., 6, 1967, p. 77-99.

[18] I.M. Guelfand, V. Ponomarev, Remarks on the classification of a pair of commuting linear transformations in a finite dimensional space, J. Funkt. Anal. i ego Priloj.,3, n°4, 1969, p. 81-82.

[19] I.M. Guelfand, V. Ponomarev, The category of Harish-Chandra modules over the Lie algebra of the Lorentz group, Sov. Math. Dokl. , 8, 1967, p. 1065-1068.

[20] I.M. Guelfand, V. Ponomarev, Classification of indecomposable infinitesimal representations of the Lorentz group, Sov. Math. Dokl, 8, 1967, p. 1114-1117.

[21] I.M. Guelfand, M.I. Graev, V. Ponomarev, The classification of the linear representations of the group SL(2,$\mathbb{C}$), Sov. Math. Dokl., 11, 1970, p. 1319-1323.

[22] A. Guichardet, Extensions des représentations induites des produits semi-directs, J. fur Reine angew. Math., 310, 1979, p. 7-32.

[23] A. Guichardet, Sur les groupes Ext^n des représentations des groupes de Lie résolubles, in Non-commutative harmonic analysis and Lie groups (Marseille-Luminy 1980), Lect. Notes in Math., 880.

[24] A. Guichardet, Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie, Cedic-Fernand Nathan, Paris, 1980.

[25] A. Guichardet, Sur les extensions de plusieurs représentations, Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, 1982.

[26] G. Hochschild, J.P Serre, Cohomology of Lie algebras, Ann. of Math., 10, 1959, p. 321-326.

[27] A.A.Kirillov, Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents (en russe), Usp. Mat. Nauk., 17, 1962, p. 57-110, (traduction anglaise).

[28] H. Kraljevic, Indecomposable Harish-Chandra modules, preprint.

[29] T. Levasseur, Idéaux premiers et complétion dans les algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie nilpotentes, in Séminaire d'algèbre Dubreil-Malliavin (1979), Lect. Notes in Math. 795.

[30] J. Mc Connell, The intersection theorem for a class of non-commutative rings,Proc.-London Math. Soc., 17, 1967, p. 487-498.

[31] S. Mac Lane, Categories for the working mathematician, Graduate texts in Mathematics 5, Springer, New York-Heidelberg -Berlin, 1971.

[32] J. Rosenberg, L^2-cohomology and Lie algebra cohomology, Canad. Math. Soc. Proc., vol.1, pp.99-112, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1981.

[33] B. Speh, Indecomposable representations of semi-simple Lie groups, Trans. Am. Math. Soc. 265, 1981, p. 1-34.

[34] M. Vergne, Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes, Bull. Soc. Math. Fr., 98, 1970, p. 81-116.

[35] O. Zariski P. Samuel, Commutative algebra, D. Van Nostrand and co., Princeton, N.J., 1960.

F.DU CLOUX
Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
91128 Palaiseau Cedex

PARTIE V

REPRÉSENTATIONS DE LONGUEUR FINIE DES GROUPES DE LIE INHOMOGÈNES

par

A. GUICHARDET

Astérisque 124-125 (1985)
Société Mathématique de France

§ 1. GÉNÉRALITÉS. ÉNONCÉ DES RÉSULTATS.

Etant donné un groupe de Lie réel G, on note $\mathcal{C}_G$ la catégorie des G-modules C^∞, qu'on appellera plus brièvement G-modules ; un objet de $\mathcal{C}_G$ est donc un couple (E,π) où E est un espace vectoriel topologique complexe localement convexe séparé, et π une représentation linéaire C^∞ de G dans E ; les morphismes de cette catégorie sont les G-morphismes, ou entrelacements linéaires continus ; on notera $\mathrm{Hom}_G(E,F)$ l'ensemble des G-morphismes de E dans F. Une suite exacte

$$\cdots \longrightarrow E_{i-1} \xrightarrow{u_{i-1}} E_i \xrightarrow{u_i} E_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

de G-modules et G-morphismes est dite <u>forte</u> si elle admet une homotopie contractante, c'est-à-dire une suite d'applications linéaires continues $s_i : E_i \longrightarrow E_{i-1}$ vérifiant

$$u_{i-1} \circ s_i + s_{i+1} \circ u_i = \mathrm{id}_{E_i} \qquad \forall i .$$

Etant donné un G-module E, une suite croissante de sous-G-modules fermés

$$(1.1) \qquad 0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_{n-1} \subset E_n = E$$

est dite <u>forte</u> si chaque E_i admet un supplémentaire topologique dans E_{i+1} (et, par conséquent, dans E) ; il revient au même de dire que toutes les suites exactes

$$0 \longrightarrow E_i \longrightarrow E_{i+1} \longrightarrow E_{i+1}/E_i \longrightarrow 0$$

sont fortes.

Donnons-nous un sous-ensemble $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}_G$ possédant la propriété (P) suivante :

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} - \text{ pour tout } E \in \mathcal{E},\ \mathrm{Hom}_G(E,E) \text{ est réduit aux opérateurs scalaires} \\ - \text{ pour } E, F \in \mathcal{E},\ E \neq F,\ \mathrm{Hom}_G(E,F) = 0 . \end{cases}$$

Disons qu'une suite de la forme (1.1) est une <u>suite de Jordan-Hölder relativement à $\mathcal{E}$</u> si elle est forte et si chaque E_{i+1}/E_i est isomorphe à un élément de $\mathcal{E}$; on démontre (cf.[4], ch.III, corollaire 1.1.2) que deux telles suites ont même longueur

n et mêmes sous-quotients E_{i+1}/E_i à l'ordre près ; on appellera n la <u>longueur</u> de E (relativement à $\mathcal{E}$).

On dira qu'un G-module E est <u>de longueur finie relativement à</u> $\mathcal{E}$ s'il admet une suite de Jordan-Hölder relativement à $\mathcal{E}$; on notera $\mathrm{Ext}(G;\mathcal{E})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_G$ formée des G-modules de longueur finie relativement à $\mathcal{E}$. Pour $E_1,\ldots,E_n \in \mathcal{E}$, on notera $\mathrm{Ext}(G\,;E_1,\ldots,E_n)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ext}(G;\mathcal{E})$ formée des G-modules E admettant une suite de Jordan-Hölder

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_{n-1} \subset F_n = E$$

telle que

$$F_{i+1}/F_i \sim E_i \quad ;$$

ses éléments sont appelés <u>extensions de</u> $E_1,\ldots,E_n$.

***

L'objet de ce travail est l'étude des catégories du type $\mathrm{Ext}(G;\mathcal{E})$ dans le cas où G est un groupe de Lie inhomogène, c'est-à-dire un produit semi-direct $B \ltimes A$ où A est un sous-groupe fermé et B un sous-groupe fermé distingué isomorphe à un groupe $\mathbb{R}^n$; on écrit $G = BA$. On note

- x_o un point de B^* , espace vectoriel dual de B ;
- $X = A.x_o$ l'orbite de x_o sous A ;
- S le stabilisateur de x_o dans A ;
- T_{x_o} le sous-espace vectoriel de B^* tangent à X en x_o ;
- N l'orthogonal de T_{x_o} dans B ;
- $\mathcal{E}$ un ensemble de NS-modules de Fréchet ayant la propriété (P), et dans lesquels l'action de N est le caractère $n \longmapsto e^{i\langle x_o,n\rangle}$.

A tout $E \in \mathcal{E}$ on associe un G-module $T(E)$ de la façon suivante (comparer avec le procédé de Mackey pour construire des G-modules unitaires) : la représentation de NS dans E est de la forme

$$(n,s) \longmapsto e^{i\langle x_o,n\rangle} . \sigma(s)$$

où σ est une représentation de S ; on transforme E en un BS-module avec l'action

$$(b,s) \longmapsto e^{i\langle x_o,b\rangle} \,.\, \sigma(s) \;;$$

alors T(E) est le G-module induit au sens C^∞ par ce BS-module (voir définition ci-dessous). On note $\mathfrak{F}$ l'ensemble des G-modules ainsi obtenus ; on sait que $\mathfrak{F}$ a encore la propriété (P). Le résultat principal de ce travail est le théorème suivant, concernant la catégorie $\mathrm{Ext}(G;\mathfrak{F})$:

<u>Théorème 1.1.</u> <u>On suppose que</u> T_{x_o} <u>admet un supplémentaire</u> S-<u>invariant dans</u> B^* ; <u>alors il existe une équivalence de catégories</u>

$$T : \mathrm{Ext}(NS\;;\mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{Ext}(G;\mathfrak{F})$$

<u>qui prolonge l'application</u> T <u>déjà définie</u>, <u>et qui peut être construite comme suit</u>:

a) <u>On choisit un projecteur</u> S-<u>invariant</u> M <u>de</u> B <u>sur</u> N ;

b) <u>soit</u> $E \in \mathrm{Ext}(NS\;;\mathcal{E})$; <u>notons</u> ρ <u>la représentation de</u> NS <u>dans</u> E ; <u>on transforme</u> E <u>en un</u> BS-<u>module avec l'action</u>

$$(b,s) \longrightarrow e^{i\langle x_o,b-M(b)\rangle} . \rho(M(b),s) \;;$$

<u>alors</u> T(E) <u>est le</u> G-<u>module induit au sens</u> C^∞ <u>par ce</u> BS-<u>module</u> ;

c) <u>soient</u> $E_1,E_2 \in \mathrm{Ext}(NS;\mathcal{E})$ <u>et</u> $u \in \mathrm{Hom}_{NS}(E_1,E_2)$; <u>alors</u> T(u) <u>est l'application</u> $T(E_1) \longrightarrow T(E_2)$ <u>définie par</u>

$$(T(u).f)(g) = u(f(g)).$$

Rappelons qu'une <u>équivalence entre deux catégories</u> $\mathcal{C}$ <u>et</u> $\mathcal{C}'$ est un foncteur $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ admettant un foncteur $S : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$, "inverse" de T en ce sens que $S \circ T$ et $T \circ S$ sont naturellement isomorphes à $1_{\mathcal{C}}$ et $1_{\mathcal{C}'}$.

<u>Corollaire 1.1.</u> <u>Etant donnés</u> $E_1,\dots,E_n \in \mathcal{E}$, <u>toute extension de</u> $T(E_1),\dots,T(E_n)$ <u>est induite par un</u> BS-<u>module</u>, <u>qui n'est pas unique en général</u>.

<u>Remarque 1.1.</u> Ces résultats subsistent sans changement si l'on remplace l'induction au sens C^∞ par l'induction au sens C^∞ à support compact modulo le sous-groupe induisant ; la seconde présente sur la première l'avantage d'être plus proche de l'induction au sens unitaire.

<u>Remarque 1.2.</u> On peut déduire du théorème 1.1. des résultats concernant certains

modules de longueur infinie, à savoir ceux qui sont des limites projectives ou injectives de modules de longueur finie. Plus précisément, notons $\varprojlim \mathrm{Ext}(NS;\mathcal{E})$ (resp. $\varinjlim \mathrm{Ext}(NS;\mathcal{E})$) la catégorie des limites projectives (resp. inductives) d'objets de $\mathrm{Ext}(NS\,;\mathcal{E})$, avec des notations analogues pour G . Alors le foncteur T du théorème 1.1. se prolonge en une équivalence de catégories entre $\varprojlim \mathrm{Ext}(NS\,;\mathcal{E})$ et $\varprojlim \mathrm{Ext}(G;\mathfrak{J})$; la raison en est que T , tel qu'il est construit, permute aux limites projectives. Dans le cas des limites inductives, on doit remplacer l'induction au sens C^∞ par l'induction au sens C^∞ à support compact modulo le sous-groupe induisant, et on obtient une équivalence de catégories entre $\varinjlim \mathrm{Ext}(NS;\mathcal{E})$ et $\varinjlim \mathrm{Ext}(G;\mathfrak{J})$ en un sens un peu affaibli : on peut seulement affirmer que tout objet de $\varinjlim(\mathrm{Ext}(G;\mathfrak{J})$ est algébriquement équivalent à un objet de la forme $T(E)$ avec $E \in \varinjlim \mathrm{Ext}(NS;\mathcal{E})$, ce deuxième objet ayant une topologie moins fine que le premier.

On examinera un peu plus en détails, au n° 6.3, le cas des déformations formelles, qui sont en réalité des limites projectives particulières.

***

Comme le montre l'énoncé même du théorème 1.1., il nous a semblé indispensable d'utiliser le langage des catégories (on pourra consulter à ce sujet [10]) ; il nous a même fallu établir un résultat nouveau reliant les propriétés des catégories $\mathrm{Ext}(G\,;\mathcal{E})$ à celles des groupes Ext^n_G (voir § 2). Notre démonstration utilise d'autre part, de façon essentielle, les résultats de [8] sur les groupes Ext^1_G dans le cas des groupes de Lie inhomogènes ; ils sont rappelés au § 3 . Le § 4 est consacré à la démonstration du théorème 1.1 ; le § 5 - à divers exemples ; et le § 6 - à divers commentaires sur la nature du résultat obtenu, ainsi que sur ses relations avec d'autres théories : méthode des orbites, déformations formelles de représentations.

Notations et conventions générales.

a) Soient H un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie G , et E un H-module ; on note $\mathrm{Ind}_H^G E$ le G-module induit au sens C^∞ par E , c'est-à-dire l'ensemble des applications $f \in C^\infty(G;E)$ vérifiant

$$f(g\,h) = h^{-1} f(g) \quad ,$$

muni de l'action régulière gauche de G .

On considère Ind_H^G comme un foncteur en associant à tout H-morphisme $u : E_1 \longrightarrow E_2$

le G-morphisme $\bar{u} : \mathrm{Ind}_H^G\ E_1 \longrightarrow \mathrm{Ind}_H^G\ E_2$ défini par

$$\bar{u}(f)\ (g) = u(f(g)) \ .$$

b) Si E et F sont des G-modules, Hom(E,F) désigne l'espace des applications linéaires continues de E dans F, muni de la topologie de la convergence compacte; c'est un G-module pour l'action

$$(g.u)\ (x) = g(u(g^{-1}.x))$$

(cf.[7], définition D.9 et lemme D.14).

c) Etant donnés deux G-modules E et F, on définit comme suit les groupes $\mathrm{Ext}_G^n(E,F)$: on prend une résolution forte relativement injective de F, soit

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow F^o \longrightarrow F^1 \longrightarrow \dots\dots$$

(par exemple la résolution standard où

$$F^n = C^\infty(G^{n+1},F)) \qquad ;$$

alors $\mathrm{Ext}_G^n(E,F)$ est le n-ième groupe de cohomologie du complexe

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(E,F^o) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(E,F^1) \longrightarrow \ \dots \quad ;$$

elle est effectivement indépendante du choix de la résolution en vertu du "lemme de comparaison des résolutions" .

On a en particulier

$$\mathrm{Ext}_G^o(E,F) = \mathrm{Hom}_G(E,F) \ .$$

d) En particulier on définit $H^n(G,E)$ par

$$H^n(G,E) = \mathrm{Ext}_G^n(\mathbb{C},E)$$

où $\mathbb{C}$ est muni de la représentation triviale ; on a

$$H^o(G,E) = E^G$$

(ensemble des éléments G-invariants de E).

On désignera toujours par [f] la classe de cohomologie d'un cocycle f .

Rappelons ([7],ch.III prop.1.8) que si E et F sont des espaces de Fréchet, on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Ext}^n_G(E,F) \sim H^n(G,\mathrm{Hom}(E,F))$$

(qui résulte d'un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}(E,C^\infty(G^{n+1},F)) \sim C^\infty(G^{n+1}, \mathrm{Hom}(E,F))) .$$

C'est la raison pour laquelle nous supposons souvent que nos G-modules sont des espaces de Fréchet.

§ 2. RESULTATS SUR LA COHOMOLOGIE, LES GROUPES Ext^n_G ET LES CATEGORIES $\mathrm{Ext}(G;\mathcal{E})$.

2.1. Suites exactes en petite dimension déduites de la suite spectrale de Hochschild-Serre.

Considérons un G-module E et un sous-groupe fermé distingué H de G ; rappelons qu'on a la suite exacte

$$(2.1.) \qquad 0 \longrightarrow H^1(G/H,E^H) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} H^1(G,E) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^1(H,E)^{G/H} \quad .$$

où Inf désigne le relèvement ("inflation") des cocycles de G/H à G , et Res la restriction de G à H (cf.[7],n° III.5.2).

D'autre part, sous certaines hypothèses que nous ne préciserons pas, on a des suites exactes

$$0 \longrightarrow H^2(G,E)_0 \longrightarrow H^2(G,E) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^2(H,E)^{G/H}$$

$$H^2(G/H,E^H) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} H^2(G,E)_0 \longrightarrow H^1(G/H,H^1(H,E))$$

(cf.[7], proposition A.6). Le lemme suivant a pour but d'expliciter ces deux suites exactes dans un cas particulier qui nous suffira dans la suite.

Lemme 2.1. On suppose que H opère trivialement sur E , et que l'application canonique $p : G \longrightarrow G/H$ admet une section globale C^∞ notée s . Notons $H^2(G,E)_o$ le noyau de l'application de restriction

$$\mathrm{Res} : H^2(G,E) \longrightarrow H^2(H,E)^{G/H} .$$

Il existe une application naturelle U rendant exacte la suite suivante :

$$(2.2) \qquad H^2(G/H,E^H) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} H^2(G,E)_o \xrightarrow{U} H^1(G/H,\mathrm{Hom}(H,E))$$

où $\mathrm{Hom}(H,E)$ désigne l'ensemble des morphismes continus de groupes de H dans E .

Démonstration.

a) Montrons d'abord que tout cocycle $f \in Z^2(G,E)$ tel que $[f] \in H^2(G,E)_o$ est équivalent à un cocycle f' tel que $f'(g_1,g_2)$ ne dépende de g_1 que par l'intermédiaire de $p(g_1)$, et soit nul si $g_1 \in H$.

On peut supposer que $f(g_1,g_2) = 0$ pour $g_1 \in H$, $g_2 \in H$; il suffit alors de poser

$$f' = f + d\varphi$$

où

$$\varphi(g) = f(g.s(p(g))^{-1} , s(p(g))) .$$

b) Ecrivons f au lieu de f' ; posons

$$F(g)(h) = f(g,g^{-1}h\ g) ;$$

alors $F(g) \in \mathrm{Hom}(H,E)$ et

$$F \in Z^1(G/H, \mathrm{Hom}(H,E)) ;$$

la classe de F dans $H^1(G/H,\mathrm{Hom}(H,E))$ ne dépend que de celle de f ; on la note $U([f])$.

c) On voit immédiatement que $\mathrm{Im\ Inf} \subset \mathrm{Ker}\ U$; démontrons l'inclusion inverse. Supposons donc $F = d\omega$ avec $\omega \in \mathrm{Hom}(H,E)$, i.e.

$$F(g)(h) = g.\omega(g^{-1}\ h\ g) - \omega(h) ;$$

posons

$$\psi(g) = \omega(g.s(p(g))^{-1}) .$$

puis

$$f' = f - d\psi \ .$$

Alors $f'(g_1,g_2)$ ne dépend que de $p(g_1)$ et $p(g_2)$; en effet on a facilement

$$\psi(hg) - \psi(g) = \omega(h)$$
$$\psi(gh) - \psi(g) = \omega(ghg^{-1})$$

d'où l'on déduit

$$f'(hg_1,g_2) = f'(g_1,g_2) \ .$$

et $f'(g,h) = 0$; cette dernière relation, jointe au fait que f' est un 2-cocycle , implique

$$f'(g_1,g_2h) - f'(g_1,g_2) = - g_1 f'(g_2,h) + f'(g_1g_2,h) = 0 \ .$$

n° 2.2. <u>Premières relations entre groupes</u> Ext_G^n <u>et catégories</u> $\mathrm{Ext}(G;\mathcal{E})$.

Commençons par rappeler la définition des groupes $\mathrm{Ext}_G^n(A,B)$ à l'aide des n-extensions fortes "à la Yoneda" (cf.[7], Ch.I, § 10 et 11).

On appelle ainsi toute suite exacte forte de G-modules

(S) $$0 \longrightarrow B \longrightarrow E_o \longrightarrow E_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_{n-1} \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

et on note $\mathcal{J}_n^f(A,B)$ l'ensemble qu'elles forment ; écrivons une résolution forte relativement injective de B :

(2.3) $$0 \longrightarrow B \longrightarrow B^o \longrightarrow B^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow B^{n-1} \longrightarrow B^n \longrightarrow \cdots\cdots ;$$

le lemme de comparaison des résolutions fournit un morphisme de complexes de (S) dans (2.3), formé de G-morphismes

$$u_i : E_i \longrightarrow B^i \ ;$$

alors l'élément u_n de $\mathrm{Hom}_G(A,B^n)$ est un n-cocycle; si on note $M_n(S)$ sa classe $[u_n] \in \mathrm{Ext}_G^n(A,B)$, on obtient une application

$$M_n : \mathcal{J}_n^f(A,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}_G^n(A,B)$$

qui est surjective. De plus, pour (S), (S') $\in \mathcal{S}_n^f(A,B)$, on a $M_n(S) = M_n(S')$ si et seulement s'il existe (S") $\in \mathcal{S}_n^f(A,B)$ et un diagramme commutatif

$$(S) \longrightarrow (S'') \longleftarrow (S')$$

(cf.[1], §7, n°5, théorème 1). On dit alors que (S) et (S') sont équivalentes.

Cas de $n = 1$.

Pour tout $\alpha \in \mathrm{Ext}_G^1(A,B)$, la classe de 1-extensions associée à α est celle de

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{u} B \oplus_\alpha A \xrightarrow{v} A \longrightarrow 0 \tag{2.4}$$

avec

$$\begin{aligned} B \oplus_\alpha A &= B \oplus A \text{ en tant qu'EVT} \\ g.(b,a) &= (g.b + \alpha_o(g.a)(g)\ ,\ g.a) \\ u(b) &= (b,o) \\ v(b,a) &= a\ ; \end{aligned}$$

de plus α_o désigne un 1- cocycle inhomogène, élément de $\mathrm{Hom}(A,C^\infty(G,B))$ représentant α ; si A est tonnelé, on peut identifier $\mathrm{Hom}(A,C^\infty(G,B))$ avec $C^\infty(G,\mathrm{Hom}(A,B))$ et écrire $\alpha_o(g).(g.a)$ au lieu de $\alpha_o(g.a)(g)$ (cf.[7],ch.III. prop.1.2). De plus on a le résultat suivant :

Lemme 2.2. Supposons A et B éléments d'un ensemble $\mathcal{E}$ ayant la propriété (P) du § 1 ; associons à tout $\alpha \in \mathrm{Ext}_G^1(A,B)$ la classe d'équivalence de $B \oplus_\alpha A$ considéré comme G-module et non plus comme suite exacte (2.4). On obtient une bijection de l'ensemble $\{0\} \cup P(\mathrm{Ext}_G^1(A,B))$ sur $\mathrm{Ext}(G;B,A)$, où $P(.)$ désigne l'espace projectif associé à un espace vectoriel.

Démonstration. Notant U, V, W les représentations de G dans A,B, $B\oplus_\alpha A$, on peut écrire symboliquement

$$W(g) = \begin{pmatrix} V(g) & \alpha_o(g).U(g) \\ 0 & U(g) \end{pmatrix} ;$$

la suite est un calcul facile.

Remarque 2.1. Des calculs matriciels analogues dans le cas de n G-modules

$A_1,\ldots,A_n$ conduisent à se demander s'il existe une description de l'ensemble $\mathrm{Ext}(G;A_1,\ldots,A_n)$ en des termes faisant intervenir uniquement les espaces $\mathrm{Ext}^1_G(A_j,A_i)$ et les ensembles de la forme

$$\{(\alpha,\beta) \in \mathrm{Ext}^1_G(A_k,A_j) \times \mathrm{Ext}^1_G(A_j,A_i) \mid \alpha \cup \beta = 0\}$$

où $\cup$ désigne le cup-produit ; la réponse est affirmative pour $n = 3$, mais semble négative pour $n \geq 4$; on verra aux n° 2.3 et 2.5 qu'il existe pourtant des relations étroites entre ces divers objets.

n° 2.3. Une construction d'algèbre homologique.

Notations. On se donne deux groupes de Lie H et G , et un foncteur $T : \mathcal{C}_H \longrightarrow \mathcal{C}_G$ supposé additif et fortement exact, i.e. transforment les suites exactes fortes en suites exactes fortes ; pour $A, B \in \mathcal{C}_H$ on note T ou $T^o_{A,B}$ l'application

$$\mathrm{Hom}_H(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(T(A),T(B))$$

définie par le foncteur.

Construction d'applications

$$T^n_{A,B} : \mathrm{Ext}^n_H(A,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_G(T(A),T(B))$$

pour $n = 1,2,\ldots.$

Considérons un élément

$$(S) \qquad 0 \longrightarrow B \longrightarrow E_o \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_{n-1} \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

de $\mathcal{J}^f_n(A,B)$; la suite

$$(T(S)) \quad 0 \longrightarrow T(B) \longrightarrow T(E_o) \longrightarrow \cdots \longrightarrow T(E_{n-1}) \longrightarrow T(A) \longrightarrow 0$$

est un élément de $\mathcal{J}^f_n(T(A),T(B))$; de plus il est clair que si deux éléments (S) et (S') de $\mathcal{J}^f_n(A,B)$ sont équivalents, il en est de même de (T(S)) et (T(S')) ; on en déduit donc une application

$$T^n_{A,B} : \mathrm{Ext}^n_H(A,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_G(T(A),T(B)) .$$

On peut donner de $T^n_{A,B}$ une autre construction utilisant les résolutions injectives : soit

$$(B^*) \qquad 0 \longrightarrow B \longrightarrow B^o \longrightarrow B^1 \longrightarrow \cdots$$

une résolution forte relativement injective de B ; $(T(B^*))$ est une résolution forte (pas nécessairement relativement injective) de T(B) ; notons $(T(B)^*)$ une résolution forte relativement injective de T(B) ; on a des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
(S) & 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E_o & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & E_{n-1} & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle u_o} & & & & \downarrow{\scriptstyle u_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle u_n} & & \\
(B^*) & 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B^o & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & B^{n-1} & \longrightarrow & B^n & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
(T(S)) & 0 & \longrightarrow & T(B) & \longrightarrow & T(E_o) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & T(E_{n-1}) & \longrightarrow & T(A) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle T(u_o)} & & & & \downarrow{\scriptstyle T(u_{n-1})} & & \downarrow{\scriptstyle T(u_n)} & & \\
(T(B^*)) & 0 & \longrightarrow & T(B) & \longrightarrow & T(B^o) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & T(B^{n-1}) & \longrightarrow & T(B^n) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle v_o} & & & & \downarrow{\scriptstyle v_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle v_n} & & \\
(T(B)^*) & 0 & \longrightarrow & T(B) & \longrightarrow & T(B)^o & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & T(B)^{n-1} & \longrightarrow & T(B)^n & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

où (u^*) et (v^*) sont fournis par le lemme de comparaison ; alors l'élément de $Ext^n_H(A,B)$ correspondant à (S) est la classe $[u_n]$ de u_n, et l'élément de $Ext^n_G(T(A),T(B))$ correspondant à (T(S)) est la classe de $v_n \circ T(u_n)$; autrement dit, pour tout couple $\alpha \in Hom_H(A,B^n)$ on a

$$(2.5) \qquad T^n_{A,B}([\alpha]) = [v_n \circ T(\alpha)] \; .$$

<u>Propriétés des applications</u> $T^n_{A,B}$.

(i) Linéarité (résulte de (2.5))

(ii) Pour tout $\alpha \in Ext^1_H(A,B)$ on a

$$T(B \oplus_\alpha A) \sim T(B) \oplus_{T^1_{A,B}(\alpha)} T(A)$$

(résulte de la définition)

(iii) Compatibilité avec les cup-produits : pour $\alpha \in \mathrm{Ext}_H^p(A,B)$, $\beta \in \mathrm{Ext}_H^q(B,C)$, $p,q \geq 0$, on a $T_{A,C}^{p+q}(\beta \cup \alpha) = T_{B,C}^q(\beta) \cup T_{A,B}^p(\alpha)$

(Pour $p,q \geq 1$, il s'agit de la composition des n-extensions ; si $p = 0$ ou $q = 0$, il s'agit du pull-back ou du push-out, voir [7], ch.I, n°11.3).

(iv) Compatibilité avec les suites exactes longues de cohomologie : pour tout $A \in \mathcal{C}_H$ et toute suite exacte forte de H-modules :

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow B' \longrightarrow B'' \longrightarrow 0 , \tag{2.6}$$

le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \mathrm{Ext}_H^n(A,B) \arrow[r] \arrow[d, "T^n_{A,B}"'] & \mathrm{Ext}_H^n(A,B') \arrow[r] \arrow[d, "T^n_{A,B'}"'] & \mathrm{Ext}_H^n(A,B'') \arrow[r, "\partial^n"] \arrow[d, "T^n_{A,B''}"'] & \mathrm{Ext}_H^{n+1}(A,B) \arrow[r] \arrow[d, "T^{n+1}_{A,B}"'] & {} \\
{} \arrow[r] & \mathrm{Ext}_G^n(T(A),T(B)) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_G^n(T(A),T(B')) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_G^n(T(A),T(B'')) \arrow[r, "\delta^n"] & \mathrm{Ext}_G^{n+1}(T(A),T(B)) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

(il suffit de le voir au niveau des homomorphismes de liaison ∂^n et δ^n ; pour cela, notons ξ la classe de (2.6) dans $\mathrm{Ext}_H^1(B'',B)$; pour tout $\alpha \in \mathrm{Ext}_H^n(A,B'')$, on a

$$\partial^n(\alpha) = \xi \cup \alpha$$

$$\begin{aligned}
\delta^n(T^n_{A,B''}(\alpha)) &= T^1_{B'',B}(\xi) \cup T^n_{A,B''}(\alpha) \\
&= T^{n+1}_{A,B}(\xi \cup \alpha) .
\end{aligned}$$

(v) Résultat analogue dans la situation $B \in \mathcal{C}_H$ et

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A' \longrightarrow A'' \longrightarrow 0 .$$

(vi) Si T est un foncteur composé

$$\mathcal{C}_K \xrightarrow{V} \mathcal{C}_H \xrightarrow{U} \mathcal{C}_G$$

on a

$$T^n_{A,B} = U^n_{V(A),V(B)} \circ V^n_{A,B} .$$

n°1.4. <u>Cas où</u> T <u>est le foncteur</u> "<u>induction</u>" .

On suppose tous les H-modules et G-modules de Fréchet ; H est un sous-groupe de G ; pour tout H-module C^∞ A , $T(A) = \mathrm{Ind}_H^G A$ est le G-module induit par A au sens C^∞ (voir définition au § 1).

Notons $\mathcal{A}$ l'algèbre des fonctions C^∞ complexes sur $X = G/H$; $\mathcal{A}$ opère dans T(A) par une représentation V :

$$(V(\varphi).f)(g) = \varphi(p(g)).f(g)$$

où p est l'application canonique $G \longrightarrow X$. On a

$$g.V(\varphi).g^{-1} = V(g.\varphi)$$

où

$$(g.\varphi)(x) = \varphi(g^{-1}.x)$$

("système d'imprimitivité").

Considérons A et B $\in \mathcal{C}_H$; définissons une application linéaire

$$\Lambda : \mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Hom}(A,B)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(T(A),T(B))$$

par

$$\Lambda(\psi)(f)(g) = \psi(g).f(g)$$

pour $\psi \in \mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Hom}(A,B))$, $f \in T(A)$, $g \in G$.

Alors Λ est un isomorphisme de G-modules ; on en déduit des isomorphismes en cohomologie

$$\Lambda^n = H^n(G,\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Hom}(A,B))) \longrightarrow H^n(G,\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(T(A),T(B))) .$$

On a d'autre part des isomorphismes de Shapiro

$$S^n : H^n(G,\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Hom}(A,B))) \longrightarrow H^n(H,\mathrm{Hom}(A,B))$$

définis, au niveau des cocycles, par

$$(S^nF)\ (h_1,\dots,h_n) = F(h_1,\dots,h_n)\ (1) .$$

On a enfin une injection

$$i : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{a}}(T(A),T(B)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(T(A),T(B))$$

qui définit des applications i^n en cohomologie.

Lemme 2.3. Le foncteur $T = \mathrm{Ind}_H^G$ est fortement exact ; de plus les applications $T^n_{A,B}$ du n° 2.3 sont données par

$$T^n_{A,B} = i^n \circ \Lambda^n \circ (S^n)^{-1} \quad . \tag{2.7}$$

Démonstration :

a) Il existe

- un recouvrement ouvert localement fini $(U_i)_{i\in I}$ de X
- pour tout $i \in I$, une section C^∞ σ_i pour l'application p au-dessus de U_i
- une partition C^∞ de l'unité (α_i) subordonnée au recouvrement (U_i).

b) Montrons que T est fortement exact. Soit

$$\rightleftarrows A_{n-1} \underset{s_n}{\overset{u_{n-1}}{\rightleftarrows}} A_n \underset{s_{n+1}}{\overset{u_n}{\rightleftarrows}} A_{n+1} \rightleftarrows$$

une suite exacte forte de H-modules (les u_n sont des H-morphismes, les s_n sont des applications linéaires continues, et on a

$$u_{n-1}\circ s_n + s_{n+1}\circ u_n = \mathrm{id}_{A_n}) \ .$$

Il suffit alors de définir

$$\rightleftarrows T(A_{n-1}) \underset{\overline{s}_n}{\overset{\overline{u}_{n-1}}{\rightleftarrows}} T(A_n) \underset{\overline{s}_{n+1}}{\overset{\overline{u}_n}{\rightleftarrows}} T(A_{n+1}) \rightleftarrows$$

par

$$\overline{u}_n(f)(g) = u_n.f(g)$$

$$\overline{s}_n(f)(g) = \sum_i \alpha_i(p(g)).r_i(g^{-1}).s_n.r_i(g^{-1})^{-1}.f(g) \tag{2.8}$$

où

$$r_i(g^{-1}) = g^{-1}.\sigma_i(p(g)).$$

c) Démontrons (2.7). Reprenons la deuxième construction du n° 2.3 en prenant pour (B^*) et $(T(B)^*)$ les résolutions standard

$$(B^*) \qquad 0 \longrightarrow B \longrightarrow C^\infty(H,B) \longrightarrow C^\infty(H^2,B) \longrightarrow \dots$$

$$(T(B)^*) \qquad 0 \longrightarrow T(B) \to C^\infty(G,T(B)) \longrightarrow C^\infty(G^2,T(B)) \longrightarrow \dots ;$$

calculons v^* en appliquant le lemme de comparaison des résolutions à l'homotopie contractante $\vec{s}^*$ de $(T(B^*))$ déduite selon (2.8) de l'homotopie contractante standard de (B^*), et à la formule (1.11) de [7], ch.III , donnant l'injectivité de $C^\infty(G^{n+1},T(B))$; on obtient

$$(v_n f)(g_o,\dots,g_n)(g) = \sum_{i_o,\dots,i_n} \alpha_{i_o}(p(g_o^{-1}g)) \dots\dots \alpha_{i_n}(p(g_n^{-1}g)) .$$
$$f(g)(r_{i_o}(g^{-1}g_o),\dots,r_{i_n}(g^{-1}g_n))$$

Cela signifie que l'application $T^n_{A,B}$ est donnée, au niveau des cocycles homogènes, par

$$T^n_{A,B}(\omega)(g_o,\dots,g_n)(f)(g) = \sum_{i_o,\dots,i_n} \alpha_{i_o}(p(g_o^{-1}g)) \dots \alpha_{i_n}(p(g_n^{-1}g)) .$$
$$\omega(r_{i_o}(g^{-1}g_o),\dots,r_{i_n}(g^{-1}g_n)).f(g)$$

pour $\omega \in Z^n(H,\mathrm{Hom}(A,B))$, $f \in T(A)$.

Il suffit maintenant de comparer cette formule avec la formule (4.13) de [7].ch.III.

n° 2.5 Un résultat sur les équivalences de catégories.

Notations. On reprend les notations du n° 2.3 en ce qui concerne H, G, T, $T^n_{A,B}$; on se donne en outre un sous-ensemble $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}_H$ ayant la propriété (P) du § 1 , et on définit la catégorie $\mathrm{Ext}(H;\mathcal{E})$ comme au § 1 . On pose $\mathfrak{J} = T(\mathcal{E}) \subset \mathcal{C}_G$ et on suppose qu'il a aussi la propriété (P) ; comme T est fortement exact, on a

$$T(\mathrm{Ext}(H;\mathcal{E})) \subset \mathrm{Ext}(G;\mathfrak{J}) .$$

La proposition 2.1. ci-dessous donne une condition suffisante pour que T induise une équivalence de catégories de $\mathrm{Ext}(H;\mathcal{E})$ sur $\mathrm{Ext}(G;\mathfrak{J})$; la définition des équivalences de catégories a été rappelée au § 1 ; remarquons que le foncteur inverse S est automatiquement fortement exact, parce que toutes les suites exactes dans $\mathrm{Ext}(H;\mathcal{E})$ et $\mathrm{Ext}(G;\mathfrak{J})$ sont fortes ([4],ch.III, 1.2.4) ; rappelons aussi que dire que T induit une équivalence de catégories de $\mathrm{Ext}(H;\mathcal{E})$ sur $\mathrm{Ext}(G;\mathfrak{J})$ équivaut à dire que

(i) $T^{\circ}_{A,B}$ est bijectif pour A, B $\in$ Ext(H;$\mathcal{E}$)

(ii) tout objet de Ext(G;$\mathfrak{J}$) est isomorphe à un objet de la forme T(A) avec A $\in$ Ext(H;$\mathcal{E}$) (cf.[10], § IV.4, thm.1).

<u>Remarque 2.2.</u> Considérons A, B $\in \mathcal{E}$; $\mathrm{Ext}^n_H(A,B)$ est le groupe $\mathrm{Ext}^n(A,B)$ relatif à la catégorie $\mathcal{C}_H$; lorsque n = 1 , c'est aussi le groupe $\mathrm{Ext}^n(A,B)$ relatif à la catégorie Ext(H;$\mathcal{E}$), car si on a une suite exacte forte

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow E \longrightarrow A \longrightarrow 0 ,$$

il est clair que E $\in$ Ext(H;$\mathcal{E}$) ; on peut donc écrire

$$\mathrm{Ext}^1_H(A,B) = \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Ext}(H;\mathcal{E})}(A,B) .$$

De même prenons A, B, C $\in \mathcal{E}$ et considérons l'application cup-produit

$$\mathrm{Ext}^1_H(B,C) \times \mathrm{Ext}^1_H(A,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_H(A,C) \quad ;$$

son noyau (image réciproque de 0) est le même que celui de l'application analogue

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Ext}(H;\mathcal{E})}(B,C) \times \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Ext}(H;\mathcal{E})}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Ext}(H;\mathcal{E})}(A,C) .$$

En effet prenons

$$\alpha \in \mathrm{Ext}^1_H(A,B) \quad , \quad \beta \in \mathrm{Ext}^1_H(B,C)$$

et représentons β par une suite exacte forte

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} B \longrightarrow 0 ;$$

il en résulte une suite exacte de cohomologie

$$\mathrm{Ext}^1_H(A,C) \xrightarrow{u^1} \mathrm{Ext}^1_H(A,E) \xrightarrow{v^1} \mathrm{Ext}^1_H(A,B) \xrightarrow{\partial^1} \mathrm{Ext}^2_H(A,C)$$

et on a

$$\partial^1(\alpha) = \beta \cup \alpha ;$$

donc $\beta \cup \alpha$ est nul si et seulement si $\alpha \in \mathrm{Im}\, v^1$, et ceci ne dépend pas du choix de la catégorie $\mathcal{C}_H$ ou Ext(H;$\mathcal{E}$).

<u>Proposition 2.1.</u> On suppose que pour A, B $\in \mathcal{E}$, $T^n_{A,B}$ est bijectif pour n = 0,1 , et injectif pour n = 2 ; alors T induit une équivalence de catégories de Ext(H;$\mathcal{E}$) sur Ext(G;$\mathfrak{J}$).

<u>Démonstration</u> :

a) Montrons d'abord que l'hypothèse faite sur $T^n_{A,B}$ est encore vraie pour A, B $\in$ Ext(H;$\mathcal{E}$). On procède par récurrence sur les longueurs de A et B , notées $\ell(A)$ et $\ell(B)$; montrons par exemple que si elle est vraie pour $\ell(B) < n$, elle l'est encore pour $\ell(B) = n$. On a une suite exacte forte

$$0 \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow B'' \longrightarrow 0$$

avec B' , B'' $\in$ Ext(H;$\mathcal{E}$), $\ell(B') < n$, $\ell(B'') < n$;

d'où un diagramme commutatif (cf.n° 2.3, propriété (iv))

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^o_H(A,B') \arrow[r] \arrow[d, "T^o_{A,B'}"'] & \mathrm{Ext}^o_H(A,B) \arrow[r] \arrow[d, "T^o_{A,B}"'] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2_H(A,B) \arrow[r] \arrow[d, "T^2_{A,B}"'] & \mathrm{Ext}^2_H(A,B'') \arrow[d, "T^2_{A,B''}"'] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^o_G(T(A),T(B')) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^o_G(T(A),T(B)) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2_G(T(A),T(B)) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2_G(T(A),T(B''))\,.
\end{tikzcd}$$

Par hypothèse de récurrence, $T^n_{A,B'}$ et $T^n_{A,B''}$ sont bijectifs pour n = 0,1 , et injectifs pour n = 2 , et on doit démontrer la même chose pour $T^n_{A,B}$ - ce qui est un exercice facile de "diagram chasing" . On remarquera que l'hypothèse "$T^2_{A,B}$ injectif" n'intervient qu'ici, pour faire la récurrence.

b) Le fait que $T^o_{A,B}$ est bijectif pour A,B $\in$ Ext(H;$\mathcal{E}$) résulte de a).

c) Reste à voir que tout objet U de Ext(G;$\mathfrak{J}$) est isomorphe à un objet T(A) avec A $\in$ Ext(H;$\mathcal{E}$) ; on procède par récurrence sur $\ell(U)$; on peut écrire

$$U = U' \oplus_\beta U''$$

avec U' , U'' $\in$ Ext(G;$\mathfrak{J}$), $\ell(U') < \ell(U)$, $\ell(U'') < \ell(U)$, $\beta \in \mathrm{Ext}^1_G(U'',U')$; par hypothèse de récurrence on peut écrire U' = T(A'), U'' = T(A'') avec A' , A'' $\in$ Ext(H;$\mathcal{E}$) ; d'après a) on peut écrire $\beta = T^1_{A',A''}(\alpha)$ avec $\alpha \in \mathrm{Ext}^1_H(A'',A')$; alors la propriété (ii) du n° 2.3 montre que

$$U \sim T(A' \oplus_\alpha A'')\ .$$

Remarque 2.3. La proposition 2.1. ne donne pas de condition nécessaire pour l'existence d'une équivalence de catégories entre $\mathrm{Ext}(H;\mathcal{E})$ et $\mathrm{Ext}(G;\mathfrak{J})$; supposons qu'il en existe une, soit U ; alors U définit des applications

$$U^n_{A,B} : \mathrm{Ext}^n_{\mathrm{Ext}(H;\mathcal{E})}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{\mathrm{Ext}(G;\mathfrak{J})}(U(A),U(B))$$

qui sont bijectives et compatibles avec les cup-produits ; la remarque 2.2. montre alors qu'il existe des applications

$$U^1_{A,B} : \mathrm{Ext}^1_H(A,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_G(U(A),U(B))$$

qui sont bijectives et respectent la nullité des cup-produits.

§ 3 . PROPRIÉTÉS DES GROUPES Ext^n POUR LES GROUPES DE LIE INHOMOGÈNES.

n°3.1. Notations (voir aussi [8]).

On reprend celles du § 1 en ce qui concerne $G = BA$, $x_o \in B^*$, $X = A.x_o$, S , T_{x_o} , N . En outre on désigne par

- T_x le sous-espace vectoriel de B^* tangent à X en un point quelconque x ;
- N_x l'orthogonal de T_x dans B ;
- $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}^*$) l'espace fibré trivial de base X et de fibre $\mathcal{B}$(resp $\mathcal{B}^*$) ;
- $\mathcal{C}$ l'espace fibré tangent à X , sous-espace fibré de $\mathcal{B}^*$;
- $\mathcal{N}$ le sous-espace fibré de $\mathcal{B}$, orthogonal à $\mathcal{C}$;
- pour $i = 1,2$, (E_i,σ_i) un S-module ;
- (E_i,ρ_i) le BS-module défini par

$$\rho_i(b,s) = e^{i\langle x_o,b\rangle} . \sigma_i(s) \quad ;$$

- (F_i,π_i) le G- module induit par (E_i,ρ_i) ;
- $\mathcal{E}_i$ l'espace fibré vectoriel de base X associé au S-fibré principal $A \longrightarrow X$ et au S-module E_i ; F_i s'identifie à l'espace $\Gamma(\mathcal{E}_i)$ des sections C^∞ de $\mathcal{E}_i$ avec l'action de G :

$$(\pi_i(b,a).f)(x) = e^{i\langle x,b\rangle}.a.f(a^{-1}.x)$$

- E le S-module $\mathrm{Hom}(E_1,E_2)$;

- $\mathcal{E}$ le fibré vectoriel $\mathcal{H}om(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$;
- $\mathcal{H}$ le G-module $Hom(F_1, F_2)$ avec représentation notée π ;
- $\mathcal{H}^B$ l'ensemble des éléments B-invariants de $\mathcal{H}$; il s'identifie à $\Gamma(\mathcal{E})$ avec l'action de G :

$$(\pi(b,a).f)(x) = a.f(a^{-1}.x) \ ;$$

On sait, d'après [3], que la suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_2^{pq} = H^p(A, H^q(\mathcal{B}, \mathcal{H})) \Longrightarrow H^*(G, \mathcal{H})$$

s'écrit ici

$$E_2^{pq} = H^p(S, Hom(\Lambda^q N, E)) \Longrightarrow H^*(G, \mathcal{H}) \ ;$$

cela signifie qu'on a des isomorphismes

$$W^{pq} : H^p(A, H^q(B, \mathcal{H})) \longrightarrow H^p(S, Hom(\Lambda^q N, E)) \ ;$$

nous n'utiliserons ici que quelques renseignements très partiels concernant ces isomorphismes W^{pq} ; ils sont donnés aux n° 3.2. et 3.3.

On notera i l'injection $\mathcal{H}^B \longrightarrow \mathcal{H}$; elle définit en cohomologie des applications

$$i_G^n : H^n(G, \mathcal{H}^B) \longrightarrow H^n(G, \mathcal{H})$$

$$i_B^n : H^n(B, \mathcal{H}^B) \longrightarrow H^n(B, \mathcal{H})$$

$$i_{AB}^{pq} : H^p(A, H^q(B, \mathcal{H}^B)) \longrightarrow H^p(A, H^q(B, \mathcal{H})) \ .$$

n° 3.2. <u>Propriétés de</u> $H^1(B, \mathcal{H})$ <u>et</u> $H^1(G, \mathcal{H})$.

a) En ce qui concerne $H^1(B, \mathcal{H})$, on démontre ce qui suit (cf.[8], §4) : soit Φ un élément de $Z^1(B, \mathcal{H}^B) = Hom(B, \mathcal{H}^B) \sim \Gamma(\mathcal{H}om(\mathcal{B}, \mathcal{E}))$; alors $i \circ \Phi$ est un cobord dans $\mathcal{H}$ si et seulement si $\Phi(b)(x)$ est nul dès que $b \in N_x$; de plus i_B^1 est surjectif ; on a donc un isomorphisme

$$H^1(B, \mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{H}om(\mathcal{N}, \mathcal{E})) \ .$$

Mais le second membre est le A-module induit par le S-module Hom(N,E) ; on a donc, pour tout p , un isomorphisme de Shapiro

$$W^{p,1} : H^p(A, H^1(B,\mathcal{H})) \xrightarrow[\sim]{} H^p(S, \mathrm{Hom}(N,E)) \quad ;$$

de plus $W^{p,1} \circ i^{p,1}_{A,B}$ est donné par

(3.1) $$W^{p,1}(i^{1,1}_{A,B}(\psi))(s_1,\ldots,s_p)(n) = \psi(s_1,\ldots,s_p)(n)(x_o)$$

pour tout $\psi \in Z^p(A, \mathrm{Hom}(B,\mathcal{H}^B))$.

b) Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^1(G,\mathcal{H}) \arrow[r, "\mathrm{Res}^G_B"] & H^1(B,\mathcal{H})^A \arrow[ddd, bend left, "W^{o1}"] \\
H^1(G,\mathcal{H}^B) \arrow[u, "i^1_G"] \arrow[r, "\mathrm{Res}^G_B"] \arrow[d, "S^1_G"'] & H^1(B,\mathcal{H}^B)^A \arrow[u, "i^1_B"'] \arrow[dd, "\mathrm{Res}^B_N"'] \\
H^1(BS,E) \arrow[d, "\mathrm{Res}^{BS}_{NS}"'] & \\
H^1(NS,E) \arrow[r, "\mathrm{Res}^{NS}_N"] & \mathrm{Hom}_S(N,E)
\end{tikzcd}$$

où Res^G_B désigne la restriction de G à B , etc. ; et S^1_G l'isomorphisme de Shapiro:

$$(S^1_G\psi)\ (b,s) = \psi(b,s)(x_o) \qquad \forall\ \psi \in Z^1(G,\mathcal{H}^B) \quad .$$

Ce diagramme est <u>commutatif</u> en vertu de (3.1.).

c) Considérons le diagramme

$$
(3.3)\qquad
\begin{tikzcd}
 & H^1(G,\mathcal{K}) \\
H^1(A,\mathcal{K}^B) \arrow[r, "\mathrm{Inf}_A^G"] \arrow[d, "S_A^1"'] & H^1(G,\mathcal{K}^B) \arrow[u, "i_G^1"'] \arrow[d, "S_G^1"] \\
H^1(S,E) \arrow[r, "\mathrm{Inf}_S^{BS}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & H^1(BS,E) \arrow[d, "\mathrm{Res}_{NS}^{BS}"] \\
H^1(S,E) \arrow[r, "\mathrm{Inf}_S^{NS}"] & H^1(NS,E)
\end{tikzcd}
$$

où Inf_A^G désigne le relèvement ("inflation") de A à G , etc...; et S_A^1 l'isomorphisme de Shapiro. On voit immédiatement que ce diagramme est <u>commutatif</u>.

n° 3.3. <u>Propriétés de</u> $H^2(B,\mathcal{K})$ <u>et</u> $H^2(G,\mathcal{K})$.

<u>Lemme</u> 3.1. <u>Soit</u>

$$\Phi \in \mathrm{Hom}(\otimes^n B, \mathcal{K}^B) \subset Z^n(B,\mathcal{K}^B)$$

<u>tel que</u> $\Phi(b_1,\ldots,b_n)(x)$ <u>soit nul dès que</u> $b_1 \in N_x$. <u>Alors</u> $i\circ\Phi$ <u>est un cobord dans</u> $\mathcal{K}$.

<u>Démonstration</u>.

a) Rappelons que $i\circ\Phi$ est défini par

$$(3.4)\qquad (i\circ\Phi)(b_1,\ldots,b_n)(f)(x) = \Phi(b_1,\ldots,b_n)(x)(f(x)) \qquad \forall f \in \Gamma(\mathcal{E}_1) .$$

Notons

$$P_x : B \longrightarrow B/N_x \sim T_x^*$$

l'application canonique ;

$$P : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}/\mathcal{N} \sim \mathcal{T}^*$$

l'application définie par l'ensemble des P_x ;

$$Q : \Gamma(\mathcal{H}om(\mathcal{C}^{*} \otimes \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Gamma(\mathcal{C}^{*} \otimes \mathcal{E}_1), \Gamma(\mathcal{E}_2))$$

l'application définie par

$$Q(F)(g) = F(x)(g(x))$$

pour $F \in \Gamma(\mathcal{H}om(\mathcal{C}^{*} \otimes \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2))$ et $g \in \Gamma(\mathcal{C}^{*} \otimes \mathcal{E}_1)$.

Notons enfin

$$\nabla \in \mathrm{Hom}(\Gamma(\mathcal{E}_1), \Gamma(\mathcal{C}^{*} \otimes \mathcal{E}_1))$$

une connexion sur le fibré $\mathcal{E}_1$.

Définissons

$$\Phi^{i} \in \mathrm{Hom}(\otimes^{n} B, \mathcal{K}^{B})$$

par

$$\Phi^{i}(b_1, \ldots, b_n) = \Phi(b_n, b_1, \ldots, b_{n-1}) ,$$

puis

$$\Phi^{ii} \in \mathrm{Hom}(\otimes^{n-1} B, \mathrm{Hom}(B, \mathcal{K}^{B}))$$

par

$$\Phi^{ii}(b_1, \ldots, b_{n-1})(b) = \Phi^{i}(b_1, \ldots, b_{n-1}, b) .$$

L'espace $\mathrm{Hom}(B, \mathcal{K}^{B})$ s'identifie à $\Gamma(\mathcal{H}om(\mathcal{B}, \mathcal{H}om(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2))$, et Φ^{ii} à un élément

$$\Phi^{iii} \in \mathrm{Hom}(\otimes^{n-1} B, \Gamma(\mathcal{H}om(\mathcal{B}, \mathcal{H}om(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2))))$$

$$\Phi^{iii}(b_1, \ldots, b_{n-1})(x)(b) = \Phi^{ii}(b_1, \ldots, b_{n-1})(b)(x) \quad ;$$

comme ceci est nul dès que $b \in N_x$, il existe un unique élément

$$\Phi^{iv} \in \mathrm{Hom}(\otimes^{n-1} B, \Gamma(\mathcal{H}om(B/\mathcal{N}, \mathcal{H}om(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2))))$$

tel que

$$\Phi^{iv}(b_1,\ldots,b_{n-1})(x)\ (P_x(b)) = \Phi^{iii}(b_1,\ldots,b_{n-1})(x)(b)\ .$$

Comme

$$\mathcal{H}om(B/\mathcal{N},\mathcal{H}om(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)) \sim \mathcal{H}om(\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)\ ,$$

Φ^{iv} définit un élément

$$\Phi^{v} \in \mathrm{Hom}(\otimes^{n-1}B,\ \Gamma(\mathcal{H}om(\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)))\quad ;$$

on a

$$\Phi^{v}(b_1,\ldots,b_{n-1})(x)(P_x(b)\otimes \xi) = \Phi(b,b_1,\ldots,b_{n-1})(x)(\xi) \tag{3.5}$$

pour tout $\xi \in \mathcal{E}_{1,x}$.

Composant Φ^{v} avec Q , on obtient

$$\Phi^{vi} \in \mathrm{Hom}(\otimes^{n-1}B,\mathrm{Hom}(\Gamma(\mathcal{C}^*\otimes\mathcal{E}_1),\ \Gamma(\mathcal{E}_2)))\ ;$$

enfin composant Φ^{vi} avec ∇ on obtient

$$\Phi^{vii} \in \mathrm{Hom}(\otimes^{n-1}B,\mathcal{H})\ ;$$

on a

$$\Phi^{vii}(b_1,\ldots,b_{n-1})(f)(x) = \Phi^{v}(b_1,\ldots,b_{n-1})(x)(\nabla f(x))\ . \tag{3.6}$$

b) On va montrer que $i\circ\Phi$ est le cobord de $i.\Phi^{vii}$ (ici $i = \sqrt{-1}$!). Pour cela prenons $f \in \Gamma(\mathcal{E}_1)$ et posons

$$A = d\Phi^{vii}(b_1,\ldots,b_n)(f)(x).$$

Comme Φ^{vii} est multilinéaire, on a

$$d\Phi^{vii}(b_1,\ldots,b_n) = (\pi(b_1)-I).\Phi^{vii}(b_2,\ldots,b_n)\ ,$$

d'où

$$A = e^{i<b_1,x>} . \Phi^{vii}(b_2,\dots,b_n)(e^{-i<b_1,.>} f)(x) - \Phi^{vii}(b_2,\dots,b_n)(f)(x) \ ;$$

d'après (3.6) :

$$A = e^{i<b_1,x>} . \Phi^{v}(b_2,\dots,b_n)(x) \ (\nabla (e^{-i<b_1,.>} .f)(x)) - \Phi^{v}(b_2,\dots,b_n)(f)(x) \ .$$

Comme ∇ est une connexion, on a

$$\begin{aligned} \nabla (e^{-i<b_1,.>} .f)(x) &= d.e^{-i<b_1,.>}(x) \otimes f(x) + e^{-i<b_1,x>} . \nabla f(x) \\ &= e^{-i<b_1,x>} .(-iP_x(b_1)\otimes f(x) + \nabla f(x)) \end{aligned}$$

d'où

$$A = -i.\Phi^{v}(b_2,\dots,b_n)(x)(P_x(b_1) \otimes f(x)) \ .$$

D'après (3.5)

$$A = - i.\Phi(b_1,\dots,b_n)(x)(f(x)) \ ;$$

enfin (3.4) termine la démonstration.

Lemme 3.2. Soit $\Phi \in Hom(\Lambda^2 B, \mathcal{K}^B)$ tel que $\Phi(b_1,b_2)(x)$ soit nul dès que b_1 et b_2 appartiennent à N_x . Alors $i \circ \Phi$ est un cobord.

Démonstration. On peut écrire

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

avec

$$\Phi_1 , \Phi_2 \in Hom(\otimes^2 B, \mathcal{K}^B)$$

$$\Phi_1(b_1,b_2)(x) = 0 \quad \text{dès que } b_1 \in N_x$$

$$\Phi_2(b_1,b_2)(x) = 0 \quad \text{dès que } b_2 \in N_x \ ;$$

posons

$$\widetilde{\Phi}_2(b_1,b_2) = \Phi_2(b_2,b_1)$$

$$\Psi = \Phi_2 + \widetilde{\Phi}_2 \ ;$$

ψ , étant symétrique, est un cobord (celui de l'application $b \longmapsto -\frac{1}{2}\psi(b,b)$) ; le lemme 3.1. montre que $i\circ\Phi_1$ et $i\circ\tilde{\Phi}_2$ sont des cobords, il en est donc de même de $i\circ\Phi_2$ et $i\circ\Phi$.

<u>Lemme 3.3. Il existe une application</u> V <u>rendant commutatif le diagramme suivant</u> :

$$\begin{tikzcd} H^2(B,\mathcal{K}^B)^A \arrow[rr, "i_B^2"] \arrow[dr, "\mathrm{Res}_N^B"'] & & H^2(B,\mathcal{K})^A \\ & \mathrm{Hom}_S(\Lambda^2 N,E) \arrow[ur, "V"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u>. Le lemme 3.2 affirme que i_B^2 se factorise comme suit :

$$\begin{tikzcd} \Gamma(\mathcal{H}om(\Lambda^2\mathcal{B},\mathcal{E})) \sim H^2(B,\mathcal{K}^B) \arrow[rr, "i_B^2"] \arrow[dr, "\mathrm{Res}"'] & & H^2(B,\mathcal{K}) \\ & \Gamma(\mathcal{H}om(\Lambda^2\mathcal{N},\mathcal{E})) \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

il suffit ensuite de considérer les éléments A-invariants.

<u>Remarque 3.1.</u> L'application V est en réalité l'inverse de l'isomorphisme $W^{0,2}$ mentionné au n° 3.1.

<u>Corollaire 3.1.</u> <u>Le diagramme suivant est commutatif</u> :

(3.7)
$$\begin{tikzcd} H^2(G,\mathcal{K}) \arrow[r, "\mathrm{Res}_B^G"] & H^2(B,\mathcal{K})^A \\ H^2(G,\mathcal{K}^B) \arrow[u, "i_G^2"] \arrow[r, "\mathrm{Res}_B^G"] \arrow[d, "S_G^2"] & H^2(B,\mathcal{K}^B)^A \arrow[u, "i_B^2"'] \arrow[dd, "\mathrm{Res}_N^B"'] \\ H^2(BS,E) \arrow[d, "\mathrm{Res}_{NS}^{BS}"] & \\ H^2(NS,E) \arrow[r, "\mathrm{Res}_N^{NS}"] & \mathrm{Hom}_S(\Lambda^2 N,E) \arrow[uuu, bend right=60, "V"'] \end{tikzcd}$$

n° 3.4. Autres propriétés des groupes Ext^n .

Dans ce n° on suppose que T_{x_o} admet un supplémentaire S-invariant dans B^* ; on choisit un projecteur S-invariant π de B sur N ; l'application

$$BS \ni (b,s) \longmapsto (\pi(b),s) \in NS$$

est un morphisme de groupes ; il en résulte des applications

$$\pi^n : H^n(NS,E) \longrightarrow H^n(BS,E) \quad ;$$

on a immédiatement

$$\mathrm{Res}_{NS}^{BS} \circ \pi^n = \mathrm{id} \tag{3.8}$$

Enfin on pose

$$T^n = i_G^n \circ (S_G^n)^{-1} \circ \pi^n$$

application de $H^n(NS,E)$ dans $H^n(G,\mathcal{H})$.

Proposition 3.1. L'application T^n est bijective pour $n = 0,1$ et injective pour $n = 2$.

(On peut en fait démontrer, en utilisant [3], que T^n est bijective pour tout $n \geq 0$).

Démonstration :

a) Bijectivité de T^o : π^o est bijective puisque, B opérant trivialement dans E , on a

$$H^o(NS,E) = H^o(BS,E) = H^o(S,E) \ ;$$

$(S_G^o)^{-1}$ et i_G^o le sont trivialement.

b) Bijectivité de T^1 . La commutativité des diagrammes (3.2) et (3.3) et la formule (3.8) entrainant la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & H^1(G,\mathcal{H}) \arrow[r, "\mathrm{Res}_B^G"] & H^1(B,\mathcal{H})^A \\
H^1(A,\mathcal{H}^B) \arrow[r, "\mathrm{Inf}_A^G"] & H^1(G,\mathcal{H}^B) \arrow[u, "i_G^1"] \arrow[r, "\mathrm{Res}_B^G"] & H^1(B,\mathcal{H}^B)^A \arrow[u, "i_B^1"'] \arrow[dd, "\mathrm{Res}_N^B"] \\
H^1(S,E) \arrow[u, "(s_A^1)^{-1}"] \arrow[r, "\mathrm{Inf}_S^{BS}"] & H^1(BS,E) \arrow[u, "(s_G^1)^{-1}"] & \\
H^1(S,E) \arrow[u, "id"] \arrow[r, "\mathrm{Inf}_S^{NS}"] & H^1(NS,E) \arrow[u, "\pi^1"] \arrow[r, "\mathrm{Res}_N^{NS}"] & \mathrm{Hom}_S(N,E) \arrow[uuu, bend right, "(W^{o1})^{-1}"']
\end{tikzcd} \quad ;$$

il en résulte que

$$\mathrm{Ker}\, T^1 \subset \mathrm{Ker}\, \mathrm{Res}_N^{NS} = \mathrm{Im}\, \mathrm{Inf}_S^{NS} \quad ;$$

l'injectivité de T^1 résulte alors de celle de $i_G^1 \circ \mathrm{Inf}_A^G$.

Surjectivité de T^1 : soit $\xi \in H^1(G,\mathcal{H})$; comme Res_N^{NS} est surjectif il existe $\alpha \in H^1(NS,E)$ tel que

$$\mathrm{Res}_B^G(\xi) = (W^{o1})^{-1}(\mathrm{Res}_N^{NS}(\alpha)) = \mathrm{Res}_B^G(T^1(\alpha)) \quad ;$$

alors

$$\begin{aligned} \xi - T^1(\alpha) \in \mathrm{Ker}\, \mathrm{Res}_B^G &= \mathrm{Im}(i_G^1 \circ \mathrm{Inf}_A^G) \\ &= \mathrm{Im}(T^1 \circ \mathrm{Inf}_S^{NS}) \ . \end{aligned}$$

c) Injectivité de T^2 . La commutativité du diagramme (3.7) et la formule (3.8) entrainent la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^2(G,\mathcal{K}) \arrow[r, "\mathrm{Res}_B^G"] & H^2(B,\mathcal{K})^A \\
H^2(G,\mathcal{K}^B) \arrow[u, "i_G^2"] \arrow[r, "\mathrm{Res}_B^G"] & H^2(B,\mathcal{K}^B)^A \arrow[u, "i_B^2"'] \arrow[dd, "\mathrm{Res}_N^B"'] \\
H^2(BS,E) \arrow[u, "(s_G^2)^{-1}"] & \\
H^2(NS,E) \arrow[u, "\pi^2"] \arrow[r, "\mathrm{Res}_N^{NS}"] & \mathrm{Hom}_S(\Lambda^2 N,E) \arrow[uuu, bend right=40, "V"']
\end{tikzcd} \quad ;$$

celle-ci entraine l'existence du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & H^2(G,\mathcal{K})_o & H^1(A,H^1(B,\mathcal{K})) \\
H^2(A,\mathcal{K}^B) \arrow[r, "\mathrm{Inf}_A^G"] & H^2(G,\mathcal{K}^B)_o \arrow[u, "i_G^2"] \arrow[r, "U_G"] & H^1(A,H^1(B,\mathcal{K}^B)) \arrow[u, "i_{AB}^{11}"'] \arrow[dd, "\mathrm{Res}_{SN}^{AB}"'] \\
H^2(S,E) \arrow[u, "(s_A^2)^{-1}"] \arrow[r, "\mathrm{Inf}_S^{BS}"] & H^2(BS,E)_o \arrow[u, "(s_G^2)^{-1}"] & \\
H^2(S,E) \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathrm{Inf}_S^{NS}"] & H^2(NS,E)_o \arrow[u, "\pi^2"] \arrow[r, "U_{NS}"] & H^1(S,\mathrm{Hom}(N,E)) \arrow[uuu, bend right=40, "(W^{11})^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

où les indices o et les applications U_G , U_{NS} ont le sens indiqué au lemme 2.1; on vérifie aisément que ce diagramme est commutatif.
D'autre part la démonstration du lemme 2.1. entraine facilement que

$$\mathrm{Ker}\ i_G^2 \subset \mathrm{Ker}(i_{AB}^{11} \circ U_G) \quad ;$$

donc

$$\mathrm{Ker}\ T^2 \subset \mathrm{Ker}\ U_{NS} = \mathrm{Im}\ \mathrm{Inf}_S^{NS} \quad ;$$

enfin $i^2_G \circ \mathrm{Inf}^G_A$ est injectif, car son noyau est l'image de l'application

$$d_2^{o1} \; : \; H^1(B,\mathcal{K})^A \longrightarrow H^2(A,\mathcal{K}^B) \; ,$$

mais cette application est ici nulle parce que T_{x_o} admet un supplémentaire S-invariant ([8], corollaire 7.1.).

§ 4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.1.

Le foncteur T, défini au théorème 1.1 sur la catégorie Ext(NS;$\mathcal{E}$), peut être prolongé en un foncteur de $\mathcal{C}_{NS}$ dans $\mathcal{C}_G$ défini de la même facon ; c'est un foncteur composé

$$T : \mathcal{C}_{NS} \xrightarrow{U} \mathcal{C}_{BS} \xrightarrow{V} \mathcal{C}_G$$

où $V = \mathrm{Ind}^G_{BS}$ et où U associe à tout NS-module (E,P) le BS-module (E,T) avec

$$T(b,s) = e^{i<x_o,b-\pi(b)>} . \rho(\pi(b),s) .$$

On va appliquer la proposition 2.1 ; tout d'abord T est fortement exact parce que U et V le sont (U l'est trivialement, et V- en vertu du du lemme 2.3) ; on doit montrer que pour $E_1,E_2 \in \mathcal{E}$, $T^n_{E_1,E_2}$ est bijectif pour $n = 0,1$ et injectif pour $n = 2$; cela résultera de la proposition 3.1 si on montre que $T^n_{E_1,E_2}$ coincide avec ce qu'on a noté T^n au n°3.4. Or, d'après la propriété (Vi) du n°2.3, on a

$$T^n_{E_1,E_2} = V^n_{U(E_1),U(E_2)} \circ U^n_{E_1,E_2} \quad ;$$

le lemme 2.3 montre que

$$T^n_{E_1,E_2} = i^n \circ \Lambda^n \circ (S^n)^{-1} \circ U^n_{E_1,E_2} \quad ;$$

l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}}(T(E_1),T(E_2))$ et l'application $\Lambda^n \circ (S^n)^{-1}$ du lemme 2.3 ne sont autres que l'espace $\mathcal{K}^B$ et l'application $(S^n)^{-1}$ de la proposition 3.1 ; reste à voir que $U^n_{E_1,E_2} = \pi^n$ - ce qui est facile en reprenant la deuxième construction du n°2.3 avec

$$E_2^n = C^\infty((NS)^{n+1} \; , \; E_2)$$

$$U(E_2)^n = C^{\infty}((BS)^{n+1}, U(E_2)) .$$

§ 5. Exemples.

n° 5.1. Groupes de Poincaré généralisés.

Prenons $A = SO_o(m,n)$, avec $m \leq n$, opérant naturellement dans $B = \mathbb{R}^{m+n}$; identifions B^* à B avec la dualité

$$<b,x> = b^1 x^1 + \ldots + b^m x^m - b^{m+1} x^{m+1} - \ldots - b^{m+n} x^{m+n} .$$

Prenons dans B^* un point x_o tel que

$$< x_o , x_o > \neq 0 ;$$

alors T_{x_o} est l'ensemble des x vérifiant

$$< x_o , x > = 0 ;$$

il admet un supplémentaire S-invariant, à savoir $\mathbb{R}.x_o$; N est de dimension 1 avec action triviale de S ; S est isomorphe à $SO_o(m-1,n)$ ou $SO_o(m,n-1)$, donc est semi-simple ou isomorphe à $\mathbb{R}$ (ceci dans le cas où $m = 1$, $n = 2$, $x_o = (0,0,1)$). Prenons pour $\mathcal{E}$ l'ensemble des NS-modules de la forme (E,ρ) avec

$$\rho(n,s) = e^{i<x_o,n>}.\sigma(s)$$

où σ est une représentation irréductible de dimension finie de S ; $\mathcal{E}$ a bien la propriété (P) du § 1 . Prenons $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ et posons $E = \mathrm{Hom}(E_1,E_2)$; la suite spectrale du n° 3.1 se simplifie :

$$E_2^{pq} = H^p(S,\mathrm{Hom}(\Lambda^q N,E))$$

$$= \begin{cases} H^p(S,E) & \text{pour } q = 0,1 \\ 0 & \text{pour } q \geq 2 \end{cases}$$

donc

a) si S est semi-simple, on a

$$\dim E_2^{pq} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0 \text{ ; } q = 0,1 \text{ ; } E_1 \sim E_2 \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

$$\dim \operatorname{Ext}^n_G(F_1,F_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0,1 \ ; \ E_1 \sim E_2 \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

On déduit de là, par des arguments classiques de théorie des représentations, qu'un objet indécomposable de la catégorie $\operatorname{Ext}(G\mathfrak{F})$ a nécessairement tous ses sous-quotients simples isomorphes à un même élément de $\mathfrak{F}$ (noté (F_o,π_o)), et qu'il y en a un et un seul ayant une longueur donnée ℓ ; sa description matricielle est la suivante:

$$\pi(g) = \begin{pmatrix} \pi_o(g) & \alpha_{12}(g).\pi_o(g) & \cdots\cdots & \alpha_{1\ell}(g).\pi_o(g) \\ 0 & \pi_o(g) & \cdots\cdots & \alpha_{2\ell}(g).\pi_o(g) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \pi_o(g) \end{pmatrix}$$

où α_{ij} est l'opérateur dans F_o défini par

$$(\alpha_{ij}(b,a).f)(x) = \frac{\langle b,x\rangle^{j-i}}{(j-i)!}.f(x) \ .$$

b) si $S \sim \mathbb{R}$, on a

$$\dim E_2^{pq} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0 \ , \ 1; q = 0,1; \ E_1 \sim E_2 \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

$$\dim \operatorname{Ext}^n_G(F_1,F_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0,2 \ ; \ E_1 \sim E_2 \\ 2 & \text{si } n = 1 \ ; \ E_1 \sim E_2 \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

Le théorème 1.1. affirme ce qui suit : notons (E_λ,ρ_λ), avec $\lambda \in \mathbb{C}$, le NS-module irréductible défini par $E_\lambda = \mathbb{C}$ et

$$\rho_\lambda(n,s) = e^{i\langle x_o,n\rangle + \lambda s} \ ;$$

$\mathcal{E}_\lambda$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ réduit à E_λ ; $\mathfrak{F}_\lambda$ le sous-ensemble (réduit à un élément) de F qui correspond à $\mathcal{E}_\lambda$; alors tout objet de $\operatorname{Ext}(G\mathfrak{F})$ est somme directe d'objets des divers $\mathrm{Ext}(G;\mathfrak{J}_\lambda)$; de plus chaque catégorie $\mathrm{Ext}(G;\mathfrak{J}_\lambda)$ est équivalente à celle des $\mathbb{R}^2$-modules de longueur finie à sous-quotients simples tous isomorphes à ρ_λ , ou encore à sous-quotients simples triviaux.

Remarque 5.1. Dans le cas où le point choisi x_o vérifie $< x_o , x_o > = 0$, la situation est beaucoup plus compliquée ; prenons par exemple $m = 1$, $n = 3$, $x_o = (1,0,0,1)$, σ triviale ; la représentation de G obtenue est la représentation dite de masse nulle et d'hélicité nulle ; le corollaire 1.1 est un défaut, car l'application i^1_G du n°3.4 n'est pas surjective (on a donné dans [8], § 10 un élément de $Z^1(G,\mathcal{H})$ qui opère non par multiplication, mais au moyen d'un opérateur différentiel d'ordre 1). On ignore si les catégories $\mathrm{Ext}(NS;\mathcal{E})$ et $\mathrm{Ext}(G;\mathfrak{J})$ sont ou non équivalentes.

n°5.2. Groupe affine de $\mathbb{R}^m$.

On prend $A = GL(m,\mathbb{R})$ opérant naturellement dans $B = \mathbb{R}^m$; on note G_m le groupe BA obtenu . Il y a deux orbites de A dans B^* : $\{0\}$ et $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$; la seconde contient le point $x_o = (1,0,\dots,0)$ dont le stabilisateur S est isomorphe à G_{m-1} ; de plus $N = 0$. Lorsque $m = 1$, S est trivial ; par récurrence sur m , on voit que G_m admet une représentation particulière, qu'on note (E_m,π_m) (du point de vue de la "méthode des orbites", elle correspond à l'unique orbite coadjointe de dimension $\dim G_m$) . Prenons pour $\mathcal{E}$ l'ensemble réduit au NS-module E_{m-1} ; alors $\mathfrak{J}$ est l'ensemble réduit à E_m ; comme $N = 0$ la suite spectrale du n°3.1 montre que

$$\mathrm{Ext}^n_{G_m}(E_m,E_m) \sim \mathrm{Ext}^n_{G_{m-1}}(E_{m-1},E_{m-1}) = 0 \text{ pour } n \geq 1 \ ;$$

il en résulte que tout élément de la catégorie $\mathrm{Ext}(G_m;\mathfrak{J})$ est un multiple de E_m .

n°5.3. Groupe de Heisenberg.

On prend $A = \mathbb{R}$ opérant dans $B = \mathbb{R}^2$ par

$$a \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} ,$$

et $x_o = (0,1)$; alors

$$\begin{aligned} T_{x_o} &= \{x = (x^1,x^2) \mid x^2 = 0\} \\ S &= \{1\} \\ N &= \{b = (b^1,b^2) \mid b^1 = 0\} \sim \mathbb{R} . \end{aligned}$$

Même conclusion qu'a l'exemple du n°5.1.

n°5.4. Groupe nilpotent $G_{5,3}$.

On prend $A = \mathbb{R}^2$ opérant dans $B = \mathbb{R}^3$ par

$$a = (a^1, a^2) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(a^1)^2 & a^1 & 1 \end{pmatrix} \quad ;$$

on identifie B^* à B avec la dualité usuelle ; on prend $x_o = (0,1,0)$; alors

$$T_{x_o} = \{x \mid x^2 = x^3 = 0\}$$

$$S = \{a \mid a^1 = 0\} \sim \mathbb{R}$$

$$N = \{b \mid b^1 = 0\} \sim \mathbb{R}^2 \quad ;$$

l'action de S sur N est triviale, donc $NS \sim \mathbb{R}^3$. On voit facilement que T_{x_o} n'admet pas de supplémentaire S-invariant dans B^* .

Prenons pour $\mathcal{E}$ l'ensemble réduit au NS-module (E_o, ρ) avec $E_o = \mathbb{C}$ et

$$\rho(n,s) = e^{i\langle x_o, n\rangle} \quad ;$$

la suite spectrale du n°3.1. montre que, pour $\mathcal{K} = \mathrm{Hom}(F_1, F_2)$, $E_1 = E_2 = E_o$:

$$\dim H^n(G, \mathcal{K}) = \dim H^n(NS, \mathbb{C}) = \binom{n}{3} \quad ;$$

en particulier

$$\dim H^1(G, \mathcal{K}) = \dim H^1(NS, \mathbb{C}) = 3 \quad ;$$

mais il n'existe pas d'isomorphisme de $H^1(NS, \mathbb{C})$ sur $H^1(G, \mathcal{K})$ respectant la nullité des cup-produits ($H^*(NS, \mathbb{C})$ est l'algèbre extérieure de $\mathbb{R}^3$, tandis que $H^1(G, \mathcal{K})$ contient un élément de carré non nul) ; la remarque 2.3 montre que les catégories $\mathrm{Ext}(NS; \mathcal{E})$ et $\mathrm{Ext}(G; \mathfrak{F})$ ne sont pas équivalentes.

Noter que d'après [4] les résultats de nos n°5.3 et 5.4. restent valables en remplacant les G-modules induits au sens C^∞ par les G-modules C^∞ associés aux G-modules induits au sens unitaire.

§ 6 . REMARQUES ET GÉNÉRALISATIONS DIVERSES.

n°6.1. Commentaires sur le choix des groupes et des représentations.

Nous avons choisi d'étudier la classe des groupes de Lie inhomogènes, pour une grande part, à cause de leur importance en Physique Théorique (groupes de déplacements, groupes de Poincaré, de Galilée,....) ; ici comme dans [8] nous avons cherché une théorie rendant compte des travaux de G. Rideau sur le groupe de Poincaré usuel. De plus, comme le montrent d'autres travaux contenus dans la même fascicule, les résultats obtenus dans ce cadre sont étonnamment voisins d'autres, valables dans d'autres situations (groupes de Lie semi-simples ou nilpotents).

Nous avons remplacé les représentations induites au sens unitaire par des représentations induites au sens C^∞ ; l'expérience montre en effet que les groupes Ext^n entre représentations unitaires sont en général très pathologiques : de dimension infinie et non séparés ; par contre, dans le cadre des représentations induites au sens C^∞, les techniques de Géométrie Différentielle (par exemple les connexions sur les fibrés vectoriels) conduisent à des résultats maniables et satisfaisants ; précisons que, en remplacant les représentations unitaires par les représentations C^∞ associées, on n'aboutirait pas à des résultats plus satisfaisants. Ce choix présente néanmoins un inconvénient évident : la catégorie des représentations étudiées est définie intrinséquement à partir, non pas du groupe G lui-même, mais de sa décomposition en produit semi-direct $B \ltimes A$; il existe cependant un cas où l'on pourrait choisir une catégorie de représentations définie intrinséquement à partir de G : c'est celui des groupes de déplacements (i.e. celui où A est compact) ; on peut alors choisir la catégorie des $(\mathfrak{g},K)$-modules, avec $K = A$, et espérer de bons résultats concernant ses objets de longueur finie ; un travail à paraître de R. Lalement est consacré à ce problème.

n°6.2. Relations avec la méthode des orbites.

Le sous-groupe NS qui joue un rôle fondamental dans ce travail est assez voisin du sous-groupe G(f) de la méthode des orbites. Pour être un peu plus précis sans entrer dans trop de détails, disons seulement que si on écrit

$$\mathfrak{g} = B \oplus \mathfrak{A} \quad , \quad \mathfrak{g}^* = B^* \oplus \mathfrak{A}^* ,$$

si on note (y,x) un élément quelconque de $\mathfrak{g}^*$, π la projection de $\mathfrak{g}^*$ sur B^* , et x_o un élément fixé de B^* , alors

a) il y a une correspondance bijective entre l'ensemble des S-orbites dans s^* et celui des G-orbites dans $\pi^{-1}(X)$ obtenue comme suit : soit $\mathcal{O}$ une S-orbite dans s^* ; on choisit un élément z de $\mathcal{O}$, on le prolonge arbitrairement en un élément y de $\mathfrak{A}^*$, enfin on prend la G-orbite de $f = (y,x_o)$;

b) G(f) est une extension de S(z) par N dont on sait calculer la classe dans $H^2(S(z),N)$; en particulier si T_{x_o} a un supplémentaire S-invariant dans B^* , G(f) est produit semi-direct $N \ltimes S(z)$; si de plus z est S-invariant, alors G(f)=NS ;

c) en termes un peu vagues, si une représentation σ de S est associé à l'orbite S.z et à une représentation τ_o de S(z) de différentielle $iz|_{s(z)}$, alors la représentation

$$\pi = \mathrm{Ind}_{BS}^{G}(e^{ix_o} \times \sigma)$$

est associée à l'orbite G.f et à la représentation τ de G(f) définie par

$$\tau(b,a) = e^{i<x_o,b>} \cdot \tau_o(a) \qquad \forall (b,a) \in G(f) .$$

Ces considérations et le théorème 1.1 rendant plausible la conjecture suivante :

(C) Soit G un groupe de Lie ; si un ensemble $\mathfrak{J}$ de G-modules est associé par la méthode des orbites à un ensemble $\mathcal{E}$ de G(f)-modules, il existe une équivalence de catégories entre Ext(G(f) ; $\mathcal{E}$) et Ext(G;$\mathfrak{J}$).
Les parties 2 et 4 de ce fascicule justifient (très partiellement !) cette conjecture ; disons seulement que

- la conjecture (C) semble pouvoir être vraie "génériquement" (par exemple pour les orbites coadjointes de dimension maximum (voir n°5.4))

- le théorème 1.1. entraîne l'exactitude de la conjecture (C) dans la situation présente, si T_{x_o} admet un supplémentaire S-invariant dans B^* , et si en outre S est abélien ; ou encore si S est compact et opère trivialement sur N (ajoutons que cette dernière propriété est vraie dès que l'orbite $A.x_o$ est de dimension maximum).

n°6.3 <u>Résultats analogues en théorie des déformations formelles de représentations</u>.

Rappelons (voir par exemple [12]) qu'on appelle <u>déformation formelle</u> d'un G-module (E,U) toute série formelle

$$\Phi = \sum_{n=o}^{\infty} \lambda^n \Phi_n$$

ayant les propriétés suivantes :

- Φ_n est une application de G dans End E telle que l'application

$$G \times E \ni (g,x) \longmapsto \Phi_n(g).x \in E$$

soit continue

- $\Phi_o = U$
- $\Phi(g).\Phi(g') = \Phi(gg')$. ;

et que deux déformations formelles Φ , Φ' sont <u>équivalentes</u> s'il existe une série formelle

$$A = \sum_n \lambda^n A_n$$

vérifiant

- $A_n \in$ End E
- A_o est inversible
- $\Phi'(g).A = A.\Phi(g)$.

Nous allons donner des déformations formelles une autre définition, plus adaptée à notre propos. Nous appellerons <u>déformation formelle</u> de (E,U) tout couple (V,D) ayant les propriétés suivantes :

- V est un G-module
- $D \in \mathrm{Hom}_G(V,V)$
- D est injectif
- Coker D est isomorphe à E en tant que G-module
- pour tout $n \geq 1$, Im D^n admet un supplémentaire topologique dans E
- $\bigcap_n \mathrm{Im}\, D^n = 0$ et E est la limite projective des Coker D^n .

Nous dirons que deux déformations formelles (V,D) et (V',D') sont <u>équivalentes</u> s'il existe un isomorphisme vectoriel topologique de V sur V' entrelaçant les actions de G ainsi que les opérateurs D et D' . On remarquera que Coker $D^n \in \mathrm{Ext}(G;\{E\})$. On notera Def(G;E) la catégorie des déformations formelles de E .

<u>Proposition 6.1.</u> <u>Reprenons les notations et les hypothèses du théorème 1.1. mais en supposant $\mathcal{E}$ réduit à un seul objet E ; alors $\mathfrak{F}$ est réduit à un objet F . Il existe une équivalence de catégories entre</u> Def(NS;E) <u>et</u> Def(G;F) <u>qu'on construit</u>

par le même procédé qu'au théorème 1.1.

Idée de la démonstration

Soit $(V,D) \in Def(NS;E)$; on le transforme en un élément de $Def(BS;E)$ comme au théorème 1.1, puis on applique le foncteur Ind_{BS}^{G} à V et à D . On doit montrer

a) que les applications

$$T : Hom_{Def(NS;E)}((V,D),(V',D')) \longrightarrow Hom_{Def(G;F)}(T(V,D),T(V',D'))$$

sont bijectives, ce qui est immédiat ;

b) que tout objet $(\overline{V},\overline{D})$ de $Def(G;F)$ est isomorphe à un objet $T(V,D)$; pour cela on remarque que $\overline{V}$ est la limite projective des Coker $\overline{D}^{n}$, qui appartiennent à $Ext(G;\{F\})$; on leur applique le foncteur

$$S : Ext(G;\{F\}) \longrightarrow Ext(NS;\{E\})$$

fourni par le théorème 1.1 ; on obtient un système projectif dans $Ext(NS;\{E\})$ dont on prend la limite projective dans $\mathcal{C}_{NS}$.

***

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI. Algèbre, chapitre 10.

[2] P. DELORME. Self-extensions de modules de Harish-Chandra irréductibles et une question de I.M. GELFAND (même fascicule).

[3] F. DU CLOUX. Sur les n-extensions des représentations induites des produits semi-directs (même fascicule)

[4] F. DU CLOUX. Extensions entre représentations unitaires irréductibles des groupes de Lie nilpotents (même fascicule).

[5] I.M. GELFAND-V.A. PONOMAREV. Remarks on the classification of a pair of commuting linear transformations in a finite - dimensional space (Funkt.Anal. i ego Priloj., t.3, n° 4, 1969, p.81-82).

[6] I.M. GELFAND-M.I.GRAEV-V.A. PONOMAREV. Classification des représentations linéaires du groupe $SL(2,\mathbb{C})$ (Dokl.Akad. Nauk,p.194, n° 5, 1970, p.1002-1005).

[7] A. GUICHARDET. Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie (CEDIC-Nathan, 1980).

[8] A. GUICHARDET. Extensions des représentations induites des produits semi-directs (J. reine angew. Math.,t.310, 1979, p.7-32).

[9] H. KRALJEVIC. Indecomposable Harish-Chandra modules (Berichte Math-Stat. Sektion Forschungszentrum Graz, n° 113, 1979).

[10] S. MAC LANE. Catégories for the working mathematician (Graduate Texts in Math., n° 5, 1971).

[11] L.A. NAZAROVA - A.V. ROITER. Un problème de I.M. GELFAND (Funkt. Anal. i ego Prilog., t.7, n° 4, 1973, p.54-69).

[12] G. PINCZON. Deformations of representations. (Letters in Math. Phys.,t.1, 1977, p.535-544).

[13] G. RIDEAU. Cours sur les extensions de représentations du groupe de Poincaré (Louvain, 1980).

[14] B. SPEH. Indecomposable représentations of semi-simple Lie groups (Trans. Amer. Math. Soc., t.265, 1921, p.1-34).

A.GUICHARDET
Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
91128 Palaiseau Cedex
France

PARTIE VI

RÉGULARISATION EN HOMOLOGIE

par

J. PICHAUD

Astérisque 124-125 (1985)
Société Mathématique de France

0. INTRODUCTION.

Il convient tout d'abord, G étant un groupe localement compact séparable, de définir des foncteurs $H_*(G,.)$ dans la catégorie $\underline{C}_G$ des G-modules continus et dans la catégorie $\underline{C}_G^\infty$ des G-modules différentiables.

Lorsque G est un groupe de Lie, les $H_*(G,.)$ ont été définis dans [2] pour la catégorie $\underline{C}_G^\infty$ comme foncteurs dérivés à gauche du foncteur $V : E \longmapsto E_G$, où E_G désigne le quotient de E par le sous-espace engendré par les $g.a - a$ lorsque g décrit G et a décrit E. Il convient de signaler que, dans $\underline{C}_G^\infty$, le foncteur $\underline{V} : E \longmapsto \underline{E}_G$, où $\underline{E}_G$ est le séparé de E_G , a les mêmes foncteurs dérivés à gauche (cf. [2]).

Si G n'est plus nécessairement de Lie, on renvoie à [6] pour la définition et les propriétés des G-modules différentiables, et on définira $H_*(G,.)$ comme précédemment.

En ce qui concerne l'homologie dans $\underline{C}_G$, le choix d'une "bonne" définition est moins simple. En effet, on ne sait pas si les foncteurs V et $\underline{V}$ donnent ou non les mêmes foncteurs dérivés à gauche, question qui se ramène à la suivante : dg étant une mesure de Haar à gauche, une fonction vectorielle continue à support compact f telle que $\int f(g)dg = 0$ est-elle de la forme $g \longmapsto \sum_1^n (\phi_i(g_i g) - \phi_i(g))$?

Il y a donc, a priori, deux théories de l'homologie continue.

Ce qui plaide en faveur du choix de V, c'est que ce foncteur est fortement exact à droite : si $E \longrightarrow E' \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ est une suite fortement exacte de $\underline{C}_G$ (cf. [5] p.332), alors la suite d'espaces vectoriels topologiques $E_G \longrightarrow E'_G \longrightarrow E''_G \longrightarrow 0$ est exacte et de plus E''_G s'identifie topologiquement au quotient $E'_G/\mathrm{Ker}(E'_G \longrightarrow E''_G)$. Cette propriété a naturellement pour conséquence que L^0V s'identifie topologiquement à V.
Ce n'est pas le cas de $\underline{V}$ qui n'est même pas exact à droite.
Cependant, nous verrons que $\underline{V}$ a les mêmes foncteurs dérivés que le foncteur

$E \longmapsto (E_\infty)_G$ lequel est fortement exact à droite. On aura donc $L^o\underline{V}(E) = (E_\infty)_G$.

Dans ce qui suit nous définissons les $H_*(G,.)$ comme foncteurs dérivés à gauche de $\underline{V}$, et l'objet de cet article est d'établir que, si E est un objet de $\underline{C}_G$, l'inclusion de E_∞ dans E conduit à un isomorphisme topologique de $H_*(G,E_\infty)$ sur $H_*(G,E)$.

Le choix de $\underline{V}$ est donc motivé par le résultat : $\underline{V}$ est adéquat au problème de la régularisation; si V n'a pas les mêmes foncteurs dérivés à gauche que $\underline{V}$ il ne le sera pas.

Nous allons maintenant indiquer des définitions, des notations et des résultats relatifs aux fonctions vectorielles C^∞ sur un groupe localement compact séparable G et aux vecteurs C^∞ d'une représentation de G. Sur tout ceci cf. [3] et [6] .

Un tel groupe G est métrisable et dénombrable à l'infini, il possède un sous-groupe ouvert G_1 et une suite décroissante $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de bons sous-groupes - i.e. de sous-groupes compacts distingués de G_1 tels que les groupes quotients G_1/k_n soient des groupes de Lie - telle que $\bigcap_n k_n = \{e\}$.
Alors l'ensemble G/k_n des classes à gauche mod k_n est une variété différentiable, et si E est un espace localement convexe complet on note $C^\infty(G/k_n,E)$ l'espace des fonctions C^∞ de G/k_n dans E et $C_c^\infty(G/k_n,E)$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact.

Soit $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de compacts de G recouvrant G et telle que

(i) K_o est un voisinage de e,

(ii) $\forall p\in N \quad K_p \subset K_{p+1}$ et $k_oK_pk_o = K_p$.

Dans ce cas, $C_c^\infty(G/k_n,E) = \varinjlim_n \left(C_c^\infty(G/k_n,K_p/k_n)\hat{\otimes} E \right)$.
On pose $C_c^\infty(G,E) = \varinjlim_n C_c^\infty(G/k_n,E)$.
L'espace $C^\infty(G,E)$ est alors défini comme ensemble des applications continues f de G dans E telles que, pour tout élément ϕ de $C_c^\infty(G)$, $f\,\phi$ appartienne à $C_c^\infty(G,E)$.
Il est muni de la topologie initiale relative aux applications $f \longmapsto f\,\phi$ de $C^\infty(G,E)$ dans $C_c^\infty(G,E)$ lorsque ϕ décrit $C_c^\infty(G)$.

Ceci permet d'écrire $C^\infty(G,E) = \varprojlim_p C^\infty(G,K_p,E)$.

Signalons que l'on obtient les mêmes espaces de fonctions en utilisant les classes à droite $k_n\backslash G$.

Supposons maintenant que E est un G-module continu et notons U l'action de G dans F. Alors un vecteur a de E est dit C^∞ si l'application $\tilde{a}$, qui à un élément g de G associe $U_g.a$, appartient à $C^\infty(G,E)$.

L'ensemble E_∞ des vecteurs C^∞ de E est égal à $\bigcup_n E_\infty^{k_n}$, où $E_\infty^{k_n}$ désigne l'espace des vecteurs C^∞ du G_1/k_n-module E^{k_n}.
On munit naturellement E_∞ de la topologie limite inductive des topologies usuelles des $E_\infty^{k_n}$.

La catégorie $\underline{C}_G^\infty$ des modules différentiables a pour objets les G-modules E tels que $E = E_\infty$ et pour flèches les G-morphismes continus.
On note T_∞ le foncteur de $\underline{C}_G$ dans $\underline{C}_G^\infty$ qui à E associe E_∞ .
La propriété essentielle de T_∞ est de transformer toute suite exacte de G-morphismes forts de $\underline{C}_G$ en une suite exacte de G-morphismes forts de $\underline{C}_G^\infty$.
Donnons enfin un critère caractérisant les modules différentiables :
si E est un objet de $\underline{C}_G$ tel que $E = \varinjlim_n E_n$ où chaque E_n est un G_1/k_n-module différentiable, E est un G-module différentiable.

1. HOMOLOGIE DANS $\underline{C}_G$

Rappelons qu'un objet P de $\underline{C}_G$ est dit relativement projectif si pour tout diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & & \downarrow f \\ A & \underset{s}{\overset{\Pi}{\rightleftarrows}} & B \end{array}$$

où Π est une G-surjection forte, de section linéaire continue s, et f un G-morphisme, il existe un G-morphisme $\bar{f} : P \longrightarrow A$ tel que $\Pi \circ \bar{f} = f$.

Alors si $0 \longleftarrow E \longleftarrow P^1 \longleftarrow P^2 \longleftarrow \cdots$ est une résolution forte relativement projective de E dans $\underline{C}_G$, l'homologie du complexe $0 \longleftarrow \underline{P}^1_G \longleftarrow \underline{P}^2_G \longleftarrow \cdots$ est à isomorphisme topologique près indépendante de la résolution choisie, on la note $H_*(G,E)$.

<u>Exemples d'objets relativement projectifs</u> :
Notons U l'action de G dans E. Alors l'espace $C_c(G,E)$ des fonctions continues à support compact de G dans E, muni de sa topologie limite inductive usuelle, est relativement projectif pour l'action de G suivante :

$$\forall g \in G \qquad \forall \phi \in C_c(G,E) \qquad \forall x \in G \qquad (g.\phi)(x) = U_g.\phi(g^{-1}x).$$

Dans ce cas (cf. [1]) un relèvement $\bar{f}$ de f est donné par :

$$\forall \phi \in C_c(G,E) \qquad \bar{f}(\phi) = \int g.s.g^{-1}.f(\phi_g)\, dg \quad , \text{ où } \phi_g(x) = \phi(x)\theta(x^{-1}g) \ ,$$

θ étant un élément fixé de $C_c(G)$ d'intégrale 1 pour la mesure de Haar à gauche dg.
On démontre de façon analogue que $C_c(G,E)$ muni de la représentation régulière gauche est relativement projectif.

<u>Construction d'une résolution forte relativement projective de E.</u>
Posons $K^1(E) = C_c(G,E),\dots, K^{n+1}(E) = C_c(G,K^n(E))$. Algébriquement $K^n(E) = C_c(G^n,E)$ mais la topologie de $K^n(E)$ est en général moins fine que celle de $C_c(G^n,E)$.
L'action de G sur $K^n(E)$ que l'on utilisera est la représentation régulière gauche de G dans $C_c(G,K^{n-1}(E))$, autrement dit G opère par la représentation régulière gauche sur la "première" variable uniquement.

<u>PROPOSITION 1</u> : <u>Soit E un objet de $\underline{C}_G$ et U l'action de G dans E. Le complexe</u>

$$0 \longleftarrow E \underset{\sigma_1}{\overset{\delta_0}{\rightleftarrows}} K^1(E) \underset{\sigma_2}{\overset{\delta_1}{\rightleftarrows}} K^2(E) \rightleftarrows \cdots$$

<u>où δ_n et σ_{n+1} sont définis par</u>

(i) $\forall \phi \in K^{n+1}(E)$

$$(\delta_n \phi)(g_o,\ldots,g_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \int \phi(g_o,\ldots,g_{i-1},g,g^{-1}g_i,g_{i+1},\ldots,g_{n-1})\, dg + (-1)^n \int U_g.\ \phi(g_o,\ldots,g_{n-1},g)\, dg \quad ,$$

(ii) $\forall a \in E \qquad (\sigma_1 a)(g) = (U_{g^{-1}}.a)\ \theta(g)$,

<u>et si</u> $n \geqslant 1 \qquad \forall \phi \in K^n(E)$

$$(\sigma_{n+1}\ \phi)(g_o,\ldots,g_n) = \theta(g_o)\ \phi(g_o g_1,g_2,\ldots,g_n)$$

<u>avec</u> $\theta \in C_c(G)$ et $\int \theta(g)\, dg = 1$,

<u>est une résolution forte relativement projective de E</u>.

Démonstration :

(i) On vérifie facilement que, pour x élément de G, $\delta_n(x\phi) = x(\delta_n\phi)$.

Il reste à établir la continuité de δ_n.

Notons V_m l'action régulière gauche de G sur $K^m(E)$ et ℓ_m l'application de $K^{m+1}(E)$ dans $K^m(E)$ définie par $\ell_m(\psi) = \int V_m(g)\ \psi(g)\, dg$. L'application ℓ_m est linéaire continue de $K^{m+1}(E)$ dans $K^m(E)$.

En considérant l'élément ϕ de $K^{n+1}(E)$ comme élément de $K^{n-i}(K^{i+1}(E))$, on voit que l'application

$$\phi \longmapsto \left[(g_o,\ldots,g_{n-1}) \longmapsto \int \phi(g_o,\ldots,g_{i-1},g,g^{-1}g_i,\ldots,g_{n-1})\, dg\right]$$

n'est autre que l'application $\phi \longmapsto \ell_i \circ \phi$ de $K^{n+1}(E) = K^{n-i}(K^{i+1}(E))$ dans $K^{n-i}(K^i(E)) = K^n(E)$, d'où sa continuité.

De même l'application $\phi \longmapsto \left[(g_o,\ldots,g_{n-1}) \longmapsto \int U_g.\ \phi(g_o,\ldots,g_{n-1},g)\, dg\right]$

est l'application $\phi \longmapsto \delta_o \circ \phi$ de $K^{n+1}(E) = K^n(K^1(E))$ dans $K^n(E)$ qui est continue.

(ii) Continuité de σ_{n+1}.

En écrivant que σ_{n+1} est l'application de $K^1(K^{n-1}(E))$ dans $K^2(K^{n-1}(E))$ qui à ϕ associe $(g_o,g_1) \longmapsto \theta(g_o)\ \phi(g_o g_1)$, on voit que c'est aussi l'application de $K^n(E)$ dans $K^1(K^n(E))$ qui à ϕ associe $g_o \longmapsto V_n(g_o^{-1})\phi\ \ \theta(g_o)$ laquelle, comme σ_1 , est continue.

(iii) Enfin on voit facilement que l'on a $\sigma_n \circ \delta_{n-1} + \delta_n \circ \sigma_{n+1} = 1_{K^n(E)}$.

A partir de cette résolution on obtient explicitement un complexe donnant $H_*(G,E)$ en remarquant que le sous-espace fermé H de $K^1(E)$ engendré par les $\phi(g^{-1}.) - \phi(.)$ lorsque g décrit G et ϕ décrit $K^1(E)$ est le noyau de l'application $\lambda : K^1(E) \longrightarrow E$ qui a ϕ associe $\int \phi(g)\, dg$. En effet, le polaire $H°$ de H contient $\mathbb{R}\, dg \otimes E'$, où E' est le dual topologique de E; en se restreignant aux éléments de la forme $(\xi(g^{-1}.) - \xi(.)) \otimes a$ où $\xi \in C_c(G)$ et $a \in E$, on voit que $H°$ est exactement $\mathbb{R}\, dg \otimes E'$. Il résulte alors du théorème des bipolaires que H est le noyau de λ .

PROPOSITION 2 : $H_*(G,E)$ est l'homologie du complexe

$$0 \longleftarrow E \xleftarrow{d} K^1(E) \xleftarrow{d} K^2(E) \longleftarrow \cdots$$

où $\forall \psi \in K^n(E)$

$$\begin{aligned}(d_n\psi)(g_1,\dots,g_{n-1}) = & \int \psi(g,g_1,\dots,g_{n-1})\, dg \\ & + \sum_1^{n-1} (-1)^i \int \psi(g_1,\dots,g_{i-1},g,g^{-1}g_i,\dots,g_{n-1})\, dg \\ & + (-1)^n \int U_g . \psi(g_1,\dots,g_{n-1},g)\, dg.\end{aligned}$$

Démonstration :

On utilise que $\underline{K^n(E)}_G$ est isomorphe à $K^{n-1}(E)$. Il reste à calculer les applications d_n. Soit ψ un élément de $K^n(E)$. On a $d_n(\psi) = \int \delta_n(\theta \otimes \psi)(g_o)\, dg_o$.

$$\begin{aligned}\text{Or}\quad \delta_n(\theta\otimes\psi)(g_o,\dots,g_{n-1}) = & \int \theta(g)\, \psi(g^{-1}g_o,g_1,\dots,g_{n-1})dg \\ & + \sum_1^{n-1} (-1)^i \int \theta(g_o)\, \psi(g_1,\dots,g_{i-1},g,g^{-1}g_i,\dots,g_{n-1})\, dg \\ & + (-1)^n \int U_g . \psi(g_1,\dots,g_{n-1},g)\theta(g_o)\, dg.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{D'où}\quad \delta_n(\theta\otimes\psi)(g_o,\dots,g_{n-1})\, dg_o = & \int \theta(g)\, \psi(g^{-1}g_o,g_1,\dots,g_{n-1})\, dg\, dg_o \\ & + \sum_1^{n-1} (-1)^i \int \psi(g_1,\dots,g_{i-1},g,g^{-1}g_i,\dots,g_{n-1})\, dg \\ & + (-1)^n \int U_g . \psi(g_1,\dots,g_{n-1},g)\, dg.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Comme}\quad \int \theta(g)\, \psi(g^{-1}g_o,g_1,\dots,g_{n-1})\, dg\, dg_o & = \int \theta(g)\, \psi(g_o,g_1,\dots,g_{n-1})\, dg\, dg_o \\ & = \int \psi(g_o,g_1,\dots,g_{n-1})\, dg\end{aligned}$$

on obtient le résultat annoncé.

Remarque : Comme le foncteur $\underline{V} : E \longmapsto \underline{E}_G$ n'est pas exact à droite, on n'a pas nécessairement $H_o(G,E) = \underline{E}_G$. D'après ce qui précède, on a $H_o(G,E) = E/(\mathrm{Im}\, d_1)$ où d_1 est l'application de $K^1(E)$ dans E qui à ψ associe $\int (I - U_g).\psi(g)\, dg$. Lorsque ψ est de la forme $g \longmapsto \xi(g)\otimes a$ où $a \in E$ et $\xi \in C_c(G)$ est d'intégrale 1, on a $d_1\psi = a - U(\xi)a$.

Soit $x \in G$. Il existe une suite $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $C_c(G)$, d'intégrales égales à 1, convergeant vaguement dans $M(G)$ vers la mesure de Dirac δ_x. Alors $a - U_x.a$ est adhérent à $\mathrm{Im}\, d_1$. Il en résulte que $\overline{\mathrm{Im}\, d_1}$ est le sous-espace fermé engendré par les $U_x.a - a$, pour $x \in G$ et $a \in E$, et que l'espace $\underline{H}_o(G,E)$, séparé de $H_o(G,E)$ est $\underline{E}_G$.

Pour terminer cette partie, nous allons exhiber une autre résolution relativement projective de E que nous utiliserons ultérieurement.

PROPOSITION 3 : (i) On munit $C_c^\infty(G^n,E)$ d'une structure de G-module continu en posant, pour g appartenant à G et f appartenant à $C_c^\infty(G^n,E)$,

$$g.f = U_g.f(g^{-1}.,\dots,g^{-1}.).$$

(ii) Avec cette structure $C_c^\infty(G^n,E)$ est un objet relativement projectif de $\underline{C}_G$.

Démonstration de (i) :

Ce résultat est trivial si G est un groupe de Lie. Lorsque G est localement compact séparable, on a $C_c^\infty(G^n,E) = \varinjlim_p C_c^\infty((G/k_p)^n,E)$ et chaque $C_c^\infty((G/k_p)^n,E)$ est pour cette action un G-module continu. La proposition annoncée repose sur le fait qu'une limite inductive stricte de G-modules continus est un G-module continu.

Démonstration de (ii) :

Si l'on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & C_c^\infty(G^n,E) \\ & & \downarrow f \\ A & \underset{s}{\overset{\Pi}{\rightleftarrows}} & B \end{array}$$

on fixe un élément θ de $C_c^\infty(k_o\backslash G_1)$ tel que $\int\theta(g)\,dg = 1$, et pour $\phi\in C_c^\infty(G^n,E)$ on pose $\phi_g(x_1,\ldots,x_n) = \phi(x_1,\ldots,x_n)\,\theta(x_1^{-1}g)$.

Alors l'application $\bar{f}$ définie par $\bar{f}(\phi) = \int g.s.g^{-1}.f(\phi_g)\,dg$ est un relèvement de f. L'intégrale a un sens car, pour ϕ fixée, il existe p tel que ϕ appartienne à $C_c^\infty((G/k_p)^n,E)$ et alors ϕ_g appartient à $C_c^\infty((G/k_p)^n,E)$; de plus $g \longmapsto \phi_g$ est continue de G dans $C_c^\infty((G/k_p)^n,E)$.

La continuité de $\bar{f}$ repose sur le fait que, pour tout p et pour tout compact K de G tel que $Kk_o = K$, la famille d'applications $\phi \longmapsto \phi_g$ de $C_c^\infty((G/k_p)^n,(K/k_p)^n,E)$ dans lui-même est équicontinue quand g décrit le compact KC, où C est le support de θ.

PROPOSITION 4 : Le complexe

$$0 \longleftarrow E \underset{\sigma_1}{\overset{\partial_0}{\rightleftarrows}} C_c^\infty(G,E) \underset{\sigma_2}{\overset{\partial_1}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{\sigma}{\overset{\partial}{\rightleftarrows}} C_c^\infty(G^n,E) \underset{\sigma}{\overset{\partial}{\rightleftarrows}} \cdots$$

où $(\partial\phi)(g_o,\ldots,g_{n-1}) = \sum_0^{n-1}(-1)^i\int\phi(g_o,\ldots,g_{i-1},g,g_{i+1},\ldots,g_{n-1})\,dg$

et $(\sigma\phi)(g_o,\ldots,g_n) = \theta(g_o)\,\phi(g_1,\ldots,g_n)$, θ étant un élément de $C_c^\infty(k_o\backslash G_1)$ tel que $\int\theta(g)\,dg = 1$, est une résolution forte relativement projective de E.

Démonstration : Dans [1] P.Blanc a montré que le complexe $C_c(G^n,E)$, avec les flèches ∂ et σ, constituait une résolution forte relativement projective de E. Comme on se restreint ici aux espaces $C_c^\infty(G^n,E)$, le seul point à vérifier est la continuité des flèches du complexe. Ceci est immédiat en se restreignant aux espaces $C_c^\infty((G/k_p)^n,E)$ et en utilisant le fait que dg est invariante à droite par k_p.

2. HOMOLOGIE DANS $\underline{C}_G^\infty$.

Remarquons tout d'abord que si E est un objet de $\underline{C}_G^\infty$ il n'y aura pas lieu de distinguer entre l'homologie continue de E (considéré comme objet de $\underline{C}_G$) et l'homologie différentiable de E (calculée à partir d'une résolution forte relativement projective dans $\underline{C}_G^\infty$). En effet :

PROPOSITION 5 : Soit P un objet de $\underline{C}_G^\infty$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) P est relativement projectif dans $\underline{C}_G$,

(ii) P est relativement projectif dans $\underline{C}_G^\infty$.

Démonstration : Il est immédiat que (i) implique (ii). Supposons donc P relativement projectif dans $\underline{C}_G^\infty$ et considérons dans $\underline{C}_G$ le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & & \downarrow f \\ A & \underset{s}{\overset{\Pi}{\rightleftarrows}} & B \end{array}$$

où f est un G-morphisme continu, A,B des objets de $\underline{C}_G$,
Π une surjection forte de section linéaire continue s.

Associons lui le diagramme suivant de $\underline{C}_G^\infty$:

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & & \downarrow f \\ A_\infty & \underset{s_\infty}{\overset{\Pi_\infty}{\rightleftarrows}} & B_\infty \end{array}$$

où Π_∞ est la restriction de Π à A_∞
et $s_\infty = \int g.s.g^{-1}\ \theta(g)\ dg$ (cf. [6]).

L'application Π_∞ est une G-surjection forte dans $\underline{C}_G^\infty$; par conséquent il existe un G-morphisme continu $\bar{f}$ de P dans A_∞ relevant f, et $\bar{f}$ est a fortiori un G-morphisme continu de P dans A.

Exemple : L'espace $C_c^\infty(G,E) = \varinjlim_n C_c^\infty(k_n\backslash G,E)$ muni de la représentation régulière gauche est un G-module différentiable. En considérant E comme module trivial, il résulte de la proposition 3 qu'il est relativement projectif.
Cet espace joue un rôle important en homologie grâce à la propriété suivante, établie par P.Blanc et D.Wigner (cf. [2]) :
Notons $H_{C_c^\infty(G,E)}$ le sous-espace engendré par les $\phi(g^{-1}.) - \phi(.)$ lorsque ϕ décrit $C_c^\infty(G,E)$ et g décrit G. Alors lorsque G est un groupe de Lie $H_{C_c^\infty(G,E)}$ est l'espace des fonctions d'intégrale nulle pour la mesure de Haar à gauche dg; il en résulte que $H_{C_c^\infty(G,E)}$ est fermé.
Nous allons montrer que cette propriété se généralise au cas où G est localement compact séparable.

PROPOSITION 6 : Le sous-espace $H_{C_c^\infty(G,E)}$ est l'ensemble des fonctions de $C_c^\infty(G,E)$ d'intégrale nulle.

Démonstration : Soit f un élément de $C_c^\infty(G,E)$ tel que $\int f(g)\ dg = 0$. On note K le support de f. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de G telle que $G = \coprod_{i\in I} x_iG_1$, l'espace $C_c^\infty(G,E)$ est topologiquement isomorphe à $\bigoplus_{i\in I} C_c^\infty(x_iG_1,E)$, et chaque application $h \longmapsto h(x_i\ .\ )$ de $C_c^\infty(x_iG_1,E)$ dans $C_c^\infty(G_1,E)$ est un isomorphisme topologique.
Il existe une partie finie J de I telle que K soit contenu dans $\coprod_{i\in J} x_iG_1$; alors $f = \sum_{i\in J} f_i$ avec f_i élément de $C_c^\infty(x_iG_1,E)$.
Notons f_i' l'élément de $C_c^\infty(G_1,E)$ défini par $f_i'(g_1) = f_i(x_ig_1)$.

On a $\int f'_i(g_1)\, dg_1 = \int f_i(g)\, dg$, en notant dg_1 la restriction à G_1 de dg.
Posons $h = \sum_J f'_i$. On a $f = h + \sum_J (f_i - f'_i)$.
Comme $\sum_J f_i - f'_i$ appartient à $H_{C_c^\infty}(G,E)$, il reste à montrer que h appartient à $H_{C_c^\infty}(G,E)$. Mais h est un élément de $C_c^\infty(G_1,E)$ et il existe un bon sous-groupe k_n tel que h s'identifie à un élément de $C_c^\infty(G_1/k_n,E)$. De l'égalité $\int h(g_1)\, dg_1 = 0$ on déduit que h est un élément d'intégrale nulle de $C_c^\infty(G_1/k_n,E)$ pour toute mesure de Haar à gauche sur G_1/k_n. Il en résulte que h appartient à $H_{C_c^\infty}(G_1/k_n,E)$ et donc a fortiori à $H_{C_c^\infty}(G,E)$.

COROLLAIRE : Si P est un objet relativement projectif de $\underline{C}_G^\infty$ on a $P_G = \underline{P}_G$.

Ceci résulte de ce que P est un G-module facteur direct de $C_c(G,P)$, l'action de G sur ce dernier étant la représentation régulière gauche.

Ainsi dans la catégorie $\underline{C}_G^\infty$ les foncteurs $E \longmapsto E_G$ et $E \longmapsto \underline{E}_G$ ont mêmes foncteurs dérivés à gauche et il n'y a qu'une théorie de l'homologie différentiable.

3. RÉGULARISATION.

Il est logique d'essayer d'adopter la même méthode qu'en cohomologie (cf.[6]); comme on sait déjà que T_∞ transforme toute suite exacte forte en une suite exacte forte, il resterait à montrer (i) que T_∞ transforme tout objet relativement projectif de $\underline{C}_G$ en un objet relativement projectif de $\underline{C}_G^\infty$, (ii) que pour tout objet E de $\underline{C}_G$, l'inclusion de E_∞ dans E conduit à un isomorphisme topologique de $\underline{(E_\infty)}_G$ sur $\underline{E}_G$.

Nous verrons plus loin que l'assertion (ii) est exacte; malheureusement en ce qui concerne (i) le problème reste ouvert et nous pouvons seulement montrer que si P est un objet relativement projectif de $\underline{C}_G$, P_∞ est acyclique.

Le projectif le plus simple de $\underline{C}_G$ dont on peut déterminer l'image par T_∞ est certainement $C_c(G,E)$, muni de la représentation régulière gauche. En effet, de la suite d'inclusions continues $C_c^\infty(G,E) \hookrightarrow C_c(G,E) \hookrightarrow C(G,E)$ on déduit la suite d'inclusions continues $C_c^\infty(G,E) \hookrightarrow C_c(G,E)_\infty \hookrightarrow \varinjlim_n C^\infty(k_n\backslash G,E)$ d'où il résulte immédiatement que les éléments de $C_c(G,E)_\infty$ sont des fonctions C^∞ à support compact. On a donc algébriquement : $C_c(G,E)_\infty = C_c^\infty(G,E)$.

Ceci a pour conséquence que l'espace $(C_c(G,E)_\infty)_G$ est topologiquement isomorphe à E. En effet si $\lambda : C_c(G,E)_\infty \longrightarrow E$ est l'intégrale, il résulte de la proposition 6 que $(C_c(G,E)_\infty)_G$ s'identifie algébriquement avec $C_c^\infty(G,E)/\mathrm{Ker}\,\lambda$ c'est-à-dire avec E. Du point de vue topologique, $(C_c(G,E)_\infty)_G$ a a priori une topologie plus fine que celle de E car la restriction de λ à $C_c(G,E)$ est continue; mais d'autre part l'identité de $C_c^\infty(G,E)_G$ dans $(C_c(G,E)_\infty)_G$ étant continue, le résultat s'ensuit immédiatement.

Il en résulte que, si P est un objet relativement projectif de $\underline{C}_G$, l'inclusion de P_∞ dans P induit un isomorphisme topologique de $(P_\infty)_G$ sur $\underline{P}_G$. En effet, P est alors un G-module facteur direct de $C_c(G,P)$ et les espaces $(P_\infty)_G$ et $\underline{P}_G$ s'identifient au même facteur direct topologique de P.
On a donc établi :

PROPOSITION 7 : Les foncteurs $E \longmapsto \underline{E}_G$ et $E \longmapsto (E_\infty)_G$, définis sur $\underline{C}_G$, ont mêmes foncteurs dérivés à gauche.

Nous allons montrer maintenant que la topologie de $C_c(G,E)_\infty$ est en général strictement moins fine que celle de $C_c^\infty(G,E)$.
Pour cela on va déterminer explicitement la topologie de $C_c(G,E)_\infty$ lorsque G est un groupe de Lie.

LEMME : On suppose que G est un groupe de Lie et F un objet de $\underline{C}_G$. La topologie de F_∞ est la topologie initiale relative aux applications $a \longmapsto (D\tilde{a})(e)$ de F_∞ dans F quand D décrit l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(G)$.

Démonstration : Par définition la topologie de F_∞ est l'image réciproque de la topologie de $C^\infty(G,F)$ par l'application $a \longmapsto \tilde{a}$; or la topologie de $C^\infty(G,F)$ est définie par les semi-normes $\phi \longmapsto \sup_K q(D\phi)$ où K est un compact de G, q une semi-norme continue et D un opérateur différentiel d'ordre fini. On peut se borner à choisir D dans $\mathcal{U}(G)$, ce que l'on fera dans la suite. Autrement dit une base de voisinages de 0 dans $C^\infty(G,F)$ est constituée par les intersections finies des parties $V(K,D,W) = \{h \in C^\infty(G,F) \mid Dh(K) \subset W\}$ où $D \in \mathcal{U}(G)$, K est un compact de G et W un voisinage convexe équilibré de 0 dans F.
Pour décrire la topologie de F_∞ on va expliciter la trace de V(K,D,W) sur F_∞ via l'application $a \longmapsto \tilde{a}$.
A l'opérateur D considéré comme opérateur différentiel invariant à gauche est associée une distribution T_D de support $\{e\}$, et on a

$$(D\tilde{a})(x) = \int \tilde{a}(xy^{-1})\, dT_D(y) = U_x . \int \tilde{a}(y^{-1})\, dT_D(y) = U_x . (D\tilde{a}(e)).$$

Donc $D\tilde{a} = (D\tilde{a}(e))^\sim$.

$$\begin{aligned}\text{Alors}\quad \tilde{a} \in V(K,D,W) &\iff \forall x \in K \quad (D\tilde{a})(x) \in W\\ &\iff \forall x \in K \quad U_x . (D\tilde{a}(e)) \in W\\ &\iff (D\tilde{a})(e) \in \bigcap_{x \in K} U_{x^{-1}}(W) .\end{aligned}$$

Mais la famille des applications linéaires $U_{x^{-1}}$ de F dans F est, quand x décrit le compact K équicontinue. Ainsi $\bigcap_{x\in K} U_{x^{-1}}(W)$ est un voisinage de 0 dans F que l'on notera W_K.
Il est clair que, lorsque W décrit une base de voisinages de 0 dans F et K les compacts de G, les W_K constituent une base de voisinages de 0 dans F.

Appliquons ce lemme à $F = C_c(G,E)$.

Soit f un élément de $C_c(G,E)$. On a $\widetilde{Df}(e) : t \longmapsto \int f(yt)\, dT_D(y)$.
Or $\int f(yt)\, dT_D(y) = \int \check{f}(t^{-1}y^{-1})\, dT_D(y) = (D\check{f})(t^{-1})$, avec $\check{f}(u) = f(u^{-1})$.
On obtient $(\widetilde{Df})(e) = (D\check{f})^{\vee}$, et la topologie de $C_c(G,E)_\infty$ est la topologie initiale relative aux applications $f \longmapsto (D\check{f})^{\vee}$ de $C_c(G,E)_\infty$ dans $C_c(G,E)$.
Mais $f \longmapsto (D\check{f})^{\vee}$ est l'opérateur différentiel invariant à droite associé à D.
Il en résulte :

<u>PROPOSITION 8</u> : <u>L'espace</u> $C_c(G,E)_\infty$ <u>est algébriquement identique à</u> $C_c^\infty(G,E)$. <u>Lorsque</u> G <u>est un groupe de Lie</u>, $C_c(G,E)_\infty$ <u>est muni de la topologie initiale relative aux applications</u> $f \longmapsto Df$ <u>de</u> $C_c(G,E)_\infty$ <u>dans</u> $C_c(G,E)$, D <u>décrivant</u> $\mathcal{U}(G)$.

<u>Remarque</u> 1 : Si $E = \mathbb{R}$ cette topologie sur $C_c(G)_\infty$ donne comme dual l'ensemble des distributions d'ordrefini. Par référence à cette situation, on notera $D_f(E)$ l'espace topologique $C_c(G,E)_\infty$.
<u>Remarque</u> 2 : Lorsque G est localement compact séparable, la description de la topologie de $C_c(G,E)_\infty$ est plus compliquée. On peut montrer cependant que $C_c(G,E)_\infty$ et $C_c^\infty(G,E)$ ont les mêmes bornés et induisent la même topologie sur ces bornés.
Cette dernière propriété permet de montrer que $C_c(G,E)_\infty$ est acyclique grâce au lemme suivant :
<u>LEMME</u> : Soit F un objet de $\underline{C}_G$. On suppose que F est muni de deux topologies localement convexes séparées complètes T_1 et T_2 pour lesquelles on a : (F,T_1) et (F,T_2) ont les mêmes compacts et induisent la même topologie sur ces compacts. Alors les espaces d'homologie de (F,T_1) et de (F,T_2) sont algébriquement identiques.

Démonstration : On utilise la proposition 2 et le fait que $K^n(F)$ s'identifie comme ensemble à $C_c(G^n,F)$. Avec les hypothèses qui sont faites, les espaces de fonctions continues à support compact de G^n dans (F,T_1) et dans (F,T_2) sont identiques comme ensembles.

Pour en revenir à $C_c(G,E)$, on a : $H_0(G,C_c(G,E)_\infty) = E$ et $\forall n \geqslant 1$ $H_n(G,C_c(G,E)_\infty) = 0$. On en déduit immédiatement que si P est un objet relativement projectif de $\underline{C}_G$, alors P_∞ est acyclique.
Ce résultat nous a permis dans [7] d'utiliser la résolution forte de E_∞ par des modules acycliques suivante :

$$0 \longleftarrow E_\infty \longleftarrow D_f(E) \longleftarrow D_f(K^1(E)) \longleftarrow \dots\dots$$

et au moyen d'un bicomplexe dégénéré, de montrer l'isomorphisme algébrique de $H_*(G,E)$ et de $H_*(G,E_\infty)$.

Nous allons procéder différemment ici pour obtenir un isomorphisme topologique.

<u>THEOREME</u> : <u>L'inclusion de</u> E_∞ <u>dans</u> E <u>induit un isomorphisme topologique de</u> $H_*(G,E_\infty)$ <u>sur</u> $H_*(G,E)$.

Démonstration : On considère les deux résolutions fortes relativement projectives

$$0 \leftarrow E \xleftarrow{\partial} C_c^\infty(G,E) \xleftarrow{\partial} \cdots \xleftarrow{\partial} C_c^\infty(G^n,E) \xleftarrow{\partial} \cdots$$

$$0 \leftarrow E_\infty \xleftarrow{\partial} C_c^\infty(G,E_\infty) \xleftarrow{\partial} \cdots \xleftarrow{\partial} C_c^\infty(G^n,E_\infty) \xleftarrow{\partial} \cdots .$$

On va établir que, pout tout n, l'inclusion de $C_c^\infty(G^n,E_\infty)$ dans $C_c^\infty(G^n,E)$ induit un isomorphisme topologique de $\underline{C_c^\infty(G^n,E_\infty)}_G$ sur $\underline{C_c^\infty(G^n,E)}_G$, le théorème s'en déduisant immédiatement.

<u>LEMME</u> : <u>Soient</u> M <u>et</u> N <u>deux objets de</u> $\underline{C}_G$ <u>tels que</u>

(i) N <u>est inclus dans</u> M <u>et l'action de</u> G <u>sur</u> N <u>est la restriction de l'action de</u> G <u>sur</u> M, <u>notée</u> U,

(ii) N <u>est dense dans</u> M,

(iii) <u>l'inclusion de</u> N <u>dans</u> M <u>est continue</u>,

(iv) <u>Pour tout élément</u> a <u>de</u> M, U(θ)a <u>est un élément de</u> N <u>et l'application linéaire</u> $\ell : M \to N$ <u>qui à</u> a <u>associe</u> U(θ)a <u>est continue.</u>

<u>Alors l'inclusion de</u> N <u>dans</u> M <u>induit un isomorphisme topologique de</u> $\underline{N}_G$ <u>sur</u> $\underline{M}_G$.

Démonstration du lemme : Rappelons que θ est un élément de $C_c^\infty(k_o\backslash G)$ d'intégrale égale à 1. On note H_M (resp. H_N) le sous-espace engendré par les $U_g.a - a$ lorsque g décrit G et a décrit M (resp. N). Comme $U(\theta)a - a = \int (U_g.a - a)\,\theta(g)\,dg$ et comme l'intégrale définit un élément de l'adhérence de H_M dans M, on a $\ell(a) \approx a$ mod $\bar{H}_M$ et ℓ induit une application bijective continue de M_G dans $N/(N \cap \bar{H}_M)$ en associant à la classe de a la classe de $\ell(a)$. L'application réciproque provient de l'injection canonique de N dans M, qui d'après (iii) est continue; on a donc un isomorphisme topologique de $\underline{M}_G$ sur $N/(N\cap\bar{H}_M)$.

On va montrer maintenant que $N\cap\bar{H}_M$ est l'adhérence de H_N dans N. On notera $\bar{H}_N^N$ et $\bar{H}_N^M$ les adhérences respectives de H_N dans N et M.

Comme N est dense dans M, on a $\bar{H}_M = \bar{H}_N^M$. D'autre part $N\cap\bar{H}_N^M$ est un fermé de N qui contient H_N, donc il contient aussi $\bar{H}_N^N$. Il reste donc à montrer que $N\cap\bar{H}_N^M$ est inclus dans $\bar{H}_N^N$.

Soit $a \in N\cap\bar{H}_N^M$; a est donc limite dans M d'éléments de la forme $\sum_1^n U_{g_i}.b_i - b_i$ où les b_i appartiennent à N. Mais ℓ étant continue de M dans N, $\ell(a)$ est limite dans N d'éléments de la forme $\sum_1^n U(\theta)(U_{g_i}.b_i - b_i)$ où les b_i appartiennent à N. En écrivant que

$U_x(U_{g_i}.b_i - b_i) = (U_x.U_{g_i}.b_i - U_{g_i}.b_i) + (U_{g_i}.b_i - b_i) - (U_x.b_i - b_i)$

on voit que $U(\theta)(U_{g_i}.b_i - b_i)$ appartient à $\bar{H}_N^N$. Il en résulte que $\ell(a)$ appartient à $\bar{H}_N^N$. Comme a est un élément de N, $a - \ell(a)$ est un élément de $\bar{H}_N^N$ et on obtient que a appartient à $\bar{H}_N^N$ ce qui achève la démonstration du lemme.

On peut remarquer que M et M_∞ vérifient les conditions du lemme et quel'on a en particulier un isomorphisme de $\underline{M_\infty}_G$ sur $\underline{M}_G$.

Pour démontrer le théorème, nous allons montrer que les espaces $M = C_c^\infty(G^n,E)$

et $N = C_c^\infty(G^n,E_\infty)$ vérifient les conditions du lemme précédent.
On notera V l'action de G dans $C_c^\infty(G^n,E)$ et aussi dans $C_c^\infty(G^n,E_\infty)$.
Les conditions (i) et (iii) sont trivialement vérifiées. En ce qui concerne (ii) et (iv) nous supposerons d'abord que G est un groupe de Lie avant de traiter le cas général.

(a) Cas où G est un groupe de Lie.

Il suffit de remarquer que N contient M_∞ pour obtenir (ii) et le début de (iv). En effet l'inclusion de M dans $C(G^n,E)$ est continue, donc M_∞ s'envoie continuement dans $C(G^n,E)_\infty$ et on sait, d'après [5] p.348, que $C(G^n,E)_\infty = C^\infty(G^n,E_\infty)$.
Les éléments de M_∞ sont donc des fonctions C^∞ de G^n dans E_∞ ; comme leurs supports doivent être compacts, on en déduit que M_∞ est inclus dans N.
Il ne reste alors qu'à établir la continuité de l'application

$$\begin{aligned} \ell \ : C_c^\infty(G^n,E) &\longrightarrow C_c^\infty(G^n,E_\infty) \\ \phi &\longmapsto V(\theta)\phi \end{aligned}$$

où $(V(\theta)\ \phi)(x_1,\dots,x_n) = \int \theta(g)\ U_g\cdot\ \phi(g^{-1}x_1,\dots,g^{-1}x_n)\ dg.$

On va montrer que, pour tout compact K de G, la restriction de ℓ au sous-espace $C_c^\infty(G^n,K^n,E)$ des fonctions à support dans K^n est continue.
Si le support de ϕ est inclus dans K^n celui de $V(\theta)\phi$ est inclus dans $(CK)^n$, où C est le support de θ, et on est ramené à établir la continuité de ℓ considérée comme application de $C_c^\infty(G^n,K^n,E)$ dans $C_c^\infty(G^n,(CK)^n,E_\infty)$.
Mais $C_c^\infty(G^n,K^n,E) = C_c^\infty(G^n,K^n)\,\hat{\otimes}\,E$ et la continuité de ℓ équivaut à la continuité de l'application bilinéaire suivante :

$$\begin{aligned} C_c^\infty(G^n,K^n)\times E &\longrightarrow C_c^\infty(G^n,(CK)^n,E_\infty) \\ (\phi,a) &\longmapsto \int \theta(g)\phi(g^{-1}\cdot,\dots,g^{-1}\cdot)U_g\cdot a\ dg. \end{aligned}$$

Si Δ élément de $\mathcal{U}(G^n)$ est considéré comme opérateur différentiel invariant à gauche, on a $\Delta(V(\theta)(\phi\otimes a)) = V(\theta)(\Delta\phi\otimes a)$.
Il nous reste donc à montrer que, pour toute semi-norme continue q sur E_∞, l'application

$$\begin{aligned} C_c^\infty(G^n,K^n)\times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\phi,a) &\longmapsto \sup_{x\in(CK)^n} |q(\ell(\phi,a)(x))| \end{aligned}$$

est continue.
Or une famille de semi-normes continues définissant la topologie de E_∞ est constituée par les applications $q : b \longmapsto p(D(\tilde{b})(e))$, p décrivant l'ensemble des semi-normes continues sur E et D décrivant $\mathcal{U}(G)$.
Soit $b = \ell(\phi,a)$. Si $x = (x_1,\dots,x_n)$ est un élément de G^n, on pose

$$b_x = \ell(\phi,a)(x) = \int \theta(g)\ \phi(g^{-1}x_1,\dots,g^{-1}x_n)\ U_g\cdot a\ dg.$$

On a $D(b_x)^\sim(e) = \int \tilde{b}_x(y^{-1})\ dT_D(y)$ donc

$$D(b_x)^{\sim}(e) = \int U_{y^{-1}g}.a\ \theta(g)\ \phi(g^{-1}x_1,\dots,g^{-1}x_n)\ dg\ dT_D(y)$$
$$= \int U_g.a\ \theta(yg)\ \phi(g^{-1}y^{-1}x_1,\dots,g^{-1}y^{-1}x_n)\ dg\ dT_D(y)$$
$$= \int U_g.a\ \xi(g,x)\ dg$$

où $\xi(g,x) = \int \theta(yg)\ \phi(g^{-1}y^{-1}x_1,\dots,g^{-1}y^{-1}x_n)\ dT_D(y)$.

Alors $q(D\widetilde{b}_x(E)) \leqslant \int p(U_g.a)\ |\xi(g,x)|\ dg$.

Comme g décrit le compact C, l'ensemble des U_g est une partie équicontinue de $L(E,E)$ et il existe une semi-norme continue p' sur E telle que pour tout g dans C on ait $p(U_g.a) \leqslant p'(a)$.

On en déduit $q(D\widetilde{b}_x(e)) \leqslant p'(a)\ \mathrm{mes}(C) \sup_{g\in C} |\xi(g,x)|$

et $\sup_{x\in(CK)^n} q(D\widetilde{b}_x(e)) \leqslant p'(a)\ \mathrm{mes}(C) \sup_{\substack{g\in C\\ x\in(CK)^n}} |\xi(g,x)|$.

Il suffit alors de montrer que l'application $\phi \longmapsto \sup\{|\xi(g,x)|\ |\ g\in C, x\in(CK)^n\}$ est une semi-norme continue sur $C_c^\infty(G^n,K^n)$ pour conclure.

Notons ϕ_x l'élément de $C_c^\infty(G)$ défini par : $\forall y\in G \quad \phi_x(y) = \phi(yx_1,\dots,yx_n)$ et $\check{\theta}$ la fonction définie par : $\forall y\in G \quad \check{\theta}(y) = \theta(y^{-1})$

On a $\xi(g,x) = \int \check{\theta}(g^{-1}y^{-1})\ \phi_x(g^{-1}y^{-1})\ dT_D(y)$
$= D(\check{\theta}\ \phi_x)(g^{-1})$.

Or l'application de $C_c^\infty(G)$ dans lui-même qui à η associe $D(\check{\theta}\eta)$ est un opérateur différentiel sur G que l'on note Δ.

On a alors $\xi(g,x) = \Delta(\phi_x)(g^{-1})$.

Lorsque x décrit $(CK)^n$, la famille d'applications $\phi \longmapsto \phi_x$ de $C_c^\infty(G^n)$ dans $C_c^\infty(G)$ est équicontinue. Comme l'application $\eta \longmapsto \sup\{|\Delta(\eta)(g)|\ |\ g\in G\}$ est une semi-norme continue sur $C_c^\infty(G)$, il en résulte que l'application $\phi \longmapsto \sup\{|\xi(g,x)|\ |\ g\in C\ ,\ x\in(CK)^n\}$ est une semi-norme continue sur $C_c^\infty(G^n,K^n)$.

(b) <u>Cas où G est localement compact séparable</u>.

Nous allons d'abord montrer que, pour tout élément α de $C_c^\infty(G_1)$ et pour tout élément ϕ de $C_c^\infty(G^n,E)$, $V(\alpha)\phi$ est un élément de $C_c^\infty(G^n,E_\infty)$, ce qui prouvera (ii) et le début de (iv).

Soit $\alpha\in C_c^\infty(G_1)$. Il existe un bon sous-groupe k_p tel que l'on ait $\alpha\in C_c^\infty(k_p\diagdown G)$ et $\phi \in C_c^\infty((G/k_p)^n,E)$.

Alors $\psi = V(\alpha)\phi = \int \alpha(g)\ U_g.\ \phi(g^{-1}.,\dots,g^{-1}.)\ dg$ est une application de $(G/k_p)^n$ dans E^{k_p} qui est C^∞ à support compact.

Vérifions que $\forall x\in(G/k_p)^n$, $\psi(x)$ est un élément de $E_\infty^{k_p}$

considérons donc l'application $\psi(x)^{\sim} : G_1/k_p \longrightarrow E^{k_p}$

$$y \longmapsto U_y \cdot \psi(x) .$$

On a, si $x = (x_1,\dots,x_n)$,

$$U_y \cdot \psi(x) = \int \alpha(y^{-1}g)\, U_g \cdot \psi(g^{-1}yx_1,\dots,g^{-1}yx_n)\, dg ,$$

ce qui prouve que $\psi(x)^{\sim}$ est une fonction C^∞ de G_1/k_p dans E^{k_p} et donc que $\psi(x)$ appartient à $E_\infty^{k_p}$.

Alors, le fait que ψ appartienne à $C_c^\infty((G/k_p)^n, E_\infty^{k_p})$ repose sur le lemme suivant:

<u>LEMME</u> : <u>Soient</u> F <u>un espace localement convexe complet et</u> $(F_i)_{i\in I}$ <u>une famille d'espaces localement convexes complets tels que la topologie de</u> F <u>soit la topologie initiale relativement à une famille d'applications linéaires</u> $(f_i)_{i\in I}$, <u>où</u> f_i <u>appartient à</u> $L(F,F_i)$. <u>On suppose, de plus, qu'il existe</u> i_0 <u>dans</u> I <u>tel que</u> f_{i_0} <u>soit injective. Alors, étant donnée une variété différentiable</u> X, <u>une application</u> ψ <u>de</u> X <u>dans</u> F <u>est</u> C^∞ <u>si et seulement si, pour tout</u> i, $f_i\circ\psi$ <u>est</u> C^∞ <u>de</u> X <u>dans</u> F_i.

Démonstration : L'application $\prod_{i\in I} f_i : F \longrightarrow \prod_{i\in I} F_i$ est, compte tenu des hypothèses, un isomorphisme topologique sur son image. Il résulte du théorème de Hahn-Banach que toute forme linéaire continue sur F se prolonge en une forme linéaire continue sur $\prod_{i\in I} F_i$. Comme $\left(\prod_{i\in I} F_i\right)' = \bigoplus_{i\in I} F_i'$, le résultat annoncé s'obtient en remarquant qu'une application de X dans F est C^∞ si et seulement si elle est scalairement C^∞.

On utilise alors que la topologie de $E_\infty^{k_p}$ est la topologie initiale relative aux applications $b \longmapsto D\tilde{b}(e)$ de $E_\infty^{k_p}$ dans E^{k_p} quand D décrit $U(G_1/k_p)$. Parmi ces applications il y a l'identité. On peut donc utiliser le lemme précédent, et il reste à vérifier que l'application $x \longmapsto D\,\widetilde{\psi(x)}(e)$ de $(G_1/k_p)^n$ dans E^{k_p} est C^∞.

Mais $D\,\widetilde{\psi(x)}(e) = \int \alpha(yg)\, U_g \cdot \psi(g^{-1}y^{-1}x_1,\dots,g^{-1}y^{-1}x_n)\, dT_D(y)\, dg$ et le résultat vient de ce que α et ψ sont des fonctions C^∞.

Pour achever la démonstration, nous devons montrer que l'application $\phi \longmapsto V(\theta)\phi$ de $C_c^\infty(G^n,E)$ dans $C_c^\infty(G^n,E_\infty)$ est continue.

Soit $(x_j)_{j\in J}$ une famille de représentants des classes à gauche de G^n mod. G_1^n.

On a alors $C_c^\infty(G^n,E) = \bigoplus_{j\in J} C_c^\infty(G_1^n x_j, E)$ et $C_c^\infty(G^n,E_\infty) = \bigoplus_{j\in J} C_c^\infty(G_1^n x_j, E_\infty)$.

Comme θ appartient à $C_c^\infty(k_0\backslash G_1)$, ℓ envoie chaque $C_c^\infty(G_1^n x_j,E)$ dans $C_c^\infty(G_1^n x_j,E)$, et il suffit de vérifier que la restriction de ℓ à $C_c^\infty(G_1^n,E)$ est continue.

Ceci équivaut à la continuité, pour chaque bon sous-groupe k_p et chaque compact K_q, de l'application bilinéaire

$$C_c^\infty((G_1/k_p)^n,(K_q/k_p)^n) \times E \longrightarrow C_c^\infty((G_1/k_p)^n,(K_q/k_p)^n,E_\infty^{k_p})$$

qui à (ϕ,a) associe $V(\theta)(\phi \otimes a)$.
Comme θ appartient à $C_c^\infty(k_o \backslash G_1)$, la démonstration est rigoureusement identique à celle donnée en (a); il n'y a qu'à remplacer G par G_1/k_p, K par K_q/k_p et E_∞ par $E_\infty^{k_p}$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1]. P.Blanc. Projectifs dans la catégorie des G-modules topologiques. C.R.A.S., t.289,1979,p.161-163.

[2]. P.Blanc et D.Wigner. Homologie des représentations des groupes de Lie et dualité de Poincaré. A paraître dans "Letters in Math. Physics".

[3]. F.Bruhat. Distributions sur un groupe localement compact. Bull. Soc. Math. France,t.89,1961,p.43-75.

[4]. H.Cartan et S.Eilenberg. Homological algebra. Princeton University Press.1956.

[5]. A.Guichardet. Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie. Cédic/F.Nathan.1980.

[6]. J.Pichaud. Cohomologie continue et cohomologie différentiable des groupes localement compacts. C.R.A.S.,t.292,1981,p.171-173.

[7]. J.Pichaud. Homologie continue et homologie différentiable des groupes localement compacts. C.R.A.S.,t.293,1981,p.191-194.

J.PICHAUD

Université de Paris VII
Mathématiques
75251 Paris Cedex 05
France

ABSTRACT

This issue of Astérisque presents some recent work in the fields of (co)homology and finite length representations of Lie groups.

In homology theory proofs are given of Shapiro's lemma, of the regularization theorem (i.e. the isomorphism between $H_*(G,E)$ and $H_*(G,E_\infty)$ when E is a continuous G-module), and of the surjectivity of the map $H_*(G_d,E) \longrightarrow H_*(G,E)$, where G_d denotes the abstract group underlying G.

The problems of computing Ext^n between irreducibles and of studying finite length representations are considered for various classes of Lie groups G : real semisimple, nilpotent, and semidirect products $G = B \rtimes A$ with B a vector group, and for suitable irreducible representations of G. In the semisimple (resp. nilpotent) case one obtains algebraic descriptions in terms of the Langlands classification (resp. the orbit method). In the case of semidirect products the aim is to obtain a reduction theorem in the spirit of Mackey's theory; under certain hypotheses, this can be carried out completely.