RAYMOND BARRE

Quelques problèmes liés à la théorie des Q-variétés différentielles et analytiques

Astérisque, tome 116 (1984), p. 15-24

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__116__15_0>

QUELQUES PROBLÈMES LIÉS A LA THÉORIE DES Q-VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES ET ANALYTIQUES

par

Raymond BARRE

------

§ 0. DEFINITION (1) ET EXEMPLES

Soit S un ensemble, un Q-atlas de S est la donnée d'une application surjective $\pi : X \to S$, où X est une variété et d'une structure de variété sur $X\times_S X = \{(x,x') \mid \pi(x) = \pi(x')\}$ telles que :

i) les deux projections canoniques de $X\times_S X$ sur X sont étales ;

ii) $X\times_S X$ est une sous-variété <u>immergée</u> de $X\times X$.

Alors, de même qu'en théorie classique des variétés, la donnée d'un Q-atlas de S définit une structure de Q-variété sur S. Dans tout l'article, les variétés seront sans bord, différentielles ou analytiques.

Exemples. 0) Une variété usuelle.

1) Le quotient d'une variété X sous l'action libre d'un groupe discret dénombrable G. On vérifie, à l'aide d'un système d'axiomes équivalents, que X est un Q-atlas de X/G.

2) Dans le cas du quotient d'une variété feuilletée, on essaiera comme Q-atlas une transversale X (pas forcément connexe) rencontrant toutes les feuilles. Pour satisfaire aux axiomes, il sera nécessaire d'introduire des conditions supplémentaires sur le feuilletage.

Contre-exemples.

α) sur $X = \mathbb{R}$ on considère la relation d'équivalence $x \sim y, \forall x, y$. Alors $S = *$ et $X\times_S X = \mathbb{R}^2$ avec la structure fine du feuilletage défini par les droites $y + x = k$, $k \in \mathbb{R}$. La condition ii) n'est pas vérifiée. Cette condition est nécessaire, sinon la droite serait un Q-atlas du point.

β) Le quotient du plan par le feuilletage défini par les cercles concentriques à l'origine est une demi-droite (variété à bord) et n'est pas une Q-variété.

Opérations sur les Q-variétés.

Soient S et S' deux Q-variétés de Q-atlas $\pi : X \to S$ et $\pi' : X' \to S'$ respectivement. Une application $f : S \to S'$ est un morphisme de Q-variétés s'il en existe un relèvement $\hat{f} : X' \to X$ qui soit un morphisme de variétés. Un morphisme f sera dit Q-submersif (resp. Q-étale, resp. Q-immersif) si $\hat{f}$ est submersif (resp. étale, resp. immersif). On remarquera que la projection $\pi : X \to S$ d'un Q-atlas sur la Q-variété correspondante est Q-étale.

Suite des exemples.

2) (suite) Soit V une variété différentiable de dimension n, $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension q de V, $\mathcal{L}$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs feuilletés et $\mathcal{L}_c$ la partie de $\mathcal{L}$ formée des champs de vecteurs complets ; $\mathcal{F}$ est transversalement complet (9) si, pour tout x de V l'évaluation en x, $ev_x : \mathcal{L}_c \to T_x(V)$ est surjective. En particulier, si V est connexe, les feuilles sont difféomorphes entre elles.

P. Molino a montré que les quotients de feuilletages tranversalement complets sont des Q-variétés, ce qui assure comme cas particulier que les quotients de variétés compactes par des feuilletages de Lie sont des Q-variétés.

Rappelons que, étant donnée une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ de dimension q et V une variété, une 1-forme différentielle ω sur V, à valeurs dans $\mathfrak{g}$, définit un $\mathfrak{g}$-feuilletage de Lie si elle vérifie les conditions suivantes :

i) $d\omega + [\omega,\omega] = o$ (condition de Maurer-Cartan),

ii) $\forall x \in V$, l'application $\omega_x : T_x V \to \mathfrak{g}$ est surjective.

Les feuilletages de Lie sont la bonne généralisation des feuilletages de codimension 1 définis par une forme fermée sans singularités.

On en déduit donc que le quotient d'une variété compacte munie d'une forme fermée sans singularités est une Q-variété.

On obtient comme cas particulier celui de l'espace des géodésiques du tore de pente irrationnelle.

Comme troisième application du résultat de Molino, on voit que le quotient de l'espace des repères transverses d'un feuilletage à métrique quasi-fibrée, muni du feuilletage relevé, est une Q-variété

3) L'espace des classes à gauche d'un groupe de Lie modulo un sous-groupe.

Cohomologie.

Une construction généralisant celle de Cech permet de définir les groupes de cohomologie d'une Q-variété.

§ 1. LIEN AVEC LES RELATIONS POSSÉDANT LA P.P.H.

Une relation d'équivalence ρ a la propriété du prolongement des homotopies (P.P.H) (6) si la condition suivante est réalisée :

(H) $\forall\, F : \Delta^n \times I \to X$

$\forall\, g : \Delta^n \to X$ tel que $g(x) \sim F(x,o)$, $\forall\, x \in \Delta^n$ il existe une application G de $\Delta^n \times I$ dans X telle que $G(x,o) = g(x)$, $\forall\, x \in \Delta^n$ et $G(x,t) \sim F(x,t)$, $\forall\, (x,t) \in \Delta^n \times I$.

Exemples. 1) La relation d'équivalence associée à une fibration de Serre.

2) La relation d'équivalence associée à un feuilletage de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$ (les feuilles sont fermées et homéomorphes à $\mathbb{R}$). La projection canonique est alors un fibré localement trivial sur une variété de dimension 1 (non séparée).

3) Classes à gauche d'un groupe topologique modulo un sous-groupe.

4) Action libre d'un groupe discret dénombrable.

5) Feuilletage transverse à une fibration η permettant de réduire le groupe structural Γ de η à un groupe discret

→ cas particulier : les feuilletages ergodiques et le feuilletage de Denjoy.

Soit $\eta : T = S^1 \times S^1 \to S^1$ la fibration du tore sur S^1 définie par la première projection et $\mathfrak{F}$ le feuilletage par les géodésiques de pente irrationnelle α ; la fibre S^1 a pour dimension la codimension du feuilletage, et, en tout point de T, la feuille de $\mathfrak{F}$ est transverse à la fibre de η. Comme la fibre est compacte, un résultat de C. Ehresmann assure que le groupe structural T de η est discret et que chaque feuille est un revêtement de la base (6).

6) feuilletage de Lie sur variété compacte, forme fermée sur variété compacte.

Théorème (6). Pour que ρ ait la P.P.H il faut et il suffit que l'espace semi-simplicial quotient associé à ρ soit un fibré au sens de Kan.

Corollaire. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage P.P.H d'une variété paracompacte connexe ; toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ sont simultanément compactes ou non compactes.

En effet, elles doivent avoir même type d'homotopie faible, or deux variétés connexes de même dimension n, dont l'une est compacte et l'autre non ont des groupes d'homologie de dimension n différents.

F. Morel (10) a montré que dans le cas où une Q-variété S est quotient d'une variété par une relation d'équivalence P.P.H., la cohomologie de la Q-variété S coïncide avec la cohomologie du complexe singulier quotient .

Les relations d'équivalence P.P.H. ont les deux propriétés importantes suivantes (6) .

Proposition 1. Il existe une suite exacte d'homotopie

$$\dots \to \pi_n(F) \to \pi_n(V) \to \pi_n(\mathcal{B}) \to \pi_{n-1}(F) \to \dots$$

Proposition 2. Il existe une suite spectrale (de Serre)

$E^2_{pq} \simeq H_p(\mathcal{B}, H_q(F))$ convergeant vers $H_*(V)$

Dans le cadre de la théorie des Q-variétés, on dispose de la suite spectrale de Leray de la Q-submersion de V sur $V/\rho = S$, qui correspond à la suite spectrale de Serre. On gagne d'autre part l'existence d'un bicomplexe de de Rham dont la cohomologie totale est la cohomologie réelle de la Q-variété quotient.

Question 1. Peut-on retrouver la suite exacte d'homotopie ?

On notera qu'appliquant les résultats (16) de Van Est, on peut au moins espérer une suite exacte courte des termes de bas degré.

Question 2. (Hector) Pour une relation d'équivalence sur une variété V les assertions suivantes sont-elles équivalentes ?

i) Le graphe $G \subset V \times V$ est une sous-variété immergée "complète" (dans un sens à préciser) telle que les deux projections sur V soient submersives.

ii) La relation d'équivalence a la P.P.H.

iii) Le quotient est une Q-variété.

Dans les "bons cas" (action libre d'un groupe dénombrable discret, classe à gauche d'un groupe de Lie modulo un sous-groupe, feuilletage de Lie sur une variété compacte) les deux propriétés : P.P.H et "de quotient une Q-variété" sont vraies à la fois.

Question 3. Pour un feuilletage, la propriété d'être transversalement complet implique-t-elle la P.P.H ?

On aurait alors le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} (\text{transv}^{t}\ \text{complet}) \arrow[r, dashed, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \text{P.P.H} \arrow[r, Rightarrow] & \text{holonomie transversale nulle} \arrow[r, Rightarrow] & \text{holonomie nulle} \\ & \text{Q-variété} & & \end{tikzcd}$$

Contrairement, à ce que j'avais affirmé (1), la nullité de l'holonomie transversale n'est pas suffisante, même avec une hypothèse de dénombrabilité, pour assurer que le quotient est une Q-variété. Pradines (12) a exhibé récemment un très joli contre-exemple.

§ 2. SUR UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE TISCHLER (15).

Théorème : S'il existe sur une variété compacte M une forme différentielle fermée sans singularités, alors M est fibrée sur le cercle.

Soit alors M compacte munie d'un feuilletage de Lie $(\omega, \mathfrak{g})$; pour tout groupe de Lie G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, il existe un revêtement W de M , une application $f : W \to G$ et une application $h : \pi_1(M) \to G$ dont l'image (le groupe des périodes de ω) soit un sous-groupe Γ tels que i) le diagramme de Q-variétés

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f"] \arrow[d] & G \arrow[d] \\ M \arrow[r, "\bar{f}"] & G/\Gamma \end{tikzcd} \quad \text{commute ;}$$

ii) $\omega = \bar{f}^{*}\,\bar{\theta}$, où $\bar{\theta}$ désigne la 1- forme canonique sur G/Γ .(1).
Ce que fait Tischler, dans le cas où $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ et $G = S^1$ consiste à déformer ω de manière à ce qu'elle reste fermée sans singularités et que Γ devienne fermé dans G. La Q-variété G/Γ est alors une variété.
A ma connaissance, cette question fut d'abord posée par P. Cartier sous cette forme dès 71/72,puis plus tard par D.Lehmann sous une forme très voisine ; ce dernier (8) a donné un contre-exemple dans le cas nilpotent. Encore plus récemment, E. Ghys et G. Hector ont exhibé un feuilletage transversalement affine sur une 3-variété qui ne fibre pas sur le cercle, ce qui laisse espérer un contre-exemple dans le cas résoluble.
Question 4. Trouver la réponse dans le cas semi-simple.

§ 3. ÉTUDE DES FORMES BASIQUES D'UN FEUILLETAGE.

Soit V une variété munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$; on note $A_B^{*}(V)$ l'algèbre des formes basiques, c'est à dire des formes ω telles que $\theta_X\omega = i_X\omega = 0$ pour tout champ X tangent au feuilletage.
Par exemple, les 0-formes basiques sont les fonctions constantes sur les feuilles et, pour un feuilletage de Lie (ω,g) les composantes de la forme ω sont basiques.
D'après la théorie de Sullivan (14), si A_B^{*} (V) est simplement connexe, ou plus généralement nilpotente, on sait lui associer une $\mathbb{R}$-algèbre minimale
$\mathfrak{M}_B^{*} \to A_B^{*}$ (V) .

Dans un certain nombre de problèmes, la cohomologie basique apparaît comme l'outil ad hoc, il est donc naturel d'essayer de lui appliquer la théorie de Sullivan pour appréhender de façon plus précise la topologie algébrique de la structure transverse.

Rappelons que la cohomologie de De Rham d'une Q-variété S peut s'obtenir comme cohomologie totale d'un bicomplexe $\Omega^{*}(E_{*})$, où E_{*} est une variété semi-simpliciale étale au-dessus de S ; (on peut prendre par exemple pour E_n la variété des (n+1)-uples de points d'un Q-atlas X de S ayant même image dans S, chaque opérateur de face consistant à oublier une composante).

Indiquons comment, dans le cas d'un feuilletage, les formes basiques sont liées à ce bicomplexe : si X est la somme topologique des transversales associées à un recouvrement par des ouverts distingués de la variété feuilletée, alors l'algèbre des formes basiques s'identifie au noyau de $\delta = p_1^* - p_0^* : \Omega^*(X) \to \Omega^*(X\times_S X)$.

Il y alors 3 problèmes :

<u>Question 5</u>. (Lehmann) i) Cette $\mathbb{R}$-algèbre provient-elle d'une $\mathbb{Q}$-algèbre minimale $\mathfrak{M}'$ telle que $\mathfrak{M}'_B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \mathfrak{M}_B$?

ii) Si oui, interpréter le $\mathbb{Q}$-espace topologique qui correspond à $\mathfrak{M}'_B$.

Problèmes analogues pour $(A^* (V), d_F)$.

iii) Y a-t-il un isomorphisme $\mathbb{Q}\otimes \pi_i(C_* (V/\mathcal{F})) \simeq \pi_i(\mathfrak{M}'_B)$?

F. Morel (10) n'a donné de réponse positive aux deux premiers que dans le cas d'une Q-variété quotient d'un feuilletage P.P.H.dont le complexe simplicial quotient $\mathcal{B}$ soit nilpotent, c'est-à-dire tel que les groupes d'homotopie $\pi_n(\mathcal{B})$ soient nilpotents et que l'action de $\pi_1(\mathcal{B})$ sur les $\pi_n(\mathcal{B})$ soit nilpotente.

§ 4. LE PROBLÈME DE VAN EST. (3).

La généralisation en dimension infinie de la notion de Q-variété doit permettre de retrouver la correspondance entre algèbres de Lie et groupes de Lie.

M. Plaisant a donné une réponse positive dans le cas d'une algèbre de Lie séparable (11).

Il ne semble pas qu'on puisse se débarasser complètement d'une hypothèse de dénombrabilité.

<u>Question 6</u>. Trouver les conditions minimales permettant d'associer à une algèbre de Lie banachique un Q-groupe de Lie banachique.

§ 5. PROBLÈME EN VRAC

<u>Question 7</u>. Construire une théorie de l'intégration sur les Q-variétés en adaptant le travail de Blattner (2).

Question 8. Adapter en géométrie différentielle la notion de complexe dualisant, introduite en géométrie algébrique par R.Hartshorne (7), étudiée en géométrie analytique par J.P. Ramis et G. Ruget (13).

Cette idée est naturelle car les Q-variétés possèdent un bicomplexe de de Rham comme les espaces étudiés dans les articles cités.

Question 9. Etendre la construction de la cohomologie étale à des quotients par des relations d'équivalence dont les graphes admettent des singularités simplicialement résolubles.(cf. Thèse de P. Deligne (4)).

La réponse à une telle question permettrait de restreindre les conditions à poser sur un feuilletage pour que le quotient soit une Q-variété, et donc d'élargir le champ d'application de la théorie.

Epilogue.

Ceci est la version écrite d'un exposé fait dans le cadre d'une première rencontre sur les structures transverses organisée par Melle Paulette Libermann. Cette version a profité des améliorations suggérées par le referee. P. Cartier m'a indiqué les travaux d'A. Connes "Sur la théorie non commutative de l'intégration" lesquels répondent d'avance à la question 7.

Dans l'exposé aux journées organisée par J. Pradines j'ai posé la question suivante :

Question 10. Définir des structures de Hodge mixtes sur les invariants d'une Q-variété.

On espère en déduire :

- l'élargissement du champ d'application de la théorie,
- une meilleure comphéhension du lien entre l'homotopie rationnelle des Q-variétés et les formes basiques d'un feuilletage (10).

BIBLIOGRAPHIE.

(1) R. BARRE. De quelques aspects de la théorie des Q-variétés différentielles et analytiques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 23,3 (1973) 227-312.

(2) R.J. BLATTNER. Quantization and representation theory, Proc. Sympos. Pure Math. 26 (1973) 147-165.

(3) L.G. BOUMA et W.T. VAN EST.Manifoldschemes and foliations on the 2-torns and the Klein bottle, Proc. Kon. Ned. Akad. V. Wet. A. 81 (1978) 313-347.

(4) P. DELIGNE. Théorie de Hodge II et III, Pub. Math. I.H.E.S. 40 (1971). 5-58 et 44 (1973) 5-77.

(5) E. FEDIDA. Sur les feuilletages de Lie, CRAS, Paris, t. 272 (1971) série A, 999-1002.

(6) C. GODBILLON. Feuilletages ayant la propriété du prolongement des homotopies, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 17, 2 (1967) 219-260.

(7) R. HARTSHORNE. Résidues and duality, L.N. in Math. 20, Springer Verlag (1966).

(8) D. LEHMANN. Sur l'approximation de certains feuilletages nilpotents par des fibrations, CRAS, Paris, t. 286 (1978), série A, 251-254.

(9) P. MOLINO. Etude des feuilletages transversalement complets et applications. Ann. Scient. ENS, 4ème Série, t. 10, (1977) 289-307.

(10) F. MOREL. Cohomologie singulière et cohomologie des Q-variétés ; CRAS Paris, t. 281 (1975) série A, 309-312.
Type d'homotopie rationnelle des Q-variétés et formes simpliciales basiques, CRAS Paris, t. 285 (1977), série A, . 11-14.

(11). M. PLAISANT. Q-variétés banachiques. Application à l'intégrabilité des algèbres de Lie, CRAS, Paris, t. 290 (1980) série A, 185-188.

Sur l'intégrabilité des algèbres de Lie banachiques dans le cadre des Q-variétés, Thèse de 3ème cycle, Valenciennes 1980.

(12) J. PRADINES. Un feuilletage sans holonomie transversale dont le quotient n'est pas une Q-variété CRAS, Paris, t. 288 (1979), série A, p. 245.

(13) J.P. RAMIS et G. RUGET. Complexe dualisant et théorèmes de dualité en géométrie analytique complexe. Pub. Math. I.H.E.S. 38 (1970) 77-91.

(14) D. SULLIVAN. Infinitesimal computations in topology. Pub. Math. IHES 47. (1977) 269-331.

(15) D. TISCHLER. On fibering certain foliated manifolds over S^1 . Topology 9 (1970) 153-154.

(16) W.T. VAN EST. Sur le groupe fondamental des schémas analytiques de variété à une dimension. preprint.

ERA 07590

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES

59326 VALENCIENNES.