TAKASHI TSUBOI

Γ_1-structures avec une seule feuille

Astérisque, tome 116 (1984), p. 222-234
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__116__222_0>

Γ_1-structures avec une seule feuille

Takashi TSUBOI

INTRODUCTION.

Un feuilletage de codimension q détermine canoniquement une Γ_q-structure. Sur une feuille de ce feuilletage, la Γ_q-structure restreinte est déterminée par l'holonomie de cette feuille [4]. On observe que les classes caractéristiques de feuilletages s'annulent lorsqu'on les restreint à une feuille (si son fibré normal est trivial). On peut donc se demander si une telle Γ_q-structure est triviale dans un sens raisonnable.

Dans cet article, nous démontrons le théorème suivant qui répond à cette question dans le cas où $q = 1$.

Théorème. Toute $\overline{\Gamma}_1^r$-structure avec une seule feuille sur un espace paracompact est homotopiquement triviale ($r \leq \infty$).

Dans la démonstration de ce théorème, la construction d'un graphe d'une $\overline{\Gamma}_1^r$-structure [4] et une conjugaison par un difféomorphisme avec une singularité en 0 jouent un rôle essentiel.

Nous donnons au §5 quelques applications de ce théorème. Soit M une variété orientée munie d'un champ de vecteurs non-singulier transverse au bord ∂M dont chaque composante connexe L satisfait $H^1(L; \mathbb{R}) \neq 0$. Alors, étant donné un germe de feuilletage le long du bord, tangent au bord, il existe un feuilletage sur M qui est une extension du germe donné. Nous construisons aussi des $\overline{\Gamma}_1^\infty$-cobordismes pour une classe de feuilletages qui contient le feuilletage de Reeb, etc.

Je remercie A. Haefliger pour ses encouragements, ses critiques et suggestions.

§ 1. Espaces classifiants.

Soit $\overline{\Gamma}_1^r$ le groupoïde topologique des germes de difféomorphismes de classe C^r de $\mathbb{R}$ préservant l'orientation muni de la topologie de faisceau. Une $\overline{\Gamma}_1^r$-structure sur un espace X est donnée par un 1-cocycle $(\{U_i\}_{i\in I}, \gamma_{ij})$ à valeur dans $\overline{\Gamma}_1^r$, où $\{U_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X. On dit que une $\overline{\Gamma}_1^r$-structure a une seule feuille si elle est donnée par un 1-cocycle $(\{U_i\}_{i\in I}, \gamma_{ij})$ tel que les projections locales γ_{ii} sont des applications constantes. Un tel 1-cocycle est toujours équivalent à un 1-cocycle $(\{U_j\}_{j\in J}, \gamma'_{ij})$ tel que γ'_{jj} applique U_i sur $0\in\mathbb{R}$.

Soit G^r le groupe des germes en 0 de difféomorphismes de $\mathbb{R}$ préservant l'orientation et laissant fixe 0, muni de la topologie discrète. Alors, G^r est un sous-groupe du groupoïde topologique $\overline{\Gamma}_1^r$. La notion de $\overline{\Gamma}_1^r$-structure avec une seule feuille est équivalente à celle de G^r-structure.

L'exemple typique de telles structures est la restriction sur une feuille de la $\overline{\Gamma}_1^r$-structure d'un feuilletages (M,F) de codimension un transversement orienté. Par la construction du graphe [4,5],à une $\overline{\Gamma}_1^r$-structure H avec une seule feuille sur une variété L, on peut associer un micro-fibré feuilleté, c'est-à-dire, un feuilletage F sur un voisinage de $L\times\{0\}$ dans $L\times\mathbb{R}$ transverse aux fibres $\{*\}\times\mathbb{R}$ tel que $L\times\{0\}$ est une feuille et $H = s_0{}^*F$, où $s_0 : L \longrightarrow L\times\{0\}\subset L\times\mathbb{R}$ est la section nulle.

L'inclusion $i : G^r \longrightarrow \overline{\Gamma}_1^r$ induit un morphisme entre les espaces classifiants correspondants; $Bi : BG^r \longrightarrow B\overline{\Gamma}_1^r$.

Le théorème énoncé dans l'introduction est équivalent au suivant.

<u>Théorème (1.1)</u>. $Bi : BG^r \longrightarrow B\overline{\Gamma}_1^r$ est homotope à zéro $(r \leq \infty)$

Pour construire cette homotopie, nous construisons le graphe de la $\overline{\Gamma}_1^r$-structure sur BG^r dans le §2.

§ 2. Construction du graphe.

Soit G^r le groupe des germes en 0 des difféomorphismes de $\mathbb{R}$ préservant l'orientation et laissant fixe 0 muni de la topologie discrète.

Lemme (2.1). Il existe un graphe de la $\overline{\Gamma}_1^r$-structure canonique sur $B\,G^r$. C'est-à-dire qu'il y a un feuilletage $\mathcal{F}$ sur un voisinage de $B\,G^r\times\{0\}$ dans $B\,G^r\times\mathbb{R}$ tel que $B\,G^r\times\{0\}$ soit une feuille de $\mathcal{F}$ et $s_0{}^*\mathcal{F}$ soit la $\overline{\Gamma}_1^r$-structure canonique sur $B\,G^r$ où $s_0 : B\,G^r \longrightarrow B\,G^r\times\{0\}\subset B\,G^r\times\mathbb{R}$ est la section nulle.

Démonstration. Il s'agit de construire un feuilletage $\mathcal{F}$ sur un voisinage de $B\,G^r\times\{0\}$ dans $B\,G^r\times\mathbb{R}$ tel que $B\,G^r\times\{0\}$ soit une feuille et l'holonomie de cette feuille $B\,G^r\times\{0\}$ soit celle du G^r-fibré universel sur $B\,G^r$. La construction d'un tel feuilletage sur un sous-complexe fini de $B\,G^r$ est classique [4,5]. (Cela suffirait pour les applications données au §5.)

Sur $B\,G^r$ la construction marche de la même façon. Prenons $B\,G^r$ comme la réalisation épaisse du complexe semi-simplicial associé à G^r. Dans la réalisation, on peut choisir un voisinage U^n du n-squelette tel que

$$\emptyset = U^{-1}\subset U^0\subset U^1\subset \ldots \subset U^{n-1}\subset U^n\subset \ldots$$

et U^n-U^{n-1} se rétracte sur l'intersection de U^n-U^{n-1} et du n-squelette. (Par exemple, soit $\Delta^m = \{(u_1,\ldots,u_m,\ldots)\in\mathbb{R}^\infty ; 1\geq u_1\geq\ldots \geq u_m\geq 0 = u_{m+1} = \ldots = \ldots\}$ un m-simplexe de la première subdivision barycentrique de $B\,G^r$ où $(1,\ldots,\overset{i}{1},0,\ldots)$ correspond au sommet dans l'intérieur d'un i-simplexe de $B\,G^r$. Alors U^n est défini par $U^n\cap\Delta^m = \{(u_1,\ldots,u_m,\ldots)\in\Delta^m ; u_{n+1}\leq 1/2\}$. (Dans ce cas, U^n-U^{n-1} est une réunion disjointe de produits d'un ∞-simplexe ouvert et d'un n-simplexe, car $B\,G^r$ est un complexe de Kan.))

Pour chaque élément g de G^r, choisissons un difféomorphisme f de $\mathbb{R}$ qui représente g. Nous allons définir le feuilletage $\mathcal{F}$ en utilisant ces difféomorphismes. Prenons sur U^0 un $\mathbb{R}$-fibré feuilleté trivial (produit). Pour chaque 1-simplexe (g) de $B\ G^r$, prenons un $\mathbb{R}$-produit feuilleté sur $(g) \cap (U^1 - U^0)$ défini comme une suspension du difféomorphisme f qui a été choisi comme représentant de g. On l'étend sur U^1 en utilisant la rétraction. Comme les difféomorphismes f sont isotopes à l'identité (par exemple linéairement) parmi les difféomorphismes qui laissent fixe 0, on a un $\mathbb{R}$-produit feuilleté sur U^1 avec $U^1 \times \{0\}$ comme feuille.

Pour chaque 2-simplexe (g_1, g_2) de $B\ G^r$, on a un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ où les difféomorphismes f_1, f_2, f_{12} qui représentent $g_1, g_2,$ $g_1 g_2$, respectivement, satisfont la relation $f_1 f_2 = f_{12}$. On peut donc définir un feuilletage sur un voisinage de $(g_1, g_2) \times \{0\}$ dans $(g_1, g_2) \times \mathbb{R}$ qui a $(g_1, g_2) \times \{0\}$ comme feuille et qui est une extension du feuilletage défini sur $((g_1, g_2) \cap U^1) \times \mathbb{R}$. On l'étend sur U^2 en utilisant la rétraction et on obtient un micro-fibré feuilleté sur U^2 avec $U^2 \times \{0\}$ comme feuille.

Par le même argument, pour un n-simplexe $(g_1, \ldots, g_n)$ de $B\ G^r$, le feuilletage défini sur un voisinage de $((g_1, \ldots, g_n) \cap U^{n-1}) \times \{0\}$ s'étend sur un voisinage de $(g_1, \ldots, g_n) \times \{0\}$ dans $(g_1, \ldots, g_n) \times \mathbb{R}$. Donc on obtient un micro-fibré feuilleté sur U^n avec $U^n \times \{0\}$ comme feuille.

Par récurrence, on définit le feuilletage $\mathcal{F}$ avec $B\ G^r \times \{0\}$ comme feuille, et l'holonomie de cette feuille est ce qu'on désirait.

Remarque (2.2). Il existe une section positive $s : B\ G^r \longrightarrow B\ G^r \times (0, \infty) \subset B\ G^r \times \mathbb{R}$ dont l'image est contenue dans le voisinage où $\mathcal{F}$ est défini.

Soit P^r le sous-groupe de G^r constitué par les germes dont la restriction à $(-\infty, 0]$ est l'identité (muni de la topologie discrète). On a un graphe de la $\overline{\Gamma}_1^r$-structure de $B\ P^r$ construit comme dans le lemme (2.1). Dans le cas de $B\ P^r$, on peut construire un graphe avec un feuilletage trivial sur $B\ P^r \times (-\infty, 0)$. Comme la section nulle $B\ P^r \longrightarrow B\ P^r \times \{0\} \subset B\ P^r \times \mathbb{R}$ est homotope à une section constante négative et la $\overline{\Gamma}_1^r$-structure induite sur une telle section est triviale, on a le corollaire suivant.

Corollaire (2.3). $B\,P^r \to B\,\overline{\Gamma}^r_1$ est homotope à zéro.

Dans le § 4, on définira un homomorphisme de G^r dans P^r tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} B\,G^r \arrow[r] \arrow[dr] & B\,P^r \arrow[d] \\ & B\,\overline{\Gamma}^r_1 \end{tikzcd}$$

commute homotopiquement, où la flèche $B\,G^r \to B\,P^r$ est l'application induite. On en déduit directement le théorème (1.1).

Pour cela, on utilise une conjugaison par un homéomorphisme φ de $[0,\infty)$ tel que $\varphi|(0,\infty)$ est un difféomorphisme de classe C^∞ de $(0,\infty)$ et $\varphi(t) = \exp(-1/t)$ dans un voisinage de 0.

Signalons que cette conjugaison est aussi utilisée dans un article de M-P. Muller [21].

§ 3. Conjugaison par φ.

Soit G^r_+ le groupe des germes en 0 de difféomorphismes de $[0,\infty)$ muni de la topologie discrète. Soit J^s le groupe des s-jets inversibles d'applications $(\mathbb{R},0) \to (\mathbb{R},0)$. Pour $r \geq s$, on note par G^r_{s+} le noyau de l'homomorphisme $G^r_+ \to J^s$.

Pour l'homéomorphisme φ donné à la fin du §2, on note $\mathrm{Ad}\,\varphi$ l'automorphisme intérieur de G^0_+ défini par $(\mathrm{Ad}\,\varphi)(g) = \varphi^{-1} g \varphi$.

Lemme (3.1). $(\mathrm{Ad}\,\varphi)(G^r_+) \subset G^r_+$.

Démonstration. Pour $g \in G^r_+$, on prend un difféomorphisme f de $[0,\infty)$ qui représente g. Posons $f(x) = x \cdot h(x)$ où $h(x)$ est une fonction de classe C^{r-1} sur $[0,\infty)$, de classe C^r sur $(0,\infty)$, et $h(0) \neq 0$. (C'est possible par le théorème de Taylor).

Comme $\varphi^{-1}(x) = -1/\log x$, on a

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ad}\,\varphi)(f)(t) &= -1/\log(\varphi(t)\cdot h(\varphi(t))) \\ &= t/(1-t\cdot\log(h(\varphi(t))))\end{aligned}$$

sur un voisinage de 0. Donc, si h est de classe C^{r-1}, $(\mathrm{Ad}\,\varphi)(f)$

est de classe C^{r-1}. De plus, comme h est C^r sur $(0,\infty)$, $(\mathrm{Ad}\,\varphi)(f)$ est de classe C^r sur $(0,\infty)$.

Supposons que $f(x) = x\cdot h(x)$ est de classe C^1. Comme $f'(0) = h(0)$ et f' et h sont continues, on a

$$\lim_{x\to 0} x\cdot h'(x) = 0.$$

D'autre part, sur $(0,\infty)$, on a

$$(*) \qquad (d/dt)(\mathrm{Ad}\,\varphi)(f)(t) = \{1 + \varphi(t)\cdot h'(\varphi(t))/h(\varphi(t))\}/\{1-t\cdot\log(h(\varphi(t)))\}^2$$

Comme $\lim_{t\to 0} \varphi(t)\cdot h'(\varphi(t)) = 0$ et $h(0) \neq 0$, on a

$$(**) \qquad \lim_{t\to 0} (d/dt)((\mathrm{Ad}\,\varphi)(f))(t) = 1.$$

Donc $(\mathrm{Ad}\,\varphi)(f)$ est de classe C^1 sur $[0,\infty)$.

Si $f(x) = x\cdot h(x)$ est de classe C^r $(r \geq 2)$, $x\cdot h'(x)$ est C^{r-1} sur $[0,\infty)$. Comme la dérivée $(d/dt)(\mathrm{Ad}\,\varphi)(f)(t)$ existe sur $[0,\infty)$ et est de classe C^{r-1}, $(\mathrm{Ad}\,\varphi)(f)$ est de classe C^r.

<u>Corollaire (3.2)</u>. $(\mathrm{Ad}\,\varphi)(G^r_+) \subset G^r_{1+}$ (par l'égalité (**)).

<u>Lemme (3.3)</u>. $(\mathrm{Ad}\,\varphi)(G^r_{1+}) \subset G^r_{r+}$.

Ce lemme est une conséquence immédiate du lemme suivant appliqué au second membre de l'égalité (*). (Notons que $h(0) = 1$ et on peut supposer que $r \geq 2$).

<u>Lemme (3.4)</u>. (Exercice) Soient $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^r. Supposons que $j^r_0\varphi = j^r_0 0$.
Alors $j^r_0\,\psi(t,\varphi(t)) = j^r_0\psi(t,0)$, où j^r_0 signifie le r-jet en 0.

§ 4. Démonstration du théorème.

Nous définissons un homomorphisme $a : G^r \longrightarrow P^r$ comme composition des homomorphismes suivants :

la restriction : $G^r \longrightarrow G^r_+$,

$(\mathrm{Ad}\,\varphi)^2 : G^r_+ \longrightarrow G^r_{r+}$ (Voir § 3),

l'extension : $G^r_{r+} \longrightarrow P^r$ (l'inverse de la restriction).

Cet homomorphisme induit une application $B\,a$ de $B\,G^r$ dans $B\,P^r$. On considère le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} B\,G^r \arrow[rr, "B\,a"] \arrow[dr] & & B\,P^r \arrow[dl] \\ & B\,\overline{\Gamma}^r_1 & \end{tikzcd}$$

Lemme (4.1). Ce diagramme commute homotopiquement.

Démonstration. C'est une conséquence de la remarque (2.2) et du fait que $\varphi|(0,\infty)$ est un difféomorphisme.

Soit $s : B\,G^r \longrightarrow B\,G^r \times \mathbb{R}$ une section positive donnée dans (2.2) dont l'image est contenue dans le voisinage V de $B\,G^r \times \{0\}$ où on a défini le feuilletage $\mathcal{F}$. Soit V_+ l'intersection de V et $B\,G^r \times (0,\infty)$. On a

$\mathcal{H}(B\,G^r) = s_0{}^*\mathcal{F} \simeq s^*\mathcal{F} = s^*(\mathcal{F}|V_+)$, où $\mathcal{H}(B\,G^r)$ est la $\overline{\Gamma}^r_1$-structure canonique sur $B\,G^r$.

On fait opérer φ sur chaque fibre de $BG^r \times (0,\infty)$. On a toujours

$$s^*(\mathcal{F}|V_+) = (\varphi^{-2}s)^*((\varphi^2)^*(\mathcal{F}|V_+)).$$

Le feuilletage $(\varphi^2)^*(\mathcal{F}|V_+)$ sur $\varphi^{-2}(V_+)$ est compatible avec le feuilletage produit sur $BG^r \times (-\infty,0]$. Donc ces deux feuilletages définissent un feuilletage $\mathcal{F}'$ sur $\varphi^{-2}(V_+) \cup BG^r \times (-\infty,0]$.

Alors on a

$$(\varphi^{-2}s)^*((\varphi^2)^*(\mathcal{F}|V_+)) = (\varphi^{-2}s)^*(\mathcal{F}') \simeq s_0{}^*\mathcal{F}'.$$

D'autre part, $s_0{}^*\mathcal{F}' \simeq (Ba)^*\mathcal{H}(B\ P^r)$ où $\mathcal{H}(B\ P^r)$ est la $\overline{\Gamma}{}_1^r$-structure canonique sur $B\ P^r$.

On a démontré le lemme.

Comme on l'a remarqué à la fin du § 2, le corollaire (2.3) implique le théorème (1.1).

§ 5. Application.

Nous donnons quelques applications du théorème (1.1).

Théorème (5.1). Soit M^n une variété compacte avec bord ∂M. Supposons qu'il existe un champ de vecteurs non-singulier transverse au bord et que $H^1((\partial M)_i;\mathbb{R}) \neq 0$ pour chaque composante connexe $(\partial M)_i$ de ∂M. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension un défini sur un voisinage du bord ∂M, tangent au bord. Alors, il existe un feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ de codimension un défini sur M qui coïncide avec $\mathcal{F}$ sur un voisinage de ∂M.

Démonstration. Par le théorème d'existence de feuilletage de codimension un (Thurston [18,19]), il suffit de construire une $\overline{\Gamma}{}_1^r$-structure qui étend celle donnée par $\mathcal{F}$. On prend un voisinage $\partial M \times [0,2]$ du bord $\partial M = \partial M \times \{0\}$. On peut supposer que le feuilletage $\mathcal{F}$ est défini sur $\partial M \times [0,1]$. La démonstration du théorème (1.1) montre que la $\overline{\Gamma}{}_1^r$-structure induite sur $\partial M \times \{1\}$ est homotope à zéro. On peut donc l'étendre sur M.

Remarque (5.2). Etant donné un homomorphisme h d'un groupe fondamental d'une variété L dans le groupe des jets J^r, on peut se demander s'il existe un feuilletage admettant L comme feuille avec l'holonomie infinitésimale donnée h. Il s'agit de l'existence d'un relèvement $\pi_1(L) \longrightarrow G_+^r$ de l'homomorphisme $\pi_1(L) \longrightarrow J^r$.

Pour cette question on sait ce qui suit.

Pour $r \leq 2$, il existe une section continue de l'homomorphisme

$\mathrm{Diff}^r_K[0,\infty) \longrightarrow J^r$. (Pour $r = 2$, on prend l'action de $PSL(2,\mathbb{R})$ sur S^1. Le groupe d'isotropie d'un point de S^1 est isomorphe à J^2. On a une action relevée sur le revêtement universel $\mathbb{R}$ de ce groupe d'isotropie. On utilise $(\mathrm{Ad}\,\varphi)^2$ en un des points fixes).

Pour $3 \le r < \infty$, il n'existe pas de section de l'homomorphisme $G^r_+ \longrightarrow J^r$ (à cause du théorème de Kopell [8]).

Pour $r = \infty$, il n'existe pas de section continue de l'homomorphisme $\mathrm{Diff}^\infty[0,\infty) \longrightarrow J^\infty$(Epstein-Thurston [3]). Pour un homomorphisme $\psi : \pi_1(\Sigma^2) \longrightarrow J^\infty$, où Σ^2 est une surface close connexe orientée, il existe Φ: $\pi_1(\Sigma^2) \longrightarrow G^\infty$ tel que $j\circ\Phi = \psi$. (On utilise un théorème de Takens [16]).

On peut se poser le même problème pour l'homomorphisme $G^r \longrightarrow G^r_+$.

Voici une autre application du théorème (1.1).

Comme G^r est un sous-groupe de groupoïde $\overline{\Gamma}^r_1$ (avec la topologie induite), on peut réaliser $B\,G^r$ comme un sous-complexe de $B\overline{\Gamma}^r_1$. Alors, par exemple, pour un feuilletage $(M,\mathcal{F})$ de codimension un transversement orienté, il existe une application classifiante $M \longrightarrow B\overline{\Gamma}^r_1$ dont la restriction à la réunion d'un nombre fini de feuilles closes se factorise par $B\,G^r$. La paire $(B\overline{\Gamma}^r_1, BG^r)$ classifie "les feuilletages tangents au bord avec l'holonomie des deux côtés du bord". Cette paire $(B\overline{\Gamma}^r_1,\ B\,G^r)$ est un objet naturel. Par exemple, l'invariant de Godbillon-Vey est défini sur $H_3(B\overline{\Gamma}^r_1,\ B\,G^r;\ \mathbb{Z})$ $(r\ge 2)$.

Comme $B\,G^r \longrightarrow B\overline{\Gamma}^r_1$ est homotope à zéro, la suite exacte d'homologie entière de la paire $(B\overline{\Gamma}^r_1, B\,G^r)$ donne les suites exactes courtes :

$$(5.3) \qquad 0 \longrightarrow H_n(B\overline{\Gamma}^r_1) \xrightarrow{j_*} H_n(B\overline{\Gamma}^r_1, B\,G^r) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(B\,G^r) \longrightarrow 0.$$

En utilisant cette suite exacte, nous donnons une démonstration un peu plus facile d'un résultat de Mizutanu-Morita-Tsuboi [10].

<u>Théorème (5.4)</u>. Soit M^3 une variété close orientée. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de classe C^∞ orienté presque sans holonomie dont toutes les feuilles sont propres et le nombre de feuilles compactes est fini. Alors $(M,\mathcal{F})$ est cobordant à zéro.

<u>Démonstration</u>. Il suffit de montrer que la classe de $(M^3,\mathcal{F})$ dans $H_3(B\overline{\Gamma}_1^\infty)$ est zéro (voir par exemple [20]).

Nous coupons la variété M le long des feuilles compactes. Soit $(M_k,\ \partial M_k,\ \mathcal{F}_k)$ le feuilletage induit sur une composante. (On garde toujours l'holonomie des deux côtés de la feuille du bord). $(M_k,\partial M_k,\mathcal{F}_k)$ définit un élément de $H_3(B\overline{\Gamma}_1^\infty,\ B\ G^\infty)$ et on a

$$j_*[M,\mathcal{F}] = \sum_k [M_k,\partial M_k,\mathcal{F}_k]\ ,$$

où [ ] signifie la classe représentée par l'image de la classe fondamentale dans l'espace classifiant.
Comme j_* est injectif, il suffit de montrer que chaque $[M_k,\partial M_k,\mathcal{F}_k]$ est zéro.

On a $\partial_*[M_k,\partial M_k,\mathcal{F}_k] = [\partial M_k,\partial\mathcal{F}_k]$.
Nous affirmons que chaque composante connexe L de $(\partial M_k,\partial\mathcal{F}_k)$ est zéro dans $H_2(B\ G^\infty)$. Car le groupe d'holonomie de L est isomorphe à $\mathbb{Z}$ de chaque côté ([11]). Si ce groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}$, [L] est zéro dans $H_2(B\ G^\infty)$. Si ce groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$, ce groupe est contenu dans $G^\infty_\infty = \ker(G^\infty \longrightarrow J^\infty)$. Par un résultat de Sergeraert [15], on a $H_1(G^\infty_{\infty+}) = 0$. Ceci implique que [L] est zéro dans $H_2(B\ G^\infty)$ (voir plus bas).

Comme on a la suite exacte (5.3), on va chercher un élément de $H_3(B\overline{\Gamma}_1^\infty)$ qui s'envoie sur $[M_k,\partial M_k,\mathcal{F}_k]$.

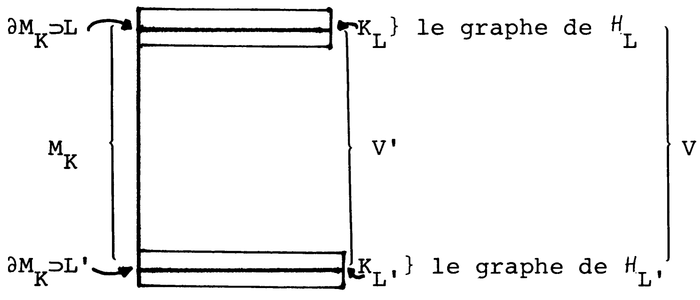
On prend une composante L de $(\partial M_k,\partial\mathcal{F}_k)$. Si le groupe d'holonomie est isomorphe à $\mathbb{Z}$, l'holonomie s'étend sur le mapping cylindre K_L d'une application de L sur S^1. On notera $\mathcal{H}_L$ cette $\overline{\Gamma}_1^\infty$-structure sur ce mapping cylindre K_L. Si le groupe d'holonomie de L est isomorphe à $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$, l'holonomie s'étend sur le mapping cylindre d'une application de L sur T^2. On peut supposer que l'holonomie le long de $S^1\times\{*\}$ (resp. $\{*\}\times S^1$) sur ce T^2 a son support du côté extérieur (resp. intérieur) de L. Comme $H_1(G^\infty_{\infty+}) = 0$, on peut écrire l'holonomie le long de $S^1 \times \{*\}$ comme un produit de commutateurs ([15]) (En fait, on peut l'écrire avec un seul commutateur). Donc, l'holonomie sur T^2 s'étend sur $\Sigma^2 \times S^1$ où $T^2 = \partial\Sigma^2 \times S^1$, Σ^2 est une surface avec un trou, et l'holonomie sur $\Sigma^2 \times \{*\}$ est l'identité du côté intérieur. Soit K_L la réunion disjointe du mapping cylindre de $L \longrightarrow T^2$ et d copies de $\Sigma^2 \times S^1$ identifiée le long de $T^2 = \partial\Sigma^2 \times S^1$ où d est le degré de $L \longrightarrow T^2$. On a une $\overline{\Gamma}_1^\infty$-structure $\mathcal{H}_L$ sur K_L.

Soit K la réunion de M_k et tous les K_L avec identification le long du bord. On a une $\overline{\Gamma}_1^\infty$-structure $\mathcal{H}$ sur K. Donc $(K, \mathcal{H})$ définit un 3-cycle de $B\overline{\Gamma}_1^\infty$. Comme $(K_L, \mathcal{H}_L)$ sont des $\overline{\Gamma}_1^\infty$-structures avec une seule feuille, on a

$$j_*[K, \mathcal{H}] = [M_k, \partial M_k, \mathcal{F}_k] \ .$$

On prend le graphe de chaque $\overline{\Gamma}_1^\infty$-structure $(K_L, \mathcal{H}_L)$. Soit V l'espace feuilleté obtenu en attachant à M_k tous ces graphes le long de ∂M_k. Soit V' la composante connexe de $V - \sum_L s_0(K_L)$ qui contient l'intérieur de M_k. Par construction, on voit que la $\overline{\Gamma}_1^\infty$ -structure sur V' est définie par une seule projection sur S^1. Comme on peut homotoper K dans V à un sous-complexe contenu dans V', on a $[K, \mathcal{H}] = 0$ dans $H_3(B\overline{\Gamma}_1^\infty)$. Donc $[M_k, \partial M_k, \mathcal{F}_k] = 0$ dans $H_3(B\overline{\Gamma}_1^\infty, B\,G^\infty)$.

<u>Remarque (5.5)</u>. Dans cette démonstration nous n'avons pas utilisé le fait que $H_1(\mathrm{Diff}_k^\infty(\mathbb{R})) = 0$. Elle est basée sur des calculs des <u>germes</u> de difféomorphismes.



RÉFÉRENCES

1. R. Bott : Lectures on characteristic classes and foliations, Springer L. N., 273(1972) 1-94.
2. R. Bott and A. Haefliger : On characteristic classes of Γ-foliations, Bull. A.M.S., 78 (1972) 1039-1044.
3. D.B.A. Epstein and W.P. Thurston : Transformation groups and natural bundles, Proc. London Math. Soc.(3) 38(1979) 219-236.
4. A. Haefliger : Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes, Comment. math. helvet. 32(1958) 248-329.
5. A. Haefliger : Feuilletages sur les variétés ouvertes, Topology vol. 9(1970) 183-194.
6. A. Haefliger : Homotopy and integrability, Manifolds Amsterdam, Springer L.N., 197(1971) 133-163.
7. A. Haefliger : exposé dans ce congrès.
8. N. Kopell : Commuting diffeomorphisms, Global Analysis, Symp. Pure Math. Vol 14. A.M.S. (1970) 165-184.
9. J. Mather : Integrability in codimension 1, Comment. math. helvet. 48(1973) 195-233.
10. T. Mizutani, S. Morita and T. Tsuboi : On the cobordism classes of codimension one foliations which are almost without holonomy, à paraître dans Topology.
11. R. Moussu : Sur les feuilletages de codimension un : Thèse, Orsay (1971).
12. R. Sacksteder : Foliations and pseudogroups. Amer, J. of Math. 87 (1965) 79-102.
13. G. Segal : Categories and cohomology theories, Topology 13 (1974) 293-312.

14. G. Segal : Classifying spaces related to foliations, Topology 17 (1978) 367-382.

15. F. Sergeraert : Feuilletages et difféomorphismes infiniment tangents à l'identité, Inventions math. 39 (1977) 253-275.

16. F. Takens : Normal forms for certain singularities of vectorfields, Ann. Inst. Fourier 23,2 (1973) 163-195.

17. W. Thurston : Foliations and groups of diffeomorphisms, Bull. A. M. S., 80 (1974) 304-307.

18. W. Thurston : A local construction of foliations for three manifolds, Proc. Symp. Pure Math. Vol 27 (1975) 315-319.

19. W. Thurston : Existence of codimension one foliations. Ann. of Math. 104 (1976) 249-268.

20. T. Tsuboi : On 2-cycles of B Diff(S^1) which are represented by foliated S^1-bundles over T^2, Ann. Inst. Fourier 31,2 (1981) 1-59.

21. M.-P. Muller : Sur l'approximation et l'instabilité des feuilletages, preprint.

Takashi TSUBOI

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Tokyo
Hongo, Tokyo 113, JAPON

Section de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Genève
2-4, rue du Lièvre
1211 GENEVE 24 SUISSE

Note : Mon exposé oral à Toulouse est à paraître sous le titre : "Foliated cobordism classes of certain foliated S^1-bundles over surfaces ".