AST

**Pages préliminaires**

*Astérisque*, tome 116 (1984), p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__116__1_0>

116

# ASTÉRISQUE

1984

# STRUCTURE TRANSVERSE DES FEUILLETAGES

Toulouse, 17-19 février 1982

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

AMS Subjects Classification : 57 R 30, 32
58 F 18, 07, A 17, H 10
34 A 24, C 35, 40
54 H 20
20 L 15
53 C 21
55 N 99, P 99, Q 99

# *TABLE DES MATIÈRES*

# PRÉFACE

Issue de la rencontre de W.T. Van Est et de P. Molino, la première "Journée Transverse", consacrée à la structure de l'espace des feuilles d'un feuilletage, fut organisée en 1979 à Paris VII par P. Libermann.

L'intérêt d'une rencontre élargie, suggérée par P. Molino, apparut rapidement, renforcé par la convergence des points de vue de W.T. Van Est et de A. Haefliger.

L'impulsion décisive devait venir de P. Cartier, à qui sa culture universelle fit apercevoir la confluence des méthodes des géomètres différentiels avec celles introduites par A. Connes, en liaison avec les travaux de Ruelle-Sullivan, et reconnaître la convergence de courants mathématiques lointains issus de domaines variés (Géométrie Algébrique, topos de Grothendieck, sous-groupes virtuels de Mackey, etc...).

Son appui assura le succès de ces Journées, dépassant les prévisions, attesté par la quantité et la qualité des conférenciers et des participants. Un horaire très chargé, rançon de ce succès, ne fit pas faiblir le nombre et l'attention des auditeurs.

L'Université Paul Sabatier de Toulouse a accueilli le Colloque sur son campus et assuré la base du financement, notamment grâce à des crédits sur programme accordés à l'Equipe de Topologie Algébrique et Différentielle.

La Société Mathématique de France, avec le concours du C.N.R.S., a accordé son soutien moral et financier, complété par une subvention de la D.C.R.I.

On trouvera ci-après les textes rédigés des 2/3 des conférences prononcées à ce Colloque, la plupart avec des développements et améliorations considérables, fruits des discussions tenues au cours de ces Journées.

Il était prévu d'ouvrir et de fermer ce recueil par le texte de l'Introduction et de la Conclusion prononcées par P. Cartier, qui devait être rédigé en collaboration avec A. Connes. Il a fallu malheureusement y renoncer, sous peine de retarder exagérément la publication.

Cette lacune est partiellement comblée par les exposés de W.T. Van Est et de A. Haefliger, qui fondent la théorie, tout en l'illustrant d'applications concrètes. La structure de l'espace des feuilles y apparaît comme une classe d'équivalence, en un sens naturel, de pseudogroupes, ou plus généralement de groupoïdes (dits d'holonomie), munis d'une structure (topologique, différentielle, etc...) invariante.

Il résulte d'une construction de G. Hector que ce point de vue équivaut exactement à celui de P. Molino, très brièvement rappelé dans son article, qui consiste à considérer une certaine classe d'équivalence de feuilletages, qu'il appelle F-variété. Notons que les QF-variétés sont définies par une relation d'équivalence plus large, mais conduisent aux mêmes invariants continus que les F-variétés, du fait que le groupoïde d'holonomie est dense dans le groupoïde d'holonomie transverse utilisé par C. Godbillon.

Les autres conférences illustrent la variété et la richesse des méthodes d'étude de cette structure transverse et des applications géométriques que l'on en tire, tant pour les propriétés globales du feuilletage que pour celles des feuilles. On y trouvera une moisson de résultats inédits.

Cet échantillonnage ne saurait cependant prétendre être exhaustif, ni statistiquement représentatif des applications des propriétés transverses. C'est par un concours de circonstances, et non par suite d'un choix prémédité, que les thèmes le plus souvent abordés sont les feuilletages riemanniens et la cohomologie basique, alors que les propriétés de croissance des feuilles et d'ergodicité le sont beaucoup plus rarement.

Il semble intéressant de souligner le fait que certaines notions de variétés singulières, apparues dans des contextes éloignés des feuilletages, se sont trouvées être des cas particuliers importants d'espaces de feuilles : les Q-variétés de Barre, et les V-variétés de Satake, redécouvertes comme orbifolds de Thurston, que l'on voit fréquemment apparaître dans ce qui suit.

Je ne saurais terminer sans rendre hommage à la mémoire du grand géomètre Ch. Ehresmann, disparu peu d'années avant la tenue de ce Colloque, fondateur avec G. Reeb, de la théorie des feuilletages. Beaucoup des notions fondamentales, qui sont à la base des travaux que l'on va lire, lui sont dues, notamment notamment les diverses variantes du groupoïde d'holonomie et la notion de groupoïde différentiable (et structuré), qui revient en surface après un long cheminement souterrain. Ce colloque, auquel participaient nombre de ses disciples, illustre l'actualité de sa pensée.

J. Pradines

# LISTE DES CONFÉRENCES ET COMMUNICATIONS

N.A'CAMPO - Une mesure $SL(n,\mathbb{R})$-invariante sur l'espace des couples de drapeaux sur $\mathbb{R}^n$.

R.BARRE - Théorie des Q-variétés et structures de Hodge mixtes.

R.BLUMENTHAL - Transverse curvature of foliated manifolds.

Y.CARRIERE - Flots riemanniens.

P.CARTIER - Variétés quotients : regards rétrospectifs sur leur développement.

L.CONLON - Holonomy pseudogroup and GV (work in progress).

A.CONNES - K-théorie, théorie de l'indice et feuilletages.

D.B.A.EPSTEIN - Foliations of 3-manifolds with transverse hyperbolic structure.

A.HAEFLIGER - Feuilletages avec feuilles minimales et courants invariants.

G.HECTOR - titre non parvenu

F.W.KAMBER - Duality theorems for harmonic foliations.

C.LAMOUREUX - Etude géométrique directe des feuilletages transverses sur les fibrés en cercles et en droites.

D.LEHMANN - Feuilletages avec "suffisamment" de formes basiques.

J.LEHMANN-LEJEUNE - Dérivations d'une algèbre de Lie sur le fibré transverse à un feuilletage.

K.MILLETT - Can $R^3$ be foliated by circles ?

P.MOLINO - Espace des feuilles des feuilletages riemanniens.

J.PRADINES - Equivalence transverse et groupoïdes différentiables.

B.REINHART - Comprendre la structure transverse, c'est comprendre les groupes de polynômes tronqués.

C.ROGER - Cohomologie (p,q) des feuilletages et applications.

R.SACKSTEDER - Foliations and separation of variables.

G.W.SCHWARZ - Base-like cohomology of foliations.

T.TSUBOI - Cobordismes de feuilletages.

W.T.VAN EST - Rapport sur les schémas de variété.

LISTE DES PARTICIPANTS

(Journées SMF, Toulouse 17-18-19 février 1982)

A'CAMPO Norbert (Paris XI)
ANGLES Pierre (Toulouse)
BARBANCE Christiane (Toulouse)
BARRE Raymond (Valenciennes)
BERTIN José (Toulouse)
BIGONNET Bruno (Toulouse)
BLANC Philippe (Ecole Polytechnique, Paris)
BLUMENTHAL Robert (St-Louis University, Missouri)
BOUMA W. (Amsterdam)
BOYOM N'Guiffo (Montpellier)
BRYLINSKI Jean-Luc (Ecole Polytechnique, Paris)
CARRAL Michel (Toulouse)
CARRIERE Yves (Lille)
CARTIER Pierre (IHES, Paris)
CASCON Ana (Dijon)
CHARITOS Charalampe (Paris XI)
CONLON Lawrence (Washington University, St Louis, Missouri)
CONNES Alain (IHES, Paris)
CORNU Philippe (Montpellier)
COSTE Alain (Lyon)
CRUMEYROLLE Albert (Toulouse)
CUMENGE Christian (Toulouse)
DADJO Jean (Toulouse)
DUMINY Gérard (Lille)
EL KACIMI Alaoui Aziz (Lille)
EPSTEIN David (University of Warwick, Coventry)
GODBILLON Claude (Strasbourg)
GOUYON Luce (Toulouse)
GRIFONE Joseph (Toulouse)
GUILLOPE Laurent (Grenoble)
HAEFLIGER André (Genêve)
HECTOR Gilbert (Lille)
HENČ Damir (IHES, Paris)

HILSUM Michel (Paris 6)
KAMBER Franz (University of Illinois, Urbana)
KLINGENBERG Wilhelm (Bonn)
LAMOUREUX Claude (Paris)
LAMRINI Fayçal (Toulouse)
LANGEVIN Rémi (Dijon)
LAUDENBACH François (Paris XI)
LEGRAND André (Toulouse)
LEGRAND Claude (Toulouse)
LEHMANN Daniel (Lille)
LEHMANN-LEJEUNE Josiane (Lille)
LETAC Gérard (Toulouse)
LIBERMANN Paulette (Paris 7)
LODAY Jean-Louis (Strasbourg)
MACIAS Enrique (Lugo, Espagne)
MARTINET Jean (Strasbourg)
MASA Xosé (Santiago de Compostela)
MATTEI Jean-François (Toulouse)
MILLETT Kenneth (University of California, Santa Barbara)
MOLINO Pierre (Montpellier)
MONNA Gilbert (Montpellier)
MOREL Francis (Valenciennes)
MORVAN Jean-Marie (Avignon)
MULLER Marie-Paule (Strasbourg)
NORE Thérèse (Limoges)
PAPADOPOULOS Athanase (Parix XI)
PICOUX Alain (Lille)
PINTO DE CARVALHO Sonia (Dijon)
PLAISANT Michèle (Valenciennes)
PRADINES Jean (Toulouse)
RABINOWICZ Michel (CNES, Toulouse)
REEB Georges (Strasbourg)
REINHART Bruce (Univ. of Maryland, College Park)
RENAULT Jean
ROCHE Claude (Grenoble)
ROGER Claude (Metz)
ROSENBERG Harold (Paris 7)
SACKSTEDER Richard (New-York)

SALHI Ezzedine (Strasbourg)
SCHWARZ Gérald (Brandeis University)
SERGERAERT Francis (Grenoble)
SERGIESCU Vladimir (Lille)
SKANDALIS Georges (Paris 6)
TAPIA Joseph (Toulouse)
TAQUET Bernadette (Mulhouse)
TSUBOI Takashi (Tokyo)
TURIEL Francisco (Santander, Espagne)
VALETTE Alain (IHES, Paris)
VAN EST W.T. (Amsterdam)
VER EECKE Paul (Amiens)
VIVIENTE José-Luis (Saragosse, Espagne)
WOUAFO KAMGA Jean (Yaoundé, Cameroun)

# RÉSUMÉS DES EXPOSÉS

## R.A.BLUMENTHAL - Transverse curvature of foliated manifolds .

Soit $\mathfrak{F}$ un feuilletage riemannien d'une variété compacte $M$ . Soit $Q$ le fibré vectoriel transverse à $\mathfrak{F}$ et soit $\nabla$ la connexion basique métrique unique à torsion nulle sur $Q$ . Nous étudions le rapport de la courbure de $\nabla$ avec la structure de la variété feuilletée $(M,\mathfrak{F})$ .

## Y.CARRIERE - Flots Riemanniens .

We study the topology of riemannian flows (i.e. dimension 1 orientable riemannian foliations), on compact manifolds. Our main result is that the orbit closure of such a flow is a torus. We give then the classification (up to differentiable conjugacy) of riemannian flows on closed 3-manifolds. One of the flows in this classification is an example of non-isometric riemannian flow and a counterexample to Poincaré's duality for the basic cohomology of general riemannian foliations.

D.B.A. EPSTEIN - Transversely hyperbolic 1-dimensional foliations .

We show that every leaf of a closed manifold of dimension greater than four, with a transverse hyperbolic structure, is a circle. In dimensions three and four, and if both the manifold and the leaves are oriented, if there is a leaf which is not a circle, then the manifold is the quotient of a solvable Lie group by a uniform discrete subgroup acting on the right, and the foliation is given by a 1-parameter subgroup acting on the left.

F.W.KAMBER, P.TONDEUR - Duality theorems for foliations .

Dans cet article nous établissons plusieurs résultats concernant la cohomologie basique des feuilletages. Le premier résultat, dit théorème de dualité de De Rham, établit pour tout feuilletage $\mathcal{F}$ un isomorphisme canonique entre la cohomologie des formes basiques de $\mathcal{F}$ et l'homologie des courants transverses à $\mathcal{F}$ et invariants par l'holonomie du feuilletage. Le deuxième résultat concerne la cohomologie des formes basiques pour un feuilletage riemannien $\mathcal{F}$ sur une variété compacte et orientée, dont la courbure moyenne des feuilles est constante le long des feuilles. Cette cohomologie est de dimension finie, et l'on a un résultat de dualité formelle. Le troisième résultat, dit théorème de dualité de Poincaré, établit la dualité des espaces de cohomologie des formes basiques en dimensions complémentaires (par rapport à la codimension du feuilletage) pour tout feuilletage riemannien sur une variété compacte et orientée, dont la courbure moyenne des feuilles est nulle, c'est-à-dire à feuilles minimales.

D.LEHMANN - Structures de Maurer-Cartan et $\Gamma_\theta$-structures. II Espaces Classifiants

*Résumé* :

Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre différentielle graduée commutative. Un espace classifiant BA est défini pour les A-structures de Maurer-Cartan $\omega : A \to \Omega_{DR}(V)$ sur une variété V (qui généralisent les A-feuilletages au même titre que les $\Gamma$-structures à la Haefliger généralisent les $\Gamma$-feuilletages). En particulier, si $\Gamma_\theta$ désigne le pseudogroupe des germes de difféomorphismes sur une variété W préservant un morphisme $\theta : A \to \Omega_{DR}(W)$ à valeurs dans l'algèbre de De Rham, toute (classe de concordance de) $\Gamma_\theta$-structure définit une (classe de concordance de) A-structure (cf. [1]), d'où une classe d'homotopie bien définie du classifiant de Haefliger $B\Gamma_\theta$ dans BA.

Les groupes d'homotopie de BA se laissent, en général, assez bien calculer, surtout si A est nilpotente, bien que la cohomologie (même réelle) de BA soit beaucoup plus compliquée. Divers exemples sont exhibés. Il peut arriver, exceptionnellement, que $B\Gamma_\theta \simeq BA$.

Les ensembles de classe de concordance de A-structures sont en correspondance bijective pour 2 espaces ayant même type d'homotopie rationnelle. En particulier, les obstructions définies en [1] à la rationalité d'une A-structure $\omega : A \to \Omega_{DR}(V)$ sont interprétées topologiquement en termes d'espaces classifiants.

*Summary* :

Let A be a commutative differential graded algebra over $\mathbb{R}$. A classifying space BA is defined for the Maurer-Cartan structures $\omega : A \to \Omega_{DR}(V)$ on a manifold V, (which generalize the A-foliations of [1] in the same way that the $\Gamma$-structures of Haefliger generalize $\Gamma$-foliations). In particular, if $\Gamma_\theta$ denotes the pseudo-group of germs of diffeomorphisms on a manifold W preserving some morphism $\theta : A \to \Omega_{DR}(W)$ with values in the de Rham algebra, every (concordance class of) $\Gamma_\theta$-structure(s) defines a (concordance class of) A-structure(s), hence a well defined homotopy class of maps from the Haefliger classifying space $B\Gamma_\theta$ into BA.

The homotopy groups of BA can, in general, be easily computed, especially if A is nilpotent, despite the fact that the cohomology (even with real coefficients) of BA is much more complicated. Different examples are exhibited. Exceptionnaly, it can happen that $B\Gamma_\theta \simeq BA$.

The sets of concordance classes of A-structures for two spaces of the same rational homotopy type are in 1-1 correspondence. In particular, the obstructions to the rationality of an A-structure (defined in [1]) are topologicaly interpreted in terms of classifying spaces.

J.LEHMANN-LEJEUNE - Cohomologies sur le fibré transverse à un feuilletage .

Let $V$ be the transverse bundle to a codimension $p$ foliation on a manifold $W$. A fiber preserving map $J$ of rank $p : T(V) \to T(V)$ , where $T(V)$ is the tangent bundle of $V$ , can be canonically defined, in such a way that $J^2 = 0$ . We denote by $L_J(V)$ the Lie algebra of vector fields $X$ on $V$ such that, for each vector field $Y$ on $V$, $[X,JX] = J[X,Y]$.

We study the first Chevalley-Eilenberg cohomology group, i.e. the quotient of the space of derivations of $L_J(V)$ by the subspace of inner derivations. We always get $\dim H^1(L_J(V)) \geq 1$ . If the foliation of $W$ is a fibration, $\dim H^1(L_J(V)) = 1$. If $W$ is the torus $\mathbf{T}^2$ foliated by the real lines of constant irrational slope $\alpha$, $\dim H^1(L_J(V)) = 4$. The less there are globally defined transverse automorphisms of the foliation, the greater the dimension of $H^1(L_J(V))$ will be.

B.L.REINHART - Some remarks on the structure of Lie algebra of formal vector fields .

L'algèbre de Lie des champs de vecteurs à coefficients series formelles joue un rôle fondamental dans la théorie des feuilletages. Cet algèbre s'obtient par un processus inductif de quelques suites exactes d'algèbres de Lie de champs à coefficients polynômials tronqués. Ici on calcule dans le cas d'une seule variable les groupes de cohomologie $H^2$ lesquels classifient ces suites exactes, en donnant explicitement des cocycles. De plus, on fait des remarques sur le cas de quelques variables.

Note : les résumés des exposés de R.BARRE, A.HAEFLIGER, QUACH NGOC DU, C.LAMOUREUX, P.MOLINO, C.ROGER, R.SACKSTEDER, T.TSUBOI et W.T.VAN EST ne sont pas parvenus à la rédaction.