Astérisque

FRANCESCO BALDASSARRI

Cohomologie p-adique pour la fonction ${}_3F_2\begin{pmatrix} a, b_1, b_2 \\ c_1, c_2 \end{pmatrix}; \lambda$

Astérisque, tome 119-120 (1984), p. 51-110

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__119-120__51_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 119-120 (1984) p.51-110

COHOMOLOGIE p-ADIQUE POUR LA FONCTION ${}_3F_2\left({a,b_1,b_2 \atop c_1,c_2};\lambda\right)$.

Par

F. BALDASSARRI (*)

O. INTRODUCTION.

Dans cet article on présente un nouvel exemple d'application de la philosophie de Dwork donnant un procédé pour étudier les propriétés $\underline{p}$-adiques de fonctions compliquées (solutions d'équations différentielles linéaires et homogènes à coefficients fonctions rationnelles) pour lesquelles on connait une formule intégrale ne contenant que des fonctions mieux connues du point de vue $\underline{p}$-adique. Les meilleurs résultats par cette méthode ont été obtenus par Dwork pour les fonctions hypergéométriques de Gauss $F(a,b;c;x)$ (ici notées aussi ${}_2F_1\left({a,b \atop c};x\right)$) dans [2] et pour la fonction de Bessel $J_0(x)$ dans [3]. On développe ici des idées esquissées par Dwork dans une lettre à Sperber en suivant de près l'organisation des premiers chapitres du livre [2].

On a ici étudié en détail les points suivants :

a) structure algébrique des espaces de cohomologie naturellement associés à la fonction ${}_3F_2\left({a,b_1,b_2 \atop c_1,c_2};\lambda\right)$ et à son équation différentielle $L_{a,b_1,b_2,c_1,c_2}y = 0$;

b) rayon de convergence $\underline{p}$-adique des solutions de $L_{a,b_1,b_2,c_1,c_2}y = 0$;

(*) Seminario Matematico, Università di Padova, Via Belzoni 7, 35131 Padova (Italia).

c) "structure de Frobenius forte" pour l'équation $L_{a,b_1,b_2,c_1,c_2}y = 0$ du point de vue $\underline{p}$-adique.

Par contre plusieurs questions importantes ne sont pas traitées ici ; entre autres :

d) calcul approché modulo $\underline{p}$ de la matrice Frobenius $B_a(\lambda)$ (cf. (4.17)) ;

e) estimation des ordres de croissance des solutions de $L_{a,b_1,b_2,c_1,c_2}y = 0$ au bord de leur disque de convergence ;

f) relations, via la formule intégrale

$$(0.1) \qquad {}_3F_2\left(\begin{matrix}a,b_1,b_2\\c_1,c_2\end{matrix};\lambda\right) = \text{const.} \iint x^{b_1-1}(1-x)^{c_1-b_1-1}y^{b_2-1}(1-y)^{c_2-b_2-1}(1-xy\lambda)^{-a}dxdy\,,$$

avec la cohomologie (et les fonctions L) d'une famille à 1 paramètre de surfaces.

l'Auteur espère que, malgré ces lacunes, ce papier rendra plus clair au lecteur le vaste champ d'application de la théorie cohomologique de Dwork et les techniques qu'on y utilise.

Voyons maintenant un peu plus en détail le contenu des différents chapitres du présent article. Dans le premier chapitre, on explique la formule intégrale classique (1.1) en termes de l'action naturelle de la dérivation par rapport au paramètre λ sur le conoyau W_a d'un opérateur différentiel D_a (cf. (1.7)). Précisément, $W_a = L^2/D_aL^2$, où

$$L = \mathbb{Q}[\lambda, x, \frac{1}{(1-\lambda)x(1-x)(1-\lambda x)}]$$

et D_a ne fait intervenir que la dérivation par rapport à x ; W_a devient donc un $\mathbb{Q}[\lambda,\frac{1}{\lambda(1-\lambda)}]/\mathbb{Q}$ - module différentiel, strictement lié à ${}_3F_2\left(\begin{matrix}a,b_1,b_2\\c_1,c_2\end{matrix};\lambda\right)$. Mais W_a est de dimension 4, tandis que ${}_3F_2$ satisfait à une équation différentielle d'ordre 3.

Dans la proposition 1.13, on détermine un sous-module différentiel V_a de W_a , de dimension 3 qui correspond à l'équation différentielle de $_3F_2$. Il faut remarquer ici qu'on aurait pu construire W_a et V_a en utilisant la formule (0.1) au lieu de (1.1). L'avantage consisterait en ce que la différentielle de (0.1) est algébrique ; mais on aurait au même temps l'inconvénient d'avoir à utiliser des opérateurs aux dérivées partielles. On exposera ailleurs cette autre construction de V_a, qui fournit un exemple intéressant d'isomorphisme entre cohomologie algébrique et cohomologie de Monsky-Washnitzer pour des complexes d'opérateurs différentiels à plusieurs variables.

Le deuxième chapitre n'est qu'un rappel de certains résultats de Dwork sur $_2F_1$ (cf. (1.0)) tels qu'ils sont exposés dans son livre ([2]). Evidemment, puisque l'on a décidé d'utiliser la formule (1.1), on a la possibilité de profiter de la théorie algébrique et analytique $\underline{p}$-adique de $_2F_1$ pour démontrer des résultats analogues dans le cas de $_3F_2$.

Le troisième chapitre vise à la compréhension de la structure symplectique de $_3F_2$ (cf. (3.30)) et à obtenir des estimations de croissance sur certaines séries formelles, qui seront utilisées dans la théorie analytique du chapitre suivant. On traite là la "théorie algébrique duale" de $_3F_2$, c'est-à-dire la forme explicite du module différentiel K_a, dual de W_a (cf. Prop. 3.1), équipé d'une application "symplectique" $\hat{D}_a : K_a \longrightarrow W_{1-a}$ (voir (3.27) pour la définition de $\hat{D}_a$ et (3.0) pour 1-a). L'application D_a est un morphisme de modules différentiels dont l'image est justement V_{1-a}. On donne aussi explicitement la forme des éléments du noyau H_a de $\hat{D}_a$ (Prop. 3.3 et (3.2.6)).

Dans le quatrième chapitre, on développe la théorie analytique $\underline{p}$-adique de $_3F_2$. On construit les espaces fibrés analytiques à connexion $\mathbb{W}_a, \mathbb{V}_a, \mathbb{K}_a, \mathbb{H}_a$ associés à W_a, V_a, K_a, H_a, respectivement : l'espace de base est $\Omega\setminus\{0,1\}$, où Ω est le domaine universel $\underline{p}$-adique. On calcule alors le rayon d'analyticité $\underline{p}$-adique du transport parallèle dans $\mathbb{K}_a$, et on en déduit que les solutions de l'équation différentielle de $_3F_2$ convergent toutes jusqu'à le plus proche singularité (Théorème 4.4).

Le reste du chapitre, et du papier, est dédié à prouver l'existence d'une "structure de Frobenius forte" (cf. [5]) pour le système différentiel

$$\frac{\lambda dY}{d\lambda} = Y\,{}^tM_a \tag{0.2}$$

(cf. (1.13) ; ${}^tM_a$ = matrice transposée de M_a) .

Soient $\mathcal{U} = \{\lambda \in \Omega \,/\, |\lambda - 1| > p^{-\frac{1}{p-1}}\,,\ \lambda \neq 0\}$ et $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ l'application $\lambda \longmapsto \lambda^p$. On définit deux morphismes horizontaux, entre eux duaux ((4.13), (4.16) et Théorème (4.18))

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_a &: \mathbb{W}_{a|\mathcal{U}} \longrightarrow \varphi^* \mathbb{W}_{a'\mathcal{U}} \\ \boldsymbol{\alpha}_a^* &: \varphi^* \mathbb{K}_{a'|\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbb{K}_{a|\mathcal{U}} \end{aligned} \tag{0.3}$$

(voir (2.d) et (4.12) pour la définition de a').

On prouve (Théorème 4.26) qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}_{a|\mathcal{U}} \arrow[r, "\hat{\mathbb{D}}_a"] & \mathbb{W}_{1-a|\mathcal{U}} \arrow[d, "\boldsymbol{\alpha}_{1-a}"] \\ \varphi^* \mathbb{K}_{a'|\mathcal{U}} \arrow[u, "\boldsymbol{\alpha}_a^*"] \arrow[r, "p^2\varphi^* \hat{\mathbb{D}}_{a'}"] & \varphi^* \mathbb{W}_{1-a'|\mathcal{U}} \end{tikzcd} \tag{0.4}$$

($\hat{\mathbb{D}}_a$ = morphisme d'espaces fibrés induit par $\hat{D}_a$) et, comme $\hat{\mathbb{D}}_a \mathbb{K}_{a|\mathcal{U}} = \mathbb{V}_{1-a|\mathcal{U}}$, on en déduit que $\boldsymbol{\alpha}_{1-a} \mathbb{V}_{1-a|\mathcal{U}} \subseteq \varphi^* V_{1-a'|\mathcal{U}}$. Donc le système (0.2) admet une structure de Frobenius forte : si $Y_{a,z}(\lambda)$ dénote la solution de (0.2) près de $z \in \mathcal{U}$ telle que $Y_{a,z}(z) = I_3$ (matrice identique d'ordre 3) il existe une matrice $F_a(\lambda)$ (dont la matrice transposée représente $\alpha_{a,\lambda} : V_{a,\lambda} \longrightarrow V_{a',\lambda^p}$ dans les bases $e'_{a,\lambda}$ et e'_{a',λ^p}, voir (1.12) et la convention au commencement du chapitre 4) qui est analytique sur $\mathcal{U}$ et satisfait :

$$Y_{a',z^p}(\lambda^p)F_a(\lambda) = F_a(z)Y_{a,z}(\lambda)\ . \tag{0.5}$$

On laisse à un article futur la réponse à la question d) ci-dessus et son application, via (0.5) à la question e).

LISTE DES SYMBOLES

a,b,c,b_1,b_2,c_1,c_2	(1.2),(2.a),(3,0)
a'	(2.d),(4.12)
$1-a$	(2.9),(3.0)
$A_{a,b,c}(\lambda) = A_a(\lambda)$	(2.d)
$B_a(\lambda)$	(4.17)
$C_{a,z}(\lambda)$	(4.4)
$D_a = D_{a,b_1,b_2,c_1,c_2}$	(1.7)
D_a^*	(3.0)
$\tilde{D}_a$	(3.17)
$\hat{D}_a$	(3.27)
$D_{a,\lambda}$	(4.0) et (1.7)
$\hat{\mathbf{D}}_a$	(4.30)
$\hat{D}_{a,\lambda}$	(3.27) et (4.0)
$D^*_{a,\lambda}$	(4.0) et (3.0)
$e_a^{(i)}$	(1.11)
e_e	(1.11)
e'_a	(1.12)
$e_a^{(i)*}$	élément de e_a^*, $i=1,2,3,4$
e_a^*	base de K_a, duale de e_a
$e_{a,\lambda}$	(1.11) et (4.0)
$e^*_{a,\lambda}$	base de $K_{a,\lambda}$, duale de $e_{a,\lambda}$
$e^{(i)*}_{a,\lambda}$	élément de $e^*_{a,\lambda}$
$E_\lambda = \lambda\, d/d\lambda$	
$E_{a,\nu}$, $\nu \in S$	Dém. de (3.15)
E_a	Dém. de (3.15)
$f_{b,c;x_0}(x)$	(4.2)
$F_a(\lambda)$	(0.5)

${}_{n+1}F_n\left(\begin{matrix} a,b_1,\dots,b_n \\ c_1,\dots,c_n \end{matrix};\lambda\right)$	(1.0)
$F(a,b;c;\lambda) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix};\lambda\right)$	
$G_{a,b,c}(t)$	(1.2.2)
H_a	(3.3)
$H_{a,\lambda}$	(3.3) et (4.0)
$\mathbb{H}_a$	(4.29)
K_a	(2.b) ; (3.0)
$K_{a,\lambda}$	(2.c) ; (3.0) et (4.0)
$\mathbb{K}_a$	(2.c) ; (4.29)
$\mathcal{L}$	(1.2)
L_λ	(4.0)
$\overline{L}$	(1.10) , 2
$L_{a,b_1,\dots,b_n,c_1,\dots,c_n}$	(1.0.1)
M_a	(1.13)
P_ν	(3.0)
$\mathcal{Q}$	(2.a)
$\mathcal{Q}_0$	(2.d)
$\mathcal{Q}_0'$	(2.d)
$\mathcal{Q}_t$	(1.2)
$\mathbb{Q}$	Le corps rationnel
Q_ν^α	(3.2)
R_ν	(3.0)
R_ν'	(3.0)
R	(3.0)
R'	(3.0)
$R_\nu(\lambda)$	(4.0)
$R_\nu'(\lambda)$	(4.0)
$R(\lambda)$	(4.0)
$R'(\lambda)$	(4.0)
S	(3.0)
t_ν	(3.4)
T_ν	(3.0)
$\mathcal{T}_z$	(4.4.1)
$\mathcal{U}$	(2.d)
$U_{a,b,c;z}(\lambda)$	(2.c)

V_a	(1.12)
V'_a	(3.16)
$V'_{a,\lambda}$	(1.12) et (4.0)
$\mathbb{V}_a$	(4.28)
$V_{a;\nu}(\lambda) = V_{a,b,c;\nu}(\lambda)$	(2.5)
$W_a = W_{a,b_1,b_2,c_1,c_2}$	(1.5)
$W_a = W_{a,b,c}$	(2.a)
$W_{a,\lambda}$	(2.c) ; (1.5) et (4.0)
$\mathbb{W}_a$	(2.c) ; Introduction
$W_{b,c;x}$	(1.3)
$W_{a,b,c;x\lambda}$	(1.2)
$Y_{a,z}(\lambda)$	(4.7)
$\mathbb{Z}$	L'anneau des entiers rationnels
$\mathbb{Z}_p$	L'anneau complet des entiers <u>p</u>-adiques
$\alpha_{a,\lambda}$	(2.d) ; (4.11),(4.13)
$\alpha^*_{a,\lambda}$	(2.d) ; (4.14)
$\boldsymbol{\alpha}_a$	(2.d) ; Introduction
$\boldsymbol{\alpha}^*_a$	(2.d) ; (4.29.1)
$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_a$	(4.28)
$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^*_a$	(4.29)
$\beta_{a,\lambda}$	(4.24.1)
γ_+	(3.0)
γ_-	(3.0)
Γ_ν	(4.0.1)
$\Delta_{a,b,c}$	(2.0)
$\zeta_{b,c}(x)$	(1.3)
Θ_a	(3.3)
φ	$\lambda \longmapsto \lambda^p$
Φ	$x \longmapsto x^p$, chapitre 3 de [2]

ψ	Chapitre 3 de [2]
$\chi_{b_1,c_1}(x)$	(4.8)
$\underline{\omega}_{a,\lambda}$	(2.c)
$\underline{\omega}_{a,b,c}$	(1.2.1)
$\omega_{a,b,c}$	(1.2.1)
$\underline{\omega}^{*}_{a}$	(2.c)
$\underline{\omega}^{*}_{a,\lambda}$	(2.c)
Ω_1	(2.d)
$\Omega_a = \Omega_{a,b_1,b_2,c_1,c_2}$	(1.3)
Ω	(2.c)
$\int_{\alpha,\nu}$	(3.13)
$\int_{1/\lambda}$	(2.23.1)
$\langle , \rangle$	(3.0)
$\langle , \rangle_\lambda$	(4.1.1)
$[,]$	(3.30)
$[,]_{a,\lambda}$	(4.30.2)
$\nabla_a = \nabla_{a,b,c}$	connexion de $W_{a,b,c}$
$\nabla_a = \nabla_{a,b_1,b_2,c_1,c_2}$	connexion de W_{a,b_1,b_2,c_1,c_2}
$\nabla^{*}_a = \nabla^{*}_{a,b,c}$	connexion duale de $\nabla_{a,b,c}$
$\nabla^{*}_a = \nabla^{*}_{a,b_1,b_2,c_1,c_2}$	connexion duale de $\nabla_{a,b_1,b_2,c_1,c_2}$.

1. ESPACE DE COHOMOLOGIE ASSOCIÉ A ${}_3F_2\left({a,b_1,b_2 \atop c_1,c_2};\lambda\right)$.

Nous commençons par rappeler au lecteur la définition des séries hypergéométriques généralisées

$$(1.0) \qquad {}_{n+1}F_n\left({a,b_1,\ldots,b_n \atop c_1,\ldots,c_n};\lambda\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a)_i(b_1)_i,\ldots,(b_n)_i}{(c_1)_i,\ldots,(c_n)_i\, i!}\,\lambda^i$$

où a, $b_1,\ldots,b_n$, $c_1,\ldots,c_n$ sont dans un corps C de caractéristique 0 et, pour $d \in C$, $(d)_i = d(d+1),\ldots,(d+i-1)$. Il est bien connu que la série qui apparait dans (1.0) est une solution de l'opérateur différentiel :

$$(1.0.1) \qquad \begin{aligned} L_{a,b_1,\ldots,b_n,c_1,\ldots,c_n} &= E_\lambda(E_\lambda+c_1-1)\ \ldots\ (E_\lambda+c_n-1) - \\ &\quad \lambda(E_\lambda+a)(E_\lambda+b_1),\ldots,(E_\lambda+b_n)\ , \end{aligned}$$

où $E_\lambda = \lambda \frac{d}{d\lambda}$.

La construction cohomologique présentée ici (n=2) provient de la formule intégrale classique (que l'on démontrera ensuite) :

$$(1.1) \qquad {}_3F_2\left({a,b_1,b_2 \atop c_1,c_2};\lambda\right) = \text{const.} \int x^{b_1-1}\,(1-x)^{c_1-b_1-1}\ {}_2F_1\left({a,b_2 \atop c_2};x\lambda\right)dx\ ,$$

où il faudrait spécifier le contour d'intégration et certaines conditions sur les valeurs complexes a,b_1,b_2,c_1,c_2 . D'une façon plus abstraite, on va expliquer comment, si $F(t)$ est une solution de l'opérateur hypergéométrique de Gauss

$$(1.1.1) \qquad L_{a,b_2,c_2} = E_t(E_t+c_2-1) - t(E_t+a)(E_t+b_2)$$

la formule intégrale

$$\int x^{b_1-1}\,(1-x)^{c_1-b_1-1}\ F(x\lambda)dx$$

définit une solution de l'opérateur

$$(1.1.2) \qquad L_{a,b_1,b_2,c_1,c_2} = E_\lambda(E_\lambda+c_1-1)(E_\lambda+c_2-1) - \lambda(E_\lambda+a)(E_\lambda+b_1)(E_\lambda+b_2)\ ,$$

qui est justement celui qui tue ${}_3F_2\left({a,b_1,b_2 \atop c_1,c_2};\lambda\right)$.

La formule (1.1) suggère de considérer l'espace de cohomologie associé au module différentiel Ω_a (pour la définition précise voir ci-dessous) obtenu en tensorisant le module différentiel de rang 1 $W_{b_1,c_1;x}$ (idem) associé à $x^{b_1-1}(1-x)^{c_1-b_1-1}$ et le module différentiel de rang 2 $W_{a,b_2,c_2;x\lambda}$ associé à ${}_2F_1\left({a,b_2 \atop c_2};x\lambda\right)$. On montre que l'espace de cohomologie W_a associé à Ω_a est de rang 4 et l'on construit une base $(e_a^{(1)},e_a^{(2)},e_a^{(3)},e_a^{(4)})$. L'opérateur différentiel L_{a,b_1,b_2,c_1,c_2} est cependant d'ordre 3. Ceci se reflète dans le fait que le sous-module V_a engendré par $\{e_a^{(1)},e_a^{(2)},e_a^{(3)}\}$ est un sous-module différentiel de W_a, engendré en tant que sous-module différentiel par $e_a^{(3)}$ et que L_{a,b_1,b_2,c_1,c_2} tue $e_a^{(3)}$.

1.2. L'analogue algébrique des formules précédentes s'obtient de la façon suivante. Soient $a,b_1,b_2,c_1,c_2 \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, avec $\{a,b_1,b_2\} \cap \{c_1,c_2,0,1\} = \phi$, et soient $\mathcal{Q}_t = \mathbb{Q}[t, \frac{1}{t(1-t)}]$, $L = \mathbb{Q}[\lambda,x,\frac{1}{(1-\lambda)x(1-x)(1-x)}]$ et $\rho : \mathcal{Q}_t \longrightarrow L$, $\rho(t) = x\lambda$, homomorphisme d'anneaux.

Si M_t est un $\mathcal{Q}_t/\mathbb{Q}$-module différentiel, on dénotera par $M_{x\lambda}$ le $L/\mathcal{Q}_\lambda$-module différentiel $L \underset{\rho \nwarrow \mathcal{Q}_t}{\otimes} M_t$ et si $m(t) \in M_t$, on posera $m(x\lambda) = 1 \otimes m(t) \in M_{x\lambda}$. Rappelons en particulier (cf. [2]) ce qu'est le $\mathcal{Q}_t/\mathbb{Q}$-module différentiel $W_{a,b,c;t}$ associé à ${}_2F_1\left({a,b \atop c};t\right)$ (où $a,b,c \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, $\{a,b\} \cap \{0,1,c\} = \phi$) : il possède une $\mathcal{Q}_t$-base :

$$(1.2.1) \qquad \underline{\omega}_{a,b,c}(t) = \underline{\omega}(t) = \begin{pmatrix} \omega_{a,b,c+1}(t) \\ \omega_{a,b,c,}(t) \end{pmatrix}$$

telle que (en sous entendant le symbole $\nabla_{a,b,c}$ de dérivée covariante)

$$E_t \underline{\omega}(t) = {}^tG_{a,b,c}(t)\underline{\omega}(t)$$

où

$$G_{a,b,c}(t) = \begin{pmatrix} -c & (c-a)\ (\frac{1}{1-t} - 1) \\ c-b & (a+b-c)\ (\frac{1}{1-t} - 1) \end{pmatrix} . \tag{1.2.2}$$

Dans ce cas là :

$$L_{a,b,c}\omega_{a,b,c} = 0 .$$

1.3. Soit encore $W_{b,c;}$ le $L/\mathcal{Q}_\lambda$-module différentiel de L-base $\zeta(x) = \zeta_{b,c}(x)$, telle que :

$$E_x\zeta(x) = (c + \frac{b-c}{1-x})\zeta(x) . \tag{1.3.1}$$

Soit $\Omega_a = \Omega_{a,b_1,b_2,c_1,c_2} = W_{b_1,c_1;x} \underset{L}{\otimes} W_{a,b_2,c_2;x\lambda}$ ($\otimes$ de $L/\mathcal{Q}_\lambda$-modules différentiels) ; Ω_a est un $L/\mathcal{Q}_\lambda$-module différentiel de base :

$$\eta = \begin{pmatrix} \zeta_{b_1,c_1}(x)\otimes\omega_{a,b_2,c_2+1}(x\lambda) \\ \zeta_{b_1,c_1}(x)\otimes\omega_{a,b_2,c_2}(x\lambda) \end{pmatrix} \tag{1.3.2}$$

satisfaisant :

$$E_x\eta = (c_1 + \frac{b_1-c_1}{1-x} + {}^tG_{a,b_2,c_2}(x\lambda))\ \eta . \tag{1.3.3}$$

On a donc une $L/\mathcal{Q}_\lambda$-connexion :

$$\begin{aligned} \nabla_{a,x} : \Omega_a &\longrightarrow \Omega_a \underset{L}{\otimes} \Omega^1_{L/\mathcal{Q}_\lambda} \\ \eta &\longmapsto (c_1 + \frac{b_1-c_1}{1-x} + {}^tG_{a,b_2,c_2}(x\lambda))\eta \otimes \frac{dx}{x} . \end{aligned} \tag{1.4}$$

Posons $W_a = W_{a,b_1,b_2,c_1,c_2} = \Omega_a\otimes\Omega^1_{L/\mathcal{Q}_\lambda} / \nabla_{a,x}\Omega_a$. On voit bien que, en écrivant les éléments de L^2 en colonne, on a des isomorphismes :

$$(1.5)\qquad \begin{array}{ccl} L^2 & \xrightarrow{\sim} & \Omega_a \\ \xi & \longmapsto & t_{\xi\eta} \\ L^2 & \xrightarrow{\sim} & \Omega_a \otimes \Omega^1_{L/\mathcal{Q}_\lambda} \\ \xi & \longmapsto & t_{\xi\eta} \otimes \frac{dx}{x} \end{array}$$

et que le diagramme :

$$(1.6)\qquad \begin{tikzcd} L^2 \arrow[r] \arrow[d, "D_a"'] & \Omega_a \arrow[d, "\nabla_{a,x}"] \\ L^2 \arrow[r] & \Omega_a \otimes \Omega^1_{L/\mathcal{Q}_\lambda} \end{tikzcd}$$

est commutatif si l'on définit :

$$(1.7)\qquad D_a = D_{a,b_1,b_2,c_1,c_2} = \frac{x\partial}{\partial x} + c_1 + \frac{b_1-c_1}{1-x} + G_{a,b_2,c_2}(x\lambda) \ ,$$

$x\frac{\partial}{\partial x}$ étant la dérivation δ de L/Q (en fait de $L/\mathcal{Q}_\lambda$) telle que $\delta x = x$, $\delta\lambda = 0$. On en déduit que $W_a \cong L^2/D_a\, L^2$. Or, W_a admet une structure naturelle de $\mathcal{Q}_\lambda/Q$-module différentiel. En termes de L^2, il suffit de remarquer que le diagramme :

$$(1.8)\qquad \begin{tikzcd}[column sep=huge] L^2 \arrow[r, "\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda} + G_{a,b_2,c_2}(x\lambda)"] \arrow[d, "D_a"'] & L^2 \arrow[d, "D_a"] \\ L^2 \arrow[r, dash, "\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda} + G_{a,b_2,c_2}(x\lambda)"] & L^2 \end{tikzcd}$$

est commutatif, de sorte que l'on peut définir, pour $[\xi]$ = classe de $\xi \in L^2$ modulo $D_a\ L^2$

$$(1.9)\quad E_\lambda[\xi] = \nabla_{a,b_1,b_2,c_1,c_2}(E_\lambda)[\xi] = [\lambda \frac{\partial\xi}{\partial\lambda} + G_{a,b_2,c_2}(x\lambda)\xi] \ .$$

Si $f(\lambda) \in \mathcal{Q}_\lambda$, on a évidemment

$$E_\lambda[f\xi] = fE_\lambda[\xi] + E_\lambda(f)[\xi] \ ,$$

ce qui montre que (1.3) définit bien une $\mathcal{Q}_\lambda/Q$-connexion sur W_a . On voit d'ailleurs que si $[{}^t\xi\eta \otimes \frac{dx}{x}]$ = classe de ${}^t\xi\eta \otimes \frac{dx}{x}$ modulo $\nabla_{a,x}\ \Omega_a$ est un élément de W_a , on a, dans l'isomorphisme $W_a \cong L^2/D_a\ L^2$ déduit de (1.5) et (1.6) :

$$\nabla_{a,b_1,b_2,c_1,c_2}(E_\lambda)[{}^t\xi\eta \otimes \frac{dx}{x}] = [{}^t(\lambda\frac{\partial\xi}{\partial\lambda})\eta \otimes \frac{dx}{x} + {}^t\xi\, {}^tG_{a,b_2,c_2}(x\lambda)\eta \otimes \frac{dx}{x}] =$$

$$= [\zeta_{b_1,c_1}(x) \otimes \nabla^1_{a,b_2,c_2}(E_\lambda)({}^t\xi\ \underline{\omega}_{a,b_2,c_2}(x\lambda)) \otimes \frac{dx}{x}] \ ,$$

où ∇^1_{a,b_2,c_2} dénote la $L/\mathcal{Q}_x$-connexion obtenue sur $M_{x\lambda}$ en échangeant les rôles de x et λ . On a alors :

PROPOSITION 1.10. <u>Dans</u> W_a <u>on a</u> :

$$L_{a,b_1,b_2,c_1,c_2}\left[\left(\begin{matrix}0\\ \frac{1}{1-x}\end{matrix}\right)\right] = 0 \ .$$

<u>Démonstration</u> :

1. Si M_t est un $\mathcal{Q}_t/Q$-module différentiel, $M_{x\lambda}$ est un $L/\mathcal{Q}_\lambda$-module différentiel, comme on a expliqué ci-dessus ; il est en même temps, par échange de x et λ, un $L/\mathcal{Q}_x$-module différentiel. Pour $m = m(t) \in M_t$ et $E = E_t$ on a alors :

$$E_\lambda m(x\lambda) = (Em)(x\lambda) = E_x m(x\lambda) \ .$$

2. Soient M et N deux $\mathcal{Q}_t/Q$-modules différentiels, $a_0, a_1 \in \mathcal{Q}_t$ et $L = a_1 d/_{dt} + a_0$. On pose $\overline{L} = -a_1 d/_{dt} + a_0 - da_1/_{dt}$ = opérateur adjoint

de L . Si $m \in M$ et $n \in N$ on a :

$$m \otimes Lm - \bar{L}m \otimes n = \frac{d}{dt}(a_1 m \otimes n) .$$

3. Rappelons que si $\omega(t) = \omega_{a,b_2,c_2}(t) \in W_{a,b_2,c_2;t}$, on a :

$$(E_t(E_t+c_2-1) - t(E_t+a)(E_t+b_2))\omega(t) = 0 .$$

4. Soient $\eta(t) = (E_t+a)(E_t+b_2)\omega(t) \in W_{a,b_2,c_2;t}$

et $L_a = L_{a,b_1,b_2,c_1,c_2}$.

5. $L_a\omega(x\lambda) = ((x-1)E_x + c_1 x - b_1)(\lambda\eta(x\lambda))$.

Démonstration de (5). On a $L_a\omega(x\lambda) = ((E_\lambda+c_1-1)x\lambda(E_\lambda+a)(E_\lambda+b_2) - \lambda(E_\lambda+b_1)(E_\lambda+a)(E_\lambda+b_2))\omega(x\lambda) = ((E_\lambda+c_1-1)x\lambda - \lambda(E_\lambda+b_1))\eta(x\lambda) = (x\lambda\ E_\lambda+x\lambda+(c_1-1)x\lambda-\lambda E_\lambda-b_1\lambda)\eta(x\lambda) = \lambda((x-1)E_x + c_1 x - b_1)\eta(x\lambda)$, d'où la formule 5.

6. Rappelons que $\zeta(x) = \zeta_{b_1,c_1}(x)$ est une base de $W_{b_1,c_1;x}$.
On a :

$$L_a(\zeta(x) \otimes \omega(x\lambda) \otimes \frac{dx}{x(1-x)}) = - \nabla_{a,x}(\lambda\zeta(x) \otimes \eta(x\lambda)) .$$

Démonstration (de 6). On a : $L_a(\zeta(x) \otimes \omega(x\lambda) \otimes dx/x(1-x)) =$
$\zeta(x) \otimes L_a(\omega(x\lambda)) \otimes dx/x(1-x) = \zeta(x) \otimes ((x-1)E_x+c_1x-b_1)(\lambda\eta(x\lambda)) \otimes dx/x(1-x) =$

$$\zeta(x) \otimes (x(x-1)d/dx+c_1x-b_1)(\lambda\eta(x\lambda)) \otimes dx/x(1-x) = -\zeta(x)\otimes(d/dx + \frac{b_1-c_1}{1-x} + \frac{b_1}{x})$$

$$(\lambda\eta(x\lambda))\otimes dx = -(d/dx + \frac{b_1-c_1}{1-x} + \frac{b_1}{x})(\zeta(x))\otimes\lambda\eta(x\lambda)\otimes dx - \nabla_{a,x}(\lambda\zeta(x)\otimes\eta(x\lambda)) =$$

$$(d/dx - \frac{b_1}{x} + \frac{c_1-b_1}{1-x})(\zeta(x))\otimes\lambda\eta(x\lambda)\otimes dx - \nabla_{a,x}(\lambda\zeta(x)\otimes\eta(x\lambda)) =$$

$- \nabla_{a,x}(\lambda\zeta(x) \otimes \eta(x\lambda))$, grâce à (1.3).

Cela prouve 6 et donc la proposition.

PROPOSITION 1.11. W_a <u>est un $\mathcal{Q}_\lambda$-module libre de base</u>

$$([\binom{1}{0}]\,,\,[\binom{0}{1}]\,,\,[\binom{0}{\frac{1}{1-x}}]\,,\,[\binom{0}{\frac{1}{1-x\lambda}}]) = e_a = {}^t(e_a^{(1)}\,,e_a^{(2)}\,,e_a^{(3)}\,,e_a^{(4)}) .$$

<u>Démonstration</u> : L'extension $\mathcal{Q}_\lambda \hookrightarrow \mathbb{Q}(\lambda)$ étant fidèlement plate il suffit de démontrer l'énoncé pour $W_a \underset{\mathcal{Q}_\lambda}{\otimes} \mathbb{Q}(\lambda) = L^2 \underset{\mathcal{Q}_\lambda}{\otimes} \mathbb{Q}(\lambda)/D_a(L^2 \underset{\mathcal{Q}_\lambda}{\otimes} \mathbb{Q}(\lambda))$. On déduit alors de [1], section 5, que $\dim_{\mathbb{Q}(\lambda)} W_a \underset{\mathcal{Q}_\lambda}{\otimes} \mathbb{Q}(\lambda) = 4$, puisque l'indice de D_a dans $L^2 \underset{\mathcal{Q}_\lambda}{\otimes} \mathbb{Q}(\lambda)$ est 4 . Comme

$$\left\{\binom{x^i}{0}\,,\,\binom{0}{x^i}\,,\,\binom{(1-x)^j}{0},\binom{(1-x\lambda)^j}{0},\binom{0}{(1-x\lambda)^j},\ i,j\in \mathbb{Z},\ j<0\right\}$$

est une $\mathbb{Q}(\lambda)$-famille de générateurs de $L^2 \underset{\mathcal{Q}_\lambda}{\otimes} \mathbb{Q}(\lambda)$, la proposition découle des "formules de réduction" qui suivent, où $i = 1,2,\ldots,$ et "$X \equiv Y$" signifie "$X - Y \in D_a\, L^2$" :

$$D_a\binom{x^i}{0} = \begin{pmatrix} (i+c_1-c_2)x^i + \sum_{j=0}^{i-1}(c_1-b_1)x^j + \frac{b_1-c_1}{1-x} \\ (c_2-b_2)x^i \end{pmatrix}$$

$$D_a\binom{1}{0} = \begin{pmatrix} c_1-c_2+\frac{b_1-c_1}{1-x} \\ c_2-b_2 \end{pmatrix} ,$$

d'où :

$$(1.11.1)\qquad \begin{pmatrix} \frac{b_1-c_1}{1-x} \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c_2-c_1 \\ b_2-c_2 \end{pmatrix} ,$$

$$(1.11.2)\qquad \begin{pmatrix} (c_1-c_2+i)x^i \\ (c_2)b_2)x^i \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} b_1-c_2 \\ c_2-b_2 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{i-1}(b_1-c_1)\binom{x^j}{0} .$$

Ensuite :

(1.11.3) $$\begin{pmatrix}0\\ \frac{b_1-c_1}{1-x}\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c_2-a \\ a+b_2-c_1-c_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{a-c_2}{1-x}\\ \frac{c_2-a-b_2}{1-x}\end{pmatrix} \quad ;$$

(1.11.4)

$$\begin{pmatrix}(a-c_2)x^i\\ (c_1+c_2-a-b_2+i\end{pmatrix} \equiv \sum_{j=1}^{i-1}(c_2-a)\lambda^{j-i}\begin{pmatrix}x^j\\0\end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{i-1}(b_1-c_1+(a+b_2-c_2)\lambda^{j-i})\begin{pmatrix}0\\x_j\end{pmatrix}+$$

$$(a-c_2)(1-\lambda^{-i})\binom{1}{0} + ((c_2-a-b_2)(1-\lambda^{-i})+b_1)\binom{0}{1} + (c_2-a)(1-\lambda^{-i})\begin{pmatrix}\frac{1}{1-x\lambda}\\0\end{pmatrix} +$$

$$(a+b_2-c_2)(1-\lambda^{-i})\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{1-x\lambda}\end{pmatrix} \quad ;$$

(1.11.5) $$\begin{pmatrix}(b_1-c_2-i)x^{-i}\\ (c_2-b_2)x^{-i}\end{pmatrix}\equiv (c_1-b_1)\sum_{j=1}^{i-1}\begin{pmatrix}x^{-j}\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c_1-c_2\\ c_2-b_2\end{pmatrix} \quad ;$$

(1.11.6)

$$(b_1-i)\begin{pmatrix}0\\x^{-i}\end{pmatrix} \equiv (a-c_2)\sum_{j=1}^{i-1}\lambda^{i-j}\begin{pmatrix}x^{-j}\\0\end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{i-1}(c_1-b_1-(a+b_2-c_2)\lambda^{i-j})\begin{pmatrix}0\\x^{-j}\end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix}a-c_2\\ c_1+c_2-a-b_2\end{pmatrix} + (a-c_2)(\lambda^i-1)\begin{pmatrix}\frac{1}{1-x\lambda}\\0\end{pmatrix} + (a+b_2-c_2)(1-\lambda^i)\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{1-x\lambda}\end{pmatrix} \quad ;$$

(1.11.7) $$(b_1-c_1+i)\begin{pmatrix}(1-x)^{-i-1}\\0\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}(c_2-c_1+i)(1-x)^{-i}\\ (b_2-c_2)(1-x)^{-i}\end{pmatrix} \quad ;$$

(1.11.8)

$$(b_1-c_1+i)\begin{pmatrix} 0 \\ (1-x)^{-i-1}\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} (c_2-a)(1-\frac{1}{\lambda})(1-x)^{-i} \\ (i-c_1+(a+b_2-c_2)(1-\frac{1}{\lambda}))(1-x)^{-i}\end{pmatrix} +$$

$$(\tfrac{\lambda}{\lambda-1})^{i}\begin{pmatrix} \frac{a-c_2}{1-x\lambda} \\ \frac{c_2-a-b_2}{1-x\lambda}\end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{i-1}(\tfrac{\lambda}{\lambda-1})^{i-j}\begin{pmatrix}(a-c_2)(1-x)^{-j} \\ (c_2-a-b_2)(1-x)^{-j}\end{pmatrix} ;$$

(1.11.9)

$$i\begin{pmatrix}(1-x\lambda)^{-i-1} \\ 0\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}(c_2+i-c_1)(1-x\lambda)^{-i} \\ (b_2-c_2)(1-x\lambda)^{-i}\end{pmatrix} + (1-\lambda)^{-i}\begin{pmatrix}c_1-c_2 \\ c_2-b_2\end{pmatrix} +$$

$$\lambda(b_1-c_1)\sum_{j=1}^{i}(1-\lambda)^{j-i-1}\begin{pmatrix}(1-x\lambda)^{-j} \\ 0\end{pmatrix} ;$$

(1.11.10)

$$\begin{pmatrix}(a-c_2)(1-x\lambda)^{-i-1} \\ (c_2-a-b_2-i)(1-x\lambda)^{-i-1}\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}(a-c_2)(1-x\lambda)^{-i} \\ (c_1+c_2-a-b_2-i)(1-x\lambda)^{-i}\end{pmatrix} -$$

$$\lambda(b_1-c_1)\sum_{j=1}^{i}(1-\lambda)^{j-i-1}\begin{pmatrix}0 \\ (1-x\lambda)^{-j}\end{pmatrix} + (1-\lambda)^{-i}\begin{pmatrix}0 \\ \frac{b_1-c_1}{1-x}\end{pmatrix} .$$

C.Q.F.D.

DÉFINITION 1.12. <u>Soit</u> $V_a = V_{a,b_1,b_2,c_1,c_2}$ <u>le</u> $\mathcal{Q}_\lambda$-<u>sous-module de</u> W_a engendré par $e'_a = {}^t(e_a^{(1)}, e_a^{(2)}, e_a^{(3)})$.

PROPOSITION 1.13. V_a <u>est stable sous l'action de</u> $\nabla_a(E_\lambda)$. <u>Il est engendré par</u> $e_a^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ (\frac{1}{1-x}) \end{bmatrix}$ <u>en tant que</u> $\mathcal{Q}_\lambda/Q$-<u>sous-module différentiel de</u> W_a . <u>On a</u> $L_a e_a^{(3)} = 0$ <u>et</u>

$$\nabla_a(E\ )e'_a = M_a e'_a$$

<u>où</u>

$$M_a = \begin{pmatrix} -c_2 & c_2-b_2 & 0 \\ -c_1 & 0 & c_1-b_1 \\ \dfrac{(a-c_2)(b_1-c_2)\lambda}{(b_1-c_1)(1-\lambda)} & \left(\dfrac{(a-c_2)(c_2-b_2)}{b_1-c_1}+c_1+c_2-a-b_2\right)\dfrac{\lambda}{1-\lambda} & \dfrac{(a+b_1+b_2-c_1-c_2)\lambda}{1-\lambda} \end{pmatrix} .$$

<u>Démonstration</u> : La proposition se prouve par calcul direct ; on en verra ensuite une démonstration plus "conceptuelle" (Lemme 3.28).

C.Q.F.D.

2. THÉORIE COHOMOLOGIQUE DE ${}_2F_1({a,b \atop c};\lambda)$ (D'APRES DWORK).

2.a. <u>Notations</u>.

Rappelons brièvement l'appareil cohomologique créé par Dwork ([2]) pour ${}_2F_1({a,b \atop c};\lambda)$ et abrégeons (a,b,c) en a, $(1-a,1-b,1-c)$ en $1-a$, pour $a,b,c \in \mathbb{Q}\cap \mathbb{Z}_p \cap [0,1]$, $\{a,b\}\cap\{0,1,c\} = \phi$. Dorénavant $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_\lambda$. Donc $W_a = W_{a;\lambda}$ a une $\mathcal{Q}$-base $\underline{\omega}_a$ et $\nabla_a(E\ )\ \underline{\omega}_a = {}^tG_a(\lambda)\underline{\omega}_a$.

2.b. <u>Théorie duale</u>. <u>Application symplectique</u>.

Le $\mathcal{Q}/\mathbb{Q}$-module différentiel dual de W_a sera noté K_a ; pour la base duale $\underline{\omega}_a^*$ de $\underline{\omega}_a$, on aura $\nabla_a^*(E_\lambda)\ \underline{\omega}_a^* = -G_a(\lambda)\underline{\omega}_a^*$, ∇_a^* dénotant donc la connexion duale de ∇_a . Il existe un isomorphisme de $\mathcal{Q}/\mathbb{Q}$-modules différentiels :

$$\hat{D}_a : K_a \longrightarrow W_a$$
$$\underline{\omega}_a^* \longmapsto \Delta_a(\lambda)\underline{\omega}_{1-a}$$

où

$$(2.0) \qquad \Delta_a(\lambda) = \Delta_{a,b,c}(\lambda) = \begin{pmatrix} (a-c)\lambda & 0 \\ 0 & (b-c)(1-\lambda) \end{pmatrix} .$$

On a donc

(2.1) $$G_a\Delta_a + \Delta_a\,{}^tG_{1-a} + E_\lambda(\Delta_a) = 0\,.$$

Puisque $\Delta_{1-a} = -\Delta_a$, on a aussi :

(2.1)' $$G_{1-a}\Delta_a + \Delta_a\,{}^tG_a + E_\lambda(\Delta_a) = 0\,.$$

2.c. Théorie de la déformation.

Soit maintenant Ω un domaine universel $\underline{p}$-adique. Les $\mathcal{Q}$-modules W_a et K_a déterminent deux fibrés vectoriels triviaux sur $\Omega\setminus\{0,1\}$, duaux entre eux, $\mathbb{W}_a$ et $\mathbb{K}_a$, munis de connexions duales. Dénotons encore par $\underline{\omega}_a$ et $\underline{\omega}_a^*$ les bases globales de $\mathbb{W}_a$ et $\mathbb{K}_a$. Pour tout $\lambda \in \Omega\setminus\{0,1\}$, on a les fibres $W_{a,\lambda}$ et $K_{a,\lambda}$ avec les Ω-bases $\underline{\omega}_{a,\lambda}$ et $\underline{\omega}^*_{a,\lambda}$: un indice λ dénotera souvent la spécialisation pour λ de variable à élément de Ω, d'un objet déjà défini pour λ indéterminée. Le transport parallèle :

$$T_{a;z,\lambda} : K_{a,z} \longrightarrow K_{a,\lambda}$$

$$\underline{\omega}^*_{a,z} \longmapsto U_{a;z}(\lambda)\,\underline{\omega}^*_{a},$$

est défini et analytique pour $|\lambda-z| < |z|\ \mathrm{Min}(1,|z-1|)$ (c'est-à-dire, la matrice $U_{a;z}(\lambda)$ est analytique pour $|\lambda-z| < |z|\ \mathrm{Min}(1,|z-1|)$) . Bien sûr, $U_{a;z}(\lambda)$ est alors la solution du système $E_\lambda Y = YG_a(\lambda)$ près de $\lambda=z$, qui vaut $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ pour $\lambda=z$.

2.d. Structure de Frobenius.

Rappelons que si $\alpha \in \mathbb{Q}\cap\mathbb{Z}_p \cap (0,1]$, on dénote α' l'élément de $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Z}_p \cap (0,1]$ tel que $p\alpha' - \alpha \in \{0,1,\dots,p-1\}$; on écrit aussi $p\alpha'-\alpha = \mu_\alpha$ et $a' = (a',b',c')$. Soit $\mathcal{U} = \{\lambda\in\Omega \mid \lambda\neq 0, |\lambda-1| > p^{-\frac{1}{p-1}}\}$ et $\varphi: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ l'application $\lambda \longrightarrow \lambda^p$. On peut définir deux morphismes horizontaux, duaux entre eux :

(2.1.0)
$$\alpha_a : \mathbb{W}_a|_{\mathcal{U}} \longrightarrow \varphi^*\mathbb{W}_{a'}|_{\mathcal{U}}$$
$$\alpha_a^* : \varphi^*\mathbb{K}_{a'}|_{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbb{K}_a|_{\mathcal{U}}$$

Pour tout $\lambda \in \mathcal{U}$, on a donc :

$$\alpha_{a,\lambda} : W_{a,\lambda} \longrightarrow W_{a',\lambda^p}$$

$$\alpha^*_{a,\lambda} : K_{a',\lambda^p} \longrightarrow K_{a,\lambda} \quad ,$$

Ω-isomorphisme duaux tels que $\alpha^*_{a,\lambda}\underline{\omega}^*_{a',\lambda^p} = A_a(\lambda)\underline{\omega}^*_{a,\lambda}$ avec $A_a(\lambda)$ matrice analytique dans $\mathcal{U}$, avec un pôle à l'infini, holomorphe à 0 et bornée par 1 dans la région $\Omega_1 = \{\lambda \in \Omega \,|\, |\lambda| = |\lambda-1| = 1\}$. Donc $A_a(\lambda) \in M_{2,2}(\mathcal{Q}'_0)$, où $\mathcal{Q}'_0$ = complétion dans la norme de Gauss $|\ |_{gauss}$, de $\mathcal{Q}_0 = \{\xi \in \mathcal{Q} \,|\, |\xi|_{gauss} \leq 1\}$; de plus $A_a(\lambda)$ est effectivement calculable modulo $p\mathcal{Q}'_0$, sous certaines hypothèses sur a,b,c . Pour $z,\ \lambda \in \mathcal{U}$, $|\lambda-z| < |z|\ \mathrm{Min}(1,|z-1|)$, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
K_{a,z} \arrow[r, "T_{a;z,\lambda}"] & K_{a,\lambda} \\
K_{a',z^p} \arrow[u, "\alpha^*_{a,z}"] \arrow[r, "T_{a';z^p,\lambda^p}"] & K_{a',\lambda^p} \arrow[u, "\alpha^*_{a,\lambda}"']
\end{tikzcd}$$

et donc

$$U_{a';z^p}(\lambda^p)A_a(\lambda) = A_a(z)\ U_{a;z}(\lambda) \quad , \tag{2.2}$$

et, en dérivant :

$$E_\lambda(A_a(\lambda)) = A_a(\lambda)G_a(\lambda) - pG_{a'}(\lambda^p)A_a(\lambda) \quad . \tag{2.2)'$$

Pour $\lambda \in \mathcal{U}$, on a encore le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
K_{a,\lambda} \arrow[r, "\hat{D}_{a,\lambda}"] & W_{1-a,\lambda} \\
K_{a',\lambda^p} \arrow[u, "\alpha^*_{a,\lambda}"] \arrow[r, "p\hat{D}_{a',\lambda^p}"] & W_{a',\lambda^p} \arrow[u, "\alpha_{1-a,\lambda}"']
\end{tikzcd}$$

qui donne :

(2.3) $$A_a(\lambda)\Delta_a(\lambda)\,{}^tA_{1-a}(\lambda) = p\Delta_{a'}(\lambda^p)$$

et

(2.3)' $$A_{1-a}(\lambda)\Delta_a(\lambda)\,{}^tA_a(\lambda) = p\Delta_{a'}(\lambda^p)\ .$$

2.e. Horizontalité de la structure symplectique.

Dans les hypothèses de (2.2) on a un dernier diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} K_{a,\lambda} \arrow[r, "\hat{D}_{a,\lambda}"] & W_{1-a,\lambda} \\ K_{a,z} \arrow[u, "T_{a;z,\lambda}"] \arrow[r, "\hat{D}_{a,z}"] & W_{1-a,z} \arrow[u, "T^*_{1-a;\lambda,z}"'] \end{tikzcd}$$

(ici $T^*_{1-a;\lambda,z}$ est l'application Ω-linéaire transposée de $T_{1-a;\lambda,z} : K_{1-a,\lambda} \longrightarrow K_{1-a,z}$) , d'où :

(2.4) $$U_{a;z}(\lambda)\Delta_a(\lambda)\,{}^tU_{1-a;z}(\lambda) = \Delta_a(z)$$

et

(2.4') $$U_{1-a;z}(\lambda)\Delta_a(\lambda)\,{}^tU_{a;z}(\lambda) = \Delta_a(z)\ .$$

2.f. Forme des solutions près des points singuliers.

Le système $E_\lambda Y = YG_a(\lambda)$ a 3 points singuliers (réguliers) : $0,1,\infty$. Il est bien connu ([6]) que ses matrices solution aux points singuliers sont respectivement : à 0 :

(2.5.1) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^{-c} \end{pmatrix} V_{a;0}(\lambda)$$

où

$$V_{a;0}(\lambda) = \begin{pmatrix} (c-b)F(a,b;1+c;\lambda) & cF(a,b;c;\lambda) \\ (1-c)F(a-c,b-c;1-c;\lambda) & (c-a)\ F(a+1-c,b+1-c;2-c;\lambda) \end{pmatrix}$$

à 1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-\lambda)^{c-a-b} \end{pmatrix} V_{a;1}(\lambda) \tag{2.5.2}$$

où

$$V_{a;1}(\lambda) = \begin{pmatrix} (a+b-c)F(a,b;a+b-c;1-\lambda) & (a-c)F(a,b;a+b-c+1;1-\lambda) \\ (c-b)(1-\lambda)F(c+1-a,c+1-b;c+2-a-b;1-\lambda) & (a+b-c-1)F(c-a-b;c+1-a-b;1-\lambda) \end{pmatrix}$$

à ∞ :

$$\begin{pmatrix} \lambda^{-a} & 0 \\ 0 & \lambda^{-b} \end{pmatrix} V_{a;\infty}(\lambda) \tag{2.5.3}$$

$$V_{a;\infty}(\lambda) = \begin{pmatrix} (c-b)F(a,a-c;a-b+1;1/\lambda) & (c-a)F(a,a-c+1;a-b+1;1/\lambda) \\ (c-a)F(b,b-c;b-a+1;1/\lambda) & (c-b)F(b,b-c+1;b-a+1;1/\lambda) \end{pmatrix}$$

2.g. <u>Croissance des solutions</u>.

Pour $z \in \Omega_1$ on a encore (chap. 13 et 15 de [2]) :

$$U_{a;z}(\lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} M_{a,s}(z)(\lambda-z)^s \tag{2.6}$$

et pour chaque $s \in N$ il existe un entier i_s, $1 \leqslant i_s \leqslant s$, tel que $i_s M_{a,s}(z)$ ait ses coefficients dans $\mathbb{Z}_p[z, \frac{1}{z}, \frac{1}{1-z}]$. De plus le développement de Mittag-Leffler de $M_{a,s}(z)$ est de la forme :

$$i_s M_{a,s}(z) = \sum_{i=0}^{s} N_{a,i,s} z^{-i}(1-z)^{i-s} \tag{2.7}$$

avec $N_{a,i,s} \in M_{2,2}(\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q})$.

On sait (chap. 9 de [2]) comment une formule du genre de (2.2) peut servir à déterminer la croissance $\underline{p}$-adique de $U_{a;z}(\lambda)$ pour

$|\lambda-z| + |z|\ \mathrm{Min}(1, |z-1|)$, dès qu'on a une connaissance suffisante, du point de vue de la similitude semi-linéaire (Théorie de Dieudonné) de $A_a(\lambda)$. On peut donc construire une théorie similaire pour $_3F_2$ en utilisant la formule (1.1) et les propriétés de $_2F_1$ qu'on vient d'énoncer. En effet le procédé est tout à fait semblable à celui utilisé par Dwork pour construire la théorie relative à $_2F_1$, en partant de celle, élémentaire, de $_1F_0(a;\lambda) = (1-\lambda)^{-a}$, puisque

$$(2.8) \qquad {}_2F_1\left({a,b \atop c};\lambda\right) = \text{const.} \int x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}(1-x\lambda)^{-a}dx \ .$$

Il est possible de construire inductivement une théorie cohomologique pour $_{n+1}F_n$, en utilisant la formule :

$$(2.9) \qquad {}_{n+1}F_n\left({a,b_1,\dots,b_n \atop c_1,\dots,c_n};\lambda\right) = \text{const.} \int x^{b_1-1}(1-x)^{c_1-b_1-1}\, {}_nF_{n-1}\left({a,b_2,\dots,b_n \atop c_2,\dots,c_n};x\lambda\right)dx$$

3. THÉORIE DUALE POUR $_3F_2\left({a,b_1,b_2 \atop c_1,c_2};\lambda\right)$. STRUCTURE SYMPLECTIQUE.

3.0. Dans cette section, λ sera toujours une indéterminée. <u>On supposera dorénavant que</u> $a,b_1,b_2,c_1,c_2 \in \mathbb{Z}_p$. Soient $S = \{0,1,1/\lambda,\infty\}$, $T_0 = x$, $T_1 = 1-x$, $T_{1/\lambda} = 1-x\lambda$, $T_\infty = 1/x$ et pour $\nu \in S$ soit $R'_\nu = \mathcal{Q}((T_\nu))$ (séries formelles à queue négative fine) et $R_\nu = \mathcal{Q}[[T_\nu]]$ si $\nu \neq \infty$, $R_\infty = T_\infty \mathcal{Q}[[T_\infty]]$. Considérons le plongement diagonal :

$L \hookrightarrow R' = \bigoplus_{\nu \in S} R'_\nu$ et soient $\gamma_+ : R' \longrightarrow L$, $\gamma_+((\xi_\nu)_{\nu\in S}) = \sum_{\nu\in S} P_\nu(\xi_\nu)$,

où P_ν dénote la partie principale à ν . Par le théorème de Mittag-Leffler , $\gamma_+(r) = r$, si $r \in L$. On pose aussi

$\gamma_- = \mathrm{id}_{R'} - \gamma_+ : R' \longrightarrow R = \bigoplus_{\nu\in S} R_\nu$; on a $\gamma_-(r) = r$ si $r \in R$. Il

existe une forme $\mathcal{Q}$-bilinéaire : $<,> : R' \times R' \longrightarrow \mathcal{Q}$,

$<(\xi_\nu)_{\nu\in S},(\eta_\nu)_{\nu\in S}> = \sum_{\nu \in S} \mathrm{Res}(\xi_\nu\eta_\nu)$, qui induit une forme $\mathcal{Q}$-bilinéaire $<,>$ sur $R\times L$ à noyaux gauche et droit nuls, telle que tout élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}}(L,\mathcal{Q})$ soit de la forme $\eta \longmapsto <\xi,\eta>$, pour un ξ convenable (et bien déterminé) dans R . On en déduit une forme $\mathcal{Q}$-bilinéaire :

$$(3.0.1)\qquad \begin{aligned} <,> : R^2 \times L^2 &\longrightarrow Q \\ \left(\binom{\xi_1}{\xi_2},\binom{\eta_1}{\eta_2}\right) &\longmapsto <\xi_1,\eta_1> + <\xi_2,\eta_2> . \end{aligned}$$

On calcule facilement, en utilisant les résultats du chapitre 2 de [2], l'application Q-linéaire transposée de $D_a : L^2 \longrightarrow L^2$. C'est $D_a^* = -\gamma_-(x\frac{\partial}{\partial x} + 1 - {}^tG_a(x\lambda) - c_1 - \frac{b_1-c_1}{1-x}) = -\gamma_-\Delta_a^{-1}(x\lambda)D_{1-a}\Delta_a(x\lambda)$, où a est une abréviation de (a,b_1,b_2,c_1,c_2) dans D_a et de (a,b_2,c_2) dans G_a et Δ_a, et de même pour 1-a (on laissera au lecteur le soin de ne pas confondre entre les deux abréviations...) ; la formule est de toute façon une conséquence de (2.1'). Soit

$K_a = \mathrm{Ker}_{R^2} D_a^* = \{(\xi_\nu)_{\nu\in S} \in R^2 \mid D_a^*((\xi_\nu)_{\nu\in S}) = 0$;

K_a s'interprète naturellement comme l'espace dual de $W_a = L^2/D_aL^2$. On a vu que $D_a^* = \gamma_-D_a'$, où $D_a' = -\Delta_a^{-1}(x\lambda)D_{1-a}\Delta_a(x\lambda)$ est un opérateur différentiel agissant sur R'^2 et γ_- est la projection sur R^2. Donc résoudre $D_a^*Y = 0$ revient à résoudre un système non-homogène $D_a'Y = u$, avec $u \in L^2$ ne dépendant que des "coordonnées" $<Y,e_a^{(i)}>$ de $Y \in K_a$, $i = 1,2,3,4$. Au fait, $\underline{u}$ ne dépend pas de $<Y,e_a^{(4)}>$, comme on voit dans la proposition suivante.

Donc D_a' a un noyau H_a , que l'on explicitera dans la proposition 3.3. On démontrera ensuite (lemme 3.29) que H_a est l'orthogonal de V_a dans K_a. Dans le théorème 3.15, on donne une forme explicite de la base de K_a duale de la base $(e_a^{(1)},e_a^{(2)},e_a^{(3)},e_a^{(4)})$ de W_a . Par moyen de l'opérateur D_a' , on construit un morphisme de modules différentiels $\hat{D}_a : K_a \longrightarrow W_{1-a}$ dont l'image est V_{1-a} et le noyau est H_a ((3.28),(3.29)). On en déduit finalement une dualité de modules différentiels ("forme symplectique") [,] , entre V_{1-a} et V_a .

PROPOSITION 3.1. <u>Un élément</u> $\xi = (\xi_\nu)_{\nu\in S}$ <u>de</u> R^2 <u>est dans</u> K_a <u>si et seulement si, pour tout</u> $\nu \in S$, on a :

$$D_{1-a}\Delta_a\xi_\nu = \left((c_1-c_2) < \xi, \binom{1}{0}> + (c_2-b_2) < \xi, \binom{0}{1} >\right)(a-c_2)\lambda\binom{1}{0} +$$

$$+ (b_2-c_2)\left((c_2-a) < \xi,\binom{1}{0}> + (a+b_2-c_1-c_2) < \xi,\binom{0}{1}>\right)\lambda\binom{0}{1} +$$

$$+ (b_1-c_1)(a-c_2)<\xi, \begin{pmatrix}\frac{1}{1-x}\\0\end{pmatrix}>\lambda\begin{pmatrix}\frac{1}{1-x}\\0\end{pmatrix} + (b_1-c_1)(b_2-c_2)<\xi,\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{1-x}\end{pmatrix}>(1-\lambda)\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{1-x}\end{pmatrix}.$$

<u>Démonstration</u> : Par définition, $\xi = (\xi_\nu)_{\nu\in S} \in R^2$ est dans K_a si et seulement si $D_a^*\xi = 0$; cela signifie $\gamma_-(\Delta_a^{-1}D_{1-a}\Delta_a\xi) = 0$ et donc $\Delta_a^{-1}D_{1-a}\Delta_a\xi \in L^2$. On a alors, pour tout $\nu \in S$:

$$\Delta_a^{-1}D_{1-a}\Delta_a\xi_\nu = \sum_{\nu\in S} P_\nu(\Delta_a^{-1}D_{1-a}\Delta_a\xi_\nu) =$$

$$\sum_{\nu\in S} P_\nu\left(\Delta_a^{-1}(x\lambda)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + G_{1-a}(x\lambda) + 1 - c_1 + \frac{c_1-b_1}{1-x}\right)\Delta_a(x\lambda)\begin{pmatrix}\xi_\nu^{(1)}\\\xi_\nu^{(2)}\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \sum_{\nu\in S} P_\nu\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{(a-c_2)x\lambda} & 0\\ 0 & \frac{1}{(b_2-c_2)(1-x\lambda)}\end{pmatrix}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} c_2-1 & (a-c_2)(\frac{1}{1-x\lambda}-1)\\ b_2-c_2 & (1+c_2-a-b_2)(\frac{1}{1-x\lambda}-1)\end{pmatrix} + 1-c_1+\frac{c_1-b_1}{1-x}\right)\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix}(a-c_2)x\lambda\xi_\nu^{(1)}\\(b_2-c_2)(1-x\lambda)\xi_\nu^{(2)}\end{pmatrix}\right) = (c_1-b_1)P_1\begin{pmatrix}\xi_1^{(1)}/(1-x)\\ \xi_1^{(2)}/(1-x)\end{pmatrix} + P_{1/\lambda}\begin{pmatrix}0\\ \frac{(a-c_2)\xi^{(1)}_{1/\lambda}+(c_2-a-b_2)\xi^{(2)}_{1/\lambda}}{1-x\lambda}\end{pmatrix} =$$

$$= (c_1-b_1)\begin{pmatrix}<\xi,\begin{pmatrix}\frac{1}{1-x}\\0\end{pmatrix}>\frac{1}{x-1}\\ <\xi,\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{1-x}\end{pmatrix}>\frac{1}{x-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \left((a-c_2)<\xi,\begin{pmatrix}\frac{1}{1-x\lambda}\\0\end{pmatrix}> + (c_2-a-b_2)<\xi,\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{1-x\lambda}\end{pmatrix}>\right)(x-\frac{1}{\lambda})^{-1}\end{pmatrix}$$

$$= (c_1-b_1)\begin{pmatrix}<\xi,\begin{pmatrix}\frac{1}{1-x}\\0\end{pmatrix}>\frac{1}{x-1}\\ <\xi,\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{1-x}\end{pmatrix}>\frac{1}{x-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ <-\xi,\begin{pmatrix}\frac{a-c_2}{1-x}\\ \frac{c_2-a-b_2}{1-x}\end{pmatrix}>\frac{\lambda}{1-x\lambda}\end{pmatrix} =$$

$$(c_1-b_1)\begin{pmatrix} <\xi,\begin{pmatrix}\frac{1}{1-x}\\ 0\end{pmatrix}>\frac{1}{1-x} \\ <\xi,\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{1-x}\end{pmatrix}>\frac{1}{x-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ <\xi,\begin{pmatrix} c_2-a \\ a+b_2-c_1-c_2+\frac{c_1-b_1}{1-x}\end{pmatrix}>\frac{\lambda}{1-x\lambda}\end{pmatrix},$$

Puisque

$$D_a\binom{1}{0} = \begin{pmatrix} c_1-c_2+\frac{b_1-c_1}{1-x} \\ c_2-b_2\end{pmatrix}, \quad D_a\binom{0}{1} = \begin{pmatrix} (a-c_2)\left(1-\frac{1}{1-x\lambda}\right) \\ c_1+c_2+\frac{b_1-c_1}{1-x}-a-b_2+\frac{a+b_2-c_2}{1-x}\end{pmatrix},$$

et si $\xi \in K_a$ on a $<\xi,D_a\eta> = 0$ pour tout $\eta \in L^2$. On a donc :

$$D_{1-a}\xi_\nu = \begin{pmatrix} \left((c_1-c_2)<\xi,\binom{1}{0}> + (c_2-b_2)<\xi,\binom{0}{1}>\right)(a-c_2)\lambda\left(1-\frac{1}{1-x}\right) \\ (c_1-b_1)(c_2-b_2)<\xi,\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{1-x}\end{pmatrix}>\left(\lambda+\frac{1-\lambda}{1-x}\right)\end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} 0 \\ <\xi,\begin{pmatrix} c_2-a \\ a+b_2-c_1-c_2+\frac{c_1-b_1}{1-x}\end{pmatrix}>(b_2-c_2)\lambda\end{pmatrix},$$

d'où la proposition C.Q.F.D.

Avant de résoudre le système non-homogène de la proposition 3.1, nous prouvons un résultat partiel.

DÉFINITION 3.2. <u>Soient</u> $\alpha \in \mathbb{Q}$ <u>et</u> $\nu \in S$; <u>soit</u> $Q \in \mathcal{Q}[[T_\nu]]$ <u>non divisible par</u> T_ν. <u>Alors</u> Q_ν^α <u>dénote la solution de l'équation différentielle</u> $y^{-1}dy/dT_\nu = \alpha Q^{-1}dQ/dT_\nu$ <u>dans</u> $\mathcal{Q}[[T_\nu]]$ <u>qui vaut</u> 1 <u>pour</u> $T_\nu = 0$.

PROPOSITION 3.3. <u>Soit</u> $\xi \in K_a$ <u>tel que</u> $\langle \xi,\eta \rangle = 0$ <u>pour tout</u> $\eta \in V_a$. <u>On a alors</u> :

(3.3.1) $$D_{1-a}\Delta_a\xi_\nu = 0 \quad \underline{\text{pour tout}} \quad \nu \in S .$$

<u>Le système différentiel homogène</u> (3.3.1) <u>admet un</u> $\mathcal{Q}$<u>-module libre</u> H_a <u>de solutions, engendré par</u>

(3.3.2) $$\bar{\xi} = (0\ ,\ 0\ ,\ \bar{\xi}_{1/\lambda}\ ,\ 0)\ , \quad \underline{\text{où}}$$

(3.3.3) $$\bar{\xi}_{1/\lambda} = \begin{pmatrix} (a+b_2-c_2)x_{1/\lambda}^{b_1-c_2-1}(1-x)_{1/\lambda}^{c_1-b_1}\,{}_2F_1\left({a-c_2,b_2-c_2 \atop a+b_2-c_2}\,;\,1-x\lambda\right) \\ (a-c_2)\lambda x_{1/\lambda}^{b_1-c_2}(1-x)_{1/\lambda}^{c_1-b_1}\,{}_2F_1\left({a+1-c_2,b_2+1-c_2 \atop a+b_2+1-c_2}\,;\,1-x\lambda\right) \end{pmatrix} .$$

<u>Démonstration</u> : Soit d'abord $\nu = 0$. On a alors, dans les notations de (2.5.1) :

(3.3.4) $$D_{1-a} = (1-x)_0^{c_2-b_2}V_{1-a;0}^{-1}(x\lambda)\left(x\frac{\partial}{\partial x}+\begin{pmatrix} 1-b_1 & 0 \\ 0 & c_2-b_1 \end{pmatrix}\right)V_{1-a;0}(x\lambda)(1-x)_0^{b_2-c_2} .$$

Comme $\eta \longmapsto V_{1-a;0}(x\lambda)(1-x)_0^{b_2-c_2}\Delta_a(x\lambda)\eta$ est un $\mathcal{Q}$-automorphisme de $R_0'^2$, s'il y avait une solution non nulle de (3.3.1) pour $\nu = 0$ dans $R_0'^2$, il y en aurait aussi une de

$$x\frac{\partial}{\partial x}Y = \begin{pmatrix} 1-b_1 & 0 \\ 0 & c_2-b_1 \end{pmatrix} Y ,$$

ce qui est évidemment impossible puisque $1-b_1, b_1-c_2 \notin \mathbb{Z}$. Pour $\nu = 1,\infty$ on obtient le même résultat (aucune solution non nulle de (3.3.1)). On a en effet pour $\nu = 1$:

(3.3.5) $$D_{1-a} = x_1^{b_1-1}U_{1-a;\lambda}^{-1}(x\lambda)\left(x\frac{\partial}{\partial x}+(b_1-c_1)\left(1-\frac{1}{1-x}\right)\right)U_{1-a;\lambda}(x\lambda)x_1^{1-b_1}$$

et pour $\nu = \infty$, comme conséquence de (2.5.3) :

$$D_{1-a} = (1/x-1)_\infty^{c_1-b_1} V_{1-a;\infty}^{-1}(x\lambda)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} a-c_1 & 0 \\ 0 & b_2-c_1 \end{pmatrix}\right) \tag{3.3.7}$$
$$V_{1-a;\infty}(x\lambda)(1/x-1)_\infty^{b_1-c_1} .$$

Il nous reste à considérer le cas $\nu = 1/\lambda$. On a, de (2.5.2) :

$$D_{1-a} = x_{1/\lambda}^{b_1-1}(1-x)_{1/\lambda}^{c_1-b_1} V_{1-a;1}^{-1}(x\lambda)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (a+b_2-c_2-1)(\frac{1}{1-x\lambda}-1) \end{pmatrix}\right)$$
$$V_{1-a;1}(x\lambda)(1-x)_{1/\lambda}^{b_1-c_1} x_{1/\lambda}^{1-b_1} ;$$

il en résulte que le $\mathcal{Q}$-module des solutions de (3.3.1) pour $\nu = 1/\lambda$ est engendré par la première colonne de la matrice

$$\Delta_a^{-1}(x\lambda)x_{1/\lambda}^{b_1-1}(1-x)_{1/\lambda}^{c_1-b_1}V_{1-a;1}^{-1}(x\lambda) .$$

La seule difficulté pour conclure est le calcul de $V_{a,b,c;1}(x) = g(x)$. Mais on remarque que $g^{-1}dg/dx = \frac{1}{x}\,\mathrm{Tr}G_{a,b,c}(x) - \frac{a+b-c}{1-x} = -c/x$ et donc que $\det V_{a,b,c;1}(x) = \mathrm{const.}x_1^{-c}$. Un calcul modulo $(1-x)$ dans (2.5.2) montre que :

$$\det V_{a,b,c;1}(x) = (a+b-c)(a+b-c-1)x_1^{-c} . \tag{3.3.8}$$

On conclut que

$$\det V_{1-a;1}(x\lambda) = (a+b_2-c_2)(a+b_2-c_2-1)(\lambda x)_{1/\lambda}^{c_2-1} \tag{3.3.9}$$

et on en déduit facilement le résultat. C.Q.F.D.

Considérons la table :

(3.4)

$\nu =$	0	1	$1/\lambda$	∞
$t_\nu =$	λ	$\lambda/\lambda-1$	$1/1-\lambda$	$1/\lambda$

.

Observons aussi que le système (3.1) s'exprime encore sous la forme équivalente :

$$
\begin{aligned}
D_{1-a}\Delta_a\xi_\nu = {} & ((c_1-c_2)<\xi,\binom{1}{0}> + (c_2-b_2)<\xi,\binom{0}{1}>)(a-c_2)\lambda\binom{1}{0} + \\
& + (b_2-c_2)((c_2-a)<\xi,\binom{1}{0}> + (a+b_2-c_1-c_2)<\xi,\binom{0}{1}>)\lambda\binom{0}{1} + \\
& + ((c_2-c_1)<\xi,\binom{1}{0}> + (b_2-c_2)<\xi,\binom{0}{1}>)(a-c_2)\lambda\begin{pmatrix}\frac{1}{1-x}\\ 0\end{pmatrix} + \\
& + (b_1-c_1)(b_2-c_2)<\xi,\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{1-x}\end{pmatrix}>(1-\lambda)\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{1-x}\end{pmatrix} ,
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

pour $\nu \in S$, $\xi_\nu \in R^2$. On pose pour $\xi \in R^2$:

$$
\begin{aligned}
A(\xi) &= ((c_1-c_2)<\xi,\binom{1}{0}> + (c_2-b_2)<\xi,\binom{0}{1}>)(a-c_2)\lambda \\
B(\xi) &= ((c_2-a)<\xi,\binom{1}{0}> + (a+b_2-c_1-c_2)<\xi,\binom{0}{1}>)(b_2-c_2)\lambda \\
C(\xi) &= (b_1-c_1)(b_2-c_2)(1-\lambda)<\xi,\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{1-x}\end{pmatrix}>
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

et le système (3.5) devient alors :

$$
D_{1-a}\Delta_a\xi_\nu = \begin{pmatrix} A(\xi)\,\frac{x}{x-1} \\ B(\xi) + \frac{C(\xi)}{1-x}\end{pmatrix} .
\tag{3.7}
$$

Un simple calcul de déterminants dans (3.6) en tenant compte du fait que $(b_2-c_1)(c_1-a)(b_2-c_2) \neq 0$, montre que la proposition 3.1 peut se réénoncer en disant que

PROPOSITION 3.8. K_a <u>est l'ensemble des solutions</u> ξ <u>dans</u> R^2 <u>des systèmes différentiels non-homogènes</u>

$$
D_{1-a}\Delta_a(x\lambda)\xi_\nu = \begin{pmatrix} A\,\frac{x}{1-x} \\ B + \frac{C}{1-x}\end{pmatrix}
$$

<u>où</u> A,B,C <u>varient dans</u> $\mathcal{Q}$.

Pour commodité de référence, nous explicitons les formules suivantes : (a = (a,b,c))

$$V_{1-a;0}(x\lambda) = \begin{pmatrix} (b-c)F(1-a,1-b;2-c;x\lambda) & (1-c)F(1-a,1-b;1-c;x\lambda) \\ cF(c-a,c-b;c;x\lambda) & (a-c)x\lambda F(c+1-a,c+1-b;1+c;x\lambda) \end{pmatrix}$$

(3.9) $$\det V_{1-a;0}(x\lambda) = c(c-1)(1-x\lambda)_0^{a+b-1-c}$$

$$V_{1-a;0}^{-1}(x\lambda) = \frac{(1-x\lambda)^{c+1-a-b}}{c(c-1)} \begin{pmatrix} (a-c)x\lambda F(c+1-a,c+1-b;1+c;x\lambda) & (c-1)F(1-a,1-b;1-c;x\lambda) \\ -cF(c-a,c-b;c;x\lambda) & (b-c)F(1-a,1-b;2-c;x\lambda) \end{pmatrix}$$

$$V_{1-a;1}(x\lambda) = \begin{pmatrix} (1+c-a-b)F(1-a,1-b;1+c-a-b;1-x\lambda) & (c-a)F(1-a,1-b;2+c-a-b;1-x\lambda) \\ (b-c)(1-x\lambda)F(a+1-c,b+1-c;a+b+1-c;1-x\lambda) & (c-a-b)F(a-c,b-c;a+b-c;1-x\lambda) \end{pmatrix}$$

(3.10) $$\det V_{1-a;1}(x\lambda) = (a+b-c)(a+b-c-1)(\lambda x)_{1/\lambda}^{c-1}$$

$$V_{1-a;1}^{-1}(x\lambda) = \frac{(\lambda x)_{1/\lambda}^{1-c}}{(a+b-c)(a+b-c-1)}$$

$$\begin{pmatrix} (c-a-b)F(a-c,b-c;a+b-c;1-x\lambda) & (a-c)F(1-a,1-b;2+c-a-b;1-x\lambda) \\ (c-b)(1-x\lambda)F(a+1-c,b+1-c;a+b+1-c;1-x\lambda) & (1+c-a-b)F(1-a,1-b;1+c-a-b;1-x\lambda) \end{pmatrix}$$

$$V_{1-a;\infty}(x\lambda) = \begin{pmatrix} (b-c)F(1-a,c-a;b-a+1;1/x\lambda) & (a-c)F(1-a,c-a+1;b-a+1;1/x\ ) \\ (a-c)F(1-b,c-b;a-b+1;1/x\lambda) & (b-c)F(1-b,c-b+1;a-b+1;1/x\ ) \end{pmatrix}$$

(3.11) $$\det V_{1-a;\infty}(x\lambda) = (b-a)(a+b-2c)\left(\frac{\lambda x}{1-x}\right)_{\infty}^{1+c-a-b}$$

$$V^{-1}_{1-a;\infty}(x\lambda) = \frac{(\frac{x}{1-x\lambda})^{a+b-c-1}_{\infty}}{(b-a)(a+b-2c)}$$

$$\begin{pmatrix} (b-c)F(1-b,c-b+1;a-b+1;1/x\lambda) & (c-a)F(1-a,c-a+1;b-a+1;1/x\lambda) \\ (c-a)F(1-b,c-b;a-b+1;1/x\lambda) & (b-c)F(1-a,c-a;b-a+1;1/x\lambda) \end{pmatrix}$$

(3.12)

$$U_{1-a;\lambda}(x\lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} M_{1-a,s}(\lambda)(-\lambda)^s(1-x)$$

$$U^{-1}_{1-a;\lambda}(x\lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} M_{1-a,s}(x\lambda)\lambda^s(1-x)^s$$

où

$$M_{1-a,s}(\lambda) = i_s^{-1} \sum_{i=0}^{s} N_i \lambda^{-i}(1-\lambda)^{i-s}$$

avec $N_i = N_{1-a,i,s} \in M_{2,2}(\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q})$, et $i_s \in [1,s] \cap \mathbb{Z}$.

DÉFINITION 3.13. <u>Pour</u> $\alpha \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}$ <u>et</u> $\nu \in S$, <u>on dénote</u> $\int_{\alpha,\nu}$ <u>l'opérateur</u> $\mathcal{Q}$-<u>linéaire</u> :

$$\int_{\alpha,\nu} : R'_\nu \longrightarrow R'_\nu$$

$$\sum_{i>>-\infty}^{+\infty} a_i T_\nu^i \longrightarrow \sum_{i>>-\infty}^{+\infty} a_i(\alpha+i)^{-1}T_\nu^i .$$

<u>On a donc</u> $\int_{\alpha,\nu} = (T_\nu \frac{d}{dT_\nu} +\alpha)^{-1}$ <u>en tant qu'opérateurs sur</u> R'_ν <u>et sur</u> R_ν .

LEMME 3.14. <u>Soit</u> $\nu \in S$, <u>et pour</u> $i=1,2$, F_i <u>un élément de</u> R_ν <u>de la forme</u> :

$$F_i = \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{(i)}(t_\nu)T_\nu^j$$

<u>où</u> $C_j^{(i)}(t_\nu) \in \mathbb{Q}[T_\nu]$ <u>est un polynôme en</u> t_ν <u>de degré</u> $< j$ <u>à coeffi-</u>

cients bornés (en valeurs absolue p-adique) par Kj^{e_i} où K, e_1, e_2 dont des nombres réels. Alors F_1F_2 est de la forme :

$$\sum_{j=0}^{\infty} D_j(t_\nu)T_\nu^j \tag{3.14.1}$$

avec $D_j(t_\nu)$ $\mathbb{Q}[t_\nu]$, de degré $\leqslant j$ en t_ν et à coefficients bornés par $Kj^{e_1+e_2}$. De plus si $\alpha \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}$, $\int_{\alpha,\nu} F_1$ est encore de la forme (3.14.1) avec les coefficients de $D_j(t_\nu)$ bornés par $K'j^{e_1+1}$, où K' dénote une constante convenable.

Démonstration : Elle est laissée au lecteur.

THÉORÈME 3.15. K_a est un $\mathcal{Q}$-module libre de rang 4. Soit $\xi = (\xi_\nu)_{\nu \in S} \in K_a$, $\xi_\nu = \binom{\xi_{\nu 1}}{\xi_{\nu 2}}$ pour $\nu \in S$. Pour tout $\nu \in S$, $i=1,2$ il existe des $\alpha_{\nu,i} \in \mathcal{Q}$ tels que $\alpha_{\nu i}\, \xi_{\nu i}$ soit de la forme $\sum_{h=0}^{\infty} C_h(t_\nu)T_\nu^h$, où $C_h(t_\nu) \in \mathbb{Q}[t_\nu]$ est un polynôme de degré $\leqslant h$ en t_ν, à coefficients bornés (en valeur absolue p-adique) par h^3.

Démonstration : Soit V'_a le $\mathcal{Q}$-sous-module de L^2 engendré par $\begin{pmatrix} \frac{x}{x-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1-x} \end{pmatrix}$. On a déjà démontré l'existence d'une suite exacte de $\mathcal{Q}$-modules et $\mathcal{Q}$-homomorphismes :

$$0 \longrightarrow H_a \hookrightarrow K_a \xrightarrow{\tilde{D}_a} V'_a \longrightarrow 0 . \tag{3.16}$$

où $\tilde{D}_a$ est l'application définie par

$$\tilde{D}_a((\xi_\nu)_{\nu \in S}) = D_{1-a}\Delta_a(x\lambda)\xi_\nu \tag{3.17}$$

pour n'importe quel $\nu \in S$, et pour $(\xi_\nu)_{\nu\in S} \in K_a$. Nous allons construire une section $E_a : V'_a \longrightarrow K_a$ de $\tilde{D}_a$, par composantes : $E_a = \bigoplus_{\nu\in S} E_{a,\nu}$.

Soit d'abord $\nu = 0$. On pose alors, forcément :

(3.18)
$$E_{a,0} = \Delta_a^{-1}(x\lambda)\,(1-x)_0^{c_2-b_2}\,V^{-1}_{1-a;0}(x\lambda)\begin{pmatrix}\int_{1-b_1,0} & 0\\ 0 & \int_{c_2-b_1,0}\end{pmatrix} V_{1-a;0}(x\lambda)\,(1-x)_0^{b_2-c_2}\;.$$

Si $(A,B,C) \in \mathcal{Q}^3$, on calcule alors :

$$E_{a,0}\begin{pmatrix}A\,\frac{x}{x-1}\\ B+\frac{C}{1-x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(a-c_2)^{-1}(x\lambda)^{-1} & 0\\ 0 & (b_2-c_2)^{-1}(1-x\lambda)^{-1}\end{pmatrix}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(b_2-c_2)_i}{i!}\,x^i\right)\frac{1}{c_2(c_2-1)}$$

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a+b_2-c_2-1)_j}{j!}\,\lambda^j x^j\right)\begin{pmatrix}(a-c_2)x\lambda F(c_2+1-a,c_2+1-b_2;1+c_2;x\lambda) & (c_2-1)F(1-a,1-b_2;1-c_2;x\lambda)\\ -c_2F(c_2-a,c_2-b;c_2;x\lambda) & (b_2-c_2)F(1-a,1-b_2;2-c_2;x\lambda)\end{pmatrix}$$

(3.19)
$$\begin{pmatrix}\int_{1-b_1,0} & 0\\ 0 & \int_{c_2-b_1,0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(b_2-c_2)F(1-a,1-b_2;2-c_2;x\lambda) & (1-c_2)F(1-a,1-b_2;1-c_2;x\lambda)\\ c_2F(c_2-a,c_2-b_2;c_2;x\lambda) & (a-c_2)x\lambda F(c_2+1-a,c_2+1-b_2;1+c_2;x\lambda)\end{pmatrix}$$
$$\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(c_2-b_2)_h}{h!}\,x^h\begin{pmatrix}A\,\frac{x}{x-1}\\ B+\frac{C}{1-x}\end{pmatrix}.$$

Soit maintenant $\nu = \infty$; on a :

(3.20)
$$E_{a,\infty} = -\Delta_a^{-1}(x\lambda)\left(\tfrac{1}{x}-1\right)_\infty^{c_1-b_1}V^{-1}_{1-a;\infty}(x\lambda)\begin{pmatrix}\int_{c_1-a,\infty} & 0\\ 0 & \int_{c_1-b_2,\infty}\end{pmatrix}V_{1-a;\infty}(x\lambda)\left(\tfrac{1}{x}-1\right)_\infty^{b_1-c_1}$$

et donc

$$E_{a,\infty}\begin{pmatrix} A\,\frac{x}{x-1} \\ B+\frac{C}{1-x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_2-a)^{-1}t_\infty T_\infty & 0 \\ 0 & (b_2-c_2)^{-1}\frac{t_\infty T_\infty}{1-t_\infty T_\infty}\end{pmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(b_1-c_1)_i}{i!} T_\infty^i \frac{1}{(b_2-a)(a+b_2-2c_2)}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a+b_2-c_2-1)_j}{j!} t_\infty^j T_\infty^j$$

$$\begin{pmatrix} (b_2-c_2)F(1-b_2,c_2-b_2+1;a-b_2+1;t_\infty T_\infty) & (c_2-a)F(1-a,c_2-a+1;b_2-a+1;t_\infty T_\infty) \\ (c_2-a)F(1-b_2,c_2-b_2\,;\,a-b_2+1\,;\,t_\infty T_\infty) & (v_2-c_2)F(1-a,c_2-a;b_2-a+1\,;\,t_\infty T_\infty)\end{pmatrix}$$

(3.21)

$$\begin{pmatrix} \int_{c_1-a,\infty} & 0 \\ 0 & \int_{c_1-b_2,\infty}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (b_2-c_2)F(1-a,c_2-a;b_2-a;t_\infty T_\infty) & (a-c_2)F(1-a,c_2-a+1\,;\,t_\infty T_\infty) \\ (a-c_2)F(1-b_2,c_2-b_2;a-b_2+1,t_\infty T_\infty) & (b_2-c_2)F(1-b_2,c_2-b_2+1;a-b_2+1;t_\infty T_\infty)\end{pmatrix}$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(c_1-b_1)_h}{h!} T_\infty^h \begin{pmatrix} A(1-T_\infty)^{-1} \\ (B-(B+C)T_\infty)(1-T_\infty)^{-1}\end{pmatrix} .$$

Soit encore $\nu = 1$; on a :

(3.22) $$E_{a,1} = -\Delta_a^{-1}(x\lambda)x^{b_1-1}\, U_{1-a;\lambda}^{-1}(x\lambda) \int_{b_1-c_1,1} \frac{T_1}{1-T_1} U_{1-a;\lambda}(x\lambda)x_1^{1-b_1}$$

et donc :

$$E_{a,1}\begin{pmatrix} A\,\frac{x}{x-1} \\ B+\frac{C}{1-x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_2-a)^{-1}\lambda^{-1}(1-T_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (c_2-b_2)(1-\lambda)^{-1}(1-t_1T_1)^{-1}\end{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-b_1)_j}{j!} T_1^j$$

$$(3.23)\qquad \sum_{s=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{s} N_{1-a,i,s}(-t_1)^{s-i}(1-t_1)^{-i}(1-t_1T_1)^{i-s}\Big)i_s^{-1}T_1^s \int_{b_1-c_1,1} T_1(1-T_1)^{-1}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\Big(\sum_{h=0}^{r} N_{1-a,h,r}t_1^{r-h}\Big)i_r^{-1}T_1^r \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(b_1-1)_l}{l!}T_1^l \begin{pmatrix} A(T_1-1)T_1^{-1} \\ B+CT_1^{-1}\end{pmatrix} .$$

Pour $\nu = 0,1,\infty$, il n'y a pas eu de choix pour la composante $E_{a,\nu}$ d'une section E_a de $\tilde{D}_a$. Pour $\nu = 1/\lambda$ et $\eta = \sum_{i=1}^{\infty} a_i T_{1/\lambda}^i \in T_{1/\lambda} R_{1/\lambda}$, $a_i \in \mathcal{Q}$, on pose :

$$(3.23.1)\qquad \int_{1/\lambda} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i i^{-1} T_{1/\lambda}^i$$

et

(3.24)

$$E_{a,1/\lambda} = \Delta_a^{-1}(x\lambda)x_{1/\lambda}^{b_1-1}(1-x)_{1/\lambda}^{c_1-b_1}\, V_{1-a;1}^{-1}(x\lambda)\begin{pmatrix}\int_{1/\lambda} & 0 \\ 0 & \int_{c_2+1-a-b_2,1/\lambda} T_{1/\lambda}(T_{1/\lambda}-1)^{-1}\end{pmatrix}$$

$$V_{1-a;1}(x\lambda)(1-x)_{1/\lambda}^{b_1-c_1}\, x_{1/\lambda}^{1-b_1} .$$

On a donc :

$$E_{a,1/\lambda}\begin{pmatrix} A\frac{x}{x-1} \\ B+\frac{C}{1-x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(a-c_2)^{-1}(1-T_{1/\lambda})^{-1} & 0 \\ 0 & (b_2-c_2)^{-1}T_{1/\lambda}^{-1}\end{pmatrix}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(1-b_1)_i}{i!}T_{1/\lambda}^i$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(b_1-c_1)_j}{j!}t_{1/\lambda}^j T_{1/\lambda}^j \frac{1}{(a+b_2-c_2)(a+b_2-c_2-1)}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(c_2-1)_h}{h!}T_{1/\lambda}^h$$

$$\begin{pmatrix}(c_2-a-b_2)F(a-c_2,b_2-c_2\,;\,a+b_2-c_2\,;\,T_{1/\lambda}) & (a-c_2)F(1-a,1-b_2;2+c_2-a-b_2;T_{1/\lambda}) \\ (c_2-b_2)T_{1/\lambda}F(a+1-c_2,b_2+1-c_2;a+b_2+1-c_2;T_{1/\lambda}) & (1+c_2-a-b_2)F(1-a,1-b_2;1+c_2-a-b_2;T_{1/\lambda})\end{pmatrix}$$

$$(3.25)\qquad \begin{pmatrix} \int_{1/\lambda} & 0 \\ 0 & \int_{c_2+1-a-b_2,1/\lambda} T_{1/\lambda}(T_{1/\lambda}-1)^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (1+c_2-a-b_2)F(1-a,1-b_2\,;\,1+c_2-a-b_2;T_{1/\lambda}) & (c_2-a)F(1-a,1-b_2;2+c_2-a-b_2;T_{1/\lambda}) \\ (b_2-c_2)T_{1/\lambda}F(a+1-c_2,b_2+1-c_2;a+b_2+1-c_2;T_{1/\lambda}) & (c_2-a-b_2)F(a-c_2,b_2-c_2;a+b_2-c_2;T_{1/\lambda}) \end{pmatrix}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(c_1-b_1)_r}{r!}\, t^r_{1/\lambda}T^r_{1/\lambda} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-c_2)_s}{s!}\, T^s_{1/\lambda} \begin{pmatrix} \frac{A}{1-\lambda}(1+T_{1/\lambda})(1-t_{1/\lambda}T_{1/\lambda})^{-1} \\ B+C\,\frac{\lambda}{\lambda-1}\,(1-t_{1/\lambda}T_{1/\lambda})^{-1} \end{pmatrix} .$$

Le théorème découle alors facilement des formules précédentes en tenant compte du lemme 3.14 et du lemme 21.2 de [2]. C.Q.F.D.

Dans la démonstration du théorème précédent on a défini V'_a comme $D_{1-a}(\Delta_a K_a)$. Considérons la projection canonique :

$$\mathcal{L}^2 \longrightarrow W_{1-a} = \mathcal{L}^2/D_{1-a}\,\mathcal{L}^2$$
$$\xi \longmapsto [\xi] \ .$$

On voit bien que l'image de V'_a est V_{1-a} et que la suite de $\mathcal{Q}$-modules :

$$(3.26)\qquad 0 \longrightarrow H_a \hookrightarrow K_a \xrightarrow{\hat{D}_a} V_{1-a} \longrightarrow 0$$

où

$$(3.27)\qquad \hat{D}_a(\xi) = [\tilde{D}_a(\xi)] = [D_{1-a}(\Delta_a(x\lambda)\xi)] \quad ,$$

est exacte.

LEMME 3.28. <u>La forme $\mathcal{Q}$-bilinéaire</u> $<,> : R^2 \times \mathcal{L}^2 \longrightarrow \mathcal{Q}$ <u>induit une $\mathcal{Q}$-dualité entre</u> K_a <u>et</u> W_a. <u>La $\mathcal{Q}/\mathbb{Q}$-connexion de</u> K_a, <u>duale de la connexion</u> ∇_a <u>de</u> W_a <u>est</u> :

$$(3.28.1)\qquad \nabla^*_a(E_\lambda) = \gamma_-(\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda} - {}^tG_{a,b_2,c_2}(x\lambda)) \ .$$

<u>L'application $\mathcal{Q}$-linéaire $\hat{D}_a : K_a \longrightarrow W_{1-a}$ est alors un morphisme de $\mathcal{Q}/Q$-modules différentiels. Le noyau H_a et l'image V_{1-a} de $\hat{D}_a$ sont donc des sous-modules différentiels de K_a et de W_{1-a}, respectivement</u>.

<u>Démonstration</u> : La première assertion découle du fait que K_a et W_a sont des $\mathcal{Q}$-modules libres du même rang 4. Pour la seconde, on doit d'abord prouver que $\nabla_a^*(E_\lambda)K_a \subseteq K_a$. Il suffit de démontrer que, en tant que applications de R'^2 dans lui-même $\nabla_a^*(E\ )$ et D_a^* anti-commutent. On a, comme dans le lemme 2.4.2 de [2] :

$$D_a^*\nabla_a^*(E_\lambda) = -\gamma_-\Delta^{-1}(x\lambda)D_{1-a}\Delta_a(x\lambda)\gamma_-(\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda} - {}^tG_a(x\lambda)) =$$

$$= -\gamma_-\Delta_a^{-1}D_{1-a}\Delta_a(\lambda\,\frac{\partial}{\partial\lambda} - {}^tG_a) = \text{(par (2.1)')}$$

$$= -\gamma_-\Delta_a^{-1}D_{1-a}(\Delta_a\,\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda} + \lambda\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\,(\Delta_a) + G_{1-a}\Delta_a) =$$

$$= -\gamma_-\Delta_a^{-1}(\ x\,\frac{\partial}{\partial x} + 1 - c_1 + \frac{c_1-b_1}{1-x} + G_{1-a})(\lambda\,\frac{\partial}{\partial\lambda} + G_{1-a})\Delta_a =$$

$$\text{(puisque } x\,\frac{\partial}{\partial x}(G_{1-a}(x\lambda)) = \lambda\,\frac{\partial}{\partial\lambda}(G_{1-a}(x\lambda)))$$

$$= -\gamma_-\Delta_a^{-1}(\lambda\,\frac{\partial}{\partial\lambda} + G_{1-a})D_{1-a}\Delta_a = -\gamma_-(\lambda\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\,\Delta_a^{-1} + \Delta_a^{-1}\,\lambda\,\frac{\partial}{\partial\lambda}(\Delta_a))\Delta_a^{-1}$$

$$+ \Delta_a^{-1}G_{1-a})D_{1-a}\Delta_a = -\gamma_-(\lambda\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\,\Delta_a^{-1} - \Delta_a^{-1}G_{1-a} - {}^tG_a\Delta_a^{-1} + \Delta_a^{-1}G_{1-a})$$

$$D_{1-a}\Delta_a = -\gamma_-(\lambda\,\frac{\partial}{\partial\lambda} - {}^tG_a)\gamma_-\Delta_a^{-1}D_{1-a}\Delta_a = -\nabla_a^*(E_\lambda)D_a^*\ .$$

Pour montrer que $\nabla_a^*(E_\lambda)$, défini par (3.28.1) donne la connexion duale de ∇_a, on doit prouver que :

$$<\nabla_a^*(E_\lambda)\xi,[\eta]> + <\xi,\nabla_a(E_\lambda)[\eta]> = E_\lambda(<\xi,[\eta]>)$$

pour $\xi \in K_a$ et $[\eta]$ = classe de $\eta \in L^2$ module $D_a\ L^2$. On a :

$$<\nabla_a^*(E_\lambda)\xi,[\eta]> = <\gamma_-(\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda} - {}^tG_a)\xi,[\eta]> = <(\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda} - {}^tG_a)\xi,\eta> =$$

$$= <\frac{\partial}{\partial\lambda}\xi,\lambda\eta> - <\xi,G_a\eta> = \text{(voir (2.4.1.1) de [2])}$$

$$= - <\xi,\frac{\partial}{\partial\lambda}\lambda\eta> + \frac{\partial}{\partial\lambda}(<\xi,\lambda\eta>) - <\xi,G_a\eta> =$$

$$= - <\xi,\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\eta> - <\xi,\eta> + E_\lambda(<\xi,\eta>) + <\xi,\eta> - <\xi,G_a\eta> =$$

$$= <\xi,-(\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}+G_a)\eta> + E_\lambda(<\xi,\eta>) = - <\xi,\nabla_a(E_\lambda)[\eta] + E_\lambda(<\xi,[\eta]>) \ .$$

Il nous reste à prouver que D_a est un morphisme de $\mathcal{Q}/\mathbb{Q}$-modules différentiels, c'est-à-dire :

$$\hat{D}_a\nabla_a^*(E_\lambda)\xi = \nabla_{1-a}(E_\lambda)\,\hat{D}_a\,\xi$$

pour tout $\xi \in K_a$. On a :

$$\hat{D}_a\nabla_a^*(E_\lambda)\xi = [D_{1-a}\Delta_a(x\lambda)\gamma_-(\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda} - {}^tG_a(x\lambda))\,\xi\,] =$$

$$= [D_{1-a}\Delta_a(x\lambda)(\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda} - {}^tG_a(x\lambda))\xi\,] = [D_{1-a}(\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\Delta_a(x\lambda) - \lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}(\Delta_a(x\lambda)) -$$

$$- \Delta_a(x\lambda)\,{}^tG_a(x\lambda))\xi\,] = \text{(pour (2.1)')}$$

$$= [D_{1-a}(\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda} + G_{1-a}(x\lambda)\Delta_a(x\lambda))\xi\,] = \nabla_{1-a}(E_\lambda)\hat{D}_a\xi \quad .$$ C.Q.F.D.

LEMME 3.29. <u>Les deux suites exactes</u> :

$$0 \longrightarrow H_a \hookrightarrow K_a \xrightarrow{\hat{D}_a} V_{1-a} \longrightarrow 0$$

<u>et</u>

$$0 \longrightarrow H_{1-a} \hookrightarrow K_{1-a} \xrightarrow{\hat{D}_{1-a}} V_a \longrightarrow 0$$

<u>sont liées de la façon suivante</u> : $\hat{D}_{1-a} : K_{1-a} \longrightarrow W_a$ <u>est l'application</u> $\mathcal{Q}$-<u>linéaire transposée de</u> $\hat{D}_a : K_a \longrightarrow W_{1-a}$; H_a (<u>resp.</u> H_{1-a})

<u>est l'orthogonal de</u> V_a (<u>resp</u>. V_{1-a}) <u>dans</u> K_a (<u>resp</u>. K_{1-a}) .

<u>Démonstration</u> : Il suffit de prouver que :

$$<\xi,\hat{D}_{1-a}\eta> = <\eta,\hat{D}_a\xi> , \quad \text{pour} \quad \xi \in K_a , \eta \in K_{1-a} .$$

On a déjà remarqué que $D_a^* = -\gamma_-\Delta_a^{-1}D_{1-a}\Delta_a$ et donc

$$<\xi,\hat{D}_{1-a}\eta> = <\xi, [D_a\Delta_{1-a}\eta]> = <\xi,D_a\Delta_{1-a}\eta> =$$

$$= <D_a^*\xi,\Delta_{1-a}\eta> = <-\Delta_a^{-1}D_{1-a}\Delta_a\xi,\Delta_{1-a}\eta> =$$

$$= <-\Delta_{1-a}\Delta_a^{-1}D_{1-a}\Delta_a\xi,\eta> = <D_{1-a}\Delta_a\xi,\eta> = <\eta,\hat{D}_a\xi> . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

COROLLAIRE 3.30. <u>La forme $\mathcal{Q}$-bilinéaire</u> $<,> : R'^2 \longrightarrow \mathcal{Q}$ <u>induit une dualité de $\mathcal{Q}/\mathbb{Q}$-modules différentiels entre</u> H_a et H_{1-a}. <u>Il existe une dualité de $\mathcal{Q}/\mathbb{Q}$-modules différentiels entre</u> V_a <u>et</u> V_{1-a}

$$(3.30.1) \qquad \begin{aligned} [\,,\,] : V_{1-a} \times V_a &\longrightarrow \mathcal{Q} \\ (v',v) &\longmapsto [v',v] \end{aligned}$$

<u>définie par</u>

$$[v',v] = <k,v'> = <k',v>$$

<u>où</u> $\hat{D}_a k' = v'$, $\hat{D}_{1-a}k = v$.

THEOREME 3.31. <u>Soit</u> $\Theta = \Theta_a \in M_{3,3}(\mathcal{Q})$ <u>définie par</u>

$$\Theta_{ij} = [e_{1-a}^{(i)}, e_a^{(j)}] , \qquad i,j = 1,2,3 .$$

<u>On a</u> :

$$\Theta_a = \begin{pmatrix} \frac{(b_1-c_1)(a+b_2-c_1-c_2)+(b_2-c_2)(c_2-a)}{\lambda(b_1-c_2)(a-c_1)(c_1-b_2)(a-c_2)} & \frac{1}{\lambda(a-c_1)(c_1-b_2)} & 0 \\ \frac{1}{(a-c_1)(c_1-b_2)\lambda} & \frac{c_1-c_2}{(b_2-c_2)(a-c_1)(c_1-b_2)\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(b_1-c_1)(b_2-c_2)(1-\lambda)} \end{pmatrix}.$$

4. THÉORIE DE LA DÉFORMATION POUR ${}_3F_2\left(\begin{matrix} a,b_1,b_2 \\ e_1,e_2 \end{matrix};\lambda\right)$. STRUCTURE DE FROBENIUS.

4.0. Dans cette section, λ dénotera un élément de $\Omega\setminus\{0,1\}$ ou bien une variable $\underline{p}$-adique dans le même domaine. La plupart des définitions des sections précédentes se spécialisent, en remplaçant λ indéterminée par une valeur dans $\Omega\setminus\{0,1\}$; s'il s'agit de $\mathcal{Q}$-modules, l'objet spécialisé sera toujours un espace vectoriel sur Ω . Un indice λ dénotera normalement la spécialisation pour $\lambda\in\Omega\setminus\{0,1\}$ d'un objet déjà défini pour λ générique. Le théorème 3.15 suggère de poser, pour $\lambda\in\Omega\setminus\{0,1\}$

(4.0.1)

$\nu =$	0	1	$1/\lambda$	∞
$\Gamma_\nu =$	$\mathrm{Min}(1,1/\lvert\lambda\rvert)$	$\mathrm{Min}(1,\lvert\frac{\lambda-1}{\lambda}\rvert)$	$(\mathrm{Min}(1,\lvert\lambda-1\rvert)$	$\mathrm{Min}(1,\lvert\lambda\rvert)$

et implique que si dans $\xi\in K_a$ on spécialise λ à une valeur $\neq 0,1$ de Ω , les séries $\xi_{\nu,i}$, pour $\nu\in S$, $i=1,2$, convergent pour $|T_\nu|<\Gamma_\nu$ On définira alors (cf. [2] , chap. 3 et 4) pour $\lambda\in\Omega\setminus\{0,1\}$ et $\nu\in S$:

L_λ = {fonctions analytiques pour $|T_\nu|>\varepsilon_\nu$, pour tout $\nu\in S$, où ε_ν est un élément indéterminé de $(0,\Gamma_\nu)$} ;

$R'_\nu(\lambda)$ = {séries de Laurent en T_ν à coefficients dans Ω qui convergent pour $\varepsilon_\nu<|T_\nu|<\Gamma_\nu$, où ε_ν est un élément indéterminé de $(0,\Gamma_\nu)$} ;

$R_\nu(\lambda) = \{\xi \in R'_\nu(\lambda) \mid \xi$ est holomorphe pour $T_\nu = 0\}$, si $\nu \neq \infty$;

$R_\infty(\lambda) = \{\xi \in R'_\infty(\lambda) \mid \xi$ s'annule pour $T_\infty = 0\}$;

$R'(\lambda) = \bigoplus_{\nu\in S} R'_\nu(\lambda)$; $R(\lambda) = \bigoplus_{\nu\in S} R_\nu(\lambda)$.

4.1. Comme dans le cas formel on a une forme Ω-bilinéaire à noyaux à gauche et à droite nuls :

(4.1.1) $$<,>_\lambda \ : R(\lambda) \times L_\lambda \longrightarrow \Omega \quad ,$$

et des applications γ_+ et γ_-. Le résultat principal de [1], garantit que $W_{a,\lambda} = L^2_\lambda/D_{a,\lambda}L^2_\lambda$ est un Ω-espace vectoriel de base $e_{a,\lambda}$. De plus, $K_{a,\lambda} = \mathrm{Ker}_{R(\lambda)^2} D^*_{a,\lambda}$ admet une base $e^*_{a,\lambda}$ et est dual de $W_{a,\lambda}$.

On veut ici construire une théorie de la déformation pour le module dual $K_{a,\lambda}$ (et donc pour $W_{a,\lambda}$). On obtiendra ainsi une solution du système différentiel associé au module différentiel W_a , ce qui nous permettra de montrer que les solutions de l'opérateur hypergéométrique L_{a,b_1,b_2,c_1,c_2} convergent p-adiquement jusqu'à la plus proche singularité. On construit l'inverse du Frobenius

$\alpha_{a,\lambda} : W_{a,\lambda} \longrightarrow W_{a',\lambda^p}$ et son adjoint $\alpha^*_{a,\lambda} : W_{a',\lambda^p} \longrightarrow K_{a,\lambda}$.

On établit la propriété d'analyticité (par rapport à λ) de la matrice de cette application dans des bases convenables ("globales"). On établit les propriétés de compatibilité entre α, α^*, l'application de déformation (transport parallèle) et l'application symplectique. On en déduit en particulier que $\alpha_{a,\lambda}V_{a,\lambda} \subseteq V_{a',\lambda^p}$, et donc que le système différentiel associé à ${}_3F_2$ admet une structure de Frobenius forte. On obtient ainsi une estimation de la valuation p-adique du déterminant de la matrice de Frobénius.

Remarquons que, si $x_0 \in \Omega \setminus \{0,1,1/\lambda\}$ et $f_{b,c;x_0}(x)$ dénote une branche de $x^b(1-x)^{c-b}$ pour x près de x_0 , on a, en tant qu'opérateurs agissant sur un espace de fonctions de x analytiques près de x_0 :

(4.2) $$D_{a,\lambda} = f^{-1}_{b_1,c_1;x_0}(x)U^{-1}_{a,b_2,c_2;x_0\lambda}(x\lambda)E_xU_{a,b_2,c_2;x_0\lambda}(x\lambda)f_{b_1,c_1;x_0}(x) .$$

Soient maintenant $\lambda, z \in \Omega \setminus \{0,1\}$, avec $|\lambda - z| < |z| \operatorname{Min}(1, |z-1|)$; dans ce cas $|\lambda| = |z|$, $|\lambda - 1| = |z-1|$, $L_\lambda = L_z$, $R(\lambda) = R(z)$. On a alors :

LEMME 4.3. <u>Pour</u> $|\lambda - z| < |z| \operatorname{Min}(1, |z-1|)$, <u>il existe une application</u> :

$$T_{a;z,\lambda} : R(z)^2 \longrightarrow R(\lambda)^2$$
$$\xi \longmapsto \gamma_- {}^tU_{a,b_2,c_2;xz}(x\lambda)\xi .$$

<u>Démonstration</u> : Il suffit de vérifier que ${}^tU_{a,b_2,c_2,xz}(x\lambda) \in M_{2,2}(L_z)$. On sait que ${}^tU_{a,b_2,c_2;xz}(x\lambda)$ converge pour $|x\lambda - xz| < |xz| \operatorname{Min}(1, |1-xz|)$, et donc pour $|1-xz| > |\frac{\lambda - z}{z}|$; mais $|\frac{\lambda - z}{z}| < \operatorname{Min}(1, |z-1|) = r_{1/z}$, d'où la conclusion. C.Q.F.D.

THEOREME 4.4. <u>L'application</u> $T_{a;z,\lambda}$ <u>induit un</u> Ω-<u>isomorphisme</u> :

$$T_{a;z,\lambda} : K_{a,z} \longrightarrow K_{a,\lambda} .$$

<u>Démonstration</u> : On va prouver que :

$$D^*_{a,\lambda} T_{a;z\lambda} = T_{a;z,\lambda} D^*_{a,z} , \qquad (4.4.1)$$

c'est-à-dire que :

$$\gamma_- \Delta_a^{-1}(x\lambda) D_{1-a,\lambda} \Delta_a(x\lambda) \gamma_- {}^tU_{a;xz}(x\lambda) = \gamma_- {}^tU_{a;xz}(x\lambda) \gamma_- \Delta_a^{-1}(xz) D_{1-a,z} \Delta_a(xz) .$$

Grâce à (2.4)' la formule précédente équivaut à :

$$\gamma_- \Delta_a^{-1}(x\lambda) D_{1-a,\lambda} \Delta_a(x\lambda) \Delta_a^{-1}(x\lambda) U_{1-a;x\lambda}(xz) \Delta_a(xz) =$$
$$\gamma_- \Delta_a^{-1}(x\lambda) U_{1-a;x\lambda}(xz) \Delta_a(xz) \Delta_a^{-1}(xz) D_{1-a,z} \Delta_a(xz) .$$

Si $x_0 \in \Omega \setminus \{0,1,1/\lambda\}$, on a :

$$D_{1-a,\lambda}U_{1-a;x\lambda}(xz) = D_{1-a,\lambda}U^{-1}_{1-a;x_0\lambda}(x\lambda)U_{1-a;x_0\lambda}(xz) = f^{-1}_{1-b_1,1-c_1;x_0}(x)$$

$$U^{-1}_{1-a;x_0\lambda}(x\lambda)E_xU_{1-a;x_0\lambda}(xz)f_{1-b_1,1-c_1;x_0}(x)=U^{-1}_{1-a,x_0\lambda}(x\lambda)U_{1-a,x_0\lambda}(xz)f^{-1}_{1-b_1,1-c_1;x_0}(x)$$

$$U^{-1}_{1-a;x_0\lambda}(xz)E_xU_{1-a;x_0\lambda}(xz)f_{1-b_1,1-c_1;x_0}(x) = U_{1-a;x\lambda}(xz)D_{1-a,z}$$

d'où (4.4.1). Donc $T_{a;z,\lambda}(K_{a,z}) \subseteq K_{a,\lambda}$. Puisque $T_{a;\lambda,z}$ est l'inverse de $T_{a;z,\lambda}$, on conclut que $T_{a;z,\lambda}$ est un isomorphisme.

C.Q.F.D.

THÉORÈME 4.4. Pour λ,z comme dans (4.3) définissons $C_{a,z}(\lambda) \in M_{2,2}(\Omega)$, par :

$$T_{a;z,\lambda}e^*_{a,z} = C_{a,z}(\lambda)e^*_{a,\lambda} .$$

Alors $C_{a,z}(\lambda)$, en tant que fonction de λ est analytique dans

(4.4.1) $\qquad T_z = \{\lambda \in \Omega \mid |\lambda-z| < |z| \text{ Min}(1,|z-1|)\}.$

Démonstration : Les coefficients de la matrice $C_{a,z}(\lambda)$ sont

(4.5.1) $\qquad \langle T_{a;z,\lambda}e^{(i)*}_{a,z}, e^{(j)}_{a,\lambda}\rangle_\lambda = \langle {}^tU_{a,xz}(x\lambda)e^{(i)*}_{a,z} , e^{(j)}_{a,\lambda}\rangle_\lambda$

pour i, j=1,2,3,4 ; on appellera $c_{i,j}(\lambda)$ le coefficient qui apparait dans (4.5.1). On a $c_{i,j}(\lambda) = \sum_{\nu \in S} c_{i,j,\nu}(\lambda)$, où

(4.5.2) $\qquad c_{i,j,\nu}(\lambda) = \mathrm{Res}_\nu({}^t(e^{(i)*}_{a,z})_\nu U_{a,xz}(x\lambda)\eta_j)$,

si $\eta_1 = \binom{1}{0}$, $\eta_2 = \binom{0}{1}$, $\eta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1-x} \end{pmatrix}$, $\eta_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1-x} \end{pmatrix}$, et i,j=1,2,3,4 $\nu \in S$.

Dans la démonstration du lemme (4.3), on a observé que $U_{a,xz}(x\lambda)$, en tant que fonction de x est analytique pour $|1-xz| > \frac{|\lambda-z|}{|z|}$ $(<\Gamma_{1/z})$, où, ce qui est la même chose, pour $|1-x| > \frac{|\lambda-z|}{|z|}$. On a donc $c_{i,j,0}(\lambda) = c_{i,j,\infty}(\lambda) = 0$ pour tous i,j . Pour $\nu = 1, c_{i,j,\nu}(\lambda)$ est évidemment nul sauf dans le cas $j = 3$, où $\eta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1-x} \end{pmatrix}$; on a :

$$c_{i,3,1}(\lambda) = \mathrm{Res}_1({}^t(e_{a,z}^{(i)*})_1 U_{a;z}(\lambda)\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1-x} \end{pmatrix}), \text{ pour } i = 1,2,3,4,$$

ce qui prouve que $c_{i,3,1}(\lambda)$ est analytique pour $\lambda \in T_z$, puisque les coefficients de $U_{a,z}(\lambda)$ le sont. Soit finalement $\nu = 1/\lambda$: on peut ici calculer $\mathrm{Res}_{1/z}$ au lieu de $\mathrm{Res}_{1/\lambda}$, puisque les deux coïncident. On a alors :

$$c_{i,j,1/\lambda} = \mathrm{Res}_{1/z}({}^t(e_{a,z}^{(i)*})_{1/z}\ U_{a;xz}(x\lambda)\eta_j) .$$

pour i, $j=1,2,3,4$. Pour calculer $c_{i,j,1/\lambda}$ on se place dans la région $|\frac{\lambda-z}{z}| < |1-xz| < \mathrm{Min}(1,|z-1|) = \Gamma_{1/z}$ et on utilise (2.6) et (2.7). On a :

$$U_{a;xz}(x\ ) = \sum_{s=0}^{\infty} M_{a,s}(xz)(x\lambda-xz)^s = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{s} N_{a,i,s}(xz)^{-i} i_s^{-1}(1-xz)^{i-s}x^s(\lambda-z)^s =$$

$$\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{s} i_s^{-1}N_{a,i,s}x^{s-i}(1-xz)^{i-s}(\tfrac{\lambda-z}{z})^s z^{s-i} = \sum_{r=0}^{\infty}(1-xz)^{-r}(xz)^r \sum_{s=r}^{\infty} i_s^{-1}N_{a,s-r,s}(\tfrac{\lambda-z}{z})^s =$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} T_{1/z}^{-r} \sum_{j=0}^{r} (-1)^j\binom{r}{j}T_{1/z}^j \sum_{s=r}^{\infty} i_s^{-1}N_{a,s-r,s}(\tfrac{\lambda-z}{z})^s =$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} T_{1/z}^{-s} \sum_{r=s}^{\infty} (-1)^{r-s}\binom{r}{s} \sum_{j=r}^{\infty} i_j^{-1}N_{a,j-r,j}(\tfrac{\lambda-z}{z})^j .$$

On sait (3.15) qu'on peut écrire ${}^t(e_{a,z}^{(i)*})_{1/z}$ sous la forme :

$${}^t(e_{a,z}^{(i)*})_{1/z} = c_i \sum_{h=0}^{\infty} (c_{i,h}(\tfrac{1}{1-z})\ ;\ c'_{i,h}(\tfrac{1}{1-z}))t_{1/z}^h ,$$

où $c_i \in \Omega$ et $c_{i,h}(x)$, $c'_{i,h}(x)$ sont des polynômes en x de degré

$\leq h$ et à coefficients dans Q, bornés (en valeur absolue p-adique) par h^3. Le terme $c_{i,j,1/\lambda}$ prend donc la forme :

$$c_{i,j,1/\lambda}=c_i z^{-1}\sum_{h=0}^{\infty}(c_{i,h}(\tfrac{1}{1-z}),c'_{i,h}(\tfrac{1}{1-z}))\sum_{r=h+1}^{\infty}(-1)^{r-h}\binom{r}{h+1}\sum_{k=r}^{\infty}i_k^{-1}N_{a,k-r,k}(\tfrac{\lambda-z}{z})^k\,\eta_j$$

pour $j=1,2$, $i=1,2,3,4$; donc, dans ces cas :

$$c_{i,j,1/\lambda}=c_i z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(\tfrac{\lambda-z}{z})^k i_k^{-1}\sum_{r=0}^{k}\sum_{h=0}^{r-1}(-1)^{r-h}\binom{r}{r+1}(c_{i,h}(\tfrac{1}{1-z}),c'_{i,h}(\tfrac{1}{1-z}))N_{a,k-r,r}\,\eta_j\,.$$

Les estimations qui précèdent donnent alors le résultat. Il nous reste à considérer $c_{i,3,1/\lambda}$ et $c_{i,4,1/\lambda}$. On a :

$$\frac{1}{1-x}=\frac{z}{z-1}(1-t_{1/z}T_{1/z})^{-1}$$

et

$$\frac{1}{1-x\lambda}=-\frac{z}{\lambda-z}(1-\frac{\lambda}{\lambda-z}T_{1/z})^{-1}\,,$$

et donc, en notant par $N'_{a,k-r,r}$ la deuxième colonne de $N_{a,k-r,r}$, on a :

$$c_{i,3,1/\lambda}=c_i\sum_{j=0}^{\infty}(\tfrac{\lambda-z}{z})^j i_j^{-1}\sum_{r=0}^{j}\sum_{s=0}^{r}\sum_{h=0}^{\infty}t_{1/z}^{r-h}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}(c_{i,h}(t_{1/z}),c'_{i,h}(t_{1/z}))N'_{a,j-r,j}$$

$$c_{i,4,1/\lambda}=c_i{}^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(\tfrac{\lambda-z}{z})\sum_{h=0}^{k}\sum_{j=k-h}^{\infty}\sum_{s=0}^{j+h-k}(-1)^{j+h-k-s}\binom{j+h-k}{s}i_j^{-1}$$

$$(c_{i,h}(t_{1/z}),c'_{i,h}(t_{1/z}))N'_{a,k-h,j}(\tfrac{\lambda}{z})^{j-h}\,,$$

pour $i=1,2,3,4$. Le théorème découle maintenant des estimations précédentes. C.Q.F.D.

4.6. Le fibré vectoriel (banal) sur $\Omega\setminus\{0,1\}$ de base globale $\{e^*_{a,\lambda}\}_{\lambda\in\Omega\setminus\{0,1\}}$ s'identifie par l'identification de $e_a^{(i)*}$ à la section globale $\lambda\longmapsto e^{(i)*}_{a,\lambda}$, au fibré vectoriel (à connexion) $\mathbb{K}_a$ canoniquement associé au $\mathcal{Q}/\mathbb{Q}$-module différentiel K_a. La dérivée covariante d'une section analytique ξ de $\mathbb{K}_a$ sur un ouvert U de

$\Omega\setminus\{0,1\}$, se calcule, dans l'identification précédente, par la formule :

$$\nabla^*_a(E_\lambda)\xi = \gamma_-(\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda} - {}^tG_a(x\lambda))\xi \quad , \tag{4.6.1}$$

où ξ est considéré comme fonction analytique *de* x *et de* λ .

PROPOSITION 4.7. *La matrice* $C_{a,z}(\lambda)$ *du théorème* 4.5 *a la forme suivante* $C_{a,z}(\lambda) = \left(\begin{array}{ccc|c} & Y_{a,z}(\lambda) & & * \\ & & & * \\ & & & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right)$; $Y_{a,z}(\lambda)$ *est la matrice solution près de* $\lambda = z$, *qui est la matrice identité pour* $\lambda = z$, *du système* :

$$\lambda\frac{d}{d\lambda}Y = Y\,{}^tM_a$$

où M_a *est la matrice de la proposition* 1.13. *En particulier, les solutions de* $L_{a,b_1,b_2,c_1,c_2}Y = 0$ *près de* $z\in\Omega\setminus\{0,1\}$, *convergent* p-*adiquement jusqu'à la plus proche singularité de l'équation*.

Démonstration : Puisque $H_{a,\lambda} = \Omega\, e^{(4)*}_{a,\lambda}$ est la fibre en λ du fibré vectoriel à connexion associé au sous-module différentiel H_a de K_a , il suffit de vérifier que $T_{a;z,\lambda}$ est le transport parallèle de $K_{a,z}$ à $K_{a,\lambda}$. En effet :

$$\nabla^*_a(E_\lambda)T_{a,z,\lambda}e^*_{a,z} = \gamma_-(\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda} - {}^tG_a(x\lambda))\gamma_-U_{a,xz}(x\lambda)e_{a,z} =$$

$$\gamma_-(\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda} - {}^tG_a(x\lambda))U_{a;xz}(x\lambda)e^*_{a,z} = \gamma_-U_{a;xz}(x\lambda)\quad\frac{\partial}{\partial\lambda}e^*_{a,z} = 0\ .$$

C.Q.F.D.

Rappelons qu'on a posé $U = \{\lambda\in\Omega\setminus\{0\}\,|\,|\lambda-1| > p^{-\frac{1}{p-1}}\}$. On posera :

$$\chi_{b_1,c_1}(x) = x^{-\mu_{b_1}}(1-x)^{\mu_{b_1}-\mu_{c_1}}\left(\frac{(1-x)^p}{1-x^p}\right)^{c_1'-b_1'} \in L_\lambda\ . \tag{4.8}$$

Soient $z_1,\dots,z_p$ les $\underline{p}$ branches de la fonction $z = x^{1/p}$ près de $x = x_0 \in \mathcal{U}$; on a alors :

$$(4.9)\quad f_{b_1',c_1';x_0}(x)\chi_{b_1,c_1}(z_i) = \chi_{b_1,c_1}(z_i(x_0))f_{b_1,c_1;z_i(x_0)}(z_i) \qquad i = 1,\dots,p$$

et, de même :

$$(4.10)\quad U_{a',b_2',c_2';x_0\lambda^p}(x\lambda^p)A_{a,b_2,c_2}(z_i\lambda) = A_{a,b_2,c_2}(z_i(x_0)\lambda)U_{a,b_2,c_2;z_i(x_0)\lambda}(z_i\lambda)\,,$$

pour $i = 1,\dots,p$.

Dans les notations de [2] (et en utilisant plusieurs résultats des chapitres 3 et 4 de ce livre), on pose :

$$(4.11)\qquad \begin{aligned} \alpha_{a,} \ : L^2_\lambda &\longrightarrow L^2_{\lambda^p} \\ \xi &\longmapsto \Psi(\chi_{b_1,c_1}(x)A_{a,b_2,c_2}(x\lambda)\xi)\ . \end{aligned}$$

PROPOSITION 4.12. <u>On a</u> :

$$(4.12.1)\qquad \alpha_{a,\lambda}D_{a,\lambda} = pD_{a',\lambda^p}\alpha_{a,\lambda}\ ,$$

<u>en tant qu'applications de</u> L_λ <u>dans</u> L_{λ^p} , <u>pour</u> $\lambda \in \mathcal{U}$, <u>où</u> $a' = (a',b_1',b_2',c_1',c_2')$.

<u>Démonstration</u> : Soient $\xi \in L$ et $x_0 \in \Omega$, avec $0 < |x_0| < \mathrm{Min}(1,|\lambda|^{-p})$ dans le domaine d'analyticité de $\alpha_{a,\lambda}D_{a,\lambda}\xi$. On va vérifier que les images de ξ par les deux membres de (4.12.1) coïncident dans un voisinage de x_0 . Grâce aux formules (4.9) et (4.10) on a, pour $\eta \in L$ analytique près de x_0 et pour x près de x_0 :

$$(4.12.2)\qquad p(\alpha_{a,\lambda}\eta)(x) = \sum_{i=1}^{p}\chi_{b_1,c_1}(z_i)A_{a,b_2,c_2}(z_i\lambda)\eta(z_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p}\chi_{b_1,c_1}(z_i(x_0))f^{-1}_{b_1',c_1';x_0}(x)f_{b_1,c_1;z_i(x_0)}(z_i)U^{-1}_{a',b_2',c_2';x_0\lambda^p}(x\lambda^p)$$

$$A_{a,b_2,c_2}(z_i(x_0)\lambda)U_{a,b_2,c_2;z_i(x_0)\lambda}(z_i\lambda)\eta(z_i) =$$

$$= f^{-1}_{b'_1,c'_1;x_0}(x)U^{-1}_{a',b'_2,c'_2;x_0\lambda^p}(x\lambda^p) \sum_{i=1}^{p} \chi_{b_1,c_1}(z_i(x_0))f_{b_1,c_1;z_i(x_0)}(z_i)$$

$$A_{a,b_2,c_2}(z_i(x_0)\lambda)U_{a,b_2,c_2;z_i(x_0)\lambda}(z_i\lambda)\eta(z_i) .$$

Comme on a remarqué en (4.2),

$$D_{a,\lambda} = E_x + c_1 + \frac{b_1-c_1}{1-x} + G_{a,b_2,c_2}(x\lambda) = E_x + f^{-1}_{b_1,c_1;x_0}(x)U^{-1}_{a,b_2,c_2;x_0\lambda}(x\lambda)$$

$$E_x(U_{a,b_2,c_2;x_0\lambda}(x\lambda)f_{b_1,c_1;x_0}(x)) .$$

On a donc, pour z près de $z_i(x_0)$, $i = 1,\dots,p$:

$$c_1 + \frac{b_1-c_1}{1-z} + G_{a,b_2,c_2}(z\lambda) = f^{-1}_{b_1,c_1;z_i(x_0)}(z)U^{-1}_{a,b_2,c_2;z_i(x_0)\lambda}(z\lambda)$$

$$E_z(f_{b_1,c_1;z_i(x_0)}(z)U_{a,b_2,c_2;z_i(x_0)\lambda}(z\lambda)) \quad \text{et}$$

$$(4.12.3) \quad (D_{a,\lambda}\xi)(z) = E_z\xi(z) + f^{-1}_{b_1,c_1;z_i(x_0)}(z)U^{-1}_{a,b_2,c_2;z_i(x_0)\lambda}(z\lambda)E_z(f_{b_1,c_1;z_i(x_0)}(z)$$

$$U_{a,b_2,c_2;z_i(x_0)\lambda}(z\lambda))\xi(z) .$$

Pour x près de x_0 on a alors :

$$p(\alpha_{a,\lambda}D_{a,\lambda}\xi)(x) = f^{-1}_{b',c';x_0}(x)U^{-1}_{a',b'_2,c'_2;x_0\lambda^p}(x\lambda^p)$$

$$\sum_{i=1}^{p} \chi_{b_1,c_1}(z_i(x_0))f_{b_1,c_1;z_i(x_0)}(z_i)A_{a,b_2,c_2}(z_i(x_0)\lambda)U_{a,b_2,c_2;z_i(x_0)\lambda}(z_i\lambda)$$

$$((E_{z_i}(\xi(z_i)) + f^{-1}_{b_1,c_1;z_i(x_0)}(z_i)U^{-1}_{a,b_2,c_2;z_i(x_0)\lambda}(z_i\lambda)E_{z_i}(f_{b_1,c_1;z_i(x_0)}(z_i)$$

$$U_{a,b_2,c_2;z_i(x_0)\lambda}(z_i\lambda)\xi(z_i)) =$$

$$= f^{-1}_{b_1',c_1';x_0}(x)U^{-1}_{a,b_2,c_2;x_0\lambda^p}(x\lambda^p) \sum_{i=1}^{p} \chi_{b_1,c_1}(z_i(x_0))A_{a,b_2,c_2}(z_i(x_0)\lambda)$$

$$E_{z_i}(f_{b_1,c_1;z_i(x_0)}(z_i)U_{a,b_2,c_2;z_i(x_0)\lambda}(z_i\lambda)\xi(z_i)) =$$

$$= f^{-1}_{b_1',c_1';x_0}(x)U^{-1}_{a',b_2',c_2';x_0\lambda^p}(x\lambda^p)pE_x \sum_{i=1}^{p} \chi_{b_1,c_1}(z_i(x_0))A_{a,b_2,c_2}(z_i(x_0)\lambda)$$

$$f_{b_1,c_1;z_i(x_0)}(z_i)U_{a,b_2,c_2;z_i(x_0)\lambda}(z_i\lambda)\xi(z_i) =$$

$$= pf^{-1}_{b_1',c_1';x_0}(x)U^{-1}_{a',b_2',c_2';x_0\lambda^p}(x\lambda^p)E_x f_{b_1',c_1';x_0}(x)U_{a',b_2',c_2';x_0\lambda^p}(x\lambda^p)$$

$$\sum_{i=1}^{p} \chi_{b_1,c_1}(z_i)A_{a,b_2,c_2}(z_i\lambda)\xi(z_i) = pD_{a',\lambda^p}\,\alpha_{a,\lambda}\,. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Il suit de la proposition (4.12) que $\alpha_{a,\lambda}$ induit un Ω-homomorphisme, encore noté $\alpha_{a,\lambda}$,

(4.13) $$\alpha_{a,\lambda} : W_{a,\lambda} \longrightarrow W_{a',\lambda^p}\,.$$

Par dualité, l'application transposée de (4.11) est :

(4.14) $$\begin{aligned} \alpha^*_{a,\lambda} : R(\lambda^p)^2 &\longrightarrow R(\lambda)^2 \\ \xi &\longmapsto \gamma_-(x^{p-1}\chi_{b_1,c_2}(x)\,{}^tA_{a,b_2,c_2}(x\lambda)\Phi(\xi)) \end{aligned}$$

et on a :

(4.15) $$D^*_{a,\lambda}\alpha^*_{a,\lambda} = p\alpha^*_{a,\lambda}\, D^*_{a',\lambda^p}\,.$$

On obtient donc un Ω-homomorphisme :

(4.16) $$\alpha^*_{a,\lambda} : K_{a',\lambda^p} \longrightarrow K_{a,\lambda}\,,\ \lambda \in \mathcal{U}\,.$$

DÉFINITION 4.17. <u>Soit</u> $B_a(\lambda)$ <u>la matrice de</u> $\alpha^*_{a,\lambda}$:

$$\alpha^*_{a,\lambda} e^*_{a',\lambda^p} = B_a(\lambda) e^*_{a,\lambda} \;, \quad \underline{\text{pour}} \quad \lambda \in \mathcal{U} \,.$$

THÉORÈME 4.18. <u>La matrice</u> $B_a(\lambda)$ <u>est analytique pour</u> $\lambda \in \mathcal{U}$.

<u>Démonstration</u> : Soit $B_a(\lambda) = (b_{i,j}(\lambda))_{i,j=1,2,3,4}$. On a :

$$b_{i,j}(\lambda) = \langle \alpha^*_{a,\lambda} \, e^{(i)*}_{a',\lambda^p} \,,\, \eta_j \rangle_\lambda \;, \quad \text{pour} \quad i \;;\; j = 1,2,3,4, \tag{4.18.1}$$

et

$$e^{(i)*}_{a',\lambda^p} = \Big(c_{\nu^p} \sum_{h=0}^{\infty} {}^t(c_h(t_{\nu^p}) \,,\, c'_h(t_{\nu^p}))\, T^h_{\nu^p}\Big)_{\nu^p \in S^p} \tag{4.18.2}$$

où $c_{\nu^p} = c_{a',i,\nu^p} \in \Omega$, t_{ν^p} est défini dans la table (3.4) en y remplaçant λ par λ^p, $c_h(t_{\nu^p})$ et $c'_h(t_{\nu^p})$ sont des polynômes (qui dépendent aussi de <u>i</u>, <u>a</u>, mais cette dépendance sera oubliée dans la suite) de degré $\leqslant h$ en t_{ν^p} à coefficients, dans Q, bornés (en valeur absolue <u>p</u>-adique) par h^3, et $S^p = \{0,1,1/\lambda^p,\infty\}$. On a donc :

$$b_{i,j}(\lambda) = \sum_{\nu \in S} b_{i,j,\nu}(\lambda) \;, \quad \text{et} \tag{4.18.3}$$

(4.18.4)

$$b_{i,j,\nu} = c_\nu \mathrm{Res}_\nu \Big(x^{p-1} \chi_{b_1,c_1}(x) \sum_{h=0}^{\infty} (c_h(t_{\nu^p}), c'_h(t_{\nu^p}))\, \Phi(T_{\nu^p})^h A_{a,b_2,c_2}(x\lambda)\, \eta_j\Big) \,.$$

Il est évident que $b_{i,j,0} = 0$ et que $b_{i,j,\infty} \in \Omega[\lambda,\lambda^{-1}]$. Nous allons maintenant calculer $b_{i,j,1}$ et, pour fixer les idées, nous allons supposer $j = 1$, les autres cas étant absolument pareils. Alors :

(4.18.5)

$$b_{i,j,1} = c_1 \mathrm{Res}_1 \Big(x^{p-1} \chi_{b_1,c_1}(x) \sum_{h=0}^{\infty} (c_h(t_1) A_{11}(x\lambda) + c'_h(t_1) A_{12}(x\lambda)\, \Phi(T_1)^h\Big)$$

où $A_a = (A_{r,s})_{r,s=1,2}$; on voit donc que $b_{i,1,1}$ est somme de deux termes dont chacun est de la forme :

$$(4.18.6) \qquad b(\lambda) = c\mathrm{Res}_1(x^{p-1}\chi_{b_1,c_1}(x)a(x\lambda)\sum_{h=0}^{\infty} c_h(\frac{\lambda^p}{\lambda^p-1})(1-x^p)^h) ,$$

$a(x\lambda)$ dénotant un des coefficients de $A_{a,b_2,c_2}(x\lambda)$, et $\underline{c}$ une constante.

On sait (chap. 3 de [2]) que :

$$(4.18.7) \qquad \chi_{b_1,c_1}(x) = x^{-\mu_{b_1}}(1-x)^{\mu_{b_1}-\mu_{c_1}}\,\theta(x) ,$$

où

$$(4.18.8) \qquad \theta(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \theta_s T_1^{-s} , \quad \theta_s \in Q , \quad \mathrm{ord}\,\theta_s > \frac{s}{p-1} .$$

On a :

$$(4.18.9) \qquad b(\lambda) = c\ \mathrm{Res}_1 R(x)S(x),$$

où

$$(4.18.10) \qquad \begin{aligned} R(x) &= x^{p-1-\mu_{b_1}}(1-x)^{\mathrm{Max}(0,\mu_{b_1}-\mu_{c_1})}\,a(x\lambda)\sum_{h=0}^{\infty} c_h(\frac{\lambda^p}{\lambda^p-1})(1-x^p)^h \\ S(x) &= (1-x)^{\mathrm{Min}(0,\mu_{b_1}-\mu_{c_1})}\,\theta(x) . \end{aligned}$$

Or, $\sum_{h=0}^{\infty} c_h(\frac{\lambda^p}{\lambda^p-1})(1-x^p)^h$ converge si $|1-x| < r_1 (> p^{-\frac{1}{p-1}})$; mais dans ce disque on a $|1-x\lambda| = |1-\lambda| > p^{-\frac{1}{p-1}}$ et donc $a(x\lambda)$ est analytique et bornée, disons par K, dans le même disque. Ecrivons :

$$R(x) = T_1^{\mathrm{Max}(0,\mu_{b_1}-\mu_{c_1})}\sum_{s=0}^{\infty} A_s T_1^s \quad ;$$

il est clair que $A_s \in Q(\lambda)$ pour tout $s \in N$; on veut montrer que :

$$(4.19) \qquad |A_s| \leqslant \begin{cases} K(s/p\Gamma_1)^3 & \text{si} \quad \Gamma_1 e^{-3/s} > p^{-\frac{1}{p-1}} \\[2ex] \dfrac{K(3/pe)^3 p^{s/(p-1)}}{\operatorname{Log}(\Gamma_1 p^{1/(p-1)}))^3} & \text{si} \quad \Gamma_1 e^{-3/s} \leqslant p^{-\frac{1}{p-1}} \end{cases} .$$

En effet, si $0 < r < \Gamma_1$ on a :

$$(4.19.1) \qquad |A_s| r^s \leqslant K \sup_{|1-x|=r} \left| \sum_{s=0}^{\infty} c_s\left(\frac{\lambda^p}{\lambda^p - 1}\right)^s (1-x^p)^s \right| .$$

Mais

$$(4.19.2) \qquad c_s\left(\frac{\lambda^p}{\lambda^p-1}\right) \leqslant s^3/\Gamma_1^{ps}$$

tandis que

$$(4.19.3) \qquad |1-x^p| \leqslant \begin{cases} r^p & \text{si} \quad |1-x| = r \geqslant p^{-\frac{1}{p-1}} \\[2ex] |p|r & \text{si} \quad |1-x| = r \leqslant p^{-\frac{1}{p-1}} \end{cases} .$$

Il s'en suit que :

$$(4.19.4) \qquad K^{-1}|A_s| r^s \leqslant \begin{cases} \sup\limits_{m \in N} m^3 (r/\Gamma_1)^{pm} & \text{si} \quad r \in [p^{\frac{1}{p-1}}, \Gamma_1) \\[2ex] \sup\limits_{m \in N} m^3 (r|p|/\Gamma_1^p)^m & \text{si} \quad r \in [0, p^{-\frac{1}{p-1}}) \end{cases} .$$

Pour $0 < r < 1$ la fonction réelle

$$t \longmapsto t^3 z^t , \qquad t \geqslant 0$$

atteint son maximum pour $t = 3/\log(1/z)$ où elle vaut $(3/e \log(1/z))^3$.
Donc :

$$(4.19.5) \qquad |A_s| r^s \leqslant K(3/p\, e \log(\Gamma_1/r))^3 \quad \text{si} \quad r \in [p^{-\frac{1}{p-1}}, \Gamma_1) \quad ,$$

c'est-à-dire :

$$(4.19.6) \qquad |A_s| \leqslant K(3/pe)^3 / r^s (\log(\Gamma_1/r))^3 .$$

Le maximum de $r^s(\log(\Gamma_1/r))^3$ pour $r \in [p^{-\frac{1}{p-1}}, \Gamma_1)$ s'obtient pour $r = \Gamma_1 e^{-3/s}$ si ce nombre est $> p^{-\frac{1}{p-1}}$, et autrement pour $r = p^{-\frac{1}{p-1}}$. En substituant ces valeurs de r dans (4.19.6) on obtient les estimations (4.19) pour $|A_s|$. On a donc :

$$(4.19.7)\qquad \begin{aligned} S(x) &= T_1^{\mathrm{Min}(0,\mu_{b_1}-\mu_{c_1})} \sum_{s=0}^{\infty} \Theta_s T_1^{-s} \\ R(x) &= T_1^{\mathrm{Max}(0,\mu_{b_1}-\mu_{c_1})} \sum_{s=0}^{\infty} A_s T_1^{s} \end{aligned}$$

et

$$(4.20)\qquad b(\lambda) = c \sum_{\substack{s_1,s_2 \geqslant 0 \\ s_1 = 1+s_2+b_1-c_1}} \Theta_{s_1} A_{s_2} .$$

Les estimations sur Θ_s et A_s impliquent que $b(\lambda)$ est analytique pour $|\lambda-1| > p^{-\frac{1}{p-1}}$. Il nous reste à calculer $b_{i,j,1/\lambda}$. On supposera encore, pour simplifier, que $j = 1$ et donc $b_{i,1,1/\lambda}$ est somme de deux termes de la forme :

$$(4.21)\qquad b(\lambda) = c\ \mathrm{Res}_{1/\lambda} x^{p-1} \chi_{b_1,c_1}(x) a(x\lambda) \sum_{h=0}^{\infty} c_h \left(\frac{1}{1-\lambda^p}\right)(1-x^p\lambda^p)^h ,$$

où $c \in \Omega$. On écrit encore :

$$(4.21.1)\qquad b(\lambda) = c\ \mathrm{Res}_{1/\lambda} R(x) S(x) ,$$

où

$$(4.21.2)\qquad R(x) = x^{p-1}\chi_{b_1,c_1}(x) \sum_{h=0}^{\infty} c_h\left(\frac{1}{1-\lambda^p}\right)(1-x^p\lambda^p)^h ,$$

$$(4.21.3)\qquad S(x) = \lambda^{1-p}\chi_{b_1,c_1}(1/\lambda) \sum_{s=0}^{\infty} A_s T_{1/\lambda}^s$$

avec $A_s \in Q(\lambda)$, et

$$(4.21.4)\qquad S(x) = a(x\lambda) = \sum_{s=-N}^{\infty} \alpha_s T_{1/\lambda}^s , \quad \alpha_s \in Q .$$

On obtient la même estimation que tout à l'heure pour $|A_s|$, et on sait d'ailleurs que :

$$|\alpha_s| \leqslant |a|_1(r)r^{-s} \tag{4.22}$$

pour tout $r > p^{-\frac{1}{p-1}}$, $s \in Z$, dans les notations de la définition (5.1.2) de [2]. On en déduit l'analyticité de $b(\lambda)$ dans $\mathcal{U}$ et donc le théorème. C.Q.F.D.

THÉORÈME 4.23. <u>Si</u> λ, $z \in \mathcal{U}$, $|\lambda - z| < |z|$ Min(1, z-1) , <u>le diagramme</u> :

$$\begin{tikzcd}
K_{a,z} \arrow[r, "T_{a;z,\lambda}"] & K_{a,\lambda} \\
K_{a',z^p} \arrow[u, "\alpha^*_{a,z}"] \arrow[r, "T_{a';z^p,\lambda^p}"] & K_{a',\lambda^p} \arrow[u, "\alpha^*_{a,\lambda}"']
\end{tikzcd}$$

<u>est commutatif</u>.

<u>Démonstration</u> : On a :

$$\alpha^*_{a,\lambda} T_{a';z^p,\lambda^p} = \gamma_- \, x^{p-1}\chi_{b_1,c_1}(x)\,{}^tA_a(x\lambda)\Phi\gamma_- \,{}^tU_{a';xz^p}(x\lambda^p) =$$

$$\gamma_- x^{p-1}\chi_{b_1,c_1}(x)\,{}^tA_a(x\lambda)\Phi\,{}^tU_{a';xz^p}(x\lambda^p) = \gamma_- x^{p-1}\chi_{b_1,c_1}(x)\,{}^tA_a(x\lambda)\,{}^tU_{a';x^pz^p}(x^p\lambda^p)\,\Phi =$$

$$\gamma_- x^{p-1}\chi_{b_1,c_1}(x)\,{}^tU_{a;xz}(x\lambda)\,{}^tA_a(xz)\Phi = \gamma_-\,{}^tU_{a;xz}(x\lambda)\gamma_- x^{p-1}\chi_{b_1,c_1}(x)\,{}^tA_a(xz)\Phi =$$

$$T_{a;z,\lambda}\,\alpha^*_{a,z} .$$

C.Q.F.D.

PROPOSITION 4.24. <u>L'application</u> $\alpha_{a,\lambda}$ <u>est un</u> Ω-<u>isomorphisme entre</u>

$W_{a,\lambda}$ et $W_{a',\lambda p}$.

Démonstration : Soit

(4.24.1)
$$\begin{aligned}\beta_{a,\lambda} : L^2_{\lambda p} &\longrightarrow L^2_{\lambda} \\ \xi &\longmapsto \chi^{-1}_{b_1,c_1}(x)A^{-1}_{a,b_2,c_2}(x\lambda)\,\Phi\,\xi.\end{aligned}$$

On a (cf. Chap. 3 de [2]) :

$$\alpha_{a,\lambda}\;\beta_{a,\lambda} = \text{identité de } L^2_{\lambda p} \;;$$

donc si on prouve que

(4.24.2)
$$p\beta_{a,\lambda}\;D_{a',\lambda p} = D_{a,\lambda}\;\beta_{a,\lambda}$$

on en déduit que $\beta_{a,\lambda}$ induit une application

(4.24.3)
$$\beta_{a,\lambda} : W_{a',\lambda p} \longrightarrow W_{a,\lambda}$$

qui est l'inverse de $\alpha_{a,\lambda}$. Quant à (4.24.2) :

$$D_{a,\lambda}\beta_{a,\lambda} = \left(E_x + c_1 + \frac{b_1-c_1}{1-x} + G_a(x\lambda)\right)\chi^{-1}_{b_1,c_1}(x)A^{-1}_a(x\lambda)\Phi =$$

$$\chi^{-1}_{b_1,c_1}(x)A^{-1}_a(x\lambda)E_x\Phi - \chi^{-2}_{b_1,c_1}(x)E_x(\chi_{b_1,c_1}(x))A^{-1}_a(x\lambda)\Phi -$$

$$\chi^{-1}_{b_1,c_1}(x)A^{-1}_a(x\lambda)E_x(A_a(x\lambda))A^{-1}_a(x\lambda)\Phi + \left(c_1 + \frac{b_1-c_1}{1-x}\right)\chi^{-1}_{b_1,c_1}(x)$$

$$A^{-1}_a(x\lambda)\Phi + \chi^{-1}_{b_1,c_1}(x)G_a(x\lambda)A^{-1}_a(x\lambda)\Phi \quad .$$

Or, de (4.9) on déduit :

$$f_{b'_1,c'_1;x_0}(x^p)\chi_{b_1,c_1}(x) = \chi_{b_1,c_1}(x_0)f_{b_1,c_1;x_0}(x)$$

et, en décrivant :

$$(4.25) \qquad \chi^{-1}_{b_1,c_1}(x)E_x(\chi_{b_1,c_1}(x)) = c_1 - pc_1' + \frac{b_1-c_1}{1-x} - p\,\frac{b_1'-c_1'}{1-x^p} .$$

En utilisant (2.2)', on voit donc que :

$$D_{a,\lambda}\beta_{a,\lambda} = p\chi^{-1}_{b_1,c_1}(x)A_a^{-1}(x\lambda)\Phi E_x + \chi^{-1}_{b_1,c_1}(x)A_a^{-1}(x\lambda)\left(-c_1 - \frac{b_1-c_1}{1-x} + pc_1' + p\,\frac{b_1'-c_1'}{1-x^p}\right)\Phi -$$

$$\chi^{-1}_{b_1,c_1}(x)A_a^{-1}(x\lambda)\left(A_a(x\lambda)G_a(x\lambda)A_a^{-1}(x\lambda) - pG_{a'}(x^p\lambda^p)\right)\Phi +$$

$$\chi^{-1}_{b_1,c_1}(x)A_a^{-1}(x\lambda)\left(c_1 + \frac{b_1-c_1}{1-x}\right)\Phi + \chi^{-1}_{b_1,c_1}(x)G_a(x\lambda)A_a^{-1}(x\lambda)\Phi = p\chi^{-1}_{b_1,c_1}(x)A_a^{-1}(x\lambda)\Phi E_x +$$

$$p\chi^{-1}_{b_1,c_1}(x)A_a^{-1}(x\lambda)\Phi\left(c_1 + \frac{b_1'-c_1'}{1-x}\right) + p\chi^{-1}_{b_1,c_1}(x)A_a^{-1}(x\lambda)\Phi\; G_{a'}(x\lambda^p) =$$

$$p\,\chi^{-1}_{b_1,c_1}(x)A_a^{-1}(x\lambda)\Phi\left(E_x + c_1' + \frac{b_1'-c_1'}{1-x}\right) = \beta_{a,\lambda}\, D_{a',\lambda^p} . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

THÉORÈME 4.26. <u>Pour tout</u> λ <u>dans</u> $\mathcal{U}$, <u>le diagramme</u>

$$\begin{tikzcd}
K_{a,\lambda} \arrow[r, "\hat{D}_{a,\lambda}"] & W_{1-a,\lambda} \arrow[d, "\alpha_{1-a,\lambda}"] \\
K_{a',\lambda^p} \arrow[u, "\alpha^*_{a,\lambda}"] \arrow[r, "p^2 D_{a',\lambda^p}"] & W_{1-a,\lambda^p}
\end{tikzcd}$$

<u>est commutatif</u>.

<u>Démonstration</u> : Nous allons prouver que, avec les notations de la démonstration de (4.24), on a :

$$(4.26.1) \qquad \hat{D}_{a,\lambda}\alpha^*_{a,\lambda} = p^2\beta_{1-a,\lambda}\hat{D}_{a',\lambda^p} .$$

On a, modulo $D_{1-a,\lambda}L_\lambda^2$:

$$\hat{D}_{a,\lambda}\ \alpha^*_{a,\lambda} = D_{1-a}\Delta_a(x\lambda)x^{p-1}\chi_{b_1,c_1}(x)\,{}^tA_a(x\lambda)\Phi =$$

$$(E_x + 1 - c_1 + \frac{c_1-b_1}{1-x} + G_{1-a}(x\lambda))\Delta_a(x\lambda)x^{p-1}\chi_{b_1,c_1}(x)\,{}^tA_a(x\lambda)\Phi =$$

$$p^2\chi^{-1}_{1-b_1,1-c_1}(x)A^{-1}_{1-a}(x\lambda)\Phi\Delta_{a'}(x\lambda^p)E_x + E_x(\chi^{-1}_{1-b_1,1-c_1}(x)\Delta_a(x\ )\,{}^tA_a(x\lambda))\Phi +$$

$$\chi^{-1}_{1-b_1,1-c_1}(x)A^{-1}_{1-a}(x\lambda)(1-c_1+\frac{c_1-b_1}{1-x})\Phi\Delta_{a'}(x\lambda^p) - \chi^{-1}_{1-b,1-c_1}(x)(E_x\Delta_a(x\lambda))\,{}^tA_a(x\lambda) -$$

$$\Delta_a(x\lambda)\,{}^tG_a(x\lambda)\,{}^tA_a(x\lambda))\Phi = p^2\beta_{1-a,\lambda}E_x\Delta_{a'}(x\lambda^p) - p^2\beta_{1-a,\lambda}E_x(\Delta_{a'}(x\lambda^p)) +$$

$$p\chi^{-1}_{1-b_1,1-c_1}(x)A^{-1}_{1-a}(x\lambda)(p-1+c_1-pc_1 + \frac{b_1-c_1}{1-x} - p\ \frac{b_1'-c_1'}{1-x^p})\Phi\Delta_{a'}(x\lambda^p) +$$

$$\chi^{-1}_{1-b_1,1-c_1}(x)E_x(\Delta_a(x\lambda))\,{}^tA_a(x\lambda)\Phi + \chi^{-1}_{1-b_1,1-c_1}(x)\Delta_a(x\lambda)({}^tG_a(x\lambda)\,{}^tA_a(x\lambda) -$$

$$p\,{}^tA_a(x\lambda)\,{}^tG_{a'}(x^p\lambda^p))\Phi + p\chi^{-1}_{1-b_1,1-c_1}(x)A^{-1}_{1-a}(x\lambda)(1-c_1+\frac{c_1-b_1}{1-x})\Phi\Delta_{a'}(x\lambda^p) -$$

$$\chi^{-1}_{1-b_1,1-c_1}E_x(\Delta_a(x\lambda))\,{}^tA_a(x\lambda)\Phi - \chi^{-1}_{1-b_1,1-c_1}(x)\Delta_a(x\lambda)\,{}^tG_a(x\lambda)\,{}^tA_a(x\lambda)\Phi =$$

$$p^2\beta_{1-a,\lambda}E_x\Delta_{a'}(x\lambda^p) + p^2\beta_{1-a,\lambda}G_{1-a'}(x\lambda^p)\Delta_{a'}(x\lambda^p) + p^2\beta_{1-a,\lambda}\Delta_{a'}(x\lambda^p)\,{}^tG_{a'}(x\lambda^p) +$$

$$p^2(1-c_1'+\frac{c_1'-b_1'}{1-x^p})\chi^{-1}_{1-b_1,1-c_1}(x)A_{1-a}(x\lambda)\Phi\Delta_{a'}(x\lambda^p) -$$

$$\chi^{-1}_{1-b_1,1-c_1}(x)(G_{1-a}(x\lambda)\Delta_a(x\lambda)E_x(\Delta_a(x\lambda)))\,{}^tA_a(x\lambda) -$$

$$p^2\chi^{-1}_{1-b_1,1-c_1}(x)A^{-1}_{1-a}(x\lambda)\Delta_{a'}(x^p\lambda^p)\,{}^tG_{a'}(x^p\lambda^p)\Phi -$$

$$\chi^{-1}_{1-b_1,1-c_1}(x)\Delta_a(x\lambda)\,{}^tG_a(x\lambda)\,{}^tA_a(x\lambda)\Phi = p^2\ \beta_{1-a,\lambda}\hat{D}_{a',\lambda^p}\ . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

COROLLAIRE 4.27. <u>Si</u> $V_{a,\lambda}$ <u>dénote le sous espace vectoriel sur</u> Ω <u>de</u> $W_{a,\lambda}$, <u>engendré par</u> $e^{(1)}_{a,\lambda}, e^{(2)}_{a,\lambda}, e^{(3)}_{a,\lambda}$, <u>on a pour tout</u> λ <u>dans</u> $\mathcal{U}$:

$$\alpha_{a,\lambda}\, V_{a,\lambda} = V_{a',\lambda^p} .$$

<u>Démonstration</u> : Cela vient de ce que

$$\hat{D}_{a,\lambda}\, K_{a,\lambda} = V_{1-a,\lambda} ,$$

comme on a vu, dans le cas générique, en (3.28). C.Q.F.D.

On a donc démontré que le fibré vectoriel à connexion $\mathbb{V}_a$ associé au $\mathcal{Q}/Q$-module différentiel V_a, et donc à L_{a,b_1,b_2,c_1,c_2} et à ${}_3F_2\left(\begin{matrix} a_1, b_1, b_1 \\ c_1, c_2 \end{matrix} ; \lambda\right)$ est muni d'un morphisme horizontal :

$$\bar{\alpha}_a : \mathbb{V}_{a|\mathcal{U}} \longrightarrow \varphi^*\mathbb{V}_{a'|\mathcal{U}} , \tag{4.28}$$

qui coïncide avec $\alpha_{a,\lambda}$ sur la fibre $V_{a,\lambda}$ de $\mathbb{V}_a$, $\lambda \in \mathcal{U}$.
Si $\mathbb{H}_a$ dénote le fibré vectoriel à connexion associé à H_a, on a également un morphisme horizontal :

$$\tilde{\alpha}^*_a : \varphi^*\mathbb{H}_{a'|\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbb{H}_{a|\mathcal{U}} , \tag{4.29}$$

induit par

$$\alpha^*_a : \varphi^*\mathbb{K}_{a'|\mathcal{U}} \longrightarrow K_{a|\mathcal{U}} , \tag{4.29.1}$$

où $\mathbb{K}_a$ est le fibré vectoriel associé à K_a : α^*_a coïncide avec $\alpha_{a,\lambda}$ sur la fibre K_{a',λ^p} de $\varphi^*\,\mathbb{K}_{a'}$ en $\lambda \in \mathcal{U}$.

PROPOSITION 4.30. <u>On a le diagramme commutatif à lignes exactes</u> :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{H}_{a|\mathcal{U}} \arrow[r, hook] & \mathbb{K}_{a|\mathcal{U}} \arrow[r, "\hat{D}_a"] & \mathbb{V}_{1-a|\mathcal{U}} \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \varphi^*\mathbb{H}_{a'|\mathcal{U}} \arrow[r, hook] \arrow[u, dash, "\tilde{\alpha}^*_a"] & \varphi^*\mathbb{K}_{a'|\mathcal{U}} \arrow[r, "\varphi^*\hat{D}_{a'}"] \arrow[u, dash, "\alpha^*_a"] & \varphi^*\mathbb{V}_{1-a'|\mathcal{U}} \arrow[r] \arrow[u, dash, "p^2\bar{\alpha}^{-1}_{1-a}"'] & 0 \end{tikzcd} \tag{4.30.1}$$

où $\hat{\mathbb{D}}_a$ coïncide avec $D_{a,\lambda}$ sur la fibre $K_{a,\lambda}$ de $\mathbb{K}_a$ en $\lambda \in \mathcal{U}$. Si

$$[\ ,\ ]_{a,\lambda} : V_{1-a,\lambda} \times V_{a,\lambda} \longrightarrow \Omega \tag{4.30.2}$$

$$(v',v) \longmapsto [v',v]_{a,\lambda}$$

dénote la forme spécialisée de la dualité (3.30.1), on a :

$$[\bar{\alpha}_{1-a,\lambda} v', \bar{\alpha}_{a,\lambda} v]_{a',\lambda^p} = p^2 [v',v]_{a,\lambda} \ . \tag{4.30.3}$$

Démonstration : Soit $\eta \in K_{a',\lambda^p}$ tel que $\hat{D}_{a',\lambda^p}\ \eta = \alpha_{1-a,\lambda^p} v'$;

soit $\alpha^*_{a,\lambda}\eta = p^2 \xi \in K_{a,\lambda}$. On a alors :

$$p^2 \hat{D}_{a,\lambda}\xi = \hat{D}_{a,\lambda}\alpha^*_{a,\lambda}\eta = p^2\ \alpha^{-1}_{1-a,\lambda}\hat{D}_{a',\lambda^p}\eta = p^2 v' \ ;$$

donc $D_{a,\lambda}\xi = v'$ et

$$[\bar{\alpha}_{1-a,\lambda} v', \bar{\alpha}_{a,\lambda} v]_{a'\lambda^p} = \langle \eta, \alpha_{a,\lambda} v\rangle_{\lambda^p} = \langle \alpha^*_{a,\lambda}\eta, v\rangle_\lambda = p^2 \langle v',v\rangle_\lambda = p^2 [v',v]_{a,\lambda} .$$

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 4.31. Par rapport aux bases $e'_{a,\lambda}$ de $V_{a,\lambda}$ (pour tout a,λ), on a :

$$\text{dét}\ \alpha_{a,\lambda}\ \text{dét}\ \alpha_{1-a,\lambda} = p^6 \ \frac{\text{dét}\ \Theta_a(\lambda)}{\text{dét}\ \Theta_{a'}(\lambda^p)}$$

où Θ_a est la matrice définie dans le théorème 3.31.

Ayant établi la plupart des résultats techniques nécessaires à l'étude $\underline{p}$-adique de la fonction $_3F_2\left(\begin{smallmatrix} a,b_1,b_2 \\ c_1,c_2 \end{smallmatrix};\lambda\right)$, nous nous arreterons ici pour le moment. Pour obtenir des renseignements sur la croissance $\underline{p}$-adique des solutions de L_{a,b_1,b_2,c_1,c_2} au bord de leur disque de convergence, il faudrait encore étudier la matrice de $\bar{\alpha}_{a,}$ du point de vue de la théorie de Dieudonné. La formule du corollaire 4.31 nous indique en particulier qu'il sera nécessaire de calculer la matrice $B_a(\lambda)$ (à coefficients dans $\mathcal{Q}_0'$) modulo p $\mathcal{Q}_0'$. On traitera ce problème dans un article futur.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ADOLPHSON : "An index theorem for p-adic differential operators", Trans. Amer. Math. Soc., 216 (1976), pp. 279-293.

[2] B. DWORK : "Lectures on p-adic Differential Equations", Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 253, Springer-Verlag (1982), 310 pp. .

[3] B. DWORK : "Bessel functions as p-adic functions of the argument" Duke Math. J., Vol. 41, n° 4, (1974), pp. 711-738.

[4] B. DWORK : "On p-adic differential equations IV. Generalized hypergeometric functions as p-adic analytic functions in one variable", Ann. Sc. de l'E.N.S., 4e série, t. 6, fasc. 3, (1973), pp. 295-316.

[5] B. DWORK : "On p-adic differential equations I. The Frobenius structure of differential equations", Bull. Soc. Math. France, Mém. 39-40 (1974), pp. 27-37.

[6] E.G.C. POOLE : "Linear differential Equations", Dover, New York (1960), 202 pp. .

F. BALDASSARRI
Seminario Mathematico
Università di Padova
Via Belzoni 7
35131 Padova
(Italia).