C. BANDLE
J. MOSSINO

Application du réarrangement à une inéquation variationnelle

Astérisque, tome 118 (1984), p. 109-114
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__118__109_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 118 (1984) p.109 à 114.

APPLICATION DU RÉARRANGEMENT A UNE INÉQUATION VARIATIONNELLE

par C. BANDLE (Universität Basel) et J. MOSSINO (Université Paris-Sud)

Nous établissons des inégalités isopérimétriques pour la solution d'un problème d'obstacle, pour lequel l'ensemble de coïncidence comprend la frontière. En particulier nous obtenons une borne inférieure optimale pour la mesure de l'ensemble de coïncidence.

1. L'OBSTACLE NUL.

Soit Ω un ouvert borné régulier de l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$. On suppose que u dans $W_o^{1,p}(\Omega)$ $(2 \leq p < \infty)$ est l'unique solution de

$$(1) \qquad a(u, v-u) + \int_\Omega (cu^{p-1} - f)(v-u)dx \geq 0 \ , \ \forall\, v \in W_o^{1,p}(\Omega) \ , \ v \geq 0 \ , \ u \geq 0$$

où $\quad a(u,v) = \int_\Omega A(\nabla u, \nabla u)^{(p/2)-1} A(\nabla u, \nabla v)dx$, $A \ (=A(x)) = (a_{ij})_{i,j=1\ldots N}$

est une matrice $N \times N$ non nécessairement symétrique (et l'on note de la même façon la forme bilinéaire associée sur $\mathbb{R}^N$), a_{ij} est dans $L^\infty(\Omega)$. On suppose que A est uniformément coercive et (quitte à la normaliser) de constante 1, c'est-à-dire

$$\sum_{i,j=1}^N A_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq |\xi|^2 \ \ p \cdot p \cdot x \in \Omega \ , \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N \ .$$

De plus, c est une fonction positive de $L^\infty(\Omega)$, f est dans $L^q(\Omega)$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

Nous noterons

$$Au = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A(\nabla u, \nabla u)^{(p/2)-1} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \ . \ \square$$

Remarques. 1^{o}) Pour

$$A = I \ , \ a(u,v) = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

est associé à l'opérateur pseudo-laplacien

$$\mathcal{A}u = - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

2^{o}) Pour

$$p = 2 \ , \ a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx$$

est une forme bilinéaire coercive sur $H^1_o(\Omega)$.

3^{o}) Lorsque A est symétrique, u est aussi la solution du problème

$$\text{(2)} \qquad \inf_{v \in W_o^{1,p}(\Omega)} \left\{ e(v) = \frac{1}{p}\, a(v,v) + \frac{1}{p}\int_\Omega c v^p dx - \int_\Omega f v dx \right\}$$

4^{o}) Les cas intéressants sont ceux où f change de signe, puisque: si $f \leq 0$ p•p dans Ω, on a $u \equiv 0$; si $f \geq 0$ p•p dans Ω, u est la solution de l'équation

$$\begin{cases} \mathcal{A}u + cu^{p-1} = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \ , \end{cases}$$

pour laquelle les estimations isopérimétriques sont données dans [4] [5]. Dans tous les cas, on obtient aisément l'estimation $\text{mes}\{x \in \Omega, \ u(x) > 0\} \geq$ $\geq \text{mes}\{x \in \Omega, \ f(x) > 0\}$ puisque ces deux ensembles sont inclus l'un dans l'autre. □

Nous utiliserons les notations et définitions suivantes. Nous notons $|E|$ pour la mesure de l'ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^N$; $\Omega_* = [0,|\Omega|]$; $\underset{\sim}{\Omega}$ est la boule de $\mathbb{R}^N$, centrée en 0 (par exemple), de même mesure que Ω ($|\underset{\sim}{\Omega}| = |\Omega|$) ; α_N est le mesure de la boule unité de $\mathbb{R}^N$; $\omega(N,q) = N^{-q}\, \alpha_N^{-(q/N)}$.

Définitions. Soit $v : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable arbitraire. *La fonction de distribution* de v est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$|v>t| = |\{x \in \Omega,\ v(x)>t\}| \quad .$$

Le *réarrangement décroissant* de v sur Ω est

$$v_*(s) = \mathrm{Inf}\{t \in \mathbb{R},\ |v>t| \leq s\} \quad ;$$

le réarrangement décroissant de v sur $\underset{\sim}{\Omega}$ est

$$\underset{\sim}{v}(x) = v_*(\alpha_N |x|^N) \quad .$$

On trouve dans [1] [2] [3] un large développement sur les réarrangements. □

Nous comparons la solution u de (1) avec la solution U (dont on a la valeur explicite) d'un problème plus simple:

$$(2) \qquad \underset{\substack{v \in W_0^{1,p}(\underset{\sim}{\Omega}) \\ v \geq 0}}{\mathrm{Inf}} \left\{ E(v) = \frac{1}{p} \int_{\underset{\sim}{\Omega}} |\nabla v|^p dx - \int_{\underset{\sim}{\Omega}} \underset{\sim}{f}\ v\ dx \right\}$$

<u>Théorème 1</u>. *Soit* $F(s) = \int_0^s f_*(\sigma)\, d\sigma$. *On a*

$$|u>0| \leq |U>0| = \begin{cases} 0 & \textit{si} \quad f \leq 0 \ \textit{p.p. dans} \ \Omega \ , \\ |\Omega| & \textit{si} \quad \int_\Omega f\, dx \geq 0 \ \text{ et } \ f \not\equiv 0 \ , \\ \textit{l'unique} \ \ S_0 \in]\,|f \geq 0|, |\Omega|\,[& \textit{tel que} \ \ F(S_0) = 0 \ , \ \textit{sinon.} \end{cases}$$

D'autre part $\underset{\sim}{u} \leq U$. *Plus précisément, pour tout* s *dans* Ω_*

$$u_*(s) \begin{cases} \leq \omega(N,q) \displaystyle\int_s^{|u>0|} \sigma^{(q/N)-q}\ F(\sigma)^{q/p} d\sigma & \textit{si} \quad s \leq |u>0| \\ = 0 \quad \textit{si} \quad s \geq |u>0| \end{cases}$$

$$\leq U_*(s) = \begin{cases} \omega(N,q) \displaystyle\int_s^{|U>0|} \sigma^{(q/N)-q}\ F(\sigma)^{q/p} d\sigma & \textit{si} \quad s \leq |U>0| \\ 0 \quad \textit{si} \quad s \geq |U>0| \quad . \end{cases}$$

La démonstration est très voisine de celle de [4], [5]. □

Remarques. 1°) En utilisant sensiblement les mêmes arguments, on peut montrer que: $\sup\limits_{\Omega} \text{ess } u \leq \sup\limits_{\Omega} \text{ess } V$ ($\leq \sup\limits_{\Omega} \text{ess } U$) où V est la solution de

$$\inf_{\substack{v \in W_o^{1,p}(\underset{\sim}{\Omega}) \\ v \geq 0}} \left\{ \frac{1}{p} \int_{\underset{\sim}{\Omega}} |\nabla v|^p dx + \frac{1}{p} \int_{\underset{\sim}{\Omega}} \tilde{c}\, v^p dx - \int_{\underset{\sim}{\Omega}} \tilde{f}\, v\, dx \right\}$$

et $\tilde{c}(x) = c_*(|\Omega| - \alpha_N |x|^N)$ est le réarrangement croissant de c sur $\underset{\sim}{\Omega}$.

2°) Si $\int_\Omega f dx < 0$ (et $|f > 0| > 0$) on déduit du théorème 1 que le problème (1) est un problème à frontière libre, c'est-à-dire que sa solution u satisfait $0 < |u > 0| < |\Omega|$.

3°) Lorsque A est symétrique, soit $e(u)$ l'infimum de (2) et $E(U)$ l'infimum de $(\underset{\sim}{2})$. Par les propriétés classiques du réarrangement, on à $e(u) \geq E(U)$.

2. LE CAS $p = 2$, AVEC OBSTACLE NUL SUR $\partial\Omega$.

On considère le problème

$$(3) \qquad a(u, v-u) + \int_\Omega (cu - f)(v-u)dx \geq 0 \ , \ \forall\, v \in H_o^1(\Omega),\ v \geq \psi \ , \ u \geq \psi$$

où $a(u,v) = \int_\Omega A(\nabla u, \nabla v)dx$, A et c comme au paragraphe 1, f dans $L^2(\Omega)$. On a

$$\mathcal{A}u = - \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) .$$

L'obstacle ψ est supposé dans $H_o^1(\Omega)$ et tel que $\mathcal{A}\psi \in L^2(\Omega)$. Soit $g = f - \mathcal{A}\psi - C\psi$ (g est dans $L^2(\Omega)$). Le problème de référence est maintenant

$$(\underset{\sim}{3}) \qquad \inf_{\substack{v \in H_o^1(\underset{\sim}{\Omega}) \\ v \geq 0}} \left\{ E(v) = \frac{1}{2} \int_{\underset{\sim}{\Omega}} |\nabla v|^2 dx - \int_{\underset{\sim}{\Omega}} \tilde{g}\, v\, dx \right\}$$

Soit U sa solution. Lorsque A est symétrique, on note

$$e(v) = \frac{1}{2}\, a(v,v) + \frac{1}{2}\int_\Omega cv^2 dx - \int_\Omega fv dx \quad .$$

En appliquant les résultats du premier paragraphe, on obtient une estimation optimale sur la mesure de l'ensemble de coïncidence $\{u = \psi\}$ et sur l'écart $u-\psi$, ainsi que (lorsque A est symétrique) sur $e(u)$.

<u>Théorème 2</u>. *Soit* $G(s) = \int_0^s g_*(\sigma)d\sigma$. *On a*

$$|u>\psi| \leq |U>0| = \begin{cases} 0 \ \ \textit{si} \ \ g \leq 0 \ \text{p.p.} \ \textit{dans} \ \Omega \\ |\Omega| \ \ \textit{si} \ \ \int_\Omega g\, dx \geq 0 \ \ \textit{et} \ \ g \not\equiv 0 \ , \\ \textit{l'unique} \ \ s_o \in \left]|g \geq 0|, |\Omega|\right[\ \ \textit{tel que} \ \ G(s_o) = 0 \ , \ \textit{sinon.} \end{cases}$$

D'autre part, pour tout s *dans* Ω_* ,

$$(u-\psi)_*(s) \begin{cases} \leq \omega(N,2) \displaystyle\int_s^{|u-\psi>0|} \sigma^{(2/N)-2}\, G(\sigma)\, d\sigma \quad \text{si} \quad s \leq |u-\psi>0| \\ = 0 \quad \text{si} \quad s \geq |u-\psi>0| \end{cases}$$

$$\leq U_*(s) = \begin{cases} \omega(N,2) \displaystyle\int_s^{|U>0|} \sigma^{(2/N)-2}\, G(\sigma)\, d\sigma \quad \text{si} \quad s \leq |U>0| \\ 0 \quad \text{si} \quad s \geq |U>0| \end{cases}$$

De plus, lorsque A est symétrique,

$$e(u) - e(\psi) \geq E(U) \quad .$$

Ces inégalités deviennent des égalités si Ω est une boule $(\Omega = \underset{\sim}{\Omega})$, $A = I$, $c \equiv 0$ et $g = \underset{\sim}{g}$.

<u>B I B L I O G R A P H I E</u>

[1] C. BANDLE, Isoperimetric inequalities and applications, Pitman Advanced Publishing Program, Boston-London-Melbourne, 1980.

[2] G.H. HARDY, J.E. LITTLEWOOD, G. POLYA, Inequalities, Cambridge, Univ. Press, 1964.

[3] G. POLYA, C. SZEGO, Isoperimetric inequalities in mathematical physics, Princeton Univ. Press, 1951.

[4] G. TALENTI, Elliptic equations and rearrangements, Ann. della Sc. Norm. Sup. Pisa (IV), 3 (1976), 697-718.

[5] ———, Nonlinear elliptic equations, rearrangements of functions and Orlicz spaces, Ann. Mat. Pura ed Appl. (IV), vol. CXX (1979), 159-184.

Jacqueline MOSSINO
Mathématique
Bâtiment 425
Université de Paris-Sud
F-91405 Orsay Cedex
France