Astérisque

MOHAMED HACHMI SLIMAN

Théorie de Mackey pour les groupes adéliques

Astérisque, tome 115 (1984)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__115__1_0>

Père,
de là-haut des étoiles,
je le sens,
tu me vois.
Je te dédie ce travail,
c'est à toi
que je le dois .

Introduction

Soit $\mathbb{Q}$ le corps des rationnels et $\mathcal{P}$ l'ensemble de ses places formé de ∞ et de tous les nombres premiers 2,3,5,...Soit G un groupe linéaire algébrique défini sur $\mathbb{Q}$, G_p le groupe de ses $\mathbb{Q}_p$-points, p parcourant $\mathcal{P}$,et $G_{\mathbb{A}}$ le groupe de ses adèles . On identifie le groupe $G_{\mathbb{Q}}$ des $\mathbb{Q}$-points de G au sous-groupe discret des adèles principales du groupe $G_{\mathbb{A}}$.

Le présent travail se fixe comme but d'analyser la représentation régulière du groupe $G_{\mathbb{A}}$ dans $L^2(G_{\mathbb{A}}/G_{\mathbb{Q}})$,en ramenant sa décomposition au cas réductif,cas qui a fait l'objet de nombreux travaux . Ceci va être accompli en différentes étapes .

La première étape consiste à développer une théorie de Mackey pour le groupe adèle $G_{\mathbb{A}}$. Cette dernière se heurte à un problème sérieux: naturellement,pour faire fonctionner la méthode des petits groupes de Mackey,nous partons du groupe adèle d'un sous-groupe algébrique unipotent défini sur $\mathbb{Q}$ invariant, U ,de G . Le problème est qu'il n'est de type I que lorsqu'il est abélien . Pour l'éviter,vu le but que nous nous sommes fixé,nous travaillons,en fait,non pas avec tout le dual de $U_{\mathbb{A}}$, mais seulement avec le spectre de $L^2(U_{\mathbb{A}}/U_{\mathbb{Q}})$ qui,du fait que le quotient $U_{\mathbb{A}}/U_{\mathbb{Q}}$ est compact,est formé de représentations c.c.r.(completly contin-nious representation) .

Désignons par $\underline{u}$ l'algèbre de Lie algébrique de U et par $\underline{u}^*$ son dual . Le spectre de $L^2(U_{\mathbb{A}}/U_{\mathbb{Q}})$ est paramétré par C.C.Moore {Moo2}$^{\sim}$ par l'ensemble des orbites dans $\underline{u}^*_{\mathbb{Q}}$ sous l'action coadjointe de $U_{\mathbb{Q}}$ comme suit . Soit θ une telle orbite . La représentation $\pi_{\mathbb{A},\theta}$ associée est le produit tensoriel infini des représentations $\pi_{p,\theta}$ des groupes U_p ,associées par la méthode des orbites de Kirillov à θ ,restreint à la direction $\mathcal{X}_{\mathbb{Z}_p,\theta}$ formée,pour presque tout p premier , des vecteurs dans l'espace $\mathcal{X}_{p,\theta}$ de $\pi_{p,\theta}$,laissés fixes(via $\pi_{p,\theta}$)par le groupe $U_{\mathbb{Z}_p}$ des points p-adiques de U . Ceci étant rappelé,on fixe un élément

$\sim$: *Voir références* .

u^* de θ . Le calcul de l'obstruction à étendre la représentation $\pi_{p,\theta}$ de U_p à G_p montre que {L.P.ou Du3} celle-ci ne dépend que de la structure symplectique naturelle sur le quotient $\underline{u}/\underline{u}(u^*)$ et est représentée par un 2-cocycle d'ordre deux sur $G_p(u^*)$ .Désignons par $G_p^{u^*}$ l'extension centrale d'ordre deux de $G_p(u^*)$ associée à ce 2-cocycle et par S_{p,u^*} la représentation métaplectique de Weil de $G_p^{u^*}$ résultant . Notre calcul de l'obstruction à étendre la représentation $\pi_{\mathbb{A},\theta}$ de $U_{\mathbb{A}}$ à $G_{\mathbb{A}}$ donne lieu à une représentation de Weil d'une extension d'ordre deux centrale du groupe $G_{\mathbb{A}}(u^*)$,s'exprimant comme un produit tensoriel infini restreint des représentations S_{p,u^*} (de $G_p^{u^*}$ dans $\mathcal{H}_{p,\theta}$) dans un sens à préciser :

Les résultats de A.Weil{We2} permettent de relever,d'une manière unique,pour presque tout p premier,le groupe $G_{\mathbb{Z}_p}(u^*)$ à $G_p^{u^*}$ de sorte que l'action du groupe $G_{\mathbb{Z}_p}(u^*)$,via S_{p,u^*} ,dans l'espace $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p,\theta}$ soit triviale . D'où un produit infini des groupes $G_p^{u^*}$ restreint à la gerbe des compacts $G_{\mathbb{Z}_p}(u^*)$,noté $G_{\mathcal{P}}^{u^*}$,et une représentation unitaire du groupe $G_{\mathcal{P}}^{u^*}$,produit tensoriel infini des représentations S_{p,u^*} (de $G_p^{u^*}$ dans $\mathcal{H}_{p,\theta}$)restreint à la direction $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p,\theta}$,notée $S_{\mathcal{P},u^*}$. Signalons que pour tout p dans $\mathcal{P}$,-1 opère par multiplication par -1 via S_{p,u^*} de sorte que la représentation $S_{\mathcal{P},u^*}$ est triviale sur le sous-groupe discret central Σ_+ de $G_{\mathcal{P}}^{u^*}$ formé des suites (c_p) vérifiant $c_p=1$ ou -1 , $c_p=1$ pour presque tout p dans $\mathcal{P}$ et le produit de tous les c_p vaut 1 . Le quotient $G_{\mathbb{A}}^{u^*}$ de $G_{\mathcal{P}}^{u^*}$ par Σ_+ est un revêtement central d'ordre deux de $G_{\mathbb{A}}(u^*)$ et la représentation $S_{\mathcal{P},u^*}$ passe au quotient et donne lieu à une représentation unitaire $S_{\mathbb{A},u^*}$ de $G_{\mathbb{A}}^{u^*}$,dans l'espace $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\theta}$ de $\pi_{\mathbb{A},\theta}$,valant -1 en -1 .C'est la représentation métaplectique de Weil adélique . Tensorisée par $\pi_{\mathbb{A},\theta}$, elle donne lieu à une représentation unitaire,notée $\pi_{\mathbb{A},\theta}S_{\mathbb{A},u^*}$,du produit semi-direct naturel $U_{\mathbb{A}}\times G_{\mathbb{A}}^{u^*}$ dans l'espace $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\theta}$ prolongeant la représentation $\pi_{\mathbb{A},\theta}$. Ceci étant,pour chaque représentation unitaire E de $G_{\mathbb{A}}^{u^*}$,valant -1 en -1 et dont la restriction au groupe $U_{\mathbb{A}}(u^*)$ (qui se relève canoniquement à $G_{\mathbb{A}}^{u^*}$)est un multiple du caractère unitaire associé à la restriction de u^* à $\underline{u}(u^*)$,la représentation unitaire $\pi_{\mathbb{A},\theta}S_{\mathbb{A},u^*}\otimes E$ passe au quotient et donne lieu à une représentation du stabilisateur $U_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{A}}(u^*)$ de $\pi_{\mathbb{A},\theta}$ dans $G_{\mathbb{A}}$. Notons $I_{u^*,E}$ l'induite unitaire de la représentation ainsi obtenue du groupe $U_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{A}}(u^*)$ au groupe $G_{\mathbb{A}}$ .La conclusion(§3.3)$^\sim$de la méthode des petits groupes est :

$\sim$ *réfère au chapitre 3 paragraphe 3 du présent document .*

THÉORÈME : *L'application qui à une représentation E de $G^{u*}_{\mathbb{A}}$, comme ci-dessus, associe la représentation $I_{u*,E}$, a comme image l'ensemble des représentations unitaires de $G_{\mathbb{A}}$ dont la restriction à $U_{\mathbb{A}}$ est basée sur la $G_{\mathbb{A}}$-orbite de $\pi_{\mathbb{A},\theta}$. De plus, si E_1 et E_2 sont de même nature que E, l'ensemble des opérateurs d'entrelacement des représentations I_{u*,E_1} et I_{u*,E_2} est isomorphe à celui de E_1 et E_2.*

Comme nous le constatons ci-dessus, nous avons besoin (entre-autres pour faire fonctionner la récurrence) d'une catégorie plus vaste que celle des groupes algébriques définis sur $\mathbb{Q}$, englobant des revêtements. C'est ce que nous faisons en introduisant la catégorie des groupes de "classe $C_{\mathbb{Q}}$" (§1.4.). Nous l'avons baptisée ainsi parcequ'elle est l'équivalent global de la catégorie des groupes de classe C_k, introduite par M.Duflo {Du3} dans le cas local pour les mêmes besoins. Un exemple significatif de groupes de classe $C_{\mathbb{Q}}$ est la suite $G^{u*}=(G^{u*}_p)$ étudiée ci-dessus. Précisons qu'à chaque groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$ sont associés une suite G_p, p parcourant $\mathcal{P}$, un groupe adèle $G_{\mathbb{A}}$ et un sous-groupe $G_{\mathbb{Q}}$ d'adèles principales, tout comme dans le cas algébrique ou dans le cas G^{u*} ci-dessus.

L'étape suivante consiste à donner un paramétrage de suffisamment de représentations de $G_{\mathbb{A}}$, dans le sens qu'elles permettent la décomposition de $L^2(G_{\mathbb{A}}/G_{\mathbb{Q}})$, et ceci à partir de sous-groupes réductifs de G. Désignons par $\underline{g}$ l'algèbre de Lie algébrique du groupe G et $\underline{g}*$ son dual. Pour chaque $g*$ dans $\underline{g}^*_{\mathbb{Q}}$, notons R_{g*} le groupe réductif défini sur $\mathbb{Q}$ quotient de $G(g*)$ par son radical unipotent. La structure symplectique naturelle sur $\underline{g}/\underline{g}(g*)$ donne lieu, pour chaque p dans $\mathcal{P}$, à une extension centrale d'ordre deux R^{g*}_p de $R_p(g*)$ et la suite R^{g*} de groupes ainsi obtenue constitue un groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$. De plus, le groupe adèle $R^{g*}_{\mathbb{A}}$ est une extension centrale d'ordre deux de $R_{\mathbb{A}}(g*)$ et le groupe $R_{\mathbb{Q}}(g*)$ se relève, d'une manière canonique, à $R^{g*}_{\mathbb{A}}$ de sorte que le groupe des adèles principales de R^{g*} est le produit direct de $R_{\mathbb{Q}}(g*)$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

L'espace de paramétrage, que nous utilisons et que nous notons $Y(G)$, se présente comme le quotient par une action naturelle de $G_{\mathbb{Q}}$ d'un espace fibré de base l'ensemble des formes de type unipotent dans $\underline{g}^*_{\mathbb{Q}}$ et la fibre, $Y(g*,G)$, au dessus d'une telle forme $g*$, est formée des représentations unitaires impaires du groupe $R_{\mathbb{A}}^{g^*}$. Utilisant la théorie de Mackey évoquée ci-dessus et procédant par récurrence sur la dimension de $\underline{g}$,nous associons d'une manière canonique,à chaque élément Y de $Y(G)$,une représentation unitaire $T(Y)$ du groupe $G_{\mathbb{A}}$ avec les propriétés importantes suivantes :

THÉORÈME(§4.6): Soit Y_1 et Y_2 deux éléments de $Y(G)$. S'ils sont au dessus de la(même) $G_{\mathbb{Q}}$ -orbite d'une forme de type unipotent g^* dans $\underline{g}^*_{\mathbb{Q}}$,l'ensemble des opérateurs d'entrelacement de $T(Y_1)$ et $T(Y_2)$ est isomorphe à celui des représentations du groupe $R_{\mathbb{A}}^{g^*}$ représentant Y_1 et Y_2 dans $Y(g^*,G)$; sinon,les représentations $T(Y_1)$ et $T(Y_2)$ sont disjointes .

Nous donnons au §4.7 une autre construction de T ,plus explicite,faisant appel à des sous-algèbres de $\underline{g}$ dites coisotropes de type unipotent . Signalons que si le groupe G est unipotent $Y(G)$ coïncide avec l'ensemble des $G_{\mathbb{Q}}$ -orbites dans $\underline{g}^*_{\mathbb{Q}}$ et T est le paramétrage de C.C.Moore du spectre de $L^2(G_{\mathbb{A}}/G_{\mathbb{Q}})$,évoqué ci-dessus . Par contre,si le groupe G est réductif, $Y(G)$ est l'ensemble de toutes les représentations unitaires de $G_{\mathbb{A}}$ et T est l'application identique . Signalons, aussi,que cette paramétrisation "coïncide",place par place,avec celle de M.Duflo {Du3} dans le cas local .

L'ultime étape concerne la décomposition de $L^2(G_{\mathbb{A}}/G_{\mathbb{Q}})$. Pour ce faire,nous associons à chaque $G_{\mathbb{Q}}$ -orbite $\Omega = G_{\mathbb{Q}}.g^*$ de type unipotent dans $\underline{g}^*_{\mathbb{Q}}$,l'élément Y_Ω dans $Y(G)$ représenté dans $Y(g^*,G)$ par la partie impaire de l'induite unitaire de la représentation triviale de $R_{\mathbb{Q}}(g^*)$ à $R_{\mathbb{A}}^{g^*}$. Notre premier résultat principal est le suivant :

THÉORÈME (§5.2): La représentation régulière de $G_{\mathbb{A}}$ dans $L^2(G_{\mathbb{A}}/G_{\mathbb{Q}})$ est la somme directe disjointe des représentations $T(Y_\Omega)$, Ω parcourant l'ensemble des $G_{\mathbb{Q}}$ -orbites dans $\underline{g}^*_{\mathbb{Q}}$ de type unipotent .

Signalons que cette décomposition coïncide avec celle de C.C. Moore dans le cas unipotent {Moo2} et c'est une tautologie dans le cas réductif . Notre second résultat principal (§6.4 et§7.1) en est une conséquence et se résume ainsi :

THÉORÈME : Soit G un groupe linéaire algébrique défini sur $\mathbb{Q}$. Alors,
i) toute sous-représentation factorielle de $L^2(G_{\mathbb{A}}/G_{\mathbb{Q}})$ est de type I ;
ii) la partie discrète de $L^2(G_{\mathbb{A}}/G_{\mathbb{Q}})$ se décompose avec multiplicités finies ;
iii) toute sous-représentation irréductible de $L^2(G_{\mathbb{A}}/G_{\mathbb{Q}})$ est le produit tensoriel infini de représentations unitaires irréductibles des groupes G_p , $p=\infty$ ou premier, restreint à une direction invariante canoniquement déterminée ;
iv) si μ est la mesure donnant la désintégration centrale de la partie continue de $L^2(G_{\mathbb{A}}/G_{\mathbb{Q}})$ et si π est une représentation unitaire irréductible de G_∞ , l'ensemble des représentations factorielles de $G_{\mathbb{A}}$ dont la restriction à G_∞ est un multiple de π est μ-négligeable ;
v) si le groupe G est, de plus, résoluble et irréductible, $L^2(G_{\mathbb{A}}/G_{\mathbb{Q}})$ est sans multiplicité .

Ce théorème a nécessité l'extension de la propriété de type I des revêtements finis des groupes de k-points des groupes algébriques définis sur $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, établie par J.Dixmier {Dix1}, au cas où k est un corps local de caractéristique zéro quelconque (§1.2) . La démonstration, pour k à valuation discrète, consiste en la généralisation de la propriété c.c.r. des groupes de k-points des groupes algébriques définis sur k, établie par I.N.Bernstein {Bern}, à des revêtements finis.

Nous donnons des conséquences sur la décomposition de $L^2(G_{\mathbb{R}}/G_{\mathbb{Z}})$. En particulier, nous établissons le résultat suivant :

PROPOSITION(§6.5): Soit D l'ensemble des sous-représentations irréductibles de $L^2(G_{\mathbb{A}}/G_{\mathbb{Q}})$. Si d est un élément de D, notons n_d sa multiplicité (finie) dans $L^2(G_{\mathbb{A}}/G_{\mathbb{Q}})$ et, pour p premier, $mult(1_p, d_p)$ la multiplicité de la représentation triviale de $G_{\mathbb{Z}_p}$ dans la restriction de la composante d_p de d sur G_p . Alors ,
la partie discrète de $L^2(G_{\mathbb{R}}/G_{\mathbb{Z}})$ est contenue dans la somme directe :

$$\bigoplus_{d\in D} n_d \prod_{p \text{ premier}} mult(1_p, d_p)\ d_\infty$$

On a l'égalité si G vérifie la propriété de la forte approximation .

Ce résultat généralise celui de R.Howe {Ho1} dans le cas unipotent . Signalons que, par contraste au cas adélique, le cas réel peut présenter des multiplicités infinies . Un exemple célèbre est le groupe $x \dashrightarrow ax+b$. Dans ce cas, la partie discrète adélique est réduite à une représentation irréductible non G.C.R.(§7.2) et la partie discrète réelle est un multiple infini d'une représentation irréductible de carré intégrable . En fait, par une analyse purement réelle, nous établissons le résultat suivant :

THÉORÈME(§6 .8): Sous l'hypothèse (naturelle) que le centre de la composante irréductible de l'élément neutre de G est anisotrope, une condition nécessaire et suffisante pour que la partie discrète de $L^2(G_{\mathbb{R}}/G_{\mathbb{Z}})$ se décompose avec multiplicités finies est que tout tore déployé sur $\mathbb{Q}$ de G centralise le radical unipotent .

La finitude des multiplicités dans le cas réductif, établie par A. Borel et G.D.Garland {B.G} récemment, est un cas particulier de ce théorème . Signalons aussi que ce théorème est l'équivalent global de celui de R.Lipsman {Li} caractérisant les groupes de k -points des groupes linéaires algébriques définis sur un corps local de caractéristique zéro, qui sont c.c.r., auquel nous donnons la généralisation suivante :

THORÈME(§6 .9): Soit $\underline{\underline{G}}$ un groupe linéaire algébrique défini sur un corps local k de caractéristique zéro, G un groupe localement compact et F un sous-groupe fini central de G tel que le quotient G/F s'identifie à un sous-groupe du groupe des k -points de $\underline{\underline{G}}$, contenant la composante irréductible de l'élément neutre . Pour que le groupe G soit c.c. r. il faut et il suffit que tout tore déployé sur k de $\underline{\underline{G}}$ centralise le radical unipotent .

Différents exemples sont traités au §7 . En particulier, nous reprenons (§7.8) l'exemple de J.Brézin {Br} défini par le produit semi direct G du groupe de Heisenberg de dimension 3 et du tore formé des matrices $\begin{pmatrix} a & mb \\ b & a \end{pmatrix}$ dans GL_2 vérifiant $a^2-mb^2=1$, où m est un entier sans facteur carré . Nous analysons (différemment) la décomposition de $L^2(G_{\mathbb{R}}/G_{\mathbb{Z}})$ en se ramenant à $L^2(G_{\mathbb{A}}/G_{\mathbb{Q}})$. Notre manière de procéder semble plus simple et explique la nature (un peu compliquée) des résultats .

Je tiens à remercier le professeur A.Borel de m'avoir communiqué son résultat, ci-dessus mentionné, avant publication, ainsi que le professeur P.Torasso pour de multiples discussions fructueuses et pour toute l'aide qu'il a fournie pour rendre agréable mon séjour à Poîtiers. Comme je tiens à remercier le professeur M.Duflo, qui a proposé d'entreprendre ce travail, et le professeur M.Raîs, qui m'a chaleureusement accueilli dans son laboratoire, pour tout l'intérêt qu'ils ont manifesté pour mes travaux de recherche et tous les encouragements, maintes fois répétés, sans lesquels ce travail n'aurait pas vu le jour .

TABLE DES MATIÈRES

0 - NOTATIONS ET CONVENTIONS

0.1. On note :

$\mathbb{R}$ le corps des nombres réels.

$\mathbb{C}$ le corps des nombres couplexes.

$\mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels.

$\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatifs.

$\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

On utilisera, quelquefois, les notations $\mathbb{Q}_\infty$ et $|.|_\infty$ pour désigner $\mathbb{R}$ et sa norme.

0.2. Si $\mathcal{A}$ est un anneau unitaire, on note $\mathcal{A}^\times$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathcal{A}$.

0.3. Soit p un entier naturel premier : p = 2, 3, 5, ... Si q est un élément de $\mathbb{Q}$ et n la multiplicité de p dans la décomposition de q en facteurs premiers, on note $|q|_p$ la norme p-adique, p^{-n} , de q . On note :

$\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques.

C'est le corps (localement compact totalement discontinu) complété de $\mathbb{Q}$ pour la norme p-adique. On note $\mathbb{Z}_p$ le sous-anneau (compact ouvert) des entiers p-adiques.

$$\mathbb{Z}_p = \{q \in \mathbb{Q}_p \ / \ |q|_p \leq 1\} \ .$$

0.4. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble formé de ∞ et de tous les entiers naturels premiers.

$$\mathcal{P} = \{\infty, 2, 3, 5, \dots\} .$$

0.5. Soit I un ensemble. On dit qu'une propriété est vérifiée pour presque tout $i \in I$ si elle l'est sauf, éventuellement, pour un nombre fini d'éléments de I sur lesquels elle risque, même, de ne pas être définie.

0.6. On note χ_∞ le caractère unitaire de $\mathbb{R}$ donné par :

$$\chi_\infty(x) = \exp(-2i\pi x) \quad , \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Pour chaque entier naturel premier p, on note χ_p le caractère unitaire de $\mathbb{Q}_p$ de noyau $\mathbb{Z}_p$ et vérifiant :

$$\chi_p(p^{-n}) = \exp(2i\pi p^{-n}) \quad , \quad (n \in \mathbb{N}) .$$

0.7. On note :

$\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$.

Un élément a de $\mathbb{A}$ est la donnée pour chaque $p \in \mathcal{P}$ d'un élément a_p de $\mathbb{Q}_p$, où a_p appartient à $\mathbb{Z}_p$ pour presque tout p. On écrira $a = (a_p)_{p \in \mathcal{P}}$ ou, simplement, $a = (a_p)$. On munit $\mathbb{A}$ de sa structure d'anneau localement compact : $\mathbb{Q} \times \prod_{p \text{ premier}} \mathbb{Z}_p$ est un sous anneau de $\mathbb{A}$ ouvert avec $\prod_{p \text{ premier}} \mathbb{Z}_p$ muni de la topologie compacte produit. On identifie le sous anneau de $\mathbb{A}$ des adèles principales à $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \{(a_p) \in \mathbb{A} \ / \ \forall_p \in \mathcal{P},\ a_p = q \ ; \quad q \in \mathbb{Q}\} .$$

$\mathbb{Q}$ est discret dans $\mathbb{A}$ et le quotient $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ est compact. On note χ le caractère unitaire de $\mathbb{A}$ tel que sa restriction à $\mathbb{Q}_p$ coïncide avec χ_p pour chaque $p \in \mathcal{P}$. On écrira, souvent, χ au lieu de χ_p. On rappelle que le caractère $\mathcal{X}$ est trivial sur $\mathbb{Q}$ et l'anneau $\mathbb{A}$ est autodual : Tout caractère unitaire de $\mathbb{A}$ est de la forme $\mathcal{X}_b : a \to \mathcal{X}(ab)$ avec b une adèle bien définie. De plus, $\mathcal{X}_b$ est un caractère trivial sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si b appartient à $\mathbb{Q}$. Autrement dit, le dual unitaire de $\mathbb{Q}$, comme groupe discret, s'identifie au groupe compact $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$.

Pour plus de précisions, on peut consulter A. Weil { We 3} .

0.8. Soit $\underline{a}$ un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k. On note $g\ell(\underline{a})$ l'espace des endomorphismes de $\underline{a}$, $GL(\underline{a})$ le groupe des automorphismes de $\underline{a}$ et $\underline{a}^*$ l'espace vectoriel des formes k-linéaires sur $\underline{a}$. Soit $\mathcal{A}$ un groupe opérant sur $\underline{a}$ par des automorphismes. On fait opérer $\mathcal{A}$ sur $\underline{a}^*$ par l'action contragrédiante.

$$Aa^*(a) = a^*(A^{-1}a), \quad (A \in \mathcal{A},\ a \in \underline{a} \text{ et } a^* \in \underline{a}^*) .$$

On note, pour $a \in \underline{a}$, $\mathcal{A}a$ son orbite et $\mathcal{A}(a)$ son stabilisateur dans $\mathcal{A}$. On note $\underline{a}/\mathcal{A}$ l'ensemble des $\mathcal{A}$-orbites dans $\underline{a}$. Si $\underline{b}$ est une algèbre de Lie sur k opérant dans $\underline{a}$ et si $a \in \underline{a}$, on note $\underline{b}(a)$ l'annulateur de a dans $\underline{b}$ et on fait opérer $\underline{b}$ dans $\underline{a}^*$ par l'action contragrédiante :

$$ba^*(a) = a^*(-ba), \quad (b \in \underline{b},\ a \in \underline{a},\ a^* \in \underline{a}^*).$$

0.9. Soit $\underline{a}$ une algèbre de Lie sur un corps k et $a^* \in \underline{a}^*$. On note B_{a^*} la forme bilinéaire alternée définie sur $\underline{a}$ par :

$$B_{a^*}(a_1, a_2) = a^*([a_1, a_2]), \quad (a_1, a_2 \in \underline{a}) .$$

On note $SA(a^*)$ le groupe des automorphismes de l'algèbre de Lie $\underline{a}$ laissant stable a^*. Via B_{a^*}, l'espace $\underline{a}/\underline{a}(a^*)$ est symplectique et on a un homomorphisme canonique de $SA(a^*)$ dans le groupe symplectique $Sp(\underline{a}/\underline{a}(a^*))$. On note, encore B_{a^*}, la forme symplectique sur $\underline{a}/\underline{a}(a^*)$ qu'on a obtenue.

Soit $\underline{b}$ une sous-algèbre de $\underline{a}$. On dira qu'elle est totalement isotrope pour a^* si $a^*([b_1, b_2]) = 0$ pour tout $b_1, b_2 \in \underline{b}$. Si, de plus, elle est de dimension maximale pour cette propriété, on dira que c'est une polarisation en a^*. On dira que $\underline{b}$ est coisotrope pour a^* si l'ensemble $\{a \in \underline{a} / a^*([a,b]) = 0 \ , \ \forall b \in \underline{b}\}$ coïncide avec $\underline{b}(a^*|\ \underline{b})$.

0.10. Soit A un groupe topologique localement compact dénombrable à l'infini. Par mesure de Haar sur A, notée da, on entend une mesure invariante par translation à gauche. On note δ_A la fonction module sur A. Par représentation unitaire concrète de A, on entend une représentation unitaire continue de A dans un espace de Hilbert séparable. Par représentation unitaire, on entend la classe d'équivalence d'une telle représentation. Si π est une représentation unitaire, on note $\mathcal{H}(\pi)$, ou simplement $\mathcal{H}$ si aucune confusion n'est à craindre, une réalisation concrète de π dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On écrira, souvent, $\mathcal{H}_\theta$ au lieu de $\mathcal{H}(\pi_\theta)$ si θ représente un indice caractérisant une représentation unitaire π_θ.

Soit B un groupe topologique localement compact dénombrable à l'infini contenant A comme sous-groupe fermé. Soit π une représentation unitaire de A et $\mathcal{H}(\pi)$ une réalisation concrète de π. On considère le caractère $\delta_{A,B}$ de A défini par :

$$\delta_{A,\,B}(a) = \delta_A(a)/\delta_B(a) \ , \quad (a \in A) .$$

On note $\operatorname{ind}_{A\uparrow B} \pi$ la représentation induite unitaire de π de A à B dont une réalisation concrète, notée $\operatorname{ind}_{A\uparrow B} \mathcal{H}(\pi)$, est obtenue en faisant opérer le groupe B par translation à gauche sur l'espace de Hilbert séparé de l'espace des fonctions mesurables $f : B \to \mathcal{H}(\pi)$ vérifiant :

$$\text{i)} \quad f(ba) = \delta_{A,B}(a)^{\frac{1}{2}} \pi(a)^{-1} f(b) \quad \text{pour tout } a \in A \text{ et } b \in B$$

ii) $\displaystyle\oint^{*}_{B/A} \|f(b)\|^{2} \, d\mu_{A,B}(b) < \infty$

muni de la forme sesquilinéaire :

$$(f,g) = \oint^{*}_{B/A} (\, f(b),\ g(b)\,)\, d\mu_{A\,B}\,(b)$$

Pour plus de précision, on peut consulter M. Duflo ({Be} ,chapitre V) .
Si π est la représentation triviale, on écrira $\operatorname{ind}_{A\uparrow B}$ au lieu de $\operatorname{ind}_{A\uparrow B}\pi$ et on note $L^2(B/A)$ sa réalisation concrète mentionnée ci-dessus et on dira que c'est la représentation régulière (gauche) de B dans $L^2(B/A)$.

Si π est comme ci-dessus et σ une représentation unitaire de B , on notera $\operatorname{mult}(\pi,\sigma)$ la dimension de l'espace des opérateurs d'entrelacement de π et de la restriction de σ à A .

On note : $\hat{A}$ l'ensemble des représentations unitaires irréductibles de A ;

$\widehat{A}$ l'ensemble des représentations unitaires factorielles de A ;

A_o la composante connexe de l'élément neutre de A .

Si A est un groupe algébrique (voir § 1.1.) , on note A° la composante irréductible de l'élément neutre.

Si A est un sous-groupe invariant de B , on fait opérer B sur $\hat{A}$ et $\widehat{A}$ comme suit : Si $\mathcal{H}(\pi)$ est une réalisation concrète d'une représentation unitaire π de A et si $b \in B$, on réalise la représentation $b\pi$ dans $\mathcal{H}(\pi)$ comme suit :

$$b\pi(a) = \pi(b^{-1}ab)\ , \quad (a \in A)\ .$$

On note B_π le stabilisateur de π dans B .

1 - PRÉLIMINAIRES

GROUPES DE CLASSE C_k ET $\overset{\circ}{C}_k$:

1.1. Soit Ω un corps universel et k un sous-corps. Par groupe algébrique $\underline{\underline{G}}$ défini sur k (linéaire), on entend la donnée d'un espace vectoriel V sur k et d'une sous-variété algébrique de l'espace $g\ell(V \otimes_k \Omega)$ des endomorphismes du Ω-espace vectoriel, $V \otimes_k \Omega$, déduit de V par extension des scalaires, telle que son intersection avec le groupe $GL(V \otimes_k \Omega)$ des automorphismes de $V \otimes_k \Omega$ en soit un sous-groupe, et dont l'idéal soit engendré par une famille finie $\mathcal{F}$ de polynômes à coefficients dans k , sur $g\ell(V)$ (voir {Che} ou {Bo2} .

Si K est un anneau commutatif unitaire contenant k , on note $\underline{\underline{G}}_K$ le groupe des éléments de $GL(V \otimes_k K)$ sur lesquels $\mathcal{F}$ s'annule. Si A est un sous-anneau de K et si $V \otimes_k K$ est muni d'un A-réseau V_A , on pose $\underline{\underline{G}}_A = \underline{\underline{G}}_K \cap GL(V_A)$. C'est un sous-groupe de $\underline{\underline{G}}_K$. On dira que $\underline{\underline{G}}_K$ (resp. $\underline{\underline{G}}_A$) est le groupe des K-points (resp. A-points) de $\underline{\underline{G}}$. Si k est un corps de nombres algébriques et k_v une complétion, on écrira $\underline{\underline{G}}_v$ au lieu de $\underline{\underline{G}}_{k_v}$.

On note $X_k(\underline{\underline{G}})$ l'ensemble des caractères de $\underline{\underline{G}}$ rationnels sur k .

1.2. Soit k un corps local de caractéristique 0 . On entend par là un corps commutatif localement compact non discret de caractéristique 0 . Il est donc, soit isomorphe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, soit à valuation discrète. Dans ce dernier cas, c'est une extension finie d'un corps p-adique, $\mathbb{Q}_p$, avec p un nombre entier premier. M. Duflo, {Du 3, III.2} , introduit une classe de groupes, dits de classe C_k , plus large que la classe des groupes algébriques définis sur k et qui s'adapte mieux à la récurrence comme suit :

1.2.1. Définition : Un groupe de classe C_k est un triplet $(G, F, \underline{\underline{G}})$, où

G est un groupe localement compact,

F est un sous-groupe fini central de G ,

$\underline{\underline{G}}$ est un groupe algébrique défini sur k ,

tel que le quotient G/F s'identifie à un sous-groupe de $\underline{\underline{G}}_k$ d'indice fini, dense pour la topologie de Zariski.

On convient d'écrire C_p au lieu de $C_{\mathbb{Q}_p}$ pour tout $p \in \mathcal{P}$ (§ 0.4).

Soit $(G_i, F_i, \underline{\underline{G}}_i)$, $i = 1, 2$, un groupe de classe C_k . Un homomorphisme f de G_1 dans G_2 sera dit rationnel s'il existe un homomorphisme $\underline{\underline{f}}$ rationnel sur k de $\underline{\underline{G}}_1$ dans $\underline{\underline{G}}_2$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{f} & G_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\underline{\underline{G}}_1)_k & \xrightarrow{\underline{\underline{f}}} & (\underline{\underline{G}}_2)_k \end{array}$$

En particulier, $f(F_1)$ est un sous-groupe de F_2 et f est un homomorphisme continu.

1.2.2. Il est bien connu qu'un groupe de Lie réel localement isomorphe à un groupe de Lie algébrique est de type I (voir, par exemple, {Dix 1}). En particulier, un groupe de classe $C_{\mathbb{R}}$ est de type I . Lorsque k est un corps à valuation discrète, I.N. Bernstein {Bern} a montré que le groupe des k-points d'un groupe algébrique réductif défini sur k est C.C.R. Comme on va le voir, la démonstration de Bernstein fonctionne encore pour des revêtements finis. Ceci va permettre d'établir la propriété type I pour une catégorie $\overset{\circ}{C}_k$, intermédiaire entre celle des groupes de classe C_k et celle des groupes algébriques définis sur k , spécifiée par la définition suivante :

Définition. Un groupe $(G, F, \underline{\underline{G}})$, de classe C_k , est dit de $\overset{\circ}{C}_k$ si le quotient G/F contient la composante irréductible de $\underline{\underline{G}}_k$.

<u>Remarque:</u> la théorie de Mackey pour les groupes algébriques développée par M. Duflo {Du 3} en utilisant les groupes de classe C_k fonctionne aussi bien en utilisant les groupes de classe $\overset{\circ}{C}_k$. Par harmonie avec {Du 3} , on va continuer à utiliser la catégorie C_k et on fait appel à la catégorie $\overset{\circ}{C}_k$ dès qu'il s'agit d'utiliser le théorème suivant dans le cas à valuation discrète.

1.2.3. Théorème. Soit k un corps local de caractéristique 0 et soit $(G, F, \underline{\underline{G}})$ un groupe de classe C_k . Alors ,

i) si $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou si le groupe $(G, F, \underline{\underline{G}})$ est de classe $\overset{\circ}{C}_k$, le groupe G est de type I ;

ii) On suppose que le groupe $\underline{\underline{G}}$ est réductif. Si $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou si le groupe $(G, F, \underline{\underline{G}})$ est de classe $\overset{\circ}{C}_k$, le groupe G est CCR.

<u>Démonstration.</u>

On suppose que le groupe $(G, F, \underline{\underline{G}})$ est de classe $\overset{\circ}{C}_k$ avec k un corps local à valuation discrète. On va, d'abord, montrer que i) résulte de ii). Si le groupe $\underline{G}$ est réductif, ceci résulte du fait qu'un groupe CCR est de type I . On suppose, donc, que le radical unipotent $\underline{U}$ de $\underline{G}$ est non trivial. On va raisonner par récurrence sur la dimension de $\underline{G}$. Le groupe $\underline{U}_k$ des k-points de $\underline{U}$ est un sous-groupe invariant de $\underline{G}_k$, de type I et se relève, d'après M. Duflo {Du, Lemme II.11} , d'une manière unique en un sous-groupe fermé U invariant de G . Soit $\underline{u}$ l'algèbre de Lie algèbrique définie sur k de $\underline{U}$. La bijection de Kirillov {Ho 3 } de $\underline{u}_k^*/U_k$ sur $\hat{U} = \hat{\underline{U}}_k$ est un isomorphisme d'espaces boréliens. De plus, les G (ou G/F)-orbites dans $\underline{u}_k^*$ sont ouvertes dans les $\underline{G}_k$-orbites et, donc, localement fermées. Il s'en suit que le groupe U est régulièrement plongé dans G et, par conséquent, la méthode des petits groupes de Mackey s'applique. Soit λ une représentation factorielle de G dont la restriction à U est basée sur la G-orbite d'un élément π de $\hat{U}$. Il s'agit de voir que la représentation λ est de type I . Soit u^* un point de la $\underline{U}_k$-orbite dans $\underline{u}_k^*$ associée à π . Le stabilisateur G_π de π dans G coïncide avec $UG(u^*)$. D'après {Du3; ch. II} , il existe :

a) un revêtement à deux feuillets G^{u^*} de $G(u^*)$ (voir § 1.7.),

b) un sous-groupe central fini F^{u^*} de G^{u^*} (image réciproque de F) ,

c) une représentation unitaire irréductible π' du produit semi-direct $U \times G^{u^*}$ prolongeant π et faisant opérer -1 (élément non neutre dans F^{u^*} au dessus de l'élément neutre de F) par multiplication par -1 , et

d) une représentation factorielle E de G^{u^*} faisant opérer -1 par multiplication par -1,

tels que :

α) le quotient G^{u^*}/F^{u^*} s'identifie à $G(u^*)/F$ (de sorte que le groupe $(G^{u^*}, F^{u^*}, \underline{G}(u^*))$ est de classe $\overset{\circ}{C}_k$) ,

β) la représentation $\pi' \otimes E$ de $U \times G^{u^*}$ passe au quotient pour donner une représentation factorielle μ de G_π dont la restriction à U est un multiple de π et

γ) la représentation λ coïncide avec $\operatorname{ind}_{G_\pi \uparrow G} \mu$ et a un commutant isomorphe à celui de E .

On est, donc, ramené à montrer que la représentation E est de type I . Le cas où $G_\pi = G$ est vite ramené au cas réductif. Sinon, l'hypothèse de récurrence permet de conclure. Il reste à montrer ii). On suppose, donc, que le groupe $\underline{\underline{G}}$ est réductif. Il s'agit de montrer que le groupe G est CCR . On rappelle que le quotient G/F contient la composante irréductible $\overset{\circ}{\underline{\underline{G}}}_k$ de l'élément neutre du groupe $\underline{\underline{G}}_k$ des k-points de $\underline{\underline{G}}$ Soit $\overset{\circ}{G}$ l'image réciproque dans G de $\overset{\circ}{\underline{\underline{G}}}_k$. Le groupe G est CCR dès que $\overset{\circ}{G}$ l'est. On peut, donc, supposer que le groupe algébrique $\underline{\underline{G}}$ est irréductible. Il est facile de voir que le groupe G est CCR dès que l'on peut choisir un sous-groupe compact ouvert K arbitrairement petit dans G tel qu'on ait l'inégalité

$\sup_{\pi \in \hat{G}} \operatorname{mult}(1_K , \pi) < \infty$ où 1_K désigne la représentation triviale de K .

Cette inégalité est équivalente ({WarI, § 4-5-1-5}) à ce que toutes les représentations irréductibles de l'algèbre de convolution des fonctions continues à support compact sur G , bi-invariantes par K , aient des dimensions finies bornées. Cette dernière condition est réalisée {Bern} dès qu'il existe des sous-groupes Z et $K_\circ$ de G , un sous-groupe compact ouvert K de G arbitrairement petit, des sous-groupes Γ^+ et Γ^- de G , des éléments $a_1 ,\ldots, a_\ell$ de G et une partie finie Ω de G vérifiant les conditions suivantes :

<u>Ba</u> : Z est dans le centre de G ;

<u>Bb</u> : $a_1 ,\ldots, a_\ell$ commutent. On note A^+ le semi-groupe avec

unité qu'ils engendrent ;

<u>Bc</u> : $K_\circ$ est un sous-groupe ouvert compact de G avec $G = K_\circ A^+ \Omega Z K_\circ$;

<u>Bd</u> : $K_\circ$ contient le groupe K et le normalise ;

<u>Be</u> : Γ^+ et Γ^- sont des sous-groupes de K tels que $K = \Gamma^- \Gamma^+$;

<u>Bf</u> : $a_i \Gamma^- a_i^{-1} \subset \Gamma^-$ et $a_i^{-1} \Gamma^+ a_i \subset \Gamma^+$ pour tout $i = 1, \dots, \ell$.

On rappelle qu'on s'est réduit au cas où $\underline{\underline{G}}$ est réductif irréductible, $G/F = \underline{\underline{G}}_k$ et k une extension finie d'un corps p-adique. On note ϕ la projection de G sur $\underline{\underline{G}}_k$ et si P est une partie de $\underline{\underline{G}}_k$, on pose $\widetilde{P} = \phi^{-1}(P)$. Soit $\underline{\underline{Z}}$ le centre de $\underline{\underline{G}}$. D'après Bruhat-Tits (voir I.N. Bernstein {Bern }) , on peut choisir un sous-groupe compact ouvert $\underline{\underline{K}}_\circ$ de $\underline{\underline{G}}_k$, des éléments $\underline{\underline{a}}_1, \dots, \underline{\underline{a}}_\ell$ de $G_{=k}$ commutant entre eux et une partie finie Ω de $\underline{\underline{G}}_k$ tels que si $\underline{\underline{A}}^+$ est le semi-groupe avec unité engendré par $\underline{\underline{a}}_1, \dots, \underline{\underline{a}}_l$, on ait $\underline{\underline{G}}_k = \underline{\underline{K}}_\circ \underline{\underline{A}}^+ \underline{\underline{\Omega}} \underline{\underline{Z}}_k \underline{\underline{K}}_\circ$. On pose $n = 2 \operatorname{card} F$, $Z = \{ f z^n ; f \in F \text{ et } z \in \widetilde{\underline{\underline{Z}}}_k \}$ et $K_\circ = \widetilde{\underline{\underline{K}}}_\circ$. On choisit un élément $\widetilde{a}_i$ dans G tel que $\phi(\widetilde{a}_i) = \underline{\underline{a}}_i$ et on pose $a_i = \widetilde{a}_i^n$.

> *Lemme 1* : Soit k un corps local de caractéristique 0 et $\underline{\underline{Z}}$ un groupe algébrique abélien défini sur k . Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, l'ensemble $\underline{\underline{Z}}_k^n = \{z^n , z \in \underline{\underline{Z}}_k\}$ est un sous-groupe d'indice fini dans $\underline{\underline{Z}}_k$.

On admet pour un instant ce lemme. On va montrer que Z est un sous-groupe central de G d'indice fini dans $\widetilde{\underline{\underline{Z}}}_k$. En effet : Pour tout $g \in G$ et $z \in \widetilde{\underline{\underline{Z}}}_k$, on a $\phi(g z g^{-1} z^{-1}) = 1$ et, donc, $(g z g^{-1} z^{-1})^n = 1$. Mais $(g z g^{-1} z^{-1})^n = g z^n g^{-1} z^{-n}$. Donc Z est central dans G . Pour voir que Z est d'indice fini dans $\widetilde{\underline{\underline{Z}}}_k$, il suffit de voir Z/F est d'indice fini dans $\underline{\underline{Z}}_k$. C'est le lemme 1 .

Lemme 2 : Les éléments $a_1, \ldots, a_\ell$ commutent entre eux. Le semi-groupe avec unité A^+ qu'ils engendrent coïncide avec $\{a^n, a \in \underline{\underline{\tilde{A}}}^+\}$ et centralise $\underline{\underline{\tilde{A}}}^+$. De plus $\underline{\underline{\tilde{A}}}^+$ est égal à $A^+ \Omega_1$ avec $\Omega_1 = \{ f \prod_{i=1}^{\ell} \tilde{a}_i^{\alpha_i} \ ; \ 0 \le \alpha_i < n \quad \text{et} \quad f \in F\}$.

On admet, aussi, pour un instant ce lemme. Pour chaque $\tau \in \hat{F}$, on choisit une représentation unitaire irréductibe σ_τ du groupe compact K_o dont la restriction à F est un multiple de τ. Le groupe $U = \bigcap_{\tau \in \hat{F}} \ker \sigma_\tau$ est un compact ouvert normal dans K_o. On a : $Uf \cap U = \phi$ pour tout élément non neutre f de F. Soit V un voisinage de l'élément neutre arbitrairement petit, contenu dans U tel que $a_i V a_i^{-1} \subset U$ et $a_i^{-1} V a_i \subset U$ pour $i = 1, \ldots, \ell$. La projection ϕ réalise un homéomorphisme de U sur $\phi(U)$ et, par suite, de V sur $\phi(V)$. I.N. Bernstein {Bern}, montre qu'il existe un compact ouvert $\underline{\underline{K}}$ de $\underline{\underline{G}}_k$ contenu dans $\phi(V)$ vérifiant les propriétés Ba ,..., Bf pour un choix convenable de $\underline{\underline{\Gamma}}^+$ et $\underline{\underline{\Gamma}}^-$. On prend pour K le relèvement de $\underline{\underline{K}}$ à V. On a $K = \underline{\underline{\tilde{K}}} \cap U$. Donc, K est un groupe compact et est ouvert normal dans K_o. On prend $\Gamma^+ = \underline{\underline{\tilde{\Gamma}}}^+ \cap U = \underline{\underline{\tilde{\Gamma}}}^+ \cap V$ et $\Gamma^- = \underline{\underline{\tilde{\Gamma}}}^- \cap U = \underline{\underline{\tilde{\Gamma}}}^- \cap V$. On a : $K = \Gamma^+ \Gamma^-$ d'une manière évidente. De plus, on a :

$$a_i \Gamma^- a_i^{-1} \subset (\underline{\underline{a}}_i^n \ \underline{\underline{\Gamma}}^- \ \underline{\underline{a}}_i^{-n})^\sim \cap U \subset \underline{\underline{\tilde{\Gamma}}}^- \cap U = \underline{\underline{\Gamma}}^- \cap U = \Gamma^-$$

$$a_i^{-1} \Gamma^+ a_i \subset (\underline{\underline{a}}_i^{-n} \ \underline{\underline{\Gamma}}^+ \ \underline{\underline{a}}_i^{n})^\sim \cap U \subset \underline{\underline{\tilde{\Gamma}}}^+ \cap U = \underline{\underline{\tilde{\Gamma}}}^+ \cap U = \Gamma^+$$

il reste à vérifier la propriété Bc . On a :

$$\underline{\underline{G}}_k = \underline{\underline{K}}_o \ \underline{\underline{A}}^+ \ \underline{\underline{\Omega}} \ \underline{\underline{Z}}_k \ \underline{\underline{K}}_o \quad \text{et} \quad G = K_o \ A^+ \ \Omega_1 \ \underline{\underline{\tilde{\Omega}}} \ \underline{\underline{\tilde{Z}}}_k \ K_o$$

D'après, le lemme 1, $\underline{\underline{\tilde{Z}}}_k = \Omega_2 Z$ avec Ω_2 un ensemble fini. On prend, alors, $\Omega = \Omega_1 \; \underline{\underline{\tilde{\Omega}}} \; \Omega_2$ et on obtient $G = K_o\, A^+\, \Omega\, Z\, K_o$. Pour avoir le théorème, il reste à démontrer les lemmes 1 et 2 .

<u>Démonstration du lemme 1</u> .

Le groupe $\underline{\underline{Z}}_k^{\circ}$ étant d'indice fini dans $\underline{\underline{Z}}_k$, on peut supposer que $\underline{\underline{Z}}$ est irréductible. D'autre part, si $\underline{\underline{Z}}$ est un groupe unipotent, on a $\underline{\underline{Z}}_k^n = \underline{\underline{Z}}_k$. Par conséquent, on peut se restreindre au cas où $\underline{\underline{Z}}$ est un tore. S'il est déployé sur k , le lemme résulte de A. Weil {We 3, corollaire II. §3} qui asserte que $k^{\times^n}$ est un sous-groupe d'indice fini dans $k^{\times}$. Pour se ramener à ce cas, on considère une extension galoisienne finie L de k où $\underline{\underline{Z}}$ se déploie (voir T. Ono {O, §3}).
Ce qu'il faut voir c'est que $\underline{\underline{Z}}_k^n$ est un sous-groupe d'indice fini de $\underline{\underline{Z}}_L^n \cap \underline{\underline{Z}}_k$. Soit T le groupe de Galois associé à l'extension L de k .
A chaque $\tau \in T$ est associé un automorphisme du groupe $\underline{\underline{Z}}_L$ de sorte que

L

$\underline{\underline{Z}}_k = \{z \in \underline{\underline{Z}}_L \,/\, \tau(z) = z \; ; \; \forall \tau \in T\}$. Soit $\tau_1, \ldots, \tau_s$ un système de générateurs de T . Si $z \in \underline{\underline{Z}}_L$, on pose $T(z) = (\tau_1(z), \ldots, \tau_s(z))$. On pose :

$$B = \{(\beta_1, \ldots, \beta_s) \,/\, \beta_i \text{ est une racine } n^{\text{ième}} \text{ de } 1 \text{ dans } \underline{\underline{Z}}_L\} .$$

Il est clair que B est un groupe fini, $\underline{\underline{Z}}_L^n \cap \underline{\underline{Z}}_k = \{z^n / T(z) z^{-1} \in B \; ; \; z \in \underline{\underline{Z}}_L\}$ et $\underline{\underline{Z}}_k^n = \{z^n \,/\, T(z) z^{-1} = 1 \; ; \; z \in \underline{\underline{Z}}_L\}$. L'assertion résulte, alors du fait que $z \to T(z) z^{-1}$ est un homomorphisme de groupe sur $\underline{\underline{Z}}_L$. D'où le lemme.

<u>Démonstration du lemme 2</u> :

Si a et a' sont des éléments de $\underline{\underline{\tilde{A}}}^+$, on a : $a\, a'\, a^{-1}\, a'^{-1} \in F$ et, donc, $(a\, a'\, a^{-1}\, a'^{-1})^n = 1 = a\, a'^n\, a^{-1}\, a'^{-n}$. De plus, si $a' a = f a a'$, on a $(a a')^n = f^{\frac{n(n-1)}{2}}\, a^n\, a'^n = a^n a'^n$ car $n = 2 \operatorname{card}(F)$. Il s'en suit que $a_1, \ldots, a_\ell$ commutent entre eux et, même, à $\underline{\underline{\tilde{A}}}^+$. De plus, si a

est un élément de $\underline{\tilde{A}}^{+}$, a s'écrit : $a = f \prod_{i=1}^{\ell} \tilde{a}_i^{\alpha_i}$ avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$ et $f \in F$, et, $a^n = \prod_{i=1}^{\ell} \tilde{a}_i^{n\alpha_i} = \prod_{i=1}^{\ell} a_i^{\alpha_i}$. Par conséquent, A^+ coïncide avec $\{a^n, a \in \underline{\tilde{A}}^{+}\}$ et A^+ commute à $\underline{\tilde{A}}^{+}$. On a : $\alpha_i = nq_i + \beta_i$ avec $q_i \in \mathbb{N}$ et $0 \leq \beta_i < n$ et

$$a = f \prod_{i=1}^{l} a_i^{q_i} \tilde{a}_i^{\beta_i} = \prod_{i=1}^{l} a_i^{q_i} \; f \prod_{i=1}^{l} \tilde{a}_i^{\beta_i}$$

D'où le lemme 2. Le théorème est, ainsi, démontré.

PRODUITS INFINIS ET GROUPES DE CLASSE $C_{\mathbb{Q}}$, $C_{\mathbb{Q}}^{\bullet}$:

1.3. Soit $G = (G_i)$ une famille de groupes localement compacts dénombrables à l'infini avec i parcourant un ensemble I au plus dénombrable d'indices. On suppose donné, pour presque tout $i \in I$, un sous-groupe compact ouvert K_i de G_i. Soit J une partie finie de I en dehors de laquelle le groupe K_i est défini. Soit $\bar{J}$ son complémentaire dans I. On pose $K_{\bar{J}} = \prod_{i \in \bar{J}} K_i$ et, si P est une partie finie de I, $G_P = \prod_{i \in P} G_i$. On munit $K_{\bar{J}}$ de la structure de groupe compact produit et G_J de la structure de groupe localement compact produit. Ainsi l'ensemble $G_J \times K_{\bar{J}}$ peut être muni naturellement d'une structure de groupe localement compact. On note G_I le groupe localement compact dénombrable à l'infini obtenu par limite inductive de $G_J \times K_{\bar{J}}$ quand J tend vers I. On a : $G_I = \{(g_i) \in \prod_{i \in I} G_i \;/\; g_i \in K_i$ pour presque tout $i\}$. La topologie de G_I est complètement déterminée par le fait que $G_J \times K_{\bar{J}}$ y est ouvert. La structure de G_I ne dépend pas, bien entendu, du choix de J. Aussi, elle ne change pas en modifiant K_i sur un ensemble fini. On dira que G_I est le produit infini des groupes G_i restreint à la gerbe K des compacts K_i.

1.3.1. On se donne, pour chaque $i \in I$, une représentation unitaire π_i du groupe G_i. On suppose que, pour presque tout i, la restriction de π_i à K_i contient la représentation triviale de K_i. Soit $\mathcal{H}_i$ une réalisation concrète de la représentation π_i. On choisit, pour presque tout i, un vecteur ϕ_i de $\mathcal{H}_i$ invariant par K_i via π_i et de norme 1. On forme le produit tensoriel infini, $\mathcal{H}_{I,\phi}$, des espaces $\mathcal{H}_i$ restreint à la famille $\phi = (\phi_i)$ (voir J.V. Neumann {N}). On obtient un espace de Hilbert. Un système total peut être obtenu comme

$\{ \bigotimes_{i \in I} \psi_i \,/\, \psi_i \in \mathcal{H}_i$ et $\psi_i = \phi_i$ pour presque tout $i \}$ avec

$(\bigotimes_{i \in I} \psi_i \, , \bigotimes_{i \in I} \psi_i') = \prod_{i \in I} (\psi_i \, , \psi_i')$. Ce dernier produit, en fait, est fini. On définit sur $\mathcal{H}_{I,\phi}$ une représentation unitaire $\pi_{I,\phi}$ du groupe G_I en posant :

$$\pi_{I,\phi}(g) \, (\bigotimes_{i \in I} \psi_i) = \bigotimes_{i \in I} \pi_i(g_i) \, \psi_i$$

pour tout $g = (g_i) \in G_I$ et $\bigotimes_{i \in I} \psi_i$ comme ci-haut.

On définit la direction invariante associée à ϕ comme l'ensemble des familles $\psi = (\psi_i)$ telles que ϕ vérifiant $\mathbb{C}\phi_i = \mathbb{C}\psi_i$ pour presque tout i. En fait, la classe d'équivalence de $\pi_{I,\phi}$ ne dépend que de cette direction invariante. On dira que c'est le produit tensoriel infini des représentations π_i restreint à une direction invariante. Si cette direction est unique, on notera la représentation $\bigotimes_{i \in I} \pi_i$.

1.3.2. On suppose fixée, sur chaque G_i, une mesure de Haar invaviante à gauche telle que la masse de K_i soit, pour presque tout i, égale à 1. Avec les notations du début, on munit G_J de la mesure de Haar produit, $K_{\bar{J}}$ de la mesure de Haar de masse totale 1 et $G_J \times K_{\bar{J}}$ de la mesure de Haar produit. On obtient, ainsi, une mesure de Haar sur G_I qui, en fait, ne dépend que des mesures de Haar sur G_i (et non de

J) et de la gerbe K. On a les propriétés suivantes sur les fonctions modules : $\delta_{G_J} = \prod_{i\in J} \delta_{G_i}$; $\delta_{G_{\bar J}}$ est triviale sur $\delta_{K_{\bar J}}$ et $\delta_{G_I} = \delta_{G_J}\,\delta_{G_{\bar J}}$.

Il s'en suit que : $\delta_{G_I}(g) = \prod_i \delta_{G_i}(g_i)$ et le produit est fini pour tout $g = (g_i) \in G_I$.

1.3.3. Soit $G' = (G'_i)_{i\in I}$ une famille telle que G, avec une gerbe K' de compacts. On fixe une famille K'_i (comme K_i) représentant K' et on fixe des mesures de Haar sur G'_i comme ci-dessus. On munit G'_I de la mesure de Haar produit (comme pour G_I). On suppose que pour tout i, G_i est un sous-groupe fermé de G'_i et que, pour presque tout i, $K_i = K'_i \cap G_i$. Naturellement, G_I s'identifie, alors, à un sous-groupe fermé de G'_I. De plus, on a :

$$\delta_{G_I,G'_I}(g) = \prod_{i\in I} \delta_{G_i,G'_i}(g_i)$$

avec le produit fini pour tout $g = (g_i) \in G_I$.

On fixe π_i, $\mathcal{H}_i$, $\phi = (\phi_i)$ comme ci-dessus. On forme $\pi_{I,\phi}$ et $\mathcal{H}_{I,\phi}$ et on considère la représentation $\operatorname{ind}_{G_I\uparrow G'_I} \pi_{I,\phi}$ et sa réalisation concrète $\operatorname{ind}_{G_I\uparrow G'_I} \mathcal{H}_{I,\phi}$ comme mentionné au §0.10. On s'intéresse à la décomposabilité en produit tensoriel infini restreint de cette représentation. On définit, pour presque tout i, une fonction ϕ'_i continue sur G'_i ayant $K'_i G_i$ comme support par :

$$\phi'_i\,(k'_i\, g_i) = \delta_{G_i,G'_i}(g_i)^{1/2}\ \pi_i\,(g_i)^{-1}\ \phi_i$$

pour tout $k'_i \in K'_i$ et $g_i \in G_i$. Il est clair que, pour presque tout i, ϕ'_i est un élément de $\mathcal{H}'_i = \operatorname{ind}_{G_i\uparrow G'_i} \mathcal{H}_i$ de norme 1 invariant par K'_i via la représentation $\pi'_i = \operatorname{ind}_{G_i \uparrow G'_i} \pi_i$. La direction invariante associée à la famille $\phi' = (\phi'_i)$ ne dépend, en fait, que de la direction invariante associée à la famille $\phi = (\phi_i)$. On dira que c'est la direction invariante obtenue par induction. On forme, comme plus haut, la représentation $\pi'_{I,\phi'}$ et sa réalisation concrète $\mathcal{H}'_{I,\phi'}$. Si $\psi' = \bigotimes_{i\in I} \psi'_i$ est un élément de $\mathcal{H}'_{I,\phi'}$ avec $\psi'_i \in \mathcal{H}'_i$ presque partout égale ϕ'_i , on pose :

$$\mathcal{T}(\psi')\,(g') = \bigotimes_i \psi'_i\,(g'_i)$$

pour tout $g' = (g'_i) \in G'_I$. Il est clair que $\psi'_i\,(g'_i)$ égale presque partout ϕ_i et $\mathcal{T}(\psi')(g')$ appartient à $\mathcal{H}_{I,\phi}$. Il est facile de voir que $\mathcal{T}(\psi')$ appartient, alors, à $\operatorname{ind}_{G_I \uparrow G'_I} \mathcal{H}_{I,\phi}$ et que $\mathcal{T}$ induit un entrelacement unitaire de $\mathcal{H}'_{I,\phi'}$ dans $\operatorname{ind}_{G_I \uparrow G'_I} \mathcal{H}_{I,\phi}$. En particulier, si cette dernière est irréductible, elle coïncide avec $\mathcal{H}'_{I,\phi'}$.

1.3.4. On suppose que pour un indice i , le groupe G_i est de type I . On a $G_I = G_i \times G_{\bar{i}}$ avec $\bar{i} = I - \{i\}$. Soit π une représentation factorielle de G_I . D'après C.W. Mackey {Ma 3 }, il existe une unique représentation irréductible π_i de G_i et une représentation $\pi_{\bar{i}}$ de $G_{\bar{i}}$ définie à quasi équivalence près telles que π soit quasi-équivalente à $\pi_i \otimes \pi_{\bar{i}}$. On dira que π_i est la composante sur G_i de π .

1.3.5. On suppose que pour tout $i \in I$, le groupe G_i est de type I . Soit π une représentation irréductible de G_I . On note, pour $i \in I$, π_i la composante de π sur G_i . Si P est une partie finie de I et $\pi_P = \bigotimes_{i\in P} \pi_i \in \hat{G}_P$ avec $G_P = \prod_{i\in P} G_i$, il existe une unique représentation irréductible $\pi_{\bar{P}}$ de $G_{\bar{P}}$ telle que $\pi = \pi_P \otimes \pi_{\bar{P}}$

$(G_I = G_P \times G_{\bar{P}}$ où $\bar{P} = I - P)$.

Proposition. (C.C. Moore {Moo 2}) : Avec les notations précedentes, on a :

i) Pour presque tout i, la restriction de π_i à K_i contient la représentation triviale.

ii) S'il existe une seule direction invariante pour la famille π_i, π est le produit tensoriel infini des représentations π_i. Si, pour presque tout i, le groupe G_i est CCR, l'ensemble destelles représentations π coïncide avec l'ensemble des représentations CCR dans $\hat{G}_I$.

iii) Soit $\mathcal{H}_i$ une réalisation concrète de π_i, ϕ_i et ψ_i des vecteurs de $\mathcal{H}_i$ invariants par K_i pour presque tout i. Pour que les produits tensoriels infinis des représentations π_i restreint aux directions invariantes définies par $\phi = (\phi_i)$ et $\psi = (\psi_i)$ donnent la même représentation π dans $\hat{G}_I$, il est nécessaire et suffisant que la série de terme général :

$$\inf_{\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1} \|\psi_i - \alpha\, \phi_i\|$$

soit de carré sommable sur I.

1.4. Soit $\underline{\underline{G}}$ un groupe algébrique défini sur $\mathbb{Q}$ contenu dans $GL(V)$ avec V un espace vectoriel défini sur $\mathbb{Q}$. On peut définir $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{C}}$, $\underline{\underline{G}}_p = \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}_p}$, $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}$ comme au §1.1. On écrira, souvent, $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}$ au lieu de $\underline{\underline{G}}_{\infty}$. A chaque $\mathbb{Z}$-réseau dans $V_{\mathbb{Q}}$ est associé un sous-groupe $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}}$ de $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}$, un $\mathbb{Z}_p$-réseau de V_p et, par suite, un sous-groupe compact ouvert $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p}$ de G_p – p étant un entier naturel premier – Si on change un tel réseau, le groupe $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}}$ change en un groupe qui lui est commensurable et les groupes $\underline{G}_{\mathbb{Z}_p}$, $p \in \mathcal{P} - \{\infty\}$, restent inchangés pour presque tout p . Il s'en suit que la gerbe des compacts $\underline{G}_{\mathbb{Z}_p}$ ne dépend pas du réseau choisi et l'ensemble des sous-groupes Δ de $\underline{G}_{\mathbb{R}}$ commensurables avec $\underline{G}_{\mathbb{Z}}$ aussi. Ces derniers seront dit arithmétiques. On peut, aussi, définir le groupe adèle (ou idèle), $\underline{G}_{\mathbb{A}}$, où $\mathbb{A}$ est l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$ (voir § 0.7.). Il est facile de voir que le groupe $\underline{G}_{\mathbb{A}}$ s'identifie, comme groupe topologique, au produit $\underline{G}_{\mathcal{P}}$ des groupes G_p , $p \in \mathcal{P}$, restreint à la gerbe des compacts $\underline{G}_{\mathbb{Z}_p}$ .Le groupe des adèles principales,noté aussi $\underline{G}_{\mathbb{Q}}$, est formé des suites constantes de terme général appartenant à $\underline{G}_{\mathbb{Q}}$. De plus, $\underline{G}_{\mathbb{Z}} = \{g \in \underline{G}_{\mathbb{Q}} \ / \ g \in \underline{G}_{\mathbb{Z}_p}$ pour tout $p \in \mathcal{P} - \{\infty\}\}$. On suppose,comme dans cette dernière assertion, qu'un $\mathbb{Z}$-réseau dans $V_{\mathbb{Q}}$ est fixé (quoique les résultats en soient indépendants). On suppose, aussi, fixées des mesures de Haar invariantes à gauche sur G_p , $p \in \mathcal{P}$, telles que la masse de $\underline{G}_{\mathbb{Z}_p}$ soit égale à 1 pour tout p premier.D'où une mesure de Haar sur $\underline{G}_{\mathbb{A}}$ comme expliqué au § 1.3.2 .Puisque le groupe $\underline{G}_{\mathbb{Q}}$ est discret dans $\underline{G}_{\mathbb{A}}$,l'espace $\underline{G}_{\mathbb{A}}/\underline{G}_{\mathbb{Q}}$ est localement isomorphe à $\underline{G}_{\mathbb{A}}$ et,donc, muni d'une mesure quotient $\underline{G}_{\mathbb{A}}$ -invariant .Par abus, on note dg la mesure choisie sur chaque $\underline{G}_p$,p infini ou premier,sur $\underline{G}_{\mathbb{A}}$ et sur $\underline{G}_{\mathbb{A}}/\underline{G}_{\mathbb{Q}}$ .On rappelle le résultat suivant de Mostow et Tamagawa {M.T}:Le volume de $\underline{G}_{\mathbb{A}}/\underline{G}_{\mathbb{Q}}$ est fini si et seulement si le groupe $\underline{G}^{\circ}$ ne possède aucun caractère non trivial défini sur $\mathbb{Q}$ .Si,de plus,dans $\underline{G}_{\mathbb{Q}}$,les éléments unipotents sont dans le radical résoluble,le quotient $\underline{G}_{\mathbb{A}}/\underline{G}_{\mathbb{Q}}$ est compact.C'est le cas,en particulier,si $\underline{G}$ est un groupe unipotent.On rappelle aussi,que d'aprés Borel {Bo3},le quotient $\underline{G}_{\mathbb{A}}/\underline{G}^{\circ}_{\mathbb{A}}$ est compact et l'ensemble des doubles classes $\underline{G}^{\infty}_{\mathbb{A}}\backslash\underline{G}_{\mathbb{A}}/\underline{G}_{\mathbb{Q}}$ est fini,où $\underline{G}^{\infty}_{\mathbb{A}}$ est le produit de $\underline{G}_{\mathbb{R}}$ et de tous les groupes $\underline{G}_{\mathbb{Z}_p}$.

<u>1.4.1.</u> On va introduire une catégorie de groupes plus vaste que celle des groupes algébriques définis sur $\mathbb{Q}$ et qui s'adapte

mieux aux besoins de récurrence.

Définition 1: Un groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$ est la donnée d'un quintuplet $(G, F, S, F_+, \underline{\underline{G}})$ où :

$\underline{\underline{G}}$ est un groupe linéaire algébrique défini sur $\mathbb{Q}$;

$G=(G_p)_{p\in\mathcal{P}}$ une famille de groupes localement compacts ;

$F=(F_p)_{p\in\mathcal{P}}$ une famille de groupes finis centraux dans G_p telle que le quotient G_p/F_p s'identifie à un sous-groupe (ouvert) de $\underline{\underline{G}}_p$ d'indice fini, lui est presque partout égal;

S la donnée, pour presque tout p premier, d'une section S_p de $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p}$ dans G_p compatible avec le relèvement des sous-groupes unipotents définis sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{\underline{G}}$: Si U est un tel groupe, on sait que U_p se relève à G_p {Du3} d'une manière unique, et on demande que S_p coincide avec ce relèvement sur $U_{\mathbb{Z}_p}$;

F_+ est un sous groupe d'indice fini du groupe (discret) $F_{\mathcal{P}}$ produit infini des groupes F_p restreint à la gerbe des groupes réduits à l'élément neutre .

Les morphismes de cette catégorie sont définis comme suit :

Définition 2 : Soit $(G^i, F^i, S^i, F_+^i, \underline{\underline{G}}^i)$, $i=1,2$, un groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$. Un morphisme rationnel f de G^1 dans G^2 est la donnée d'un homomorphisme rationnel $\underline{\underline{f}}$ de $\underline{\underline{G}}^1$ dans $\underline{\underline{G}}^2$ défini sur $\mathbb{Q}$ et pour chaque p d'un homomorphisme f_p de G_p^1 dans G_p^2 tels que :

i) pour tout p , le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} G_p^1 \arrow[r, "f_p"] \arrow[d] & G_p^2 \arrow[d] \\ \underline{\underline{G}}_p^1 \arrow[r, "\underline{\underline{f}}"] & \underline{\underline{G}}_p^2 \end{tikzcd}$$

ii) f_p envoie $\mathcal{S}^1_p(\underline{\underline{G}}^1_{\mathbf{Z}_p})$ dans $\mathcal{S}^2_p(\underline{\underline{G}}^2_{\mathbf{Z}_p})$ pour presque tout p ;

iii) D'aprés i) , f_p envoie F^1_p dans F^2_p ,d'où un homomorphisme de $F^1_{\mathcal{P}}$ dans $F^2_{\mathcal{P}}$ .On demande que l'image de F^1_+ soit contenue dans F^2_+ .

Si ,pour chaque p , le groupe G^1_p est un sous-groupe fermé de G^2_p , $\underline{\underline{G}}^1$ est un sous-groupe algébrique de $\underline{\underline{G}}^2$, les injections de G^1_p dans G^2_p et de $\underline{\underline{G}}^1$ dans $\underline{\underline{G}}^2$ définissent un morphisme rationnel de G^1 dans G^2 et si $F^1_+ = F^2_+ \cap G_{\mathcal{P}}$, on dira que G^1 est un sous-groupe de classe $C_{\mathbf{Q}}$ de G^2 .

On convient d'écrire,comme ci-dessus, G au lieu de $(G,F,\mathcal{S},F_+,\underline{\underline{G}})$ si aucune confusion n'est à craindre .

<u>*Définition 3*</u> : Un groupe $(G,F,\mathcal{S},F_+,\underline{\underline{G}})$ de classe $C_{\mathbf{Q}}$ est de classe $C^\circ_{\mathbf{Q}}$ si pour tout $p \in \mathcal{P}$,le sous-groupe G_p/F_p de $\underline{\underline{G}}_p$ contient sa composante irréductible $\underline{\underline{G}}^\circ_p$.

Les groupes de classe $C^\circ_{\mathbf{Q}}$ forment une sous-catégorie de $C_{\mathbf{Q}}$ contenant les groupes algébriques définis sur $\mathbf{Q}$. La catégorie $C^\circ_{\mathbf{Q}}$ est suffisante à nos besoins . Mais par harmonie avec {Du3},on continue à manipuler ,tant que possible,la catégorie $C_{\mathbf{Q}}$. Des exemples sont traités au §1.7 et au §1.9.1.

<u>1.4.2.</u> Soit $(G,F,\mathcal{S},F_+,\underline{\underline{G}})$ un groupe de classe $C_{\mathbf{Q}}$ et $G_{\mathcal{P}}$ le produit infini des groupes G_p restreint à la gerbe des groupes compacts $\mathcal{S}_p(\underline{\underline{G}}_{\mathbf{Z}_p})$. Le groupe $F_{\mathcal{P}}$(voir §1.4.1définition 1) est un sous-groupe discret central de $G_{\mathcal{P}}$ .On a,naturellement,un homomorphisme de $G_{\mathcal{P}}$ dans $\underline{\underline{G}}_{\mathcal{P}} = G_{\mathbf{A}}$ .Son noyau est $F_{\mathcal{P}}$ .Le quotient $G_{\mathcal{P}}/F_{\mathcal{P}}$ s'identifie au sous-groupe fermé d'indice fini de $\underline{\underline{G}}_{\mathbf{A}}$ pro-

duit infini des groupes G_p/F_p restreint à la gerbe des compacts $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p}$. On pose : $G_{\mathbb{A}} = G_{\mathcal{P}}/F_+$ et $F_{\mathbb{A}} = F_{\mathcal{P}}/F_+$. Le groupe $F_{\mathbb{A}}$ est fini central dans $G_{\mathbb{A}}$ et le quotient $G_{\mathbb{A}}/F_{\mathbb{A}}$ s'identifie à un sous groupe ouvert d'indice fini de $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}}$.

Si f est un morphisme d'un groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$, G', dans le groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$, G, on a, naturellement, un homomorphisme de $G'_{\mathcal{P}}$ dans $G_{\mathcal{P}}$, qu'on note encore f, qui envoie $F'_{\mathcal{P}}$ dans $F_{\mathcal{P}}$, F'_+ dans F_+, et, parsuite, donne lieu, par passage au quotient, à un homomorphisme de $G'_{\mathbb{A}}$ dans $G_{\mathbb{A}}$ envoyant $F'_{\mathbb{A}}$ dans $F_{\mathbb{A}}$, qu'on note aussi f.

> *Définition:* Le triplet $(G_{\mathbb{A}}, F_{\mathbb{A}}, \underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}})$, ou, simplement $G_{\mathbb{A}}$, est le groupe adèle du groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$, G, et le groupe des adèles principales, $G_{\mathbb{Q}}$, est défini comme l'image réciproque de $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}$ dans $G_{\mathbb{A}}$.

Il est facile de voir que $G_{\mathbb{Q}}$ est un sous-groupe discret de $G_{\mathbb{A}}$ contenant $F_{\mathbb{A}}$ et que le quotient $G_{\mathbb{Q}}/F_{\mathbb{A}}$ s'identifie à un sous-groupe d'indice fini de $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}$.

Une représentation unitaire de $G_{\mathbb{A}}$ induit, naturellement, une représentation unitaire de $G_{\mathcal{P}}$. On la note toujours de la même façon. Par abus, on parlera de représentation unitaire de $G_{\mathbb{A}}$ produit tensoriel infini de représentations de G_p pour signifier que celle de $G_{\mathcal{P}}$ l'est.

Soit U un sous-groupe unipotent défini sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{\underline{G}}$. Pour chaque p, on note de la même façon l'unique relèvement de U_p à G_p. Vu les propriétés de la famille $\mathcal{S}$ de sections, le groupe U s'injecte canoniquement dans G comme sous-groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$ et,parsuite,le groupe $U_{\mathbb{A}}$ s'injecte canoniquement dans $G_{\mathcal{P}}$ et dans $G_{\mathbb{A}}$ .De plus,la restriction de la projection de $G_{\mathcal{P}}$ et $G_{\mathbb{A}}$ sur $\underline{\underline{G}}_{A}$ à $U_{\mathbb{A}}$ est l'application identique . Si l'algèbre de Lie $\underline{u}$ de U est $\underline{\underline{G}}$ -invariante,pour chaque p , le groupe U_p est invariant dans G_p et,parsuite,le groupe $U_{\mathbb{A}}$ est invariant dans $G_{\mathcal{P}}$ et $G_{\mathbb{A}}$ .Chaquefois qu'on se trouve dans cette situation,on fait ces identifications sans,toutefois,le mentionner .

REVÊTEMENTS MÉTAPLECTIQUES . CAS LOCAL ET GLOBAL :

1.5. Soit k un corps local de caractéristique nulle.C'est une extension finie d'un corps $\mathbb{Q}_p$ avec $p\in\bar{\mathcal{P}}$.Le caractère $\boldsymbol{\chi}$ introduit au §0.8 se prolonge en un caractère de k qu'on suppose fixé et qu'on note de la même façon.Soit U un groupe unipotent défini sur $\mathbb{Q}$ et $\underline{u}$ son algèbre de Lie.On fixe une orbite θ de $\underline{u}^*_k$ sous l'action coadjointe de U_k et u^* un point de θ .

1.5.1. On réalise la représentation unitaire irréductible $\pi_{k,\theta}$ de U_k associée à θ par la bijection de Kirillov {K1}comme suit: Soit $\underline{l}$ une polarisation de $\underline{u}_k$ en u^* et L le sous-groupe fermé de U_k d'algèbre de Lie $\underline{l}$ .On définit un caractère unitaire χ_{u^*} de L en posant :

$$\chi_{u^*}(\exp l) = \boldsymbol{\chi}(u^*(l)) \quad ,(\ l\in\underline{l}\ ) \ .$$

Une réalisation concrète de $\pi_{k,\theta}$ est :

$$\mathcal{H}_{k,u^*,\underline{l}} = \operatorname{ind}_{L\uparrow U_k} \mathbb{C} \text{ ,où } L \text{ opère dans } \mathbb{C} \text{ via } \chi_{u^*} \ .$$

On fixe,une fois pour toute,une réalisation concrète de $\pi_{k,\theta}$, qu'on note $\mathcal{H}_{k,\theta}$ .Si $k = \mathbb{Q}_p$,on écrira $\pi_{p,\theta}$ et $\mathcal{H}_{p,\theta}$ au lieu de $\pi_{\mathbb{Q}_p,\theta}$ et $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}_p,\theta}$ .Si $L = U_k$,la représentation $\pi_{k,\theta}$ est un caractère unitaire de U_k et $\theta = \{u^*\}$ .On dira que c'est le caractère unitaire de U_k associé à u^* .

1.5.2. Pour chaque couple $(\underline{l}\ ,\ \underline{l}')$de polarisations en u^* ,on a un opérateur d'entrelacement unitaire canonique, $F_{\underline{l}',\underline{l}}$,de $\mathcal{H}_{k,u^*,\underline{l}}$ sur $\mathcal{H}_{k,u^*,\underline{l}'}$ qui,pour un choix convenable de la mesure invariante sur le quotient $L'/(L\cap L')$,associe à une fonction F sur U_k ,continue à support compact modulo L appartenant à $\mathcal{H}_{k,u^*,\underline{l}}$,la fonction sur U_k appartenant à $\mathcal{H}_{k,u^*,\underline{l}'}$ définie par (voir {L.P}) :

$$F_{\underline{l}',\underline{l}}(F)\ (u) = \int_{L'/L\cap L'} F(uy)\ \chi_{u^*}(y)\ dy \quad ;u\in U_k \ .$$

On considère le groupe algébrique défini sur k , $SA(u^*)$,des automorphismes de l'algèbre de Lie $\underline{u}$ laissant fixe u^* .Le groupe $SA_k(u^*)$,de ses k -points,s'identifie naturellement au groupe des automorphismes de l'algèbre de Lie $\underline{u}_k$ laissant stable u^* .Soit x un élément de $SA_k(u^*)$ .On note $u \to xux^{-1}$ l'automorphisme de U_k associé.On définit un opérateur d'entrelacement de $\mathcal{H}_{k,u^*,\underline{l}}$ sur $\mathcal{H}_{k,u^*,x\underline{l}}$ en associant à une fonction F sur U_k ,continue à support compact modulo L appartenant à $\mathcal{H}_{k,u^*,\underline{l}}$,la fonction $u\to F(x^{-1}ux)$ sur U_k appartenant à $\mathcal{H}_{k,u^*,x\underline{l}}$. On note $A(x)$ l'opérateur d'entrelacement unitaire associé .
On désigne par $S'_{k,u^*,\underline{l}}(x)$ l'opérateur unitaire dans l'espace $\mathcal{H}_{k,\theta}$ supposé fixé,de $\pi_{k,\theta}$,coincidant par entrelacement à l'opérateur dans l'espace $\mathcal{H}_{k,u^*,\underline{l}}$ composé de $F_{\underline{l},x\underline{l}}$ et $A(x)$ .La correspondance $x\to S'_{k,u^*,\underline{l}}(x)$ est une représentation unitaire projective du groupe $SA_k(u^*)$ dans l'espace $\mathcal{H}_{k,\theta}$ vérifiant :

$$S'_{k,u^*,\underline{l}}(x)\ \pi_{k,\theta}(u)\ S'_{k,u^*,\underline{l}}(x)^{-1} = \pi_{k,\theta}(xux^{-1})$$

pour tout u dans U_k et x dans $SA_k(u^*)$ .On note $c_{k,u^*,\underline{l}}$ le cocycle unitaire sur $SA_k(u^*)$ associé à $S'_{k,u^*,\underline{l}}$ .Ce cocycle a été calculé par G.Lion et P.Perrin {L.P} .En particulier,ils montrent qu'il ne dépend que de l'espace symplectique $\underline{u}_k/\underline{u}_k(u^*)$ et du lagrangien $\underline{l}/\underline{u}_k(u^*)$. On dira que $S'_{k,u^*,\underline{l}}$ (resp. $c_{k,u^*,\underline{l}}$) est la représentation projective (resp.cocycle) de Weil associé à u^* et $\underline{l}$.

1.5.3. On suppose,maintenant,que le groupe U est défini sur $\mathbb{Q}$ et θ est la $U_{\mathbb{Q}}$ -orbite d'un élément u^* dans $\underline{u}^*_{\mathbb{Q}}$ .Pour chaque $p\in\mathcal{P}$,les U_p -orbites dans $\underline{u}^*_p$ qui intersectent $\underline{u}^*_{\mathbb{Q}}$ le font suivant une $U_{\mathbb{Q}}$ -orbite,d'aprés Godement {Go2},de sorte qu'on peut identifier les U_p -orbites des éléments de $\underline{u}^*_{\mathbb{Q}}$ à leurs $U_{\mathbb{Q}}$ -orbites.A chaque $p\in\mathcal{P}$,on associe la représentation $\pi_{p,\theta}$ de U_p et une réalisation concrète, $\mathcal{H}_{p,\theta}$,comme indiqué au §1.5.1.D'aprés Moore{Moo2},la dimension de l'espace $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p,\theta}$,formé des vecteurs dans $\mathcal{H}_{p,\theta}$ laissés fixes par $U_{\mathbb{Z}_p}$ via $\pi_{p,\theta}$,est pour presque tout p premier de dimension 1 .Par conséquent,il existe une unique direction invariante pour la famille de représentations irréductibles $\pi_{p,\theta}$ permettant d'associer une représentation irréductible $\pi_{\mathbb{A},\theta}$ de $U_{\mathbb{A}}$,comme leur produit tensoriel infini,dans un espace $\mathcal{H}_{\mathcal{P},\theta}$ .D'autre part,toujours d'aprés {Moo2},la représentation régulière de $U_{\mathbb{A}}$ dans $L^2(U_{\mathbb{A}}/U_{\mathbb{Q}})$ est la somme,avec multiplicité 1 ,des représentations $\pi_{\mathbb{A},\theta}$, θ parcourant $\underline{u}^*_{\mathbb{Q}}/U_{\mathbb{Q}}$ .On note $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\theta}$ la réalisation concrète de $\pi_{\mathbb{A},\theta}$ comme sous-représentation de $L^2(U_{\mathbb{A}}/U_{\mathbb{Q}})$.

Le groupe algébrique $SA(u^*)$ des automorphismes de $\underline{u}$ laissant fixe u^* est défini sur $\mathbb{Q}$ et son action sur $\underline{u}$ est rationnelle sur $\mathbb{Q}$ .Donc,pour presque tout p premier,le groupe $SA_{\mathbb{Z}_p}(u^*)$ laisse stable $\underline{u}_{\mathbb{Z}_p}$ .De ce fait et du fait que l'application exponentielle et l'application logarithme entre $\underline{u}$ et U sont polynomiales à coefficients dans $\mathbb{Q}$,résultent que $U_{\mathbb{Z}_p}$ et

$\underline{u}_{\mathbf{Z}_p}$ se correspondent et on a: $x\, U_{\mathbf{Z}_p}\, x^{-1} = U_{\mathbf{Z}_p}$ pour tout x dans $SA_{\mathbf{Z}_p}(u^*)$ .Ceci,bien-entendu,pour presque tout p premier.De plus, $S'_{p,u^*,\underline{l}}(x)$ laisse invariant $\mathcal{H}_{\mathbf{Z}_p,\theta}$ pour toute polarisation $\underline{l}$ de l'algèbre $\underline{u}_p$ en u^* et x dans $SA_{\mathbf{Z}_p}(u^*)$.

<u>1.6.</u> Soit ($\underline{w}$, B) un espace symplectique défini sur un corps k de caractéristique zéro.On construit une algèbre de Lie de Heisenberg sur le corps k en prenant sur $\underline{w}_k \times k$ le crochet de Lie :
$[\ (w,t)\ ,\ (w',t')\ ] = (\ 0\ ,\ B(w,w')\ )\ ;\ w,w' \in \underline{w}_k\ ;\ t,t' \in k$.
On peut la considérer comme l'algèbre des k -points d'une algèbre de Lie unipotente $\underline{n}$ définie sur k .On note N le groupe algébrique unipotent défini sur k associé à $\underline{n}$ et n^* la forme k -linéaire sur $\underline{n}$ nulle sur $\underline{w}_k$ et vérifiant :
$n^*(\ [(w,t)\ ,\ (w',t')]\ ) = B(w,w')\ ;\ w,w' \in \underline{w}_k\ ;\ t,t' \in k$.
On remarque que les groupes $SA_k(n^*)$ et $Sp(\underline{w}_k)$ coïncident par restriction à $\underline{w}_k$ des éléments de $SA_k(n^*)$ .Ainsi à tout élément s de $Sp(\underline{w}_k)$ sont associés un automorphisme $n \to sn$ de $\underline{n}_k$ et un automorphisme $n \to sns^{-1}$ de N_k .On note ν la N_k -orbite de n^* dans $\underline{n}^*_k$.

On suppose que k est un corps local,de caractéristique zéro et on considère la représentation $\pi_{k,\nu}$ de N_k associée à ν . D'aprés le théorème de Stone Von-Neumann,le groupe des opérateurs unitaires dans l'espace $\mathcal{H}_{k,\nu}$ normalisant le groupe $\pi_{k,\nu}(N_k)$ est un revêtement du groupe des automorphismes de l'algèbre de Lie $\underline{n}_k$,triviaux sur son centre,de fibre le cercle unité $\mathbf{T}$ de $\mathbf{C}$. L'application revêtement $A \to s$ est caractérisée par :

$$A\ \pi_{k,\nu}(n)\ A^{-1} = \pi_{k,\nu}(sns^{-1})$$

pour tout n dans N_k .On considère le groupe $\widetilde{M}p(\underline{w}_k)$ au dessus de $Sp(\underline{w}_k)$ .Puisque ce dernier est semi-simple,le groupe des commutateurs $Mp(\underline{w}_k)$ du groupe $\widetilde{M}p(\underline{w}_k)$ est le plus petit sous-revêtement de $\widetilde{Mp}(\underline{w}_k)$ au dessus de $Sp(\underline{w}_k)$ .C'est un revêtement à 2 feuillets de $Sp(\underline{w}_k)$,d'aprés Weil {We2} ,qu'on appelle le revêtement métaplectique.La représentation unitaire métaplectique de Weil $S_{k,\underline{w}}$ de $Mp(\underline{w}_k)$ est réalisée dans l'espace $\mathcal{H}_{k,\nu}$ de la représentation $\pi_{k,\nu}$ par l'action naturelle .On a donc :

$$S_{k,\underline{w}}(m)\ \pi_{k,\nu}(n)\ S_{k,\underline{w}}(m)^{-1} = \pi_{k,\nu}(sns^{-1})$$

pour tout $n\in N_k$ et $m\in Mp(\underline{w}_k)$ se projetant sur $s\in Sp(\underline{w}_k)$.

Soit,maintenant, $\underline{l}$ un lagrangien dans $\underline{w}_k$ .L'espace $\underline{l} \times k$ est une polarisation de $\underline{n}_k$ en n^* .On écrira $\underline{l}$ à sa place quand elle figure en indice .On considère la représentation unitaire projective $S'_{k,n^*,\underline{l}}$,(qu'on note aussi $S'_{k,\underline{w},\underline{l}}$),et le cocycle de Weil associé $c_{k,n^*,\underline{l}}$,(qu'on note aussi $c_{k,\underline{w},\underline{l}}$) .On forme l'extension centrale $Sp(\underline{w}_k) \underset{c}{\times} \mathbf{T}$ de $Sp(\underline{w}_k)$ par le tore $\mathbf{T}$ via ce cocycle.D'aprés le §1.5.2 ,l'application :

$$\begin{array}{ccc} Sp(\underline{w}_k) \underset{c}{\times} \mathbf{T} & \longrightarrow & \widetilde{Mp}(\underline{w}_k) \\ (\ s\ ,\ t\ ) & \longmapsto & t\ S'_{k,\underline{w},\underline{l}}(s) \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes.Ceci permet de regarder $Mp(\underline{w}_k)$ comme sous-groupe de $Sp(\underline{w}_k) \underset{c}{\times} \mathbf{T}$ chaquefois qu'on fixe un lagrangien de $\underline{w}_k$ .Un élément $m\in Mp(\underline{w}_k)$ est,alors représenté par un couple (s,t) avec $s\in Sp(\underline{w}_k)$ et $t\in \mathbf{T}$ qui,d'aprés {Pe},est une racine huitième de l'unité.On note -1 l'élément non neutre dans le groupe $Mp(\underline{w}_k)$,au dessus de l'élément neutre de $Sp(\underline{w}_k)$. Cet élément est représenté par le couple $(1,-1)$ dans $Sp(\underline{w}_k) \underset{c}{\times} \mathbf{T}$ pour tout choix de lagrangien,et on a : $S_{k,\underline{w}}(-1) = -1$.

1.7. On suppose,maintenant,que l'espace symplectique $(\ \underline{w}\ ,\ B\ )$ est défini sur $\mathbf{Q}$ .On se place dans les notations du §1.6 .En particulier le groupe de Heisenberg N est défini sur $\mathbf{Q}$ ainsi que son algèbre de Lie et le groupe algébrique $SA(n^*) = Sp(\underline{w})$ .De plus $Sp(\underline{w}_p) = Sp_p(\underline{w}) = SA_p(n^*)$ .On pose :

$$Mp_p(\underline{w}) = Mp(\underline{w}_p) \quad ; \quad \Sigma_p = \{1,-1\} \quad ; \Sigma = (\Sigma_p)_{p\in\mathcal{P}} \ ;$$

$\Sigma_{\mathcal{P}}$ le produit infini des groupes Σ_p restreint à la gerbe des sous-groupes réduits à l'élément neutre et Σ_+ le sous-groupe d'indice deux de $\Sigma_{\mathcal{P}}$ formé des suites (c_p) telles que $\prod_{p\in\mathcal{P}} c_p = 1$. On a vu au §1.5.3 que,pour presque tout p premier,le sous-espace $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p,\nu}$ de $\mathcal{H}_{p,\nu}$ formé des vecteurs fixes par $N_{\mathbb{Z}_p}$ est de dimension 1 et est invariant par $Sp_{\mathbb{Z}_p}(\underline{w})$ via $S'_{p,\underline{w},\underline{l}}$ pour tout lagrangien $\underline{l}$ de $\underline{w}$ .Donc,l'espace $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p,\nu}$ est invariant par le revêtement de $Sp_{\mathbb{Z}_p}(\underline{w})$ dans $Mp_p(\underline{w})$, via la représentation métaplectique de Weil $S_{p,\underline{w}}$ .De plus,il existe un(unique)relèvement σ_p de $Sp_{\mathbb{Z}_p}(\underline{w})$ dans $Mp_p(\underline{w})$ tel que l'on ait $\sigma_p(s)\,\phi = \phi$ pour tout s dans $Sp_{\mathbb{Z}_p}(\underline{w})$ et ϕ dans $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p,\nu}$ (voir {We2},§45) .

> *Lemme*:Le quintuplet ($Mp(\underline{w})$, Σ , σ , Σ_+ , $Sp(\underline{w})$) est un groupe de classe $C^\circ_{\mathbb{Q}}$.

On donnera la démonstration de ce lemme au §1.9.3.

D'aprés ce qui précède,on peut construire la représentation $S_{\mathcal{P},\underline{w}}$ produit tensoriel infini des représentations $S_{p,\underline{w}}$ (des groupes $Mp_p(\underline{w})$ dans les espaces $\mathcal{H}_{p,\nu}$)restreint à la direction invariante définie par $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p,\nu}$ .Cette représentation de $Mp_{\mathcal{P}}(\underline{w})$ se réalise dans l'espace $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\nu}$ par entrelacement de ce dernier avec $\mathcal{H}_{\mathcal{P},\nu}$ .Comme pour chaque $p\in\mathcal{P}$, $S_{p,\underline{w}}(-1) = -1$ et $S_{p,\underline{w}}(m)\,\pi_{p,\nu}(n)\,S_{p,\underline{w}}(m)^{-1} = \pi_{p,\nu}(sns^{-1})$ pour tout $n\in N_p$ et $m\in Mp_p(\underline{w})$ se projetant sur $s\in Sp_p(\underline{w})$,la représentation $S_{\mathcal{P},\underline{w}}$ est triviale sur Σ_+ et donne lieu,par passage au quotient,à une représentation unitaire $S_{\mathbb{A},\underline{w}}$ du groupe adèle $Mp_{\mathbb{A}}(\underline{w})$ dans l'espace $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\nu}$ de $\pi_{\mathbb{A},\nu}$ vérifiant :

$$S_{\mathbb{A},\underline{w}}(m)\ \pi_{\mathbb{A},\nu}(n)\ S_{\mathbb{A},\underline{w}}(m)^{-1} = \pi_{\mathbb{A},\nu}(sns^{-1})$$

pour tout $n \in N_{\mathbb{A}}$ et $m \in Mp_{\mathbb{A}}(\underline{w})$ se projetant sur $s \in Sp_{\mathbb{A}}(\underline{w})$ .On remarque que $Mp_{\mathbb{A}}(\underline{w})$ est un revêtement à deux feuillets de $Sp_{\mathbb{A}}(\underline{w})$ et que $S_{\mathbb{A},\underline{w}}(-1) = -1$ où -1 désigne l'élément non neutre de $Mp_{\mathbb{A}}(\underline{w})$ au dessus de l'élément neutre de $Sp_{\mathbb{A}}(\underline{w})$ .De plus Σ_{+} est le noyau de la représentation $S_{\mathcal{P},\underline{w}}$ de sorte que la représentation $S_{\mathbb{A},\underline{w}}$ est fidèle.Ainsi $Mp_{\mathbb{A}}(\underline{w})$ s'identifie à un sous-groupe du groupe $\widetilde{M}p(\underline{w}_{\mathbb{A}})$ formé des opérateurs unitaires A dans l'espace $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\nu}$ tels qu'il existe un élément $s \in Sp_{\mathbb{A}}(\underline{w})$ vérifiant: $A\ \pi_{\mathbb{A},\nu}(n)\ A^{-1} = \pi_{\mathbb{A},\nu}(sns^{-1})$ pour tout $n \in N_{\mathbb{A}}$ .Le groupe $\widetilde{M}p(\underline{w}_{\mathbb{A}})$ est un revêtement de $Sp_{\mathbb{A}}(\underline{w})$ de fibre $\mathbb{T}$ et le sous-groupe discret $Sp_{\mathbb{Q}}(\underline{w})$ de $Sp_{\mathbb{A}}(\underline{w})$ a un relèvement à $\widetilde{M}p(\underline{w}_{\mathbb{A}})$,(voir {We2}). Puisque le groupe $Sp_{\mathbb{Q}}(\underline{w})$ est semi-simple ,ce relèvement est unique et est contenu dans $Mp_{\mathbb{A}}(\underline{w})$,(considérer le groupe des commutateurs).On note encore $Sp_{\mathbb{Q}}(\underline{w})$ ce relèvement.Ainsi le groupe $Mp_{\mathbb{Q}}(\underline{W})$ (voir §1.4.2) s'identifie canoniquement au produit direct de $Sp_{\mathbb{Q}}(\underline{w})$ et de $\Sigma_{\mathbb{A}} = \{1,-1\}$ .Ce fait est important dans la suite.La représentation $S_{\mathbb{A},\underline{w}}$ restreinte à $Sp_{\mathbb{Q}}(\underline{w})$ peut être décrite,autrement,de la façon suivante :

Pour chaque $s \in Sp_{\mathbb{Q}}(\underline{w})$,on définit un opérateur unitaire $\delta_{\underline{w}}(s)$ dans $L^2(N_{\mathbb{A}}/N_{\mathbb{Q}})$ en posant pour $\phi \in L^2(N_{\mathbb{A}}/N_{\mathbb{Q}})$ et $n \in N_{\mathbb{A}}$:

$$\delta_{\underline{w}}(s)\ \phi\ (n) = \phi(s^{-1}ns)$$

On obtient,ainsi,une représentation unitaire $\delta_{\underline{w}}$ du groupe $Sp_{\mathbb{Q}}(\underline{w})$ dans $L^2(N_{\mathbb{A}}/N_{\mathbb{Q}})$ vérifiant pour tout $s \in Sp_{\mathbb{Q}}(\underline{w})$ et $n \in N_{\mathbb{A}}$:

$$\delta_{\underline{w}}(s)\ \pi_{\mathbb{A}}(n)\ \delta_{\underline{w}}(s^{-1}) = \pi_{\mathbb{A}}(sns^{-1})$$

où $\pi_{\mathbb{A}}$ est la représentation régulière de $N_{\mathbb{A}}$ dans $L^2(N_{\mathbb{A}}/N_{\mathbb{Q}})$. Donc,l'opérateur $\delta_{\underline{w}}(s)$ envoie la sous-représentation $\pi_{\mathbb{A},\nu}$ en la sous-représentation $s\pi_{\mathbb{A},\nu}$ .Mais $s\pi_{\mathbb{A},\nu} = \pi_{\mathbb{A},s\nu}$ et $s\nu = \nu$;

donc, $s\pi_{\mathbb{A},\nu} = \pi_{\mathbb{A},\nu}$ .Sachant que la multiplicité de $\pi_{\mathbb{A},\nu}$ dans $\pi_{\mathbb{A}}$ égale 1 ,on en déduit que $\delta_{\underline{w}}(s)$ laisse stable $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\nu}$ et on obtient ainsi une représentation,qu'on note encore $\delta_{\underline{w}}$,de $Sp_{\mathbb{Q}}(\underline{w})$ dans $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\nu}$,vérifiant la relation :

$$\delta_{\underline{w}}(s)\ \pi_{\mathbb{A},\nu}(n)\ \delta_{\underline{w}}(s^{-1}) = \pi_{\mathbb{A},\nu}(sns^{-1})$$

pour tout $s\in Sp_{\mathbb{Q}}(\underline{w})$ et $n\in N_{\mathbb{A}}$ .Puisque la représentation $\pi_{\mathbb{A},\nu}$ est irréductible et la représentation $S_{\mathbb{A},\underline{w}}$ restreinte à $Sp_{\mathbb{Q}}(\underline{w})$ vérifie la même relation,les deux représentations $\delta_{\underline{w}}$ et $S_{\mathbb{A},\underline{w}}$ diffèrent d'un caractère du groupe $Sp_{\mathbb{Q}}(\underline{w})$ qui est semi-simple . Elles sont,donc,égales .

<u>1.8.</u> Soit $\underline{v}$ un espace vectoriel de dimension finie sur un corps local k de caractéristique zéro,muni d'une forme bilinéaire B alternée.On note $\underline{v}^B$ l'orthogonal de $\underline{v}$ relativement à B , $\underline{w}$ le quotient $\underline{v}/\underline{v}^B$ et,encore, B la forme symplectique sur $\underline{w}$ déduite de B par passage au quotient.Soit H un groupe(topologique)opérant sur $\underline{v}_k$ en laissant stable B .On a,donc,un homomorphisme naturel de H dans $Sp(\underline{w}_k)$ et,ainsi, un revêtement H^B de H , à deux feuillets,construit sur le groupe métaplectique $Mp(\underline{w}_k)$ de sorte que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} H^B & \longrightarrow & Mp(\underline{w}_k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \longrightarrow & Sp(\underline{w}_k) \end{array}$$

Plus précisément, H^B est le sous-groupe(fermé)de $H \times Mp(\underline{w}_k)$ formé des couples (h,m) tels que h et m se projettent sur le même élément de $Sp(\underline{w}_k)$ .Les flèches de H^B sur H et de H^B sur $Mp(\underline{w}_k)$ sont déduites,respectivement,de la projection sur le premier et second facteur.On note -1 l'élément non neutre de H^B au dessus de l'élément neutre de H .On convient de prendre

$Mp(\underline{w}_k) = \{1,-1\}$ si $\underline{w} = \{0\}$.

1.8.1. Soit, maintenant, $\underline{v}'$ un sous-espace vectoriel de $\underline{v}$ et $\underline{v}''$ son orthogonal dans $\underline{v}$ relativement à B . On note B' et B'' les restrictions de B à $\underline{v}'$ et $\underline{v}''$ et on pose $\underline{w}' = \underline{v}'/\underline{v}'^{B'}$ et $\underline{w}'' = \underline{v}''/\underline{v}''^{B''}$. On suppose que l'espace $\underline{v}'$ est stable par H . On peut, alors, construire les revêtements à deux feuillets $H^{B'}$ et $H^{B''}$ de H et un revêtement à deux feuillets $(H^{B'})^{B''}$ de $H^{B'}$ en faisant opérer le groupe $H^{B'}$ dans $\underline{v}''$ via l'action de H .
On pose :
$\tilde{H}^{B,\underline{v}'} = \{ (\dot{h},\ddot{h}) \in H^B \times (H^{B'})^{B''}$ tel que $\dot{h}$ et $\ddot{h}$ se projettent sur le même élément h de H $\}$. C'est un revêtement à huit feuillets de H . Au dessus de l'élément neutre de H, les huit éléments de ce revêtement peuvent s'écrire sous la forme (α,β,γ) avec α, β,γ valant 1 ou -1 . En quotientant par le sous-groupe central, $\{ (\alpha,\beta,\gamma)\ /\ \alpha,\beta,\gamma$ vaut 1 ou -1 et $\alpha\beta\gamma = 1 \}$. le groupe $\tilde{H}^{B,\underline{v}'}$, on obtient un revêtement à deux feuillets $H^{B,\underline{v}'}$ de H . On note, encore, -1 l'élément non neutre de $H^{B,\underline{v}'}$ au dessus de l'élément neutre de H .

1.8.2. Soit $\underline{l}'$ et $\underline{l}''$ des sous-espaces totalement isotropes maximaux de $\underline{v}'$ et $\underline{v}''$ pour B' et B'' respectivement. L'espace $\underline{l} = \underline{l}'+\underline{l}''$ est un sous-espace totalement isotrope maximal de $\underline{v}$ pour B . On pose $\underline{L}' = \underline{l}'/\underline{v}'^{B'}$, $\underline{L}'' = \underline{l}''/\underline{v}''^{B''}$ et $\underline{L} = \underline{l}/\underline{v}^{B}$. Les espaces $\underline{L}$, $\underline{L}'$, $\underline{L}''$ sont des lagrangiens dans $\underline{w}$, $\underline{w}'$, $\underline{w}''$ respectivement. On regarde H^B , $H^{B'}$, $H^{B''}$ comme des sous-groupes des extensions centrales par le tore de H via le cocycle de H déduit de $c_{k,\underline{w},\underline{L}}$, $c_{k,\underline{w}',\underline{L}'}$, $c_{k,\underline{w}'',\underline{L}''}$ par composition, en envoyant H dans $Sp(\underline{w}_k)$, $Sp(\underline{w}'_k)$ et $Sp(\underline{w}''_k)$ respectivement (voir §1.6) . On peut, donc, écrire un élément $\dot{h}$ de H^B sous la forme (h,t) et un élément $\ddot{h}$ de $(H^{B'})^{B''}$ sous la forme (h,t',t'') où t,t',t'' sont des racines huitièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$, déterminées au signe pres par $h \in H$, (h,t') et (h,t'') représent nt des éléments de $H^{B'}$ et $H^{B''}$,respectivement,se projetant sur $h \in H$ .D'aprés Duflo ({Du3},lemme II.8),le produit $tt'^{-1}t''^{-1}$ ne dépend que de $\dot{h}$ et de $\ddot{h}$ et non du choix de $\underline{l}'$ et $\underline{l}''$ .On note ce scalaire $\tilde{\lambda}_k^{B,\underline{v}'}(\dot{h},\ddot{h})$ .De plus, $\tilde{\lambda}_k^{B,\underline{v}'}$ est un caractère de $\tilde{H}^{B,\underline{v}'}$, qui passe au quotient pour définir un caractère unitaire de $H^{B,\underline{v}'}$ valant -1 en -1 et qu'on note $\lambda_k^{B,\underline{v}'}$ .On remarque que ses valeurs sont dans les racines huitième de l'unité.

1.8.3. Soit E une représentation unitaire de H^B impaire (c'est à dire $E(-1) = -1$).On lui associe une représentation unitaire $\lambda_k^{B,\underline{v}'}E$ de $(H^{B'})^{B''}$ dans le même espace comme suit :

$$\lambda_k^{B,\underline{v}'}E\ (\ddot{h}) = \tilde{\lambda}_k^{B,\underline{v}'}\ (\dot{h},\ddot{h})\ E\ (\dot{h})$$

pour tout $(\dot{h},\ddot{h}) \in \tilde{H}^{B,\underline{v}'}$ .L'application $E \to \lambda_k^{B,\underline{v}'}E$ est une bijection de l'ensemble des représentations unitaires impaires de H^B sur l'ensemble des représentations unitaires F de $(H^{B'})^{B''}$ vérifiant $F(\alpha,\beta) = \alpha\beta$ avec α,β valant 1 ou -1 .

<u>1.8.4.</u> On suppose que $\underline{v}''$ est totalement isotrope pour B .Dans ce cas $\underline{w}''$ est réduit à $\{0\}$ et,par définition,le groupe $(H^{B'})^{B''}$ est le produit direct de $H^{B'}$ et de $\{1,-1\}$ .Le groupe $\tilde{H}^{B,\underline{v}'}$ est le produit direct de $\{(\dot{h},\ddot{h}) \in H^B \times H^{B'}\ /\ \dot{h}$ et $\ddot{h}$ se projettent sur le même élément de $H\}$ par ± 1.Par conséquent,le groupe $H^{B,\underline{v}'}$ s'identifie au quotient du premier facteur par $\{(1,1);(-1,-1)\}$ et la bijection $E \to \lambda_k^{B,\underline{v}'}$ échange les représentations unitaires impaires de H^B et de $H^{B'}$.

1.9. On suppose, maintenant, que $\underline{v}$ est un espace vectoriel de dimension finie défini sur $\mathbb{Q}$ et B est une forme bilinéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Son noyau $\underline{v}^B$ est défini sur $\mathbb{Q}$ et l'espace symplectique $\underline{w} = \underline{v}/\underline{v}^B$ aussi. Soit $(G, F, \mathcal{S}, F_+, \underline{\underline{G}})$ un groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$ avec une action de $\underline{\underline{G}}$ sur $\underline{v}$ rationnelle sur $\mathbb{Q}$ laissant stable B. En faisant opérer G_p sur $\underline{v}_p$ via $\underline{\underline{G}}_p$, on obtient un revêtement à deux feuillets G_p^B du groupe G_p, comme au §1.8. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{\underline{G}}_p^B \arrow[dr] \arrow[dd, dotted] & \\
G_p^B \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[d] & & Mp_p(\underline{w}) \arrow[d] \\
 & \underline{\underline{G}}_p \arrow[dl, dotted] \arrow[dr, dotted] & \\
G_p \arrow[rr, dotted] & & Sp_p(\underline{w})
\end{tikzcd}$$

Le sous-groupe F_p de G_p se relève canoniquement à G_p^B en associant à $f \in F_p$ l'élément $(f,1)$ de G_p^B. Donc, le noyau, noté F_p^B, du revêtement G_p^B de $\underline{\underline{G}}_p$ s'écrit, canoniquement, comme le produit direct de F_p et de $\Sigma_p = \{1,-1\}$. On pose $F_+^B = F_+ \times \Sigma_+$ où Σ_+ est le sous-groupe de $\Sigma_{\mathcal{P}}$ décrit au §1.7. Le groupe F_+^B est d'indice fini dans le produit infini $F_{\mathcal{P}}^B$ des groupes F_p^B restreint à la gerbe des groupes réduits à l'élément neutre. Du fait que l'action de $\underline{\underline{G}}$ sur $\underline{v}$ est rationnelle sur $\mathbb{Q}$, résulte que, pour presque tout p premier, l'image de $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p}$ dans $Sp_p(\underline{w})$ est contenue dans $Sp_{\mathbb{Z}_p}(\underline{w})$. Le relèvement canonique de $Sp_{\mathbb{Z}_p}(\underline{w})$ à $Mp_p(\underline{w})$ décrit au §1.7 induit, alors, un relèvement canonique de $\mathcal{S}_p(\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p})$ à G_p^B d'une manière naturelle. En regardant G_p^B comme revêtement de $\underline{\underline{G}}_p$, suivant le diagramme précédent, on en déduit une section $\mathcal{S}_p^B$ de $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p}$ dans G_p^B. Ceci, bien-entendu, est valable pour presque tout p premier.

1.9.1. *PROPOSITION*: Le quintuplet $(G^B, F^B, \mathcal{S}^B, F_+^B, \underline{\underline{G}})$ est un groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$. Il est de classe $C_{\mathbb{Q}}^{\circ}$ si G l'est.

On donnera la démonstration au §1.9.3.

1.9.2. Soit $\underline{v}'$ un sous espace vectoriel défini sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{v}$ stable par l'action de $\underline{\underline{G}}$ sur $\underline{v}$. Soit $\underline{v}''$ son orthogonal dans $\underline{v}$ pour B. On note B' et B'' les restrictions de B à $\underline{v}'$ et $\underline{v}''$ respectivement. On forme, comme au §1.8, pour chaque $p \in \mathcal{P}$, les revêtements $\tilde{G}_p^{B,\underline{v}'}$ et $G_p^{B,\underline{v}'}$ et le caractère unitaire $\lambda_p^{B,\underline{v}'}$ de $G_p^{B,\underline{v}'}$ en prenant $k = \mathbb{Q}_p$. Pour presque tout p premier, les relèvement de $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p}$ à G_p^B, à $G_p^{B'}$ et à $G_p^{B''}$ permettent d'avoir un relèvement au groupe $(G_p^{B'})^{B''}$ et, parsuite, un relèvement à $\tilde{G}_p^{B,\underline{v}'}$ et à $G_p^{B,\underline{v}'}$. On note $\tilde{\mathcal{S}}_p^{B,\underline{v}'}$ et $\mathcal{S}_p^{B,\underline{v}'}$ les sections de $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p}$ dans $\tilde{G}_p^{B,\underline{v}'}$ et $G_p^{B,\underline{v}'}$ respectivement, ainsi obtenues.

LEMME: Pour presque tout p premier, le caractère $\lambda_p^{B,\underline{v}'}$ est trivial sur $\mathcal{S}_p^{B,\underline{v}'}(\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p})$.

DÉMONSTRATION/

Il est clair qu'on peut supposer que $\underline{v} = \underline{w}$. Autrement dit, la forme B sur $\underline{v}$ est symplectique. On va distinguer deux cas :

1^er^ cas: On suppose que $\underline{v}'$ est coisotrope pour B. On fait les identifications décrites au §1.8.4. Un espace totalement isotrope maximal dans $\underline{v}'$ pour B' est un lagrangien pour B. On fixe un, qu'on note $\underline{L}$. On pose $\underline{w}' = \underline{v}'/\underline{v}''$ et $\underline{L}' = \underline{L}/\underline{v}''$. L'espace $\underline{w}'$ est symplectique et $\underline{L}'$ y est un lagrangien. On considère les objets $\underline{n}$, N, ν, $S'_{p,\underline{w},\underline{L}}$, $S_{p,\underline{w}}$ etc... et $\underline{n}'$, N', ν', ... tout comme au §1.7. On note $\tilde{\underline{n}}'$ la sous-algèbre unipotente définie sur

$\mathbb{Q}$ de $\underline{n}$ engendrée par $\underline{v}'$ et le centre, et, $\tilde{N}'$ le sous-groupe unipotent défini sur $\mathbb{Q}$ de N associé. On peut, naturellement, regarder $\underline{n}'$ (resp. N') comme un quotient de $\tilde{n}'$ (resp. $\tilde{N}'$) et on ajoutera un $\sim$ pour désigner les objets sur $\underline{\tilde{n}}'$ et $\tilde{N}'$ obtenus par passage au quotient à partir des objets correspondants sur $\underline{n}'$ et N'. D'aprés le principe d'induction par étages, on a :

$$\pi_{p,\nu} = \operatorname{ind}_{L_p \uparrow N_p} \chi_{n^*} = \operatorname{ind}_{\tilde{N}'_p \uparrow N_p} \tilde{\pi}_{p,\nu'} \quad ; \; L_p = \exp(\underline{L}_p \times \mathbb{Q}_p) \,,$$

comme décrit au §1.5.1. On remarque que la représentation $\tilde{\pi}_{p,\nu'}$ opère dans le même espace $\mathcal{H}_{p,\nu'}$ que $\pi_{p,\nu'}$. On peut, donc, supposer que $\mathcal{H}_{p,\nu} = \operatorname{ind}_{\tilde{N}'_p \uparrow N_p} \mathcal{H}_{p,\nu'}$. Lors de la démonstration du lemme II.8 dans {Du3}, M. Duflo montre que :

$$S'_{p,\underline{W},\underline{L}}(g)\phi\,(n) = c_p(g)\; S'_{p,\underline{W}',\underline{L}'}(g)\; \phi(g^{-1}ng)$$

pour toute fonction ϕ sur N_p continue à support compact modulo $\tilde{N}'_p$ appartenant à $\mathcal{H}_{p,\nu}$, pour tout $g \in G_p$ et pour tout $n \in N_p$; où $c_p(g)$ est une constante strictement positive. Il en résulte que :

$$S_{p,\underline{W}}(\dot{g})\phi\,(n) = c_p(g)\; \tilde{\lambda}_p^{B,\underline{v}'}(\dot{g},\ddot{g})\; S_{p,\underline{W}'}(\ddot{g})\; \phi(g^{-1}ng)$$

où ϕ, g, n sont comme ci-dessus et $(\dot{g},\ddot{g})$ est un élément de $G_p^B \times G_p^{B'}$ représentant un élément de $G_p^{B,\underline{v}'}$ se projetant sur $g \in G_p$. On réalise, pour presque tout p premier, une bijection de $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p,\nu'}$ sur $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p,\nu}$ en associant à un élément ϕ de $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p,\nu'}$ la fonction ψ sur N_p à support $N_{\mathbb{Z}_p}\tilde{N}'_p$ définie par :

$$\psi(nn') = \tilde{\pi}_{p,\nu'}(n')^{-1}\phi \quad \text{pour } n \in N_{\mathbb{Z}_p} \text{ et } n' \in \tilde{N}'_p \,.$$

La fonction ψ s'obtient à partir de ϕ par induction (cf. §1.3.3). On suppose que g est un élément de $S_p(\underline{G}_{\mathbb{Z}_p})$. On a, pour presque tout p premier, $g^{-1}N_{\mathbb{Z}_p}g = N_{\mathbb{Z}_p}$ et si $\dot{g} = S_p^B(g)$ et $\ddot{g} = S_p^{B'}(g)$, on a : $S_{p,\underline{W}}(\dot{g})\psi = \psi$ et $S_{p,\underline{W}'}(\ddot{g})\phi = \phi$ par construction de S_p^B et $S_p^{B'}$. D'où, avec les notations ci-dessus :

$$\psi(nn') = S_{p,\underline{w}}(\dot{g})\psi(nn') = c_p(g)\ \lambda_p^{B,\underline{v}'}(\dot{g},\ddot{g})\ S_{p,\underline{w}'}(\ddot{g})\ \tilde{\pi}_{p,\nu'}(g^{-1}n'g)^{-1}\phi$$
$$= c_p(g)\ \lambda_p^{B,\underline{v}'}(\dot{g},\ddot{g})\ \tilde{\pi}_{p,\nu'}(n')^{-1}\phi$$
$$= c_p(g)\ \lambda_p^{B,\underline{v}'}(\dot{g},\ddot{g})\ \psi(nn')$$

Il s'en suit que $\lambda_p^{B,\underline{v}'}(\dot{g},\ddot{g}) = 1$ et $c_p(g) = 1$ .D'où le lemme .

2^{d}cas:On suppose que l'espace $\underline{v}''$ est non contenu dans $\underline{v}'$. On pose $\tilde{\underline{v}} = \underline{v}' + \underline{v}''$ et $\tilde{B}$ la restriction de B à $\tilde{\underline{v}}$ .Le sous-espace $\tilde{\underline{v}}$ de $\underline{v}$ est coisotrope pour B .Soit $(\dot{g},\ddot{g})$ (resp.$(\tilde{g},\ddot{g})$) un élément de $\tilde{G}_p^{B,\underline{v}'}$ (resp. $\tilde{G}_p^{\tilde{B},\underline{v}'}$) .Le couple $(\dot{g},\tilde{g})$ appartient à $\tilde{G}_p^{B,\tilde{\underline{v}}}$ et on a : $\tilde{\lambda}_p^{B,\underline{v}'}(\dot{g},\ddot{g}) = \tilde{\lambda}_p^{B,\tilde{\underline{v}}}(\dot{g},\tilde{g})\ \tilde{\lambda}_p^{\tilde{B},\underline{v}'}(\tilde{g},\ddot{g})$ .On peut, alors,vu le 1ercas,se restreindre au cas où $\underline{v} = \tilde{\underline{v}} = \underline{w}$ .Ainsi,la somme $\underline{v} = \underline{v}' + \underline{v}''$ est directe et les espaces $\underline{v}'$ et $\underline{v}''$ sont symplectiques.On construit,comme au §1.7 ,les objets $\underline{n}$, N , ν , $S_{p,\underline{w}}$,etc... et $\underline{n}'$, N' ,...$\underline{n}''$, N'' ,...construits sur les espaces symplectiques $\underline{v}$, $\underline{v}'$,$\underline{v}''$ respectivement.On regarde $\underline{n}'$ et $\underline{n}''$ comme les sous-algèbres unipotentes définies sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{n}$ engendrées par le centre de $\underline{n}$ et par $\underline{v}'$ et $\underline{v}''$ respectivement. N' et N'' sont les sous-groupes unipotents définis sur Q de N correspondants.Il est facile de voir que N = N' N'' , N'$\cap$N'' est le centre de N , $N_p = N'_p N''_p$, $N'_p \cap N''_p$ est le centre de N_p et,pour presque tout p premier, $N_{\mathbb{Z}_p} = N'_{\mathbb{Z}_p} N''_{\mathbb{Z}_p}$ .De plus,on peut identifier $\mathcal{H}_{p,\nu}$ à $\mathcal{H}_{p,\nu'} \otimes \mathcal{H}_{p,\nu''}$ de sorte que :

$$\pi_{p,\nu}(n'n'') = \pi_{p,\nu'}(n') \otimes \pi_{p,\nu''}(n'')$$

$$\text{et} \qquad S_{p,\underline{v}}(\dot{g}) = \tilde{\lambda}_p^{B,\underline{v}'}(\dot{g},\ddot{g})\ S_{p,\underline{v}'}(\ddot{g}')\otimes S_{p,\underline{v}''}(\ddot{g}'')$$

pour tout $n'\in N'_p$, $n''\in N''_p$, $\dot{g}\in G_p^B$, $\ddot{g}\in (G^{B'})_p^{B''}$ avec $(\dot{g},\ddot{g})$ un élément de $\tilde{G}_p^{B,\underline{v}'}$ et $\ddot{g} = (\ddot{g}',\ddot{g}'')$. En remarquant que $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p,\nu'}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p,\nu''}$ est,pour presque tout p premier,un sous-espace de $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p,\nu}$ et, donc,lui est égal et vu les définitions des sections , $\mathcal{S}_p^B$ et $\mathcal{S}_p^{B,\underline{v}'}$, le lemme découle immédiatement .

1.9.3. On va procéder à la démonstration du lemme 1.7 et de la proposition 1.9.1 . On va raisonner par récurrence sur la dimension de $\underline{w}$. Le résultat étant évident si la dimension de l'espace $\underline{w}$ est nulle , on peut la supposer , alors , supérieure ou égale à deux . On remarque que le lemme 1.7 est un cas particulier de la proposition 1.9.1, en prenant $G_p=\underline{\underline{G}}_p=Sp_p(\underline{w})$. La seule assertion non évidente est la compatibilité des sections S_p^B avec le relèvement des sous-groupes unipotents $\underline{\underline{A}}$ définis sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{\underline{G}}$.
On raisonne sur le diagramme commutatif du début du paragraphe. L'image $\underline{\underline{B}}$ de $\underline{\underline{A}}$ dans $Sp(\underline{w})$ est un groupe unipotent défini sur $\mathbb{Q}$. Le groupe $Mp_p(\underline{w})$ (resp. G_p^B , G_p) contient un unique sous-groupe isomorphe, par la projection, à $\underline{\underline{B}}_p$ (resp. $\underline{\underline{A}}_p$). Le diagramme fait correspondre les différents groupes isomorphes à $\underline{\underline{A}}_p$ et les differents groupes isomorphes à $\underline{\underline{B}}_p$ et, pour presque tout p , fait correspondre au sous-groupe $\underline{\underline{A}}_{\mathbb{Z}_p}$ de $\underline{\underline{G}}_p$ le sous-groupe $\underline{\underline{B}}_{\mathbb{Z}_p}$ de $Sp_p(\underline{w})$. On est donc ramené au cas du lemme 1.7. On note i la section identique de $\underline{\underline{B}}_{\mathbb{Z}_p}$ dans $\underline{\underline{B}}_p$.
Puisque le groupe $\underline{\underline{B}}$ est unipotent sur $\mathbb{Q}$, il existe un sous-espace de dimension 1 de $\underline{w}$ defini sur $\mathbb{Q}$ invariant par $\underline{\underline{B}}$.
Soit $\underline{v}'$ son orthogonal sans $\underline{w}$ relativement à B . Il est défini sur $\mathbb{Q}$, coisotrope pour B et de dimension inférieure à celle de $\underline{w}$. Le caractère $\lambda_p^{B,\underline{v}'}$ étant d'ordre fini, il est trivial sur le relèvement du groupe unipotent $\underline{\underline{B}}_p$ à $\underline{\underline{B}}_p^{B,\underline{v}'}$. D'autre part, d'après le lemme 1.9.2 ,pour presque tout p premier, le caractère $\lambda_p^{B,\underline{v}'}$ est trivial sur $i_p^{B,\underline{v}'}(\underline{\underline{B}}_{\mathbb{Z}_p})$. Soit b un élément de $\underline{\underline{B}}_{\mathbb{Z}_p}$. On a $i_p^{B,\underline{v}'}(b)=(i_p^B(b),i_p^{B'}(b))$. L'hypothèse de récurrence montre que $i_p^{B'}(b)=b$. Donc, on a : $\lambda_p^{B,\underline{v}'}(i_p^B(b),b)=\lambda_p^{B,\underline{v}'}(b,b)=1$. Donc, nécessairement, $i_p^B(b)=b$ car on a $\lambda_p^{B,\underline{v}'}(-1,1)=-1$. Or $i_p^B(b)=\sigma_p(b)$, d'où le résultat .

<u>1.9.4.</u> Au groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$, $(G^B, F^B, \mathcal{S}^B, F^B_+, \underline{\underline{G}})$, On associe les groupes $G^B_{\mathcal{P}}$, $G^B_{\mathbb{A}} = G^B_{\mathcal{P}}/F^B_+$, $F^B_{\mathbb{A}} = F^B_{\mathcal{P}}/F^B_+$ et $G^B_{\mathbb{Q}}$, comme au §1.4.2 . On a un morphisme rationnel,par projections, de G^B sur G ; d'où, une projection de $G^B_{\mathcal{P}}$ sur $G_{\mathcal{P}}$ et une projection de $G^B_{\mathbb{A}}$ sur $G_{\mathbb{A}}$. Il est facile de constater que le revêtement $G^B_{\mathcal{P}}$ (resp. $G^B_{\mathbb{A}}$) de G (resp. $G_{\mathbb{A}}$) est identique à celui construit sur le revêtement $Mp_{\mathcal{P}}(\underline{w})$ (resp. $Mp_{\mathbb{A}}(\underline{w})$) de $Sp_{\mathbb{A}}(\underline{w})$ de sorte que les diagrammes suivants commutent :

$$
\begin{tikzcd}
 & \underline{\underline{G}}^B_{\mathcal{P}} \arrow[dr] \arrow[dd, dotted] & \\
G^B_{\mathcal{P}} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & Mp_{\mathcal{P}}(\underline{w}) \arrow[dd] \\
 & \underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}} \arrow[dr, dotted] & \\
G_{\mathcal{P}} \arrow[ur, dotted] \arrow[rr] & & Sp_{\mathbb{A}}(\underline{w})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \underline{\underline{G}}^B_{\mathbb{A}} \arrow[dr] \arrow[dd, dotted] & \\
G^B_{\mathbb{A}} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & Mp_{\mathbb{A}}(\underline{w}) \arrow[dd] \\
 & \underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}} \arrow[dr, dotted] & \\
G_{\mathbb{A}} \arrow[ur, dotted] \arrow[rr] & & Sp_{\mathbb{A}}(\underline{w})
\end{tikzcd}
$$

où la flèche de $G_{\mathcal{P}}$ dans $Sp_{\mathbb{A}}(\underline{w})$ etc ... s'obtient à partir du morphisme rationnel de G dans $Sp(\underline{w})$ etc ... explicité pour chaque $p \in \mathcal{P}$ suivant le diagramme du début de paragraphe. On a donc,

$G^B_{\mathcal{P}} = \{(g,m) \in G_{\mathcal{P}} \times Mp_{\mathcal{P}}(\underline{w})$ / g et m se projettent sur le même élément de $Sp_{\mathbb{A}}(\underline{w})$ $\}$

$G^B_{\mathbb{A}} = \{(g,m) \in G_{\mathbb{A}} \times Mp_{\mathbb{A}}(\underline{W})$ / g et m se projettent sur le même élément de $Sp_{\mathbb{A}}(\underline{w})\}$.

Le relèvement de $Sp_{\mathbb{Q}}(\underline{w})$ à $Mp_{\mathbb{A}}(\underline{w})$ induit un relèvement canonique de $G_{\mathbb{Q}}$ à $G^B_{\mathbb{Q}}$. On regardera, alors, $G_{\mathbb{Q}}$ comme sous-groupe discret de $G^B_{\mathbb{Q}}$. On a : $G^B_{\mathbb{Q}} = G_{\mathbb{Q}} \times \{\pm 1\}$ et cette décomposition est canonique.
On utilisera les mêmes notations pour désigner les représentations de G^B_p , $G^B_{\mathcal{P}}$ et $G^B_{\mathbb{A}}$ obtenues de $S_{p,\underline{w}}$, $S_{\mathcal{P},\underline{w}}$ et $S_{\mathbb{A},\underline{w}}$ par composition .

<u>1.9.5.</u> Soit $\underline{\underline{U}}$ un sous-groupe unipotent défini sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{\underline{G}}$. On a vu, au

§1.4.2 , qu'on peut relever $\underline{\underline{U}}_p$,comme sous-groupe fermé, à G_p , G_p^B ,...et parsuite, $U_{\mathbb{A}}$,comme sous-groupe fermé, aux groupes $G_{\mathbb{A}}$, $G_{\mathcal{P}}$, $G_{\mathbb{A}}^B$, $G_{\mathcal{P}}^B$,... Il est facile de voir que ces relèvements se correspondent par la projection du groupe G_p^B sur G_p , de $G_{\mathcal{P}}^B$ sur $G_{\mathcal{P}}$, et de $G_{\mathbb{A}}^B$ sur $G_{\mathbb{A}}$.

En particulier, on a un relèvement canonique du sous-groupe $\underline{\underline{U}}_{\mathbb{Q}}$ de $G_{\mathbb{A}}$ à $G_{\mathbb{A}}^B$. D'autre part, du relèvement canonique de $G_{\mathbb{Q}}$ à $G_{\mathbb{A}}^B$, on déduit un autre relèvement de $\underline{\underline{U}}_{\mathbb{Q}}$. En fait, ces deux relèvements coïncident. En effet, si A_1 et A_2 sont les deux relèvements et si $a \in A_1$, il existe un caractère $\chi(a)$ tel que $\chi(a)a$ appartient à A_2 ; $\chi(a)$ appartient à $F_{\mathbb{A}}^B$. Puisque $\underline{\underline{U}}$ est unipotent et χ est d'ordre fini, il est nécessairement trivial. D'où l'assertion.

<u>1.9.6.</u> Soit $\underline{v}'$ un sous-espace vectoriel de $\underline{v}$ défini sur $\mathbb{Q}$ invariant sous l'action de $\underline{\underline{G}}$. On utilise les notations du § 1.9.2. Du fait que les sections $\mathcal{S}_p^B$ et $(\mathcal{S}_p^{B'})^{B''}$ sont compatibles avec le relèvement des sous-groupes unipotents définis sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{\underline{G}}$, résulte qu'il en est de même pour $\tilde{\mathcal{S}}_p^{B,\underline{v}'}$ et $\mathcal{S}_p^{B,\underline{v}'}$. Soit $\tilde{F}_p^{B,\underline{v}'}$ (resp. $F_p^{B,\underline{v}'}$) la fibre du revêtement $\tilde{G}_p^{B,\underline{v}'}$ (resp. $G_p^{B,\underline{v}'}$) de G_p au-dessus de l'élément neutre. Le sous-groupe F_p de G_p se relève naturellement à G_p^B (voir diagramme du début du paragraphe), $(G_p^{B'})^{B''}$, donc à $\tilde{G}_p^{B,\underline{v}'}$ et à $G_p^{B,\underline{v}'}$. On a, donc, $\tilde{F}_p^{B,\underline{v}'} = F_p \times \{(\alpha, \beta, \gamma) \ / \ \alpha, \beta, \gamma$ valant $\pm 1\}$ et $F_p^{B,\underline{v}'} = F_p \times \{\pm 1\}$, d'une manière canonique. On pose

$\tilde{F}_+^{B,\underline{v}'} = F_+ \times \{(\alpha_p ,\beta_p ,\gamma_p) \ / \ \alpha_p ,\beta_p ,\gamma_p$ valant ± 1 , presque partout 1 et $\prod_p \alpha_p = \prod_p \beta_p = \prod_p \gamma_p = 1\}$ et $F_+^{B,\underline{v}'} = F_+ \times \Sigma_+$. D'après ce quiprécède, les groupes $(\tilde{G}^{B,\underline{v}'} , \tilde{F}^{B,\underline{v}'} , \tilde{\mathcal{S}}^{B,\underline{v}'} , \tilde{F}_+^{B,\underline{v}'} , \underline{\underline{G}})$ et $(G^{B,\underline{v}'} , F^{B,\underline{v}'} , \mathcal{S}^{B,\underline{v}'} , F_+^{B,\underline{v}'} , \underline{\underline{G}})$ sont de classe $C_{\mathbb{Q}}$. De plus, on a un morphisme rationnel naturel de $\tilde{G}^{B,\underline{v}'}$ sur $G^{B,\underline{v}'}$, de $\tilde{G}^{B,\underline{v}'}$ sur G^B et sur $(G^{B'})^{B''}$. On en déduit les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
& G^{B,\underline{v}'}_{\mathcal{P}} \arrow[dd, dotted] \arrow[dddr, dotted] & \\
\tilde{G}^{B,\underline{v}'}_{\mathcal{P}} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & (G^{B'})^{B''}_{\mathcal{P}} \arrow[dd] \\
& G_{\mathcal{P}} \arrow[dr, dotted] & \\
G^{B}_{\mathcal{P}} \arrow[ur, dotted] \arrow[rr] & & \underline{\underline{G}}_{\mathcal{P}}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& G^{B,\underline{v}'}_{\mathbb{A}} \arrow[dd, dotted] \arrow[dddr, dotted] & \\
\tilde{G}^{B,\underline{v}'}_{\mathbb{A}} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & (G^{B'})^{B''}_{\mathbb{A}} \arrow[dd] \\
& G_{\mathbb{A}} \arrow[dr, dotted] & \\
G^{B}_{\mathbb{A}} \arrow[ur, dotted] \arrow[rr] & & \underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}}
\end{tikzcd}$$

Les groupes $\tilde{G}^{B,\underline{v}'}_{\mathcal{P}}$ et $\tilde{G}^{B,\underline{v}'}_{\mathbb{A}}$ peuvent être décrits comme suit :

$\tilde{G}^{B,\underline{v}'}_{\mathcal{P}} = \{(\dot{g}, \ddot{g}) \in G^{B}_{\mathcal{P}} \times (G^{B'})^{B''}_{\mathcal{P}}$ / $\dot{g}$ et $\ddot{g}$ se projettent sur le même élément de $\underline{\underline{G}}_{\mathcal{P}}\}$

$\tilde{G}^{B,\underline{v}'}_{\mathbb{A}} = \{(\dot{g}, \ddot{g}) \in G^{B}_{\mathbb{A}} \times (G^{B'})^{B''}_{\mathbb{A}}$ / $\dot{g}$ et $\ddot{g}$ se projettent sur le même élément de $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}}\}$

De plus $\tilde{G}^{B,\underline{v}'}_{\mathbb{A}}$ est un revêtement à 8 feuillets de $G_{\mathbb{A}}$. Le groupe $G^{B,\underline{v}'}_{\mathcal{P}}$ s'obtient en quotientant $\tilde{G}^{B,v'}_{\mathcal{P}}$ par $\{(\alpha_p, \beta_p, \gamma_p)$ / $\alpha_p, \beta_p, \gamma_p$ valent ± 1, presque partout 1, et, $\alpha_p \beta_p \gamma_p = 1\}$. Les éléments de $\tilde{G}^{B,\underline{v}'}_{\mathbb{A}}$ au-dessus de l'élément neutre de $G_{\mathbb{A}}$ peuvent s'écnire sous la forme (α, β, γ) avec α, β, γ valant ± 1. Ainsi $G^{B,\underline{v}'}_{\mathbb{A}}$ est le revêtement à deux feuillets de $G_{\mathbb{A}}$ qu'on peut obtenir en quotientant $\tilde{G}^{B,\underline{v}'}_{\mathbb{A}}$ par $\{(\alpha,\beta,\gamma)$ / α, β, γ valent ± 1 et $\alpha \beta \gamma = 1$.
On remarque que $\tilde{G}^{B,\underline{v}'}_{\mathbb{Q}} = \{(\dot{g}, \ddot{g})$ / $\dot{g} \in G^{B}_{\mathbb{Q}}$, $\ddot{g} \in (G^{B'})^{B''}_{\mathbb{Q}}$ et $\dot{g}$ et $\ddot{g}$ se projettent sur le même élément de $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}\}$; $G^{B,\underline{v}'}_{\mathbb{Q}}$ s'obtient de $\tilde{G}^{B,\underline{v}'}_{\mathbb{Q}}$ par passage au quotient. Les relèvements de $G_{\mathbb{Q}}$ à $G^{B}_{\mathbb{A}}$ et $(G^{B'})^{B''}_{\mathbb{A}}$ comme décrit au § 1.9.4. induisent un relèvement canonique de $G_{\mathbb{Q}}$ à $\tilde{G}^{B,\underline{v}'}_{\mathbb{A}}$ en prenant $\{(g, g)$, $g \in G_{\mathbb{Q}}\}$. Il en résulte un relèvement canonique de $G_{\mathbb{Q}}$ à $G^{B,\underline{v}'}_{\mathbb{A}}$. On a, donc,
$\tilde{G}^{B,\underline{v}'}_{\mathbb{Q}} = G_{\mathbb{Q}} \times \{(\alpha, \beta, \gamma)$ / α, β, γ valent ± 1 et $\alpha \beta \gamma = 1\}$ et

$G_{\mathbb{Q}}^{B,\underline{v}'} = G_{\mathbb{Q}} \times \{\pm 1\}$.

Ceci étant, on considère, pour chaque $p \in \mathcal{P}$, le caractère unitaire $\tilde{\lambda}_p^{B,\underline{v}'}$ de $\tilde{G}_p^{B,\underline{v}'}$, construit au § 1.8.2., ainsi que le caractère unitaire $\lambda_p^{B,\underline{v}'}$ de $G_p^{B,\underline{v}'}$ déduit par passage en quotient. D'après le lemme 1.9.2., $\tilde{\lambda}_p^{B,\underline{v}'}$ (resp. $\lambda_p^{B,\underline{v}'}$) est trivial sur $\tilde{S}_p^{B,\underline{v}'}(\underline{G}_{\mathbb{Z}_p})$ (resp. $S_p^{B,\underline{v}'}(\underline{G}_{\mathbb{Z}_p})$) pour presque tout $p \in \mathcal{P}$. Donc on peut construire le produit tensoriel infini des caractères $\tilde{\lambda}_p^{B,\underline{v}'}$ (resp. $\lambda_p^{B,\underline{v}'}$) pour obtenir un caractère unitaire $\tilde{\lambda}_{\mathcal{P}}^{B,\underline{v}'}$ de $\tilde{G}_{\mathcal{P}}^{B,\underline{v}'}$ (resp. $\lambda_{\mathcal{P}}^{B,\underline{v}'}$ de $G_{\mathcal{P}}^{B,\underline{v}'}$) . En fait, $\lambda_{\mathcal{P}}^{B,\underline{v}'}$ s'obtient de $\tilde{\lambda}_{\mathcal{P}}^{B,\underline{v}'}$ par passage au quotient. Il est facile de voir que $\tilde{\lambda}_{\mathcal{P}}^{B,\underline{v}'}$ (resp. $\lambda_{\mathcal{P}}^{B,\underline{v}'}$) est un caractère trivial sur $\tilde{F}_+^{B,\underline{v}'}$ (resp. $F_+^{B,\underline{v}'}$) de sorte qu'il définit par passage au quotient un caractère unitaire $\tilde{\lambda}_{\mathbb{A}}^{B,\underline{v}'}$ (resp. $\lambda_{\mathbb{A}}^{B,\underline{v}'}$) de $\tilde{G}_{\mathbb{A}}^{B,\underline{v}'}$ (resp. $G_{\mathbb{A}}^{B,\underline{v}'}$). Aussi, le caractère $\lambda_{\mathbb{A}}^{B,\underline{v}'}$ s'obtient de $\tilde{\lambda}_{\mathbb{A}}^{B,\underline{v}'}$ par passage au quotient. De la propriété analogue dans le cas local, on déduit que $\lambda_{\mathbb{A}}^{B,\underline{v}'}(-1) = -1$, $\tilde{\lambda}_{\mathbb{A}}^{B,\underline{v}'}(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha\beta\gamma$ avec α, β, γ valant ± 1 et les caractères $\tilde{\lambda}_{\mathbb{A}}^{B,\underline{v}'}$ et $\lambda_{\mathbb{A}}^{B,\underline{v}'}$ prennent leurs valeurs dans le groupe des racines huitièmes complexes de l'unité.

Soit E une représentation unitaire de $G_{\mathbb{A}}^{B}$ vérifiant $E(-1) = -1$. On lui associe une représentation unitaire $\lambda_{\mathbb{A}}^{B,\underline{v}'}E$ de $(G^{B'})_{\mathbb{A}}^{B''}$, ayant même espace, en posant :

$$\lambda_{\mathbb{A}}^{B,\underline{v}'}E(\ddot{g}) = \tilde{\lambda}_{\mathbb{A}}^{B,\underline{v}'}(\dot{g},\ddot{g})E(\ddot{g})$$

pour tout $(\dot{g}, \ddot{g}) \in \tilde{G}_{\mathbb{A}}^{B,\underline{v}'}$. On obtient, ainsi, une bijection de l'ensemble des représentations unitaires E de $G_{\mathbb{A}}^{B}$ vérifiant $E(-1) = -1$ sur l'ensemble des représentations unitaires F de $(G^{B'})_{\mathbb{A}}^{B''}$ vérifiant

$F(\alpha, \beta) = \alpha \beta$ pour α, β valant ± 1. On remarque que si E est un produit tensoriel infini de représentations unitaires E_p de G_p^B, vérifiant $E_p(-1) = -1$, restreint à une direction invariante, $\lambda_{\mathbb{A}}^{B,\underline{v}'} E$ est, aussi, le produit tensoriel infini des représentations $\lambda_p^{B,\underline{v}'} E_p$ restreint à la même direction invariante (voir § 1.3.1. et § 1.4.2.). Comme, pour le cas local (§ 1.8.4.), si $\underline{v}''$ est un sous-espace, isotrope de $\underline{v}$ pour B, le groupe $\tilde{G}_{\mathbb{A}}^{B,\underline{v}'}$ s'identifie à $\{(\dot{g}, \ddot{g}) \in G_{\mathbb{A}}^B \times G_{\mathbb{A}}^{B'} / \dot{g}$ et $\ddot{g}$ se projettent sur le même élément de $G_{\mathbb{A}}\}$ et, $G_{\mathbb{A}}^{B,\underline{v}'}$, à son quotient par $\{(1,1), (-1,-1)\}$. Dans ce cas la bijection $E \to \lambda_{\mathbb{A}}^{B,\underline{v}'} E$ échange les représentations de $G_{\mathbb{A}}^B$ et $G_{\mathbb{A}}^{B'}$ impaires.

On remarque que la bijection réciproque se définit de la même façon : $F \to \bar{\lambda}_{\mathbb{A}}^{B,\underline{v}'} F$.

Lemme. Le caractère $\lambda_{\mathbb{A}}^{B,\underline{v}'}$ est trivial sur $G_{\mathbb{Q}}$.

Démonstration.

On va utiliser la démonstration du lemme 1.9.2. Aussi, on peut supposer que l'espace $\underline{v}$ est symplectique. Et on va distinguer les deux cas :

1er cas : On suppose que $\underline{v}'$ est coisotrope pour B. On pose $\mathcal{H}_{\mathbb{A}} = L^2(N_{\mathbb{A}}/N_{\mathbb{Q}})$, $\mathcal{H}'_{\mathbb{A}} = L^2(N'_{\mathbb{A}}/N'_{\mathbb{Q}})$ et on note $\pi_{\mathbb{A}}$ et $\pi'_{\mathbb{A}}$ la représentation régulière de $N_{\mathbb{A}}$ et $N'_{\mathbb{A}}$ dans $\mathcal{H}_{\mathbb{A}}$ et $\mathcal{H}'_{\mathbb{A}}$ respectivement. Comme convenu, $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\nu}$ (resp. $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\nu'}$) désigne la réalisation concrète de $\pi_{\mathbb{A},\nu}$ (resp. $\pi_{\mathbb{A},\nu'}$) dans $\mathcal{H}_{\mathbb{A}}$ (resp. $\mathcal{H}'_{\mathbb{A}}$) comme sous-représentation de $\pi_{\mathbb{A}}$ (resp. $\pi'_{\mathbb{A}}$).

On considère la représentation $\delta_{\underline{w}}$ (resp. $\delta_{\underline{w}'}$) du groupe $Sp_{\mathbb{Q}}(\underline{w})$ (resp. $Sp_{\mathbb{Q}}(\underline{w}')$) dans $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\nu}$ (resp. $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\nu'}$) introduite au § 1.7. Elle induit, par composition, une représentation de $G_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\nu}$

(resp. $\mathscr{X}_{\mathbb{A},\nu'}$) qu'on notera de la même façon. D'après le § 1.7., elle coïncide avec la restriction à $G_{\mathbb{Q}}$ de la représentation de Weil $S_{\mathbb{A},\underline{W}}$ (resp. $S_{\mathbb{A},\underline{W}'}$). On a :

$$\pi_{\mathbb{A},\nu} = \operatorname*{ind}_{\tilde{N}'_{\mathbb{A}} \uparrow N_{\mathbb{A}}} \tilde{\pi}_{\mathbb{A},\nu'}$$

Ceci résulte de la propriété analogue pour chaque p, du fait que $\pi_{\mathbb{A},\nu}$ (resp. $\tilde{\pi}_{\mathbb{A},\nu'}$) est un produit tensoriel infini des représentations $\pi_{p,\nu}$ (resp. $\tilde{\pi}_{p,\nu'}$), restreint à la direction invariante unique, et du § 1.3.3. On pose :

$$\hat{\mathscr{X}}_{A,\nu} = \operatorname*{ind}_{\tilde{N}'_{\mathbb{A}} \uparrow N_{\mathbb{A}}} \mathscr{X}_{\mathbb{A},\nu'}$$

On aura démontré le lemme si on prouve que les égalités

$$(*) \quad S_{\mathbb{A},\underline{W}}(g)\,\hat{\phi}\,(n) = \lambda_{\mathbb{A}}^{B,\underline{\nu}'}(g) \quad S_{\mathbb{A},\underline{W}'}(g)\,\hat{\phi}\,(g^{-1}ng)$$

$$(**) \quad \delta_{\underline{W}}(g)\,\hat{\phi}\,(n) = \delta_{\underline{W}'}(g)\,\hat{\phi}\,(g^{-1}ng)$$

sont satisfaites pour une fonction $\hat{\phi}$ non nulle, continue sur $N_{\mathbb{A}}$ appartenant à $\hat{\mathscr{X}}_{\mathbb{A},\nu}$, pour tout $g \in G_{\mathbb{Q}}$ et pour tout $n \in N_{\mathbb{A}}$.

On va, d'abord, s'intéresser à l'égalité (*). Soit, pour presque tout $p \in \mathscr{P}$, ϕ_p un élément de $\mathscr{X}_{\mathbb{Z}_p,\nu'}$ de norme 1 et Φ_p l'élément de $\mathscr{X}_{p,\nu}$ obtenu par induction. La fonction Φ_p est, pour presque tout p, de norme 1 (voir § 1.3.3.). On a, donc, des réalisations concrètes $\bigotimes_p \mathscr{X}_{p,\nu}$ et $\bigotimes_p \mathscr{X}_{p,\nu'}$ de $\pi_{\mathbb{A},\nu}$ et de $\pi_{\mathbb{A},\nu'}$ respectivement et un opérateur d'entrelacement T de $\bigotimes_p \mathscr{X}_{p,\nu}$ sur $\operatorname*{ind}_{\tilde{N}'_{\mathbb{A}} \uparrow N_{\mathbb{A}}} \bigotimes_p \mathscr{X}_{p,\nu'}$, comme décrit au §1.3.3. Soit ψ_p une fonction continue, appartenant à $\mathcal{X}_{p,\nu}$ égale, pour presque tout p, à Φ_p. On pose $\psi = T(\otimes_p \psi_p)$; ψ est continue sur $N_{\mathbb{A}}$ et on a :

$$S_{\mathcal{P},\underline{w}}(\dot{g})\,\psi(n) = T\,S_{\mathcal{P},\underline{w}}(\dot{g})\,(\otimes_p \psi_p)(n)$$

$$= T \otimes_p S_{p,\underline{w}}(\dot{g}_p)\,\psi_p(n_p)$$

$$= \otimes_p S_{p,\underline{w}}(\dot{g}_p)\psi_p(n_p)$$

$$= \otimes_p c_p(\dot{g}_p)\,\lambda_p^{B,\underline{v}'}(\dot{g}_p, \ddot{g}_p)\,S_{p,\underline{w}'}(\ddot{g}_p)\,\psi_p(\ddot{g}_p^{-1} n_p g_p)$$

avec $\dot{g} = (\dot{g}_p)$ un élément de $G_{\mathcal{P}}^B$, $\ddot{g} = (\ddot{g}_p)$ un élément de $G_{\mathcal{P}}^{B'}$ avec $(\dot{g}, \ddot{g})$ un élément de $\widetilde{G}_{\mathcal{P}}^{B,\underline{v}'}$ et $n = (n_p) \in N_{\mathbb{A}}$. Ceci d'après la démonstration du lemme 1.9.2. De plus, $c_p(\dot{g}_p)$ est, presque partout, 1. On pose $c(\dot{g}) = \prod_p c_p(\dot{g}_p)$. On a, donc,

$$S_{\mathcal{P},\underline{w}}(\dot{g})\,\psi(n) = c(\dot{g})\,\widetilde{\lambda}_{\mathcal{P}}^{B,\underline{v}'}(\dot{g}, \ddot{g})\;S_{\mathcal{P},\underline{w}'}(\ddot{g})\,\psi(\ddot{g}^{-1} n\, g)$$

Il en résulte que :

$$S_{\mathbb{A},\underline{w}}(\dot{g})\,\psi(n) = c(\dot{g})\,\lambda_{\mathbb{A}}^{B,\underline{v}'}(\dot{g}, \ddot{g})\;S_{\mathbb{A},\underline{w}'}(\ddot{g})\,\psi(\ddot{g}^{-1} n\, g)$$

pour tout $n \in N_{\mathbb{A}}$, $\dot{g} \in G_{\mathbb{A}}^B$, $\ddot{g} \in G_{\mathbb{A}}^{B'}$ avec $(\dot{g}, \ddot{g})$ représentant un élément de $G_{\mathbb{A}}^{B,\underline{v}'}$. Par restriction à $G_{\mathbb{Q}}$ et par entrelacement de $\mathcal{X}_{A,\nu'}$ et $\otimes_p \mathcal{X}_{p,\nu'}$, on obtient l'égalité (*) à une constante positive $c(g)$ près. Cette constante va valoir 1 si on montre l'égalité (**). Pour ce faire, tout consiste à entrelacer les réalisations concrètes $\mathcal{X}_{\mathbb{A},\nu}$ et $\hat{\mathcal{X}}_{\mathbb{A},\nu}$ de la représentation $\pi_{\mathbb{A},\nu}$. On va le réaliser en différentes étapes :

On pose $N_1 = \widetilde{N}'_{\mathbb{A}}\, N_{\mathbb{Q}}$. C'est un sous-groupe fermé de $N_{\mathbb{A}}$ car le quotient $\tilde{N}'_{\mathbb{A}} / \tilde{N}'_{\mathbb{Q}}$ étant compact, le quotient $N_1/N_{\mathbb{Q}}$ l'est aussi dans $N_{\mathbb{A}} / N_{\mathbb{Q}}$ et la continuité de la projection permet de conclure. On pose :

$$\pi_1 = \operatorname*{ind}_{N_{\mathbb{Q}} \uparrow N_1} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_1 = L^2 (N_1/N_{\mathbb{Q}}) = L^2 (\tilde{N}'_{\mathbb{A}} / \tilde{N}'_{\mathbb{Q}})$$

D'après le principe d'induction par étage $\pi_{\mathbb{A}} = \operatorname*{ind}_{N_1 \uparrow N_{\mathbb{A}}} \pi_1$ et un opérateur d'entrelacement, T_1, de $\mathcal{H}_{\mathbb{A}}$ sur $\operatorname*{ind}_{N_1 \uparrow N_{\mathbb{A}}} \mathcal{H}_1$ s'obtient en associant à une fonction ϕ continue sur $N_{\mathbb{A}}$ appartenant à $\mathcal{H}_{\mathbb{A}}$ la fonction $T_1 \phi$ continue sur $N_{\mathbb{A}}$ à valeurs dans $\mathcal{H}_1$ appartenant à $\operatorname*{ind}_{N_1 \uparrow N_{\mathbb{A}}} \mathcal{H}_1$ donnée par :

$$T_1 \phi(n) (\tilde{n}') = \phi(n \tilde{n}') \quad , \quad n \in N_{\mathbb{A}} \quad \text{et} \quad \tilde{n}' \in \tilde{N}'_{\mathbb{A}} .$$

Le sous-espace $\mathcal{H}_{1;\nu} = \bigoplus_{q \in N_{\mathbb{Q}}/\tilde{N}'_{\mathbb{Q}}} \mathcal{H}_{\mathbb{A},q\nu'}$ de $\mathcal{H}_1$ est stable par π_1 et la représentation $\pi_{1;\nu}$ restriction de π_1 à $\mathcal{H}_{1;\nu}$ coïncide avec $\operatorname*{ind}_{\tilde{N}'_{\mathbb{A}} \uparrow N_1} \tilde{\pi}_{\mathbb{A},\nu'}$. Un opérateur d'entrelacement, T_2, de $\mathcal{H}_{1;\nu}$ sur $\operatorname*{ind}_{\tilde{N}'_{\mathbb{A}} \uparrow N_1} \mathcal{H}_{\mathbb{A},\nu'}$ s'obtient en associant à une fonction continue ϕ sur $N'_{\mathbb{A}}$ appartenant à $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\nu'}$ la fonction $T_2 \phi$ sur N_1 continue appartenant à $\operatorname*{ind}_{\tilde{N}'_{\mathbb{A}} \uparrow N_1} \mathcal{H}_{\mathbb{A},\nu'}$ définie par $T_2 \phi(q \tilde{n}') = \tilde{\pi}_{\mathbb{A},\nu'} (\tilde{n}')^{-1} \phi$ pour tout $\tilde{n}' \in \tilde{N}'_{\mathbb{A}}$ et $q \in N_{\mathbb{Q}}$. Il s'en suit que $\pi_{\mathbb{A},\nu} = \operatorname*{ind}_{N_1 \uparrow N_{\mathbb{A}}} \pi_{1;\nu}$ et l'opérateur T_1 suivi de T_2 réalise un entrelacement de $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\nu}$ sur $\operatorname*{ind}_{N_1 \uparrow N_{\mathbb{A}}} \operatorname*{ind}_{\tilde{N}'_{\mathbb{A}} \uparrow N_1} \mathcal{H}_{\mathbb{A},\nu'}$. On remarque que l'évaluation en l'élément neutre de N_1 est une application continue de $\operatorname*{ind}_{\tilde{N}'_{\mathbb{A}} \uparrow N_1} \mathcal{H}_{\mathbb{A},\nu'}$ dans $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\nu'}$ car le quotient $N_1/\tilde{N}'_{\mathbb{A}}$ est discret. On entrelace $\operatorname*{ind}_{N_1 \uparrow N_{\mathbb{A}}} \operatorname*{ind}_{\tilde{N}'_{\mathbb{A}} \uparrow N_1} \mathcal{H}_{\mathbb{A},\nu'}$ et $\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{A},\nu}$ en associant à une fonction continue sur $N_{\mathbb{A}}$ appartenant au premier espace, la fonction $T_3 \phi$ continue sur $N_{\mathbb{A}}$ appartenant au second, donnée pour $n \in N_{\mathbb{A}}$ par :

$T_3\,\phi(n) = \phi(n)\,(e)$. On obtient, ainsi un opérateur d'entrelacement T de $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\nu}$ sur $\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{A},\nu}$ qui envoie une fonction continue en une fonction continue. On vérifie, facilement, que pour toute fonction ϕ appartenant à $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\nu}$ continue sur $N_{\mathbb{A}}$, pour tout $n\in N_{\mathbb{A}}$ et pour tout $g\in G_{\mathbb{Q}}$, on a :

$$T(\delta_{\underline{w}}(g)\,\phi)(n) = \delta_{\underline{w}'}(g)\;T\,\phi(g^{-1}\,n\,g)$$

D'où l'égalité (**).

<u>2ème cas</u> : On suppose que le sous-espace $\underline{v}'$ est non coisotrope dans $\underline{v}$ pour B . On utilise, encore, les notations et résultats de la démonstration (2ème cas) du lemme 1.9.2. Si $\dot{g} = (\dot{g}_p)\in G^{B}_{\mathcal{P}}$; $\ddot{g} = (\ddot{g}_p)\in (G^{B'})^{B''}_{\mathcal{P}}$ et $\tilde{\dot{g}} = (\tilde{\dot{g}}_p)\in G^{\tilde{B}}_{\mathcal{P}}$ avec $(\dot{g}\ ,\ \ddot{g})\in \tilde{G}^{B,\underline{v}'}_{\mathcal{P}}$ et $(\tilde{\dot{g}}\ ,\ \ddot{g})\in \tilde{G}^{\tilde{B},\underline{v}'}_{\mathcal{P}}$, on a $(\dot{g}\ ,\ \tilde{\dot{g}})\in \tilde{G}^{B,\tilde{\underline{v}}}_{\mathcal{P}}$ et

$$\tilde{\lambda}^{B,\underline{v}'}_{\mathcal{P}}(\dot{g}\ ,\ \ddot{g}) = \tilde{\lambda}^{B,\tilde{\underline{v}}}_{\mathcal{P}}(\dot{g}\ ,\ \tilde{\dot{g}})\,\tilde{\lambda}^{\tilde{B},\underline{v}'}_{\mathcal{P}}(\tilde{\dot{g}}\ ,\ \ddot{g})\ ;$$

ceci résulte des égalités analogues pour chaque $p\in\mathcal{P}$. Par passage au quotient, on en déduit, en particulier, que pour tout $g\in G_{\mathbb{Q}}$, on a :

$$\lambda^{B,\underline{v}'}_{\mathbb{A}}(g) = \lambda^{B,\tilde{\underline{v}}}_{\mathbb{A}}(g)\;\lambda^{\tilde{B},\underline{v}'}_{\mathbb{A}}(g)\quad .$$

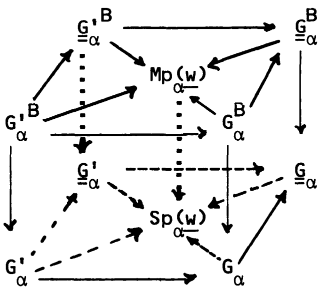
D'aprés le premier cas, $\lambda^{\tilde{B},\underline{v}'}_{\mathbb{A}}(g)$ vaut 1 . Donc, on est ramené au cas où $\underline{v} = \tilde{\underline{v}}$. Des propriétés locales résultent que $N_{\mathbb{A}} = N'_{\mathbb{A}}N''_{\mathbb{A}}$ avec $N'_{\mathbb{A}}\cap N''_{\mathbb{A}}$ le centre de $N_{\mathbb{A}}$ et on peut identifier $\underset{p}{\otimes}\mathcal{H}_{p,\nu}$ avec $\underset{p}{\otimes}\mathcal{H}_{p,\nu'}\ \otimes\ \underset{p}{\otimes}\mathcal{H}_{p,\nu''}$ de sorte que

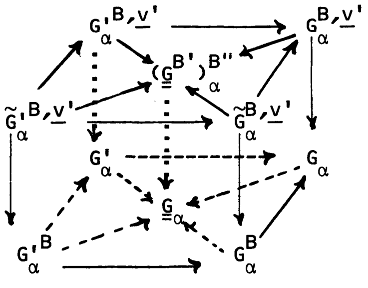
$$\pi_{\mathbb{A},\nu}(n'n'') = \pi_{\mathbb{A},\nu'}(n')\ \otimes\ \pi_{\mathbb{A},\nu''}(n'')$$

$$\bar{\lambda}^{B,\underline{v}'}_{\mathbb{A}}\,S_{\mathbb{A},\underline{v}}(\ddot{g}) = S_{\mathbb{A},\underline{v}'}(\ddot{g}')\ \otimes\ S_{\mathbb{A},\underline{v}''}(\ddot{g}'')$$

pour tout $n'\in N'_{\mathbb{A}}$, $n''\in N''_{\mathbb{A}}$ et $\ddot{g} = (\ddot{g}',\ddot{g}'')\in (G^{B'})^{B''}_{\mathbb{A}}$. On va prouver que pour tout $g\in G_{\mathbb{Q}}$, on a $\delta_{\underline{v}}(g) = \delta_{\underline{v}'}(g)\ \otimes\ \delta_{\underline{v}''}(g)$. Le lemme résulte aussitôt . On pose $\tilde{N} = N'\times N''$ (produit direct) . C'est un groupe unipotent défini sur $\mathbb{Q}$ et l'application $(n',n'')\to n'n''$ de $\tilde{N}$ dans N est un homomorphisme de groupe rationnel sur $\mathbb{Q}$ surjectif . Son noyau Z est un sous-groupe défini sur $\mathbb{Q}$ invariant de $\tilde{N}$. On en déduit des homomorphismes surjectifs de $\tilde{N}_p = N'_p \times N''_p$ sur N_p de noyau Z_p et de $\tilde{N}_{\mathbb{A}} = N'_{\mathbb{A}} \times N''_{\mathbb{A}}$ sur $N_{\mathbb{A}}$ de noyau $Z_{\mathbb{A}}$. L'espace $L^2(\tilde{N}_{\mathbb{A}}/\tilde{N}_{\mathbb{Q}})$ s'identifie,naturellement,à $L^2(N'_{\mathbb{A}}/N'_{\mathbb{Q}}) \otimes L^2(N''_{\mathbb{A}}/N''_{\mathbb{Q}})$. Le sous-espace des vecteurs $Z_{\mathbb{A}}$ -invariants s'identifie à $L^2(\tilde{N}_{\mathbb{A}}/Z_{\mathbb{A}}\tilde{N}_{\mathbb{Q}})$ car le quotient de $Z_{\mathbb{A}}\tilde{N}_{\mathbb{Q}}$ par $\tilde{N}_{\mathbb{Q}}$ est compact . D'autre part,par composition,l'espace $L^2(\tilde{N}_{\mathbb{A}}/Z_{\mathbb{A}}\tilde{N}_{\mathbb{Q}})$ s'identifie à $L^2(N_{\mathbb{A}}/N_{\mathbb{Q}})$ de sorte qu'on peut regarder $L^2(N_{\mathbb{A}}/N_{\mathbb{Q}})$ comme sous-espace de $L^2(N'_{\mathbb{A}}/N'_{\mathbb{Q}}) \otimes L^2(N''_{A}/N''_{Q})$. Il est clair que,pour tout g dans $G_{\mathbb{Q}}$, $\delta_{\underline{v}}(g)$ est la restriction à $L^2(N_{\mathbb{A}}/N_{\mathbb{Q}})$ de $\delta_{\underline{v}'}(g) \otimes \delta_{\underline{v}''}(g)$. Pour conclure,il suffit de remarquer que,via ces identifications, l'espace $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\nu}$ s'identifie à $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\nu'} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{A},\nu''}$. Ceci résulte du fait que ce dernier est le seul sous-espace irréductible de $L^2(\tilde{N}_{\mathbb{A}}/\tilde{N}_{\mathbb{Q}})$ où $Z_{\mathbb{A}}$ opère trivialement et où le centre de $N_{\mathbb{A}}$ opère par le même caractère que la représentation $\pi_{\mathbb{A},\nu}$. D'où le lemme .

<u>1.9.7.</u> Soit $(G',F',\mathcal{S}',F'_+,\underline{\underline{G}}')$ un autre groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$ avec un morphisme rationnel de G' dans G . On fait opérer $\underline{\underline{G}}'$ sur $\underline{v}$ via l'action de $\underline{\underline{G}}$ par composition . On obtient,naturellement,les diagrammes commutatifs suivants:





pour α valant p , $\mathcal{P}$ ou $\mathbb{A}$. De plus, les caractères $\tilde{\lambda}^{B,\underline{v}'}_{\alpha}$ et $\lambda^{B,\underline{v}'}_{\alpha}$ construits pour les groupes G' et G se déduisent les uns des autres par composition .

<u>1.10.</u> Soit,maintenant, $\underline{v}$ une algèbre de Lie algébrique définie sur $\mathbb{Q}$ et

v^* un élément de $\underline{v}^*_{\mathbb{Q}}$. On considère la forme bilinéaire alternée B_{v^*} sur $\underline{v}$. Elle est à coefficients dans $\mathbb{Q}$ et son noyau coincide avec $\underline{v}(v^*)$. On pose $\underline{w} = \underline{v}/\underline{v}(v^*)$. Soit $(G,F,\mathcal{S},F_+,\underline{\underline{G}})$ un groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$ avec une action rationnelle sur $\mathbb{Q}$ du groupe algébrique $\underline{\underline{G}}$ sur $\underline{v}$. Pour chaque p dans $\mathcal{P}$,on fait opérer le groupe G_p sur $\underline{v}_p$,via l'action de $\underline{\underline{G}}_p$, et sur $\underline{v}^*_p$ par l'action contragrédiante . Le groupe F_p est contenu dans $G_p(v^*)$ et le quotient $G_p(v^*)/F_p$ est un sous-groupe d'indice fini de $\underline{\underline{G}}_p(v^*)$,lui est, pour presque tout p , égal . Le quintuplet $(G(v^*),F,\mathcal{S},F_+,\underline{\underline{G}}(v^*))$ est, naturellement, un sous-groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$ de G . Le groupe $G_{\mathcal{P}}(v^*)$ (resp. $G_{\mathbb{A}}(v^*)$) s'identifie,naturellement, à un sous-groupe fermé de $G_{\mathcal{P}}$ (resp. $G_{\mathbb{A}}$). On note $(G^{v^*},F^{v^*},\mathcal{S}^{v^*},F_+^{v^*},\underline{\underline{G}}(v^*))$ le groupe, de classe $C_{\mathbb{Q}}$, $(G(v^*)^{B_{v^*}},F^{B_{v^*}},\mathcal{S}^{B_{v^*}},F_+^{B_{v^*}},\underline{\underline{G}}(v^*))$, construit au §1.9 . On note $MA(v^*)$ le groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$, $(SA(v^*)^{B_{v^*}},\Sigma,\sigma,\Sigma_+,SA(v^*))$ construit sur le groupe, de classe $C_{\mathbb{Q}}$, $SA(v^*)$. En utilisant les notations du §1.7 , on a $MA(n^*) = Mp(\underline{w})$ et $SA(n^*) = Sp(\underline{w})$. Les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd}
 & MA_\alpha(v^*) \arrow[dr] \arrow[dd, dotted] & \\
G_\alpha^{v^*} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & Mp_\alpha(\underline{w}) \arrow[dd] \\
 & SA_\alpha(v^*) \arrow[dr, dashed] & \\
G_\alpha(v^*) \arrow[ur, dashed] \arrow[rr] & & Sp_\alpha(\underline{w})
\end{tikzcd}$$

; α valant p , $\mathcal{P}$ ou A .

De plus, on peut considérer $G_\alpha^{v^*}$ comme le revêtement de $G_\alpha(v^*)$ construit sur $MA_\alpha(v^*)$. Autrement dit :

$G_\alpha^{v^*} = \{ (g,m)\ \ G_\alpha(v^*) \times MA_\alpha(v^*)$ / g et m se projettent sur le même élément de $SA_\alpha(v^*) \}$.

On écrira v^* au lieu de B_{v^*} quand c'est en indice . De plus, si $\underline{v}'$ est une sous-algèbre de $\underline{v}$ définie sur $\mathbb{Q}$ stable par $\underline{\underline{G}}(v^*)$, on écrira $G^{v^*,\underline{v}'}$ au lieu de $G(v^*)^{B_{v^*},\underline{v}'}$. La proposition suivante résume les résultats établis au §1.9, dans un cadre plus général .

<u>*PROPOSITION/*</u> Soit $\underline{v}$ une algèbre de Lie algébrique définie sur $\mathbb{Q}$ et v^* un élément de $\underline{v}^*_{\mathbb{Q}}$. Soit $(G,F,\mathcal{S},F_+,\underline{\underline{G}})$ un groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$ avec une action de $\underline{\underline{G}}$ sur $\underline{v}$ rationnelle sur $\mathbb{Q}$.

i)Le groupe $G_{\mathbb{Q}}(v^*)$ se relève à $G^{v^*}_{\mathbb{A}}$ d'une manière canonique de sorte que $G^{v^*}_{\mathbb{Q}} = G_{\mathbb{Q}}(v^*) \times \{\pm 1\}$. Ce relèvement peut être regardé comme celui construit sur le relèvement de $SA_{\mathbb{Q}}(v^*)$ à $MA_{\mathbb{A}}(v^*)$.

ii)Si G est de classe $C^{\circ}_{\mathbb{Q}}$, $G(v^*)$ et G^{v^*} le sont aussi .

iii)Soit $\underline{v}'$ une sous-algèbre définie sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{v}$ stable par $\underline{\underline{G}}(v^*)$,

a)Le caractère $\lambda_p^{v^*,\underline{v}'}$ est trivial sur $\mathcal{S}_p^{v^*,\underline{v}'}(\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p}(v^*))$ pour presque tout p premier .

b)Le groupe $G_{\mathbb{Q}}(v^*)$ se relève canoniquement à $\tilde{G}^{v^*,\underline{v}'}_{\mathbb{A}}$ et à $G^{v^*,\underline{v}'}_{\mathbb{A}}$ et les caractères $\tilde{\lambda}^{v^*,\underline{v}'}_{\mathbb{A}}$ et $\lambda^{v^*,\underline{v}'}_{\mathbb{A}}$ y sont triviaux .

c)Si G' est un groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$ avec un morphisme rationnel de G' dans G ,les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} G'^{v^*}_{\alpha} & \to & G^{v^*}_{\alpha} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G'_{\alpha} & \to & G_{\alpha} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \tilde{G}'^{v^*,\underline{v}'}_{\alpha} & \to & \tilde{G}^{v^*,\underline{v}'}_{\alpha} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G'^{v^*,\underline{v}'}_{\alpha} & \to & G^{v^*,\underline{v}'}_{\alpha} \end{array}$$

pour $\alpha = p$, $\mathcal{P}$ ou A . De plus, les caractères $\tilde{\lambda}^{v^*,\underline{v}'}_{\alpha}$ et $\lambda^{v^*,\underline{v}'}_{\alpha}$ se déduisent les uns des autres par composition .

<u>REMARQUE</u>: Si $G = \underline{\underline{G}}$, on convient de noter i_p l'injection naturelle de $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p}$ dans $\underline{\underline{G}}_p$ de sorte qu'on peut parler de $i_p^{v^*}$, $i_p^{v^*,\underline{v}'}$ etc...

On a le résultat suivant :

<u>*LEMME/*</u> Soit $\underline{\underline{G}}$ un groupe réductif abélien défini sur $\mathbb{Q}$ avec une action rationnelle sur $\mathbb{Q}$ sur une algèbre de Lie $\underline{v}$ définie sur $\mathbb{Q}$. Le groupe $G^{v^*}_{\mathbb{A}}$ est abélien .

DÉMONSTRATION :

Il est clair qu'on peut supposer que $\underline{v}$ est l'algèbre de Heisenberg construite sur l'espace symplectique $\underline{w}$ et que $\underline{\underline{G}}$ est un sous-groupe réductif sur $\mathbb{Q}$ abélien de $Sp(\underline{w})$. On sait qu'il existe un lagrangien de $\underline{w}_{\mathbb{C}}$ stable par $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}$, d'où, un relèvement de $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}$ à $\widetilde{Mp}(\underline{w}_{\mathbb{R}})$ en utilisant la réalisation de Kirillov ({Be} ;ch.7) . D'autre part, d'aprés R.Howe {Ho3}, pour chaque p premier, il existe un relèvement de $\underline{\underline{G}}_p$ à $\widetilde{Mp}(\underline{w}_p)$. Il en résulte, pour chaque p dans $\mathcal{P}$, un caractère unitaire χ_p de G_p^{v*} tel que pour tout $\dot{g}\in G_p^{v*}$ se projetant sur $g\in\underline{\underline{G}}_p$, on ait $\dot{g} = \chi_p(\dot{g})g$. Donc, le groupe $\underline{\underline{G}}_p^{v*}$ est abélien . Par conséquent, le groupe $G_{\mathbb{A}}^{v*}$ est, aussi, abélien . D'où le lemme .

2 - *REPRÉSENTATIONS MÉTAPLECTIQUES DE WEIL*

Soit U un groupe algébrique unipotent défini sur $\mathbb{Q}$ d'algèbre de Lie $\underline{u}$. On fixe un élément u^* de $\underline{u}^*_{\mathbb{Q}}$. On note θ la $U_{\mathbb{Q}}$ -orbite de u^*, sous l'action coadjointe, et $\underline{w}$ l'espace quotient $\underline{u}/\underline{u}(u^*)$ muni de la forme symplectique B_{u^*} .

2.1. A chaque polarisation $\underline{l}$ de $\underline{u}_p$ en u^* , p parcourant $\mathcal{P}$, on associe la représentation projective $S'_{p,u^*,\underline{l}}$ du groupe $SA_p(u^*)$ dans l'espace $\mathcal{H}_{p,\theta}$,supposé fixé, de la représentation unitaire irréductible $\pi_{p,\theta}$ du groupe U_p associée à θ par la bijection de Kirillov(voir §1.5) . Le cocycle associé $c_{p,u^*,\underline{l}}$ sur le groupe $SA_p(u^*)$, coincide avec $c_{p,\underline{w},\underline{L}}$ où $\underline{L}$ est le lagrangien $\underline{l}/\underline{u}(u^*)$ de $\underline{w}$. Comme au §1.6 , on peut regarder $MA_p(u^*)$ comme sous-groupe fermé de l'extension centrale par le tore de $SA_p(u^*)$ via le cocycle $c_{p,u^*,\underline{l}}$. Un élément m de $MA_p(u^*)$ se représente, alors,par un couple (s,t) où s est la projection de m sur $SA_p(u^*)$ et t est une racine huitième complexe de l'unité dépendant du choix de $\underline{l}$. On pose: $S_{p,u^*}(m) = t\, S'_{p,u^*,\underline{l}}(s)$

Puisque la formule $S_{p,\underline{w}}(m) = t\, S'_{p,\underline{w},\underline{L}}(s)$ définit une représentation unitaire du groupe $MA_p(u^*)$ et que les cocycles des représentations projectives $S'_{p,u^*,\underline{l}}$ et $S'_{p,\underline{w},\underline{L}}$ coincident, S_{p,u^*} est une représentation unitaire du groupe $MA_p(u^*)$ et est indépendante du choix de la polarisation $\underline{l}$. De plus on a : $S_{p,u^*}(m)\, \pi_{p,\theta}(u)\, S_{p,u^*}(m)^{-1} = \pi_{p,\theta}(sus^{-1})$.

et $S_{p,u*}(-1) = -1$ (voir G.Lion et P.Perrin {L.P}) .

<u>2.2.</u> Pour presque tout p premier, le groupe $SA_{\mathbb{Z}_p}(u*)$ laisse invariant l'espace $\underline{u}_{\mathbb{Z}_p}$ et, parsuite, $U_{\mathbb{Z}_p}$. Donc, le relèvement $\sigma_p(SA_{\mathbb{Z}_p}(u*))$ de $SA_{\mathbb{Z}_p}(u*)$ à $MA_p(u*)$ (voir §1.10) agit,via $S_{p,u*}$, dans le sous-espace $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p,\theta}$ de $\mathcal{H}_{p,\theta}$ où $U_{\mathbb{Z}_p}$ opère trivialement via $\pi_{p,\theta}$ (voir §1.5.2) .

> *LEMME :* Pour presque tout p premier, l'action de $\sigma_p(SA_{\mathbb{Z}_p}(u*))$ sur l'espace $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p,\theta}$ via $S_{p,u*}$ est triviale .

La démonstration sera donnée au §2.4 .

<u>2.3.</u> Le lemme 2.2 permet de définir la représentation $S_{\mathcal{P},u*}$ de $MA_{\mathcal{P}}(u*)$ produit tensoriel infini des représentations $S_{p,u*}$,de $MA_p(u*)$ dans $\mathcal{H}_{p,\theta}$, restreint à la direction invariante $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p,\theta}$. Son espace s'identifie à $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\theta}$. De plus, elle passe au quotient et donne lieu à une représentation unitaire $S_{\mathbb{A},u*}$ de $MA_{\mathbb{A}}(u*)$ dans $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\theta}$ vérifiant $S_{\mathbb{A},u*}(-1) = -1$ et

$$S_{\mathbb{A},u*}(m)\, \pi_{\mathbb{A},\theta}(u)\, S_{\mathbb{A},u*}(m)^{-1} = \pi_{\mathbb{A},\theta}\,(sms^{-1})$$

pour tout u dans $U_{\mathbb{A}}$ et pour tout m dans $MA_{\mathbb{A}}(u*)$ se projetant sur l'élément s de $SA_{\mathbb{A}}(u*)$. Ceci étant, on considère le sous-groupe discret $SA_{\mathbb{Q}}(u*)$ de $MA_{\mathbb{A}}(u*)$. Par restriction, on a,donc, une représentation $S_{\mathbb{A},u*}$ de $SA_{\mathbb{Q}}(u*)$ dans $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\theta}$. D'autre part, on a une représentation unitaire δ_{u*} de $SA_{\mathbb{Q}}(u*)$ dans $L^2(U_{\mathbb{A}}/U_{\mathbb{Q}})$ obtenue en posant :

$$\delta_{u*}(s)\, \phi\, (u) = \phi\, (s^{-1}us)$$

pour tout s dans $SA_{\mathbb{Q}}(u*)$, u dans $U_{\mathbb{A}}$ et ϕ dans $L^2(U_{\mathbb{A}}/U_{\mathbb{Q}})$. On regarde,comme convenu, $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\theta}$, comme la réalisation concrète de $\pi_{\mathbb{A},\theta}$ comme sous-représentation de la représentation régulière $\pi_{\mathbb{A}}$ de $U_{\mathbb{A}}$ dans $L^2(U_{\mathbb{A}}/U_{\mathbb{Q}})$ Pour chaque s dans $SA_{\mathbb{Q}}(u*)$, l'espace $\delta_{u*}(s)\mathcal{H}_{\mathbb{A},\theta}$ est le sous-espace de $L^2(U_{\mathbb{A}}/U_{\mathbb{Q}})$ où la représentation $\pi_{\mathbb{A},s\theta}$ se réalise . Mais $s\theta = \theta$,donc,

$\delta_{u^*}(s)$ laisse invariant l'espace $\mathcal{H}_{A,\theta}$ et δ_{u^*} induit une représentation unitaire de $SA_{\mathbb{Q}}(u^*)$ dans $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\theta}$ qu'on notera, encore, δ_{u^*} .

LEMME : Les représentations $S_{\mathbb{A},u^*}$ et δ_{u^*} du groupe $SA_{\mathbb{Q}}(u^*)$ dans l'espace $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\theta}$ coincident .

La démonstration sera donnée au §2.4 .

<u>REMARQUE</u>: Si $\underline{u}$ est l'algèbre de Heisenberg $\underline{n}$ construite sur l'espace symplectique $\underline{w}$ et $u^* = n^*$, on a $SA(u^*) = Sp(\underline{w})$, $MA(u^*) = Mp(\underline{w})$, $S_{p,u^*} = S_{p,\underline{w}}$ et $S_{\mathbb{A},u^*} = S_{\mathbb{A},\underline{w}}$. Le lemme 2.2 est, en fait, la définition de σ_p et le lemme 2.3 a été prouvé sur la base que, dans ce cas, le groupe $SA_{\mathbb{Q}}(u^*)$ est semi-simple (voir §1.7) .

<u>2.4.</u> On va procéder à la démonstration des lemmes 2.2 et 2.3 par récurrence sur la dimension de l'algèbre $\underline{u}$.

Si l'algèbre de Lie $\underline{u}$ est abélienne, $\pi_{\mathbb{A},\theta}$ est un caractère unitaire du groupe $U_{\mathbb{A}}$, δ_{u^*} est la représentation triviale de $SA_{\mathbb{Q}}(u^*)$, les cocycles de Weil sont triviaux et les représentations projectives sont des représentations triviales . Donc, la représentation $S_{\mathbb{A},u^*}$ est, aussi, triviale . Les lemmes 2.2 et 2.3 résultent immédiatement .

On suppose, donc, que l'algèbre $\underline{u}$ est non abélienne . Son centre $\underline{z}_1$ est non nul et est stable par $SA(u^*)$. Quitte à quotienter $\underline{u}$ par le noyau de la restriction de u^* à $\underline{z}_1$, on peut supposer que $\dim(\underline{z}_1) = 1$ et que la forme u^* n'est pas nulle sur $\underline{z}_1$. Puisque l'intersection de $\underline{z}_1$ avec l'algèbre dérivée $[\underline{u},\underline{u}]$ est non nulle, nécessairement l'algèbre $\underline{z}_1$ est contenue dans $[\underline{u},\underline{u}]$. Si $\underline{z}_1 = [\underline{u},\underline{u}]$,l'algèbre $\underline{u}$ est de Heisenberg et le résultat est immédiat d'aprés la remarque précédente . On suppose, donc, que la dimension de $[\underline{u},\underline{u}]$ est au moins égale à 2 . Pour se ramener aux dimensions inférieures, on va utiliser une technique utilisée par J.Dixmier {Dix4, 5.7}.

Soit $\underline{b}$ un idéal de $\underline{u}$, contenu dans $[\underline{u},\underline{u}]$, défini sur $\mathbb{Q}$,contenant $\underline{z}_1$, de dimension 2 et contenu dans le deuxième élément de la suite centrale ascendante $\underline{z}_2$ de $\underline{u}$. Il est clair que $\underline{b}$ est central dans $[\underline{u},\underline{u}]$ .Soit $\underline{a}$ l'intersection de $\underline{z}_2$ avec le centre de $[\underline{u},\underline{u}]$. L'idéal $\underline{a}$ contient $\underline{b}$ et est, donc, de dimension au moins égale à 2 . De plus, c'est un idéal de $\underline{u}$ défini sur $\mathbb{Q}$ stable par $SA(u^*)$. Soit $\underline{u}'$ le centralisateur de $\underline{a}$ dans $\underline{u}$ et u'^* la restriction de u^* à $\underline{u}'$. C'est un idéal de $\underline{u}$,défini sur $\mathbb{Q}$, stable par $SA(u^*)$, de codimension non nulle et coisotrope pour la forme bilinéaire B_{u^*} . Soit U' le sous-groupe unipotent, défini sur $\mathbb{Q}$, invariant de U d'algèbre de Lie $\underline{u}'$. On note θ' la $U'_{\mathbb{Q}}$ -orbite de u'^* dans $\underline{u}'^*_{\mathbb{Q}}$,... Soit $\underline{l}$ une polarisation de $\underline{u}'$ en u'^* . C'est, aussi, une polarisation en u^* . Le principe d'induction par étages permet d'établir

$$\pi_{p,\theta} = \operatorname{ind}_{U'_p\uparrow U_p} \pi_{p,\theta'}$$

On peut, donc, regarder l'espace $\mathcal{H}_{p,\theta}$ comme $\operatorname{ind}_{U'_p\uparrow U_p} \mathcal{H}_{p,\theta'}$. En procédant comme dans la démonstration 1^er^ cas du lemme 1.9.2 , on montre que :

$$\bar{\lambda}_p^{u^*,\underline{u}'} S_{p,u^*}(\dot{g})\phi\,(u) = c_p(\dot{g})\; S_{p,u'^*}(\dot{g})\;\phi\;(g^{-1}ug)$$

pour toute fonction ϕ sur $U_{\mathbb{A}}$ appartenant à $\mathcal{H}_{p,\theta}$, pour u dans U_p et pour tout $\dot{g}$ dans $SA(u^*)_p^{u'^*}$ se projetant en g sur $SA_p(u^*)$ où $c_p(\dot{g})$ est une constante strictement positive . D'après le lemme 1.9.2 pour presque tout p premier, le caractère $\lambda_p^{u^*,\underline{u}'}$ est trivial sur $\sigma_p^{u^*,\underline{u}'}(SA_{\mathbb{Z}_p}(u^*))$. On en déduit que, pour presque tout p , pour tout s dans $SA_{\mathbb{Z}_p}(u^*)$ et pour toute fonction ϕ , comme ci-dessus, l'on a :

$$S_{p,u^*}(s)\phi\,(u) = c_p(s)\; S_{p,u'^*}(s)\phi\;(s^{-1}us)$$

où on a identifié s à son relèvement à $MA_p(u^*)$ et à $MA_p(u'^*)$ via σ_p . En notant, comme dans la démonstration du lemme 1.9.2 1^er^ cas, que l'espace $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p,\theta}$ s'obtient à partir de $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p,\theta'}$ par induction et en utilisant l'hypothèse de récurrence , on obtient le lemme 2.2 et $c_p(s) = 1$, pour presque tout p et pour tout s dans $SA_{\mathbb{Z}_p}(u^*)$. Pour avoir le lemme 2.3 , on va procéder comme dans la démonstration du lemme 1.9.6 1[er] cas . On remarque que :

$\pi_{\mathbb{A},\theta} = \operatorname{ind}_{U'_{\mathbb{A}}}^{U_{\mathbb{A}}} \pi_{\mathbb{A},\theta'}$. On pose $\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{A},\theta} = \operatorname{ind}_{U'_{\mathbb{A}}}^{U_{\mathbb{A}}} \mathcal{H}_{\mathbb{A},\theta'}$. On établit de la même façon que dans cette démonstration, les deux égalités :

$$S_{\mathbb{A},u^*}(g)\hat{\phi}\,(u) \;=\; c(g)\,\lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{u'}}(g)\;S_{\mathbb{A},u'^*}(g)\hat{\phi}\,(g^{-1}ug)$$

$$\delta_{u^*}(g)\hat{\phi}\,(u) \;=\; \delta_{u'^*}(g)\hat{\phi}\,(g^{-1}ug)$$

pour toute fonction $\hat{\phi}$ continue sur $U_{\mathbb{A}}$ appartenant à $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\theta}$, pour tout g dans $SA_{\mathbb{Q}}(u^*)$ et pour tout u dans $U_{\mathbb{A}}$ avec $c(g)$ une constante strictement positive . Le lemme 1.9.6 implique que le caractère $\lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{u'}}$ est trivial sur $SA_{\mathbb{Q}}(u^*)$. L'hypothèse de récurrence implique , alors, que $S_{\mathbb{A},u^*}(g)$ et $c(g)\delta_{u^*}(g)$ coincident . Du fait qu'on a des opérateurs unitaires, résulte que $c(g) = 1$ pour tout g dans $SA_{\mathbb{Q}}(u^*)$. D'où le lemme 2.3 .

3 - EXTENSIONS DES REPRÉSENTATIONS DES GROUPES UNIPOTENTS ADÈLES

On se fixe un groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$, $(G,F,S,F_+,\underline{\underline{G}})$. On note $\underline{g}$ l'algèbre de Lie algébrique, définie sur $\mathbb{Q}$, du groupe $\underline{\underline{G}}$. Soit $\underline{u}$ un idéal de $\underline{g}$, défini sur $\mathbb{Q}$, unipotent, et $\underline{\underline{G}}$ -invariant . On note U le sous-groupe invariant, défini sur $\mathbb{Q}$, unipotent, de $\underline{\underline{G}}$ associé . Pour chaque p dans $\mathcal{P}$ le groupe U_p de ses $\mathbb{Q}_p$ -points se relève à G_p en un sous-groupe invariant fermé et de type I . D'autre part, on peut regarder $U_{\mathbb{A}}$, d'une manière canonique, comme sous-groupe fermé invariant de $G_{\mathcal{P}}$ et de $G_{\mathbb{A}}$ de sorte que la projection sur $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}}$ restreinte à $U_{\mathbb{A}}$ soit l'application identique (voir §1.4) D'aprés Moore {Moo2}, le groupe $U_{\mathbb{A}}$ n'est de type I que lorsqu'il est abélien . Cet obstacle va être écarté du fait qu'on va appliquer la méthode des petits groupes de Mackey uniquement pour les sous-représentations irréductibles de $L^2(U_{\mathbb{A}}/U_{\mathbb{Q}})$. On fixe une telle représentation . Elle est de la forme $(\pi_{\mathbb{A},\theta},\mathcal{H}_{\mathbb{A},\theta})$ où θ est une $U_{\mathbb{Q}}$ -orbite dans $\underline{u}^*_{\mathbb{Q}}$ bien déterminée (voir §1.5.2) On fixe un élément u* de θ . On considère les groupes de classe $C_{\mathbb{Q}}$, $(G(u^*),F,S,F_+,\underline{\underline{G}}(u^*))$ et $(G^{u^*},F^{u^*},S^{u^*},F_+^{u^*},\underline{\underline{G}}(u^*))$ construits au §1.10 .

3.1 LEMME : On pose $\underline{u}^*_{\mathbb{Z}_p} = \{f\in\underline{u}^*_p \,/\, f(\underline{u}_{\mathbb{Z}_p}) \subset \mathbb{Z}_p\}$. Pour presque tout p :

i) $(U_p u^*) \cap \underline{u}^*_{\mathbb{Z}_p} = U_{\mathbb{Z}_p} u^*$;

ii) $(U_p G_p(u^*)) \cap S_p(\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p}(u^*)) = U_{\mathbb{Z}_p} S_p(\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p}(u^*))$.

Démonstration .

ii) résulte de i) . En effet, la forme u^* étant dans $\underline{u}^*_{\mathbb{Q}}$, elle est, pour presque tout p premier, dans $\underline{u}_{\mathbb{Z}_p}(u^*)$. D'autre part, le groupe $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p}$ laisse invariant $\underline{u}_{\mathbb{Z}_p}$ et, par suite, le sous-espace $\underline{u}^*_{\mathbb{Z}_p}$ de $\underline{u}^*_p$. Par conséquent, $(U_p u^*) \cap (\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p} u^*)$ est un sous-espace de $(U_p u^*) \cap \underline{u}^*_{\mathbb{Z}_p}$, lequel d'aprés i), coincide avec $U_{\mathbb{Z}_p} u^*$. Mais, alors, $[(U_p G_p(u^*)) \cap \mathcal{S}_p(\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p})]u^*$ est un sous-espace de $U_{\mathbb{Z}_p} u^*$ et $(U_p G_p(u^*)) \cap \mathcal{S}_p(\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p})$ est un sous-groupe de $(U_{\mathbb{Z}_p} G_p(u^*)) \cap \mathcal{S}_p(\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p})$. Ce dernier coincide avec le sous-groupe $U_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{S}_p(\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p}(u^*))$ de G_p car $U_{\mathbb{Z}_p}$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_p(\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p})$. Ceci étant, bien sûr, pour presque tout p premier . L'inclusion dans l'autre sens est évidente . D'où ii) . Pour prouver i), on va procéder par récurrence sur la dimension de $\underline{u}$.

Soit $(\underline{z}_i)_{i \geq 0}$, avec $\underline{z}_0 = \{0\}$, la suite centrale ascendante de $\underline{u}$. Si l'algèbre de Lie $\underline{u}$ est abélienne, le résultat est évident . On suppose, donc, qu'elle ne l'est pas . On note $\underline{v}$ le noyau de la restriction de u^* à $\underline{z}_1$. C'est un idéal de $\underline{u}$ défini sur $\mathbb{Q}$. On note V le sous-groupe unipotent défini sur $\mathbb{Q}$ de U associé, $U' = U/V$, $\underline{u}' = \underline{u}/\underline{v}$ et $u'^* = u^*|\underline{u}'$. Pour presque tout p premier, la projection de $\underline{u}_p$ sur $\underline{u}'_p$ envoie $\underline{u}_{\mathbb{Z}_p}$ sur $\underline{u}'_{\mathbb{Z}_p}$ et, par suite, la projection de U_p sur U'_p envoie $U_{\mathbb{Z}_p}$ sur $U'_{\mathbb{Z}_p}$. Ceci résulte du fait que l'application exponentielle et l'application logarithme entre $\underline{u}$ et U et entre $\underline{u}'$ et U' sont rationnelles sur $\mathbb{Q}$ de sorte que pour presque tout p premier, $U_{\mathbb{Z}_p} = \exp(\underline{u}_{\mathbb{Z}_p})$ et $U'_{\mathbb{Z}_p} = \exp(u'_{\mathbb{Z}_p})$. Soit u un élément de U_p tel que uu^* appartienne à $\underline{u}^*_{\mathbb{Z}_p}$ et soit u' sa projection sur U'_p . La forme uu^* est nulle sur $\underline{v}$ et induit sur $\underline{u}'$ la forme $u'u'^*$. Si p est suffisemment grand, on a : $u'u'^* \in \underline{u}'^*_{\mathbb{Z}_p}$. L'hypothèse de récurrence(si $\underline{v}$ n'est pas nul)affirme, alors, l'existence d'un élément u'_1 de $U'_{\mathbb{Z}_p}$ tel que $u'u'^* = u'_1 u'^*$. Soit u_1 un antécédent dans $U_{\mathbb{Z}_p}$ de u'_1 . On a $uu^* = u_1 u^*$. Donc, on peut se ramener au cas où $\underline{z}_1$ est de dimension égale 1 et u^* ne s'annule pas identiquement sur $\underline{z}_1$. Soit $\underline{a}$ un idéal de $\underline{u}$

de dimension 2 défini sur $\mathbb{Q}$ contenant $\underline{z}_1$ et contenu dans $\underline{z}_2$ et soit, maintenant, $\underline{u}'$ le centralisateur de $\underline{a}$ dans $\underline{u}$. On note U' le sous-groupe invariant de U d'algèbre de Lie $\underline{u}'$. On choisit un élément y dans $\underline{a}_{\mathbb{Q}}$, un élément z dans $\underline{z}_{1;\mathbb{Q}}$ et un élément x de $\underline{u}_{\mathbb{Q}}$ de sorte que : $u^*(y) = 0$, $u^*(z) = 1$ et $[x,y] = z$. Soit $\underline{d}$ la droite définie sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{u}$ engendrée par x et D le sous groupe-algébrique défini sur $\mathbb{Q}$ associé . Le groupe algébrique U s'identifie au produit semi-direct de D et U' . De plus, pour chaque p , on a $U_p = D_p \times U'_p$ et, pour presque tout p premier, $U_{\mathbb{Z}_p} = D_{\mathbb{Z}_p} \times U'_{\mathbb{Z}_p}$. On suppose que p est un nombre premier suffisamment grand et soit u un élément de U_p tel que uu^* appartient à $\underline{u}^*_{\mathbb{Z}_p}$. L'élément u s'écrit, d'une manière unique, sous la forme $u = \exp(tx)\, u'$ avec t dans $\mathbb{Q}_p$ et u' dans U'_p . En particulier, on a : $uu^*(y) = \exp(tx)\, u^*(y) = u^*(y-tz) = -t$. Donc, t est un élément de $\mathbb{Z}_p$. On peut, alors, supposer que $t = 0$. Soit u'^* la restriction de u^* à $\underline{u}'$. On a : $u'u'^* \in \underline{u}'^*_{\mathbb{Z}_p}$. Par hypothèse de récurrence, il existe u'_1 ,élément de $U'_{\mathbb{Z}_p}$, tel que $u'_1 u'^* = u'u'^*$. D'autre part, x se trouve dans $\underline{u}_{\mathbb{Z}_p}$. Donc, $uu^*(x) = u'\, u^*(x)$ et c'est un élément de $\mathbb{Z}_p$ ainsi que $u'_1 u^*(x)$. On pose $s = u'u^*(x) - u'_1 u^*(x)$. C'est un élément de $\mathbb{Z}_p$ et $uu^* = u'u^* = \exp(sy)\, u'_1 u^*$. D'où le lemme .

3.2 LEMME :

i) Le stabilisateur dans $G_{\mathcal{P}}$ (resp. $G_{\mathbb{A}}$) de la représentation $\pi_{\mathbb{A},\theta}$ coincide avec le sous-groupe $U_{\mathbb{A}} G_{\mathcal{P}}(u^*)$ (resp. $U_{\mathbb{A}} G_{\mathbb{A}}(u^*)$) .

ii) Le quintuplet $(UG(u^*), F, \mathcal{S}, F_+, U\underline{G}(u^*))$ est un groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$ et on a : $(UG(u^*))_{\mathcal{P}} = U_{\mathbb{A}}\, G_{\mathcal{P}}(u^*)$ et $(UG(u^*))_{\mathbb{A}} = U_{\mathbb{A}}\, G_{\mathbb{A}}(u^*)$.

iii) Les groupes $U_{\mathbb{A}}\, G_{\mathbb{Q}}$, $U_{\mathbb{A}}\, G_{\mathbb{Q}}(u^*)$ et $U_{\mathbb{A}}\, G_{\mathcal{P}}(u^*)$ (resp. $U_{\mathbb{A}}\, G_{\mathbb{A}}(u^*)$) sont des sous-groupes fermés de $G_{\mathcal{P}}$ (resp. $G_{\mathbb{A}}$) .

Démonstration :

(i) Il suffit de voir que le stabilisateur dans $G_{\mathcal{P}}$ de $\pi_{\mathbb{A},\theta}$ est $U_{\mathbb{A}}\, G_{\mathcal{P}}(u^*)$. On rappelle que, pour chaque $p \in \mathcal{P}$, le groupe U_p est C.C.R. et que $\pi_{\mathbb{A},\theta}$ est une représentation C.C.R. de $U_{\mathbb{A}}$ irréductible . Soit $g = (g_p) \in G_{\mathcal{P}}$. La composante sur U_p de $g\pi_{\mathbb{A},\theta}$ est $g_p\, \pi_{p,\theta}$ et $g\pi_{\mathbb{A},\theta}$ est CCR. D'après la proposition 1.3.5. ii) pour que $g\pi_{\mathbb{A},\theta} = \pi_{\mathbb{A},\theta}$ il faut et il suffit que $g_p\, \pi_{p,\theta} = \pi_{p,\theta}$ pour tout $p \in \mathcal{P}$. Autrement dit, g_p appartient à $U_p\, G_p(u^*)$ pour tout $p \in \mathcal{P}$ (M. Duflo {Du 3, lemme 12 }). D'où l'assertion.

(ii) On considère l'orbite Uu^* dans u^* . C'est une sous-variété algébrique de $\underline{u}$ définie sur $\mathbb{Q}$. Son stabilisateur dans $\underline{G}$ est, clairement, $U\underline{G}(u^*)$. C'est, donc, un groupe algébrique défini sur $\mathbb{Q}$. L'ensemble de ses $\mathbb{Q}_p$ points coïncide avec $U_p\, \underline{\underline{G}}_p(u^*)$. En effet, soit g un élément de $(U\underline{G}\,(u^*)\,)_p$. Il existe $u \in U$ tel que $g\, u^* = uu^*$. uu^* est un $\mathbb{Q}_p$-point de $U.u^*$. Donc, d'après R. Godement {GO.2, théorème 4} , on peut choisir u dans U_p . Mais, alors, $u^{-1}g$ est dans $\underline{\underline{G}}_p(u^*)$. D'où l'assertion. On voit facilement que le quotient $U_p\, G_p\,(u^*)/F_p$ a un indice dans $U_p\, \underline{\underline{G}}_p\,(u^*)$ égal à celui de $G_p\,(u^*)\,/\,F_p$ dans $\underline{\underline{G}}_p(u^*)$. Donc $U_pG_p(u^*)/F_p$ est un sous-groupe d'indice fini de $(U\underline{\underline{G}}(u^*))_p$, lui est presque partout égal . Le quintuplet $(UG(u^*), F, \mathcal{S}, F_+, U\underline{\underline{G}}(u^*))$ est, alors, un groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$. L'égalité $(UG(u^*)\,)_{\mathcal{P}} = U_{\mathbb{A}}\, G_{\mathcal{P}}(u^*)$ résulte immédiatement du lemme 3.1. L'autre en résulte par passage au quotient.

(iii) Le fait que $U_{\mathbb{A}}\, G_{\mathcal{P}}(u^*)$ (resp. $U_{\mathbb{A}}\, G_{\mathbb{A}}(u^*)$) est un sous-groupe fermé de $G_{\mathcal{P}}$ (resp. $G_{\mathbb{A}}$) résulte de ii) ou i) . Le fait que le groupe $U_{\mathbb{A}}\, G_{\mathbb{Q}}$ est fermé dans $G_{\mathbb{A}}$ résulte du fait que $U_{\mathbb{A}} \cap G_{\mathbb{Q}} = U_{\mathbb{Q}}$ et que $U_{\mathbb{A}}\, /\, U_{\mathbb{Q}}$ est un compact. Les mêmes arguments montrent que $U_{\mathbb{A}}\, G_{\mathbb{Q}}(u^*)$ est fermé dans $U_{\mathbb{A}}\, G_{\mathbb{A}}(u^*)$ si on prouve que $(UG(u^*)\,)_{\mathbb{Q}} = U_{\mathbb{Q}}\, G_{\mathbb{Q}}(u^*)$.

Or, $(U\underline{G}\ (u^*))_{\mathbb{Q}} = \{g \in \underline{G}_{\mathbb{Q}}\ /\ gu^* \in Uu^*\}$ et $\underline{u}^*_{\mathbb{Q}} \cap Uu^* = U_{\mathbb{Q}}\ u^*$. Donc $(U\underline{G}\ (u^*))_{\mathbb{Q}} = U_{\mathbb{Q}}\ \underline{G}_{\mathbb{Q}}\ (u^*)$. En prenant les images réciproques, on obtient le résultat. D'où le lemme.

3.3. On a, naturellement, une structure de groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$ sur $U \times G(u^*)$, $U \times G^{u^*}$ et des morphismes rationnels de $U \times G^{u^*}$ dans $U \times G(u^*)$ et de $U \times G(u^*)$ dans $UG\ (u^*)$. Par composition, on obtient un morphisme rationnel α de $U \times G^{u^*}$ dans $UG(u^*)$. Pour $j = p$, $\mathcal{P}$ ou $\mathbb{A}$, on note α_j l'homomorphisme de groupe (surjectif) de $(U \times G^{u^*})_j = U_j \times G_j^{u^*}$ sur $(UG\ (u^*))_j = U_j\ G_j\ (u^*)$ et N_j son noyau. On a :

$$N_p = \{(u^{-1}, u)\ ;\ u \in U_p(u^*)\} \times \{\pm 1\}$$

$$N_{\mathcal{P}} = \{(u^{-1}, u)\ ;\ u \in U_{\mathbb{A}}(u^*)\} \times \Sigma$$

$$N_{\mathbb{A}} = \{(u^{-1}, u)\ ;\ u \in U_{\mathbb{A}}(u^*)\} \times \{\pm 1\}$$

On note χ_{j,u^*} le caractère unitaire de $U_j(u^*)$ associé (par la méthode des orbites) à la restriction de u^* à $\underline{u}_j(u^*)$, $\chi_p^{u^*}$ le caractère de N_p valant -1 en -1 et tel que $\chi_p^{u^*}(u^{-1},u) = \chi_{p,u^*}(u^{-1})$ pour tout $u \in U_p(u^*)$, $\chi_{\mathcal{P}}^{u^*}$ et $\chi_{\mathbb{A}}^{u^*}$ les caractères de $N_{\mathcal{P}}$ et $N_{\mathbb{A}}$ obtenus en faisant le produit tensoriel infini des caractères $\chi_p^{u^*}$ ($N_{\mathcal{P}}$ est le produit infini des groupes N_p restreint à la gerbe des compacts $N_p \cap (U_p \times \mathcal{S}_p^{u^*}(\underline{G}_{\mathbb{Z}_p}(u^*))) = \{(u^{-1},u),\ u \in U_{\mathbb{Z}_p}(u^*)\}$). On a $\chi_{\mathbb{A}}^{u^*}(-1) = -1$ et $\chi_{\mathbb{A}}^{u^*}(u^{-1},u) = \chi_{\mathbb{A},u^*}(u^{-1})$ pour tout $u \in U_{\mathbb{A}}(u^*)$.

Pour $j = p$, $\mathcal{P}$ ou $\mathbb{A}$, la représentation de Weil S_{j,u^*} de $MA_j(u^*)$ induit, par composition, une représentation unitaire du groupe $G_j^{u^*}$ (dans $\mathfrak{X}_{j,\theta}$) qu'on notera de la même façon. Pour $u \in U_j$ et $g \in G_j^{u^*}$, on pose :

$$\pi_{j,\theta}S_{j,u^*}(u,g) = \pi_{j,\theta}(u)S_{j,u^*}(g)$$

Du fait que $S_{j,u^*}(g)\pi_{j,\theta}(u)S_{j,u^*}(g)^{-1} = \pi_{j,\theta}(gug^{-1})$ résulte que

$\pi_{j,\theta}S_{j,u*}$ est une représentation (unitaire irréductible dans l'espace $\mathcal{H}_{j,\theta}$) du groupe $(U \times G^{u*})_j$ prolongeant $\pi_{j,\theta}$. Il est clair que $\pi_{\mathbb{A},\theta}S_{\mathcal{P},u*}$ coïncide avec la représentation de $(U \times G^{u*})_{\mathcal{P}} = U_{\mathbb{A}} \times G^{u*}_{\mathcal{P}}$ produit tensoriel infini des représentations $\pi_{p,\theta}S_{p,u*}$ restreint à l'unique direction invariante $\mathcal{H}_{\mathbf{z}_{p,\theta}}$. De plus, la représentation $\pi_{\mathbb{A},\theta}S_{\mathbb{A},u*}$ s'obtient par passage au quotient et on a : $\pi_{\mathbb{A},\theta}S_{\mathbb{A},u*}(-1) = -1$. D'après G. Lion et P. Perrin {L.P.}, pour tout $p \in \mathcal{P}$, la restriction de la représentation $\pi_{p,\theta}S_{p,u*}$ à N_p est un multiple du caractère χ_p^{u*}. Il en résulte que la restriction de la représentation $\pi_{\mathbb{A},\theta}S_{\mathcal{P},u*}$ (resp. $\pi_{\mathbb{A},\theta}S_{\mathbb{A},u*}$) à $N_{\mathcal{P}}$ (resp. $N_{\mathbb{A}}$) est un multiple du caractère $\chi_{\mathcal{P}}^{u*}$ (resp. $\chi_{\mathbb{A}}^{u*}$).

Soit, pour $j = p$ ou $\mathbb{A}$, une représentation unitaire E du groupe G_j^{u*} dont la restriction à $U_j(u*)$ est un multiple de $\chi_{j,u*}$ et valant -1 en -1. On la considère comme représentation de $U_j \times G_j^{u*}$ trivialement sur U_j. Donc, sa restriction à N_j est un multiple du caractère $(\chi_j^{u*})^{-1}$, et, la représentation unitaire $\pi_{j,\theta}\, S_{j,u*} \otimes E$ de $U_j \times G_j^{u*}$ passe au quotient et définit une représentation unitaire du stabilisateur $U_jG_j(u*)$ de $\pi_{j,\theta}$ dans G_j. On la note de la même façon. On pose :

$$I_{u*,E} = \operatorname{ind}_{U_jG_j(u*)\uparrow G_j} \pi_{j,\theta}S_{j,u*} \otimes E$$

<u>THÉORÈME</u> : Pour $j = p$, $\mathcal{P}$ ou $\mathbb{A}$, on a :

i) L'application $E \mapsto I_{u*,E}$ est une bijection de l'ensemble des représentations impaires de G_j^{u*} dont la restriction à $U_j(u*)$ est un multiple de $\chi_{j,u*}$ sur l'ensemble des représentations de G_j dont la restriction à U_j est basée sur la G_j-orbite de $\pi_{j,\theta}$.

ii) Soit E_1 et E_2 deux représentations impaires de G_j^{u*} dont la restriction à $U_j(u*)$ est un multiple de $\chi_{j,u*}$. L'ensemble des opérateurs d'entrelacement des représentations I_{u*,E_1} et I_{u*,E_2} est isomorphe à celui de E_1 et E_2.

Démonstration :

Pour $j = p$, $p \in \mathcal{P}$, le théorème est la proposition II.14 de M.Duflo {Du3} pour un point u^* rationnel de $\underline{u}^*$. On suppose $j = \mathbb{A}$. La représentation $\pi_{\mathbb{A},\theta}$ étant C.C.R. , toute représentation irréductible de la $\mathbb{C}^*$-algèbre de $U_{\mathbb{A}}$,ayant le même noyau, lui est équivalente (J.Glimm{Gl;p.583})

i) et ii) résultent, alors, immédiatement des théorèmes 1 et 2 de R.Blattner {Bl;p.1101} . D'où le théorème .

3.4. Soit E une représentation unitaire impaire de $G_{\mathbb{A}}^{u^*}$ dont la restriction à $U_{\mathbb{A}}(u^*)$ est un multiple de $\chi_{\mathbb{A},u^*}$. On suppose que E est le produit tensoriel infini de représentations unitaires irréductibles E_p de $G_p^{u^*}$ restreint à une direction invariante $D = (D_p)$. Pour chaque p dans $\mathcal{P}$,la restriction de E_p à $U_p(u^*)$ est un multiple de χ_{p,u^*} et vaut -1 en -1 . Il est clair que $\pi_{\mathbb{A},\theta} S_{\mathbb{A},u^*} \otimes E$ est le produit tensoriel infini des représentations unitaires irréductibles $\pi_{p,\theta} S_{p,u^*} \otimes E_p$ de $U_pG_p(u^*)$ restreint à la direction invariante $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p,\theta} \otimes D_p$. D'aprés le §1.3.3 , $I_{u^*,E}$ est la représentation unitaire irréductible produit tensoriel infini des représentations unitaires irréductibles I_{u^*,E_p} restreint à la direction invariante obtenue de la direction invariante $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p,\theta} \otimes D_p$ par induction . Concernant la réciproque, on a le résultat suivant :

PROPOSITION : On suppose que le groupe G est de classe $\overset{\circ}{C}_{\mathbb{Q}}$. Soit E une représentation unitaire impaire de $G_{\mathbb{A}}^{u^*}$ dont la restriction à $U_{\mathbb{A}}(u^*)$ est un multiple de $\chi_{\mathbb{A},u^*}$. Pour que $I_{u^*,E}$ soit le produit tensoriel infini restreint de représentations unitaires irréductibles de G_p il faut et il suffit que la représentation E le soit .

Démonstration :

La condition suffisante est traitée ci-dessus . Reste à montrer que si $I_{u^*,E}$ est un produit tensoriel infini restreint de représentations irréductibles , E l'est aussi . D'aprés le théorème 1.2 , les groupes G_p , $G_p(u^*)$ et $G_p^{u^*}$ sont de type I pour tout p dans $\mathcal{P}$. D'autre part, $I_{u^*,E}$ est une représentation irréductible et E l'est aussi d'aprés le théorème 3.3 . Soit π_p la composante irréductible de $I_{u^*,E}$ sur G_p et E_p celle de E sur $G_p^{u^*}$. Il est clair que $\pi_p = I_{u^*,E_p}$. Soit V_p une réalisation concrète de la représentation E_p et $\mathcal{H}_p = \operatorname{ind}_{U_pG_p(u^*)\uparrow G_p} \mathcal{H}_{p,\theta} \otimes V_p$ la réalisation concrète de π_p qui en résulte . Soit V une réalisation concrète de la représentation irréductible E et $\mathcal{H} = \operatorname{ind}_{U_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{A}}(u^*)\uparrow G_{\mathbb{A}}} \mathcal{H}_{\mathbb{A},\theta} \otimes V$ la réalisation concrète de $I_{u^*,E}$ qui en résulte .

Soit ${}_\bullet p$ un nombre premier à partir duquel les sections S_p et $S_p^{u^*}$ sont définies , et , on peut choisir un vecteur ψ_p dans $\mathcal{H}_p$ de norme 1 invariant par $S_p(\underline{G}_{\mathbb{Z}_p})$ donnant lieu à une direction invariante permettant la décomposition de la représentation $I_{u^*,E}$ en produit tensoriel infini restreint . Pour tout $p \in \mathcal{P}$, $p \geq {}_\bullet p$, on pose :

$p_i = \{q \in \mathcal{P} ; {}_\bullet p \leq q < p\}$; $\bar{p}_i = \{q \in \mathcal{P} ; q \geq p\}$; $K_p = S_p(\underline{G}_{\mathbb{Z}_p})$;

$K_{\bar{p}_i} = \prod_{q \in \bar{p}_i} K_q$ $\psi_{\bar{p}_i} = \bigotimes_{q \in \bar{p}_i} \psi_q$ $H_p = U_pG_p(u^*)$ et si $p > {}_\circ p$,

$K_{p_i} = \prod_{q \in p_i} K_q$; $\psi_{p_i} = \bigotimes_{q \in p_i} \psi_q$; $E_{p_i} = \bigotimes_{q \in p_i} E_q$; $V_{p_i} = \bigotimes_{q \in p_i} V_q$;

$E_{\bar{p}_i}$ la représentation unitaire irréductible de $G_{\bar{p}_i}^{u^*}$ telle que

$E_{\bar{{}_\circ p}} = E_{p_i} \otimes E_{\bar{p}_i}$ avec $E = \bigotimes_{q \in \mathcal{P} - \bar{{}_\circ p}} E_q \otimes E_{\bar{{}_\circ p}}$; $V_{\bar{p}_i}$ une réalisation concrète de $E_{\bar{p}_i}$; $\mathcal{H}'_{\bar{p}_i} = \operatorname{ind}_{H_{\bar{p}_i} \uparrow G_{\bar{p}_i}} \mathcal{H}_{\bar{p}_i,\theta} \otimes V_{\bar{p}_i}$; $\mathcal{H}_{\bar{p}_i}$ le produit tensoriel infini de $\mathcal{H}_q$, $q \geq p$, restreint à la famille (ψ_q) considérée ci-dessus; $\mathcal{H}_{p_i} = \bigotimes_{q \in p_i} \mathcal{H}_q$ etc...

On note $s(p)$ le nombre premier suivant p. Pour chaque $p \geq {}_\circ p$, on identifie $V_{\bar p_i}$ et $V_p \otimes V_{\overline{s(p)}_i}$. On a, donc, $V_{{}_\circ\bar p_i} = V_{p_i} \otimes V_{\bar p_i}$, $\mathcal{H}'_{{}_\circ\bar p_i} = \mathcal{H}_{p_i} \otimes \mathcal{H}'_{\bar p_i}$ et $\mathcal{H}_{{}_\circ\bar p_i} = \mathcal{H}_{p_i} \otimes \mathcal{H}_{\bar p_i}$. On fixe un opérateur d'entrelacement unitaire $T_{{}_\circ p}$ de $\mathcal{H}_{{}_\circ\bar p_i}$ sur $\mathcal{H}'_{{}_\circ\bar p_i}$ et on note, pour $p > {}_\circ p$, T_p l'opérateur d'entrelacement unitaire de $\mathcal{H}_{\bar p_i}$ sur $\mathcal{H}'_{\bar p_i}$ tel que $T_{{}_\circ p} = id \otimes T_p$ suivant les décompositions précédentes. On pose $\psi'_{\bar p_i} = T_p(\psi_{\bar p_i})$. C'est un vecteur $K_{\bar p_i}$ -invariant de $\mathcal{H}'_{\bar p_i}$ et on a

$\psi'_{{}_\circ\bar p_i} = \psi_{p_i} \otimes \psi'_{\bar p_i}$ pour tout $p > {}_\circ p$. On pose $\Delta_p = K_p H_p$, $\bar\Delta_p = G_p - \Delta_p$, $\mathcal{H}_{\Delta_p} = \{f \in \mathcal{H}_p$ ayant le support dans $\Delta_p\}$; $\mathcal{H}_{\bar\Delta_p} = \{f \in \mathcal{H}_p$ ayant le support dans $\bar\Delta_p\}$. On a : $\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_{\Delta_p} \oplus \mathcal{H}_{\bar\Delta_p}$ et cette somme est orthogonale. Pour cette décomposition, on a :

$$\psi_p = \psi_{\Delta_p} + \psi_{\bar\Delta_p}, \qquad p \geq {}_\circ p$$

De même, on pose $\Delta_{\bar p_i} = K_{\bar p_i} H_{\bar p_i}$, $\bar\Delta_{\bar p_i} = G_{\bar p_i} - \Delta_{\bar p_i}$, $\mathcal{H}'_{\Delta_{\bar p_i}} = \{f \in \mathcal{H}'_{\bar p_i}$ ayant leur support dans $\Delta_{\bar p_i}\}$ et $\mathcal{H}'_{\bar\Delta_{\bar p_i}} = \{f \in \mathcal{H}'_{\bar p_i}$ ayant leur support dans $\bar\Delta_{\bar p_i}\}$. On a, aussi, une décomposition orthogonale : $\mathcal{H}'_{\bar p_i} = \mathcal{H}'_{\Delta_{\bar p_i}} \oplus \mathcal{H}'_{\bar\Delta_{\bar p_i}}$ et, suivant cette décomposition, on a :

$$\psi'_{\bar p_i} = \psi'_{\Delta_{\bar p_i}} + \psi'_{\bar\Delta_{\bar p_i}}, \qquad p \geq {}_\circ p$$

On remarque que, pour $p > {}_\circ p$, $\Delta_{{}_\circ\bar p_i} = \prod_{{}_\circ p \leq q < p} \Delta_q \times \Delta_{\bar p_i}$ et, par conséquent,

$$\psi'_{\Delta_{{}_\circ\bar p_i}} = \bigotimes_{{}_\circ p \leq q < p} \psi_{\Delta_q} \otimes \psi'_{\Delta_{\bar p_i}}$$

En particulier, on a : $||\psi'_{\Delta_{{}_\circ\bar{p}_i}}|| = \prod_{{}_\circ p\leq q<p} ||\psi_{\Delta_q}|| \cdot ||\psi'_{\Delta_{\bar{p}_i}}||$ pour tout $p > {}_\circ p$. D'autre part, en remarquant que $G_{{}_\circ\bar{p}_i}$ est la réunion croissante des sous-ensembles ouverts $\Theta_p = \prod_{{}_\circ p\leq q<p} G_q \times \Delta_{\bar{p}_i}$, pour $p \in \mathcal{P}$, $p \geq {}_\circ p$, on tire que :

$$1 = ||\psi'_{{}_\circ\bar{p}_i}||^2 = \lim_{p\to+\infty} \int_{\Theta_p/H_{\bar{p}_i}} ||\psi'_{{}_\circ\bar{p}_i}(g)||^2 dg = \lim_{p\to+\infty} ||\psi'_{\Delta_{\bar{p}_i}}||^2$$

Ainsi $\lim\limits_{p\to+\infty} ||\psi'_{\Delta_{\bar{p}_i}}|| = 1$ et on peut choisir ${}_\circ p$ de sorte que $||\psi'_{\Delta_{{}_\circ\bar{p}_i}}|| \neq 0$. Par conséquent le produit $\prod_{{}_\circ p\leq q<p} ||\psi_{\Delta_q}||$ converge vers une limite non nulle. Ceci équivaut à dire que la série de terme général $1-||\psi_{\Delta_q}||$ converge. Or

$$\inf_{\substack{\alpha\in\mathbb{C}\\|\alpha|=1}} ||\psi_p - \alpha \frac{1}{||\psi_{\Delta_p}||} \psi_{\Delta_p}||^2 = \inf_{\substack{\alpha\in\mathbb{C}\\|\alpha|=1}} [|1 - \frac{\alpha}{||\psi_{\Delta_p}||}|^2 ||\psi_{\Delta_p}||^2 + ||\psi_{\bar{\Delta}_p}||^2]$$

$$= 2(1-||\psi_{\Delta_p}||)$$

En utilisant la proposition 1.3.5., on tire que la représentation $I_{u*,E}$ est équivalente au produit tensoriel infini des représentations π_p restreint à la famille $\psi_{\Delta_p}/||\psi_{\Delta_p}||$. Donc on peut supposer que ψ_p a son support Δ_p pour $p \geq {}_\circ p$. On peut, aussi, supposer que pour $p \geq {}_\circ p$ l'espace $\mathcal{H}_{\mathfrak{z}_p,\theta}$ est de dimension 1 et que le groupe $S_p^{u*}(\underline{\underline{G}}_{\mathfrak{z}_p}(u*))$ agit trivialement dedans, via la représentation $S_{p,u*}$. On fixe un vecteur u_p dans $\mathcal{H}_{\mathfrak{z}_{p,\theta}}$ de norme 1. On a : $\psi_p(kh) = \delta_{H_p,G_p}(h)^{1/2}\, \pi_{p,\theta} S_{p,u*} \otimes E_p(h)^{-1}\psi_p(1)$ pour $k \in K_p$ et $h \in H_p$. Le fait que le caractère δ_{H_p,G_p} est trivial sur le groupe compact $K_p \cap H_p$ implique que $\psi_p(1)$ est un vecteur $K_p \cap H_p$ - invariant dans $\mathcal{H}_{p,\theta} \otimes \mathcal{V}_p$.
Donc $\psi_p(1) = u_p \otimes v_p$ avec v_p un vecteur de $\mathcal{V}_p$ de norme 1 invariant par $S_p^{u*}(\underline{\underline{G}}_{\mathfrak{z}_p}(u*))$ via la représentation E_p. Soit E' le produit tensoriel infini

des représentations irréductibles E_p restreint à la famille (v_p). Il est clair que $I_{u*,E'} = I_{u*,E}$ et, d'après l'unicité, $E = E'$. D'où la proposition.

Remarque : S'il y a une unique direction invariante pour la suite de représentations I_{u*,E_p}, il en est de même pour E_p. La réciproque est fausse comme le prouve l'exemple suivant :

$$\underline{\underline{G}} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times \simeq \{\begin{pmatrix} x & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2\} \quad \text{avec} \quad G_p = \underline{\underline{G}}_p \quad \text{pour tout } p. \text{ On a}$$

$\underline{g} = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \simeq \{\begin{pmatrix} x & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in gl_2\}$. On prend $u*(X,0) = X$, $G(u*)$ est le radical unipotent $\mathbb{C} \times \{1\}$, $E = \chi_{\mathbb{A},u*} = \mathfrak{X}$ est le caractère de $\mathbb{A}$ considéré au § 0.7, $E_p = \mathfrak{X}$ et $\pi_p = \operatorname{ind}_{\mathbb{Q}_p \uparrow G_p} \mathfrak{X}$ opère dans $\mathcal{H}_p = L^2(\mathbb{Q}_p^\times)$. Le sous-espace des vecteurs $G_{\mathbb{Z}_p}$ - invariants est engendré par les fonctions $x \to \phi_p(p^n x)$, $n \geq 0$, où ϕ_p est la fonction caractéristique de $\mathbb{Z}_p^\times$. Remarquer que $I_{u*,E} = \operatorname{ind}_{\mathbb{A} \uparrow G_{\mathbb{A}}} \mathfrak{X}$ et se réalise dans $L^2(\mathbb{A}^\times)$. Le sous-espace invariant par $\prod_{p \in \mathcal{P} - \infty} \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p}$ est engendré par la fonction $x \to \phi(nx)$, $n \in \mathbb{N}-\{0\}$, où ϕ est la fonction caractéristique de $\prod_{p \in \mathcal{P} - \infty} \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p}$. Remarquer, aussi, qu'il y a des produits tensoriels infinis de I_{u*,E_p} (ceux non équivalents à $\operatorname{ind}_{\mathbb{A} \uparrow G_{\mathbb{A}}} \mathfrak{X}$) qui ne sont pas de la forme $I_{u*,E}$.

3.5 Soit $(G',F,\mathcal{S},F_+,\underline{\underline{G}}')$ un sous-groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$ de $(G,F,\mathcal{S},F_+,\underline{\underline{G}})$, contenant U. Soit E' une représentation unitaire de $G'^{u*}_{\mathbb{A}}$ dont la restriction à $U_{\mathbb{A}}(u*)$ est un multiple de $\chi_{\mathbb{A},u*}$ et vérifiant $E'(-1) = -1$. On pose :

$E = \operatorname{ind}_{G'^{u*}_{\mathbb{A}} \uparrow G^{u*}_{\mathbb{A}}} E'$. Alors :

PROPOSITION : $I_{u*,E} = \operatorname{ind}_{G'_{\mathbb{A}} \uparrow G_{\mathbb{A}}} I_{u*,E'}$

Démonstration :

D'après le principe d'induction par étage, on a :
$\operatorname{ind}_{G'_{\mathbb{A}} \uparrow G_{\mathbb{A}}} I_{u*,E'} = \operatorname{ind}_{U_{\mathbb{A}} G_{\mathbb{A}}(u*) \uparrow G_{\mathbb{A}}} \operatorname{ind}_{U_{\mathbb{A}} G'_{\mathbb{A}}(u*) \uparrow U_{\mathbb{A}} G_{\mathbb{A}}(u*)} \pi_{\mathbb{A},\theta} S_{\mathbb{A},u*} \otimes E'$. Or $\pi_{\mathbb{A},\theta} S_{\mathbb{A},u*}$ se

prolonge par la même formule à $U_{\mathbb{A}} \times G_{\mathbb{A}}^{u*}$, donc :

$$\operatorname{ind}_{U_{\mathbb{A}}G'_{\mathbb{A}}(u*)\uparrow U_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{A}}(u*)} \pi_{\mathbb{A},\theta}S_{\mathbb{A},u*} \otimes E' = \pi_{\mathbb{A},\theta}S_{\mathbb{A},u*} \otimes \operatorname{ind}_{G'^{u*}_{\mathbb{A}}\uparrow G^{u*}_{\mathbb{A}}} E' = \pi_{\mathbb{A},\theta}S_{\mathbb{A},u*} \otimes E$$

Par conséquent : $\operatorname{ind}_{G'_{\mathbb{A}}\uparrow G_{\mathbb{A}}} I_{u*,E'} = \operatorname{ind}_{U_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{A}}(u*)\uparrow G_{\mathbb{A}}} \pi_{\mathbb{A},\theta}S_{\mathbb{A},u*} \otimes E = I_{u*,E}$. D'où la proposition.

<u>3.6</u> Soit $\underline{d}$ une sous-algèbre, définie sur $\mathbb{Q}$, de $\underline{u}$ invariante par $\underline{G}(u*)$ et coisotrope relativement à $u*$. Soit D le sous-groupe unipotent défini sur $\mathbb{Q}$ de U d'algèbre de Lie $\underline{d}$. On considère le caractère $\lambda_{\mathbb{A}}^{u*,\underline{d}}$ du groupe $G_{\mathbb{A}}^{u*,\underline{d}}$, construit au § 1.9.6., et la bijection $E \to \lambda_{\mathbb{A}}^{u*,\underline{d}} E$ de l'ensemble des représentations unitaires de $G_{\mathbb{A}}^{u*}$ valant -1 en -1 sur celles de $G(u*)_{\mathbb{A}}^{d*}$ valant, aussi, -1 en -1 où $d*$ désigne la restriction de $u*$ à $\underline{d}$. On remarque que : $(\tilde{D}G(u*))_{\mathbb{A}}^{d*} = D_{\mathbb{A}}(d*)G(u*)_{\mathbb{A}}^{d*}$ et $G(u*)_{\mathbb{A}}^{d*} \cap D_{\mathbb{A}}(d*) = D_{\mathbb{A}}(u*) = U_{\mathbb{A}}(u*)$.

Soit E une représentation unitaire de $G_{\mathbb{A}}^{u*}$ valant -1 en -1 et telle que sa restriction à $U_{\mathbb{A}}(u*)$ soit un multiple de $\chi_{\mathbb{A},u*}$. La représentation $\lambda_{\mathbb{A}}^{u*,\underline{d}}E$ se prolonge, d'une manière unique, à $(DG(u*))_{\mathbb{A}}^{d*}$ en lui imposant d'être multiple du caractère unitaire $\chi_{\mathbb{A},d*}$ sur $D_{\mathbb{A}}(d*)$.

LEMME : $\operatorname{ind}_{D_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{A}}(u*)\uparrow U_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{A}}(u*)} I_{d*,\lambda_{\mathbb{A}}^{u*,\underline{d}} E} = \pi_{\mathbb{A},\theta}S_{\mathbb{A},u*} \otimes E$

<u>Démonstration</u> : Soit Δ la $D_{\mathbb{Q}}$-orbite de $d*$. On a :

$$\operatorname{ind}_{D_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{A}}(u*)\uparrow U_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{A}}(u*)} I_{d*,\lambda_{\mathbb{A}}^{u*,\underline{d}} E} = \operatorname{ind}_{D_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{A}}(u*)\uparrow U_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{A}}(u*)} \pi_{\mathbb{A},\Delta}S_{\mathbb{A},d*} \otimes \lambda_{\mathbb{A}}^{u*,\underline{d}} E$$

$$= \left(\operatorname{ind}_{D_{\mathbb{A}} \times G(u*)_{\mathbb{A}}^{d*} \uparrow U_{\mathbb{A}} \times G(u*)_{\mathbb{A}}^{d*}} \pi_{\mathbb{A},\Delta}S_{\mathbb{A},d*} \right) \otimes \lambda_{\mathbb{A}}^{u*,\underline{d}} E$$

Donc il suffit de voir que :

$$\pi_{\mathbb{A},\theta}\bar{\lambda}_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{d}}\, S_{\mathbb{A},u^*} = \operatorname{ind}_{D_{\mathbb{A}}\times G(u^*)_{\mathbb{A}}^{d^*}\uparrow U_{\mathbb{A}}\times G(u^*)_{\mathbb{A}}^{d^*}} \pi_{\mathbb{A},\Delta} S_{\mathbb{A},d^*}$$

Or la représentation de $(U\times G(u^*)^{d^*})_{\mathbb{A}}$ figurant dans le premier membre est le produit tensoriel infini (restreint à une unique direction invariante) des représentations $\pi_{p,\theta}\bar{\lambda}_p^{u^*,\underline{d}}\, S_{p,u^*}$ et la représentation $\pi_{\mathbb{A},\Delta} S_{\mathbb{A},d^*}$ de $(D\times G(u^*)^{d^*})_{\mathbb{A}}$ est aussi le produit tensoriel infini (restreint à une unique direction invariante) des représentations $\pi_{p,\Delta} S_{p,d^*}$. Donc, il suffit de voir que, pour chaque $p\in\mathcal{P}$,

$$\pi_{p,\theta}\bar{\lambda}_p^{u^*,\underline{d}}\, S_{p,u^*} = \operatorname{ind}_{D_p\times G(u^*)_p^{d^*}\uparrow U_p\times G(u^*)_p^{d^*}} \pi_{p,\Delta} S_{p,d^*}$$

Ceci a été prouvé par M. Duflo lors de la démonstration du lemme II.17 de {DU 3}. D'où le lemme.

3.7 Soit $\underline{n}$ un idéal de $\underline{u}$ défini sur $\mathbb{Q}$ invariant par $\underline{G}(u^*)$. On pose $n^* = u^*|\underline{n}$, $\underline{v} = \underline{u}(n^*)$, $v^* = u^*|\underline{v}$, N (resp. V) le sous-groupe unipotent défini sur $\mathbb{Q}$ de U d'algèbre de Lie $\underline{n}$ (resp. $\underline{v}$), σ la $V_{\mathbb{Q}}$-orbite de v^* et ν la $N_{\mathbb{Q}}$-orbite de n^*. On a :

$$((UG(u^*))^{n^*})_{\mathbb{A}}^{v^*} = N_{\mathbb{A}}(n^*)(G(u^*)^{n^*})_{\mathbb{A}}^{v^*} \quad\text{et}\quad N_{\mathbb{A}}(n^*)\cap((G(u^*))^{n^*})_{\mathbb{A}}^{v^*} = N_{\mathbb{A}}(u^*).$$

Soit E une représentation unitaire de $G_{\mathbb{A}}^{u^*}$ valant -1 en -1 et dont la restriction à $U_{\mathbb{A}}(u^*)$ est un multiple du caractère $\chi_{\mathbb{A},u^*}$. On considère la représentation $\lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{n}}E$ de $(G(u^*)^{n^*})_{\mathbb{A}}^{v^*}$ associée. Sa restriction à $U_{\mathbb{A}}(u^*)$ est un multiple de $\chi_{\mathbb{A},u^*}$. D'après ce qui précède, elle se prolonge, d'une manière unique, à $((UG(u^*))^{n^*})_{\mathbb{A}}^{v^*}$ en lui imposant d'être multiple de $\chi_{\mathbb{A},n^*}$ sur $N_{\mathbb{A}}(n^*)$. De plus, on a $\lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{n}}E(\alpha,\beta) = \alpha\beta$ avec α,β valant ± 1 (voir § 1.9.6.). On peut alors, définir la représentation $I_{v^*,\lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{n}}E}$ de $(UG(u^*))_{\mathbb{A}}^{n^*}$ car $V_{\mathbb{A}}(v^*) = U_{\mathbb{A}}(u^*)N_{\mathbb{A}}(n^*)$ et la restriction de $\lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{n}}E$ à

$V_{\mathbb{A}}(v^*)$ est multiple de $\chi_{\mathbb{A},v^*}$. En fait $V_{\mathbb{A}}(UG(u^*))^{n^*}_{\mathbb{A}}(v^*) = V_{\mathbb{A}}G(u^*)^{n^*}_{\mathbb{A}} = (UG(u^*))^{n^*}_{\mathbb{A}}$ et, par suite,

$$I_{v^*,\lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{n}} E} = \pi_{\mathbb{A},\sigma} S_{\mathbb{A},v^*} \otimes \lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{n}} E$$

De plus, la restriction de $I_{v^*,\lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{n}} E}$ à $N_{\mathbb{A}}(n^*)$ est un multiple de $\chi_{\mathbb{A},n^*}$ et on a $I_{v^*,\lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{n}} E}(-1) = -1$. Donc, on peut construire la représentation $I_{n^*,I_{v^*,\lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{n}} E}}$ de $(UG(u^*))_{\mathbb{A}}$.

LEMME : $\pi_{\mathbb{A},\theta} S_{\mathbb{A},u^*} \otimes E = I_{n^*,I_{v^*,\lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{n}} E}}$.

Démonstration:

On pose $\underline{d} = \underline{n} + \underline{v}$. C'est une sous-algèbre définie sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{u}$ coisotrope pour u^* et invariante par $\underline{G}(u^*)$. On utilise les notations du 3.6 . D'aprés le Lemme 3.6 , on a $\pi_{\mathbb{A},\theta} S_{\mathbb{A},u^*} \otimes E = \operatorname{ind}_{D_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{A}}(u^*)\uparrow U_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{A}}(u^*)} I_{d^*,\lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{d}} E}$ .Or, $D_{\mathbb{A}}(DG(u^*))_{\mathbb{A}}(d^*) = D_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{A}}(u^*) = N_{\mathbb{A}}(UG(u^*))_{\mathbb{A}}(n^*)$. Donc, il suffit de montrer :

$$\pi_{\mathbb{A},\Delta} S_{\mathbb{A},d^*} \otimes \lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{d}} E = \pi_{\mathbb{A},\nu} S_{\mathbb{A},n^*} \otimes (\pi_{\mathbb{A},\sigma} S_{\mathbb{A},v^*} \otimes \lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{n}} E) .$$

Il est facile de voir que : $\lambda_{\mathbb{A}}^{d^*,\underline{n}} \lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{d}} E = \lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{n}} E$. Il suffit, alors, de prouver que les représentations $\pi_{\mathbb{A},\Delta} \lambda_{\mathbb{A}}^{d^*,\underline{n}} S_{\mathbb{A},d^*}$ et $\pi_{\mathbb{A},\nu} S_{\mathbb{A},n^*} \otimes \pi_{\mathbb{A},\sigma} S_{\mathbb{A},v^*}$ du groupe $D_{\mathbb{A}}((G(u^*))^{n^*})^{v^*}_{\mathbb{A}}$ coincident, où $S_{\mathbb{A},n^*}$ est regardée comme la représentation de $((G(u^*))^{n^*})^{v^*}_{\mathbb{A}}$ via la projection sur $(G(u^*))^{n^*}_{\mathbb{A}}$. En remarquant que la représentation $\pi_{\mathbb{A},\Delta} \lambda_{\mathbb{A}}^{d^*,\underline{n}} S_{\mathbb{A},d^*}$ (resp. $\pi_{\mathbb{A},\nu} S_{\mathbb{A},n^*} \otimes \pi_{\mathbb{A},\sigma} S_{\mathbb{A},v^*}$) est le produit tensoriel infini des représentations $\pi_{p,\Delta} \lambda_p^{d^*,\underline{n}} S_{p,d^*}$ (resp. $\pi_{p,\nu} S_{p,n^*} \otimes \pi_{p,\sigma} S_{p,v^*}$) restreint à une unique direction invariante , on se ramène à montrer pour chaque p dans $\mathcal{P}$ l'égalité :

$$\pi_{p,\Delta} \lambda_p^{d^*,\underline{n}} S_{p,d^*} = \pi_{p,\nu} S_{p,n^*} \otimes \pi_{p,\sigma} S_{p,v^*}$$

Mais ceci a été prouvé par M.Duflo lors de la démonstration du lemme II.18 de {Du3} . D'où le lemme .

<u>3.8</u>. Soit $\underline{n}$ un idéal de $\underline{u}$ défini sur $\mathbb{Q}$ invariant par $\underline{\underline{G}}$. On définit n^* , $\underline{v}$, v^* , N , V , ν , σ comme au 3.7 . On a :

$G_{\mathbb{A}}^{n^*}(v^*) = G_{\mathbb{A}}^{n^*}(u^*)N_{\mathbb{A}}(n^*)$; $(G^{n^*})_{\mathbb{A}}^{v^*} = ((G(u^*))^{n^*})_{\mathbb{A}}^{v^*}N_{\mathbb{A}}(n^*)$ et lintersection de $((G(u^*))^{n^*})_{\mathbb{A}}^{v^*}$ et $N_{\mathbb{A}}(n^*)$ coincide avec $N_{\mathbb{A}}(u^*)$. Soit E une représentation unitaire impaire de $G_{\mathbb{A}}^{u^*}$ dont la restriction à $U_{\mathbb{A}}(u^*)$ est un multiple de $\chi_{\mathbb{A},u^*}$. La représentation $\lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{n}}E$ de $(G(u^*)^{n^*})_{\mathbb{A}}^{v^*}$ se prolonge, d'une manière unique, à $(G^{n^*})_{\mathbb{A}}^{v^*}$ en lui imposant d'être multiple de $\chi_{\mathbb{A},n^*}$ sur $N_{\mathbb{A}}(n^*)$. Comme $V_{\mathbb{A}}(v^*) = U_{\mathbb{A}}(u^*)\ N_{\mathbb{A}}(n^*)$, la représentation $\lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{n}}E$ se restreint sur $V_{\mathbb{A}}(v^*)$ en un multiple de $\chi_{\mathbb{A},v^*}$ et on a $\lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{n}}E\ (\alpha,\beta) = \alpha\beta$ pour α , β valant $\underline{+}1$. On peut, alors, former la représentation $I_{v^*,\lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{n}}E}$ du groupe $G_{\mathbb{A}}^{n^*}$. Elle vaut -1 en -1 . De plus, du fait que la restriction de la représentation $\pi_{\mathbb{A},\sigma}$ de $V_{\mathbb{A}}$ à $N_{\mathbb{A}}(n^*)$ est un multiple de $\chi_{\mathbb{A},n^*}$ résulte que la restriction de $I_{v^*,\lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{n}}E}$ à $N_{\mathbb{A}}(n^*)$ est, aussi, un multiple de $\chi_{\mathbb{A},n^*}$. Par conséquent, on peut former la représentation $I_{n^*,I_{v^*,\lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{n}}E}}$ du groupe $G_{\mathbb{A}}$.

<u>*PROPOSITION:*</u> $I_{u^*,E} = I_{n^*,I_{v^*,\lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{n}}E}}$.

<u>Démonstration:</u>

On pose $\underline{d} = \underline{n} + \underline{v}$; $d^* = u^*|\underline{d}$; D le sous-groupe défini sur $\mathbb{Q}$ de U d'algèbre de Lie $\underline{d}$; $\Delta = D_{\mathbb{Q}}d^*$; $\underline{\underline{G}}' = D\underline{\underline{G}}(u^*)$ et $G'_p = D_pG_p(u^*)$. On remarque que $\underline{\underline{G}}' = D(D\underline{\underline{G}}(u^*))(d^*)$; $G'_p = D_p(DG(u^*))_p(d^*)$ et F_p est un sous-groupe de G'_p . D'aprés le lemme 2.3.ii), le quintuplet $(G',F,\mathcal{S},F_+,\underline{\underline{G}}')$ est un sous-groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$ de G . De plus, on a : $G_{\mathbb{A}}'^{n^*} = V_{\mathbb{A}}G(u^*)_{\mathbb{A}}^{n^*} = V_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{A}}^{n^*}(v^*)$. D'où

$$I_{v^*,\lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{n}}E} = \operatorname{ind}_{V_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{A}}^{n^*}(v^*)\uparrow G_{\mathbb{A}}^{n^*}} \pi_{\mathbb{A},\sigma}S_{\mathbb{A},v^*} \otimes \lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{n}}E = \operatorname{ind}_{G_{\mathbb{A}}'^{n^*}\uparrow G_{\mathbb{A}}^{n^*}} \pi_{\mathbb{A},\sigma}S_{\mathbb{A},v^*} \otimes \lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{n}}E$$

Donc, d'aprés la proposition 3.5 , on a :

$$I_{n^*,I_{v^*,\lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{n}}E}} = \operatorname{ind}_{G'_{\mathbb{A}}\uparrow G_{\mathbb{A}}} I_{n^*,\pi_{\mathbb{A},\sigma}S_{\mathbb{A},v^*} \otimes \lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{n}}E}$$

. Il suffit, alors, de voir que

$\pi_{\mathbb{A},\theta^{S}\mathbb{A},u^*} \otimes E = \mathrm{ind}_{G'_{\mathbb{A}} \uparrow U_{\mathbb{A}} G_{\mathbb{A}}(u^*)} I_{n^*,\pi_{\mathbb{A},\sigma^{S}\mathbb{A},v^*}} \otimes \lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{n}} E$. Or, d'aprés le lemme 3.6 , on a :

$\pi_{\mathbb{A},\theta^{S}\mathbb{A},u^*} \otimes E = \mathrm{ind}_{D_{\mathbb{A}} G_{\mathbb{A}}(u^*) \uparrow U_{\mathbb{A}} G_{\mathbb{A}}(u^*)} I_{d^*,\lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{d}}} E$. On est ramené à montrer que

$\pi_{\mathbb{A},\Delta^{S}\mathbb{A},d^*} \otimes \lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{d}} E = I_{n^*,\pi_{\mathbb{A},\sigma^{S}\mathbb{A},v^*}} \otimes \lambda_{\mathbb{A}}^{u^*,\underline{n}} E$. Mais ceci résulte immédiatement du lemme 3.7 en faisant jouerà $UG(u^*)$ le rôle de G età $\underline{d}$ le rôle de $\underline{u}$.

D'où la proposition .

4 - REPRÉSENTATIONS DE G_A CONSTRUITES SUR LES ORBITES DE TYPE UNIPOTENT

4.1. Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie algébrique définie sur un corps k de caractéristique nulle.

Définition (M. Duflo {Du 3, I.10}) : Soit g* un point de $\underline{g}^*_k$. On dit que g* est une forme de type unipotent s'il existe une sous-algèbre algébrique définie sur k , coisotrope relativement à g* et ayant une composante de Levi définie sur k, contenue dans $\underline{g}$(g*), sur laquelle g* s'annule.

Le lemme suivant résume des résultats de M. Duflo et de L. Pukanszky {Pu 2}. Il permet de retrouver, par récurrence, toutes les formes de type unipotent.

Lemme : Soit $\underline{G}$ un groupe algébrique définie sur k d'algèbre de Lie $\underline{g}$. Soit $\underline{u}$ une sous-algèbre unipotente définie sur k de $\underline{g}$ invariante par $\underline{G}$ et U le sous-groupe unipotent invariant de $\underline{G}$ associé. Soit u* un élément de $\underline{u}^*_k$. On pose $\underline{h}$ = $\underline{g}$(u*).
i) L'ensemble des éléments de $\underline{g}^*_k$ nuls sur $\underline{u}$ + $\underline{h}$ coincide avec $\underline{u}$(u*).g* pour tout g* dans $\underline{g}^*_k$ prolongeant u* .

ii) Soit h^* un élément de $\underline{h}^*_k$ coincidant avec u^* sur $\underline{u}(u^*)$. Alors $\{g^* \in \underline{g}^*_k$ prolongeant u^* et $h^*\}$ est une $U_k(u^*)$-orbite.

iii) Soit g^* un élément de $\underline{g}^*_k$, prolongeant u^*, et h^* sa restriction à $\underline{h}$. Alors g^* est de type unipotent si et seulement si h^* l'est. De plus, $\underline{\underline{G}}(u^*)(h^*) = U(u^*)\,\underline{\underline{G}}(g^*)$.

iv) On suppose que $\underline{u}$ est le radical unipotent de $\underline{g}$. Si $\underline{g}(u^*) = \underline{g}$, il existe une unique forme de type unipotent g^* dans $\underline{g}^*_k$ prolongeant u^*. De plus, on a $\underline{g}(g^*) = \underline{g}$ et $\underline{\underline{G}}(g^*) = \underline{\underline{G}}(u^*)$.

4.2. On va rappeler dans ce paragraphe la construction de M. Duflo dans le cas local {Du 3, III.11}. Soit k un corps local de caractéristique nulle et $(G_k, F_k, \underline{\underline{G}})$ un groupe de classe C_k. Soit $\underline{g}$ l'algèbre de Lie de $\underline{\underline{G}}$, $\underline{u}$ son radical unipotent et U le radical unipotent de $\underline{\underline{G}}$.

Si g^* est un élément de $\underline{g}^*_k$, on note :

$\underline{u}_{g^*}$ le radical unipotent de $\underline{g}(g^*)$;

U_{g^*} le radical unipotent de $\underline{\underline{G}}(g^*)$;

$\chi_{g^*,k}$ le caractère unitaire de $U_{g^*,k}$ associé à la restriction de g^* à $\underline{u}_{g^*}$;

$Y(g^*;G_k)$ l'ensemble des représentations unitaires du revêtement à deux feuillets $G_k^{g^*}$ de $G_k(g^*)$ dont la restriction à $U_{g^*,k}$ est un multiple de $\chi_{g^*,k}$ et valant -1 en -1.

Si $\tau \in \hat{F}_k$, on pose $Y_\tau(g^*,G_k) = \{\mathfrak{T} \in Y(g^*,G_k) \,/\, \mathfrak{T}|F_k$ est un multiple de $\tau\}$;

On pose :

$\tilde{Y}(G_k) = \{(g^*,\mathfrak{T}) \,/\, g^*$ est une forme de type unipotent sur $\underline{g}_k$ et $\mathfrak{T}$ dans $Y(g^*, G_k)\}$. Le groupe G_k opère naturellement sur $\tilde{Y}(G_k)$. On pose : $Y(G_k) = \tilde{Y}(G_k) / G_k$. C'est l'ensemble des G_k-orbites de $\tilde{Y}(G_k)$. On note $\mathfrak{U}(G_k)$ l'ensemble des G_k-orbites de type unipotent dans $\underline{g}^*_k$;

$\mathfrak{U}_k$ la projection naturelle de $Y(G_k)$ sur $\mathfrak{U}(G_k)$;

si $\tau \in \hat{F}_k$, $\tilde{Y}_\tau(G_k) = \{(g^*,\mathcal{T}) \in \tilde{Y}(G_k) \; / \; \mathcal{T} \in Y_\tau(g^*, G_k) \}$;

$Y_\tau(G_k) = \tilde{Y}_\tau(G_k) \; / \; G_k$.

A chaque élément $(g^*,\mathcal{T})$ de $\tilde{Y}(G_k)$, on associe, d'une manière canonique, une représentation unitaire $T(g^*,\mathcal{T})$ de G_k , additive en $\mathcal{T}$ et vérifiant :

C_1 : $T(g^*,\mathcal{T}) \mid U_k$ est basée sur la G_k-orbite de $\pi_{k,\theta}$ avec $\theta = U_k . g^* | \underline{u}$

C_2 : si $\tau \in \hat{F}_k$ et $\mathcal{T} \in Y_\tau(g^*, G_k)$, $T(g^*,\mathcal{T}) \mid F_k$ est un multiple de τ .

Pour celà, M.Duflo procède par récurrence sur la dimension de $\underline{g}$ comme suit :

i) si $\underline{g}(g^*) = \underline{g}$ (en particulier $\underline{g} = (0)$), on a : $T(g^*,\mathcal{T}) = \operatorname{ind}_{G_k(g^*)\uparrow G_k} \mathcal{T} | G_k(g^*)$

Ceci a un sens puisque $G_k^{g^*} = G_k(g^*) \times \{\pm 1\}$.

ii) sinon, soit $u^* = g^* | \underline{u}$, $\underline{h} = \underline{g}(u^*)$, $h^* = g^* | \underline{h}$, $H_k = G_k^{u^*}$ et $\underline{H}$ l'adhérence de Zariski de $H_k / F_k^{u^*}$ dans $\underline{G}$. Le triplet $(H_k , F_k^{u^*} , \underline{H})$ est de classe c_k et h^* est de type unipotent. Comme $H_k^{h^*} = U_k(u^*)((G_k(g^*))^{u^*})^{h^*}$ avec $U_k(u^*) \cap ((G_k(g^*))^{u^*})^{h^*} = U_k(g^*)$, la représentation $\lambda_k^{g^*,\underline{u}}\mathcal{T}$ de $((G_k(g^*))^{u^*})^{h^*}$ se prolonge, d'une manière unique, à $H_k^{h^*}$ en lui imposant d'être multiple de χ_{k,u^*} sur $U_k(u^*)$. Ce prolongement appartient à $Y(h^* , H_k)$ et l'hypothèse de récurrence permet de construire $T(h^* , \lambda_k^{g^*,\underline{u}}\mathcal{T})$. D'après la condition C_1 , la restriction de $T(h^*, \lambda_k^{g^*,\underline{u}}\mathcal{T})$ à $U_k(u^*)$ est un multiple de χ_{k,u^*} , et, la condition C_2 implique qu'elle vaut -1 en -1 de sorte qu'on peut poser :

$T(g^*,\mathcal{T}) = I_{u^*,T(h^*,\lambda_k^{g^*,\underline{u}}\mathcal{T})}$.

On a le résultat suivant :

<u>*Théorème*</u> (M. Duflo) : Avec les notations précédentes :

i) Soit $(g^*, \mathfrak{T})$ un élément de $\tilde{Y}(G_k)$ et u^* la restriction de g^* à $\underline{u}$.

On a : $T(g^*, \mathfrak{T}) = I_{u^*, T(h^*, \lambda_k^{g^*, \underline{u}}\mathfrak{T})}$.

ii) T passe au quotient pour donner une application définie sur $Y(G_k)$ vérifiant :

a) si Y_1 et Y_2 sont des éléments de $Y(G_k)$ tels que $\mathcal{U}_k(Y_1) \neq \mathcal{U}_k(Y_2)$, les représentations unitaires $T(Y_1)$ et $T(Y_2)$ sont disjointes ;

b) Soit Y_1 et Y_2 deux éléments de $Y(G_k)$ tels que $\mathcal{U}_k(Y_1) = \mathcal{U}_k(Y_2)$. Soit $(g^*, \mathfrak{T}_i)$, $i=1,2$, un élément de Y_i. L'ensemble des opérateurs d'entrelacement de $T(Y_1)$ et $T(Y_2)$ est isomorphe à celui de $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$.

<u>*4.3.*</u> On se donne, pour toute la suite, un groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$, $(G, F, \mathcal{S}, F_+, \underline{G})$, et on note $\underline{g}$ l'algèbre de Lie algébrique définie sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{G}$, U le radical unipotent de $\underline{G}$ et $\underline{u}$ celui de $\underline{g}$.

<u>*4.4.*</u> Soit $\underline{v}$ un idéal de $\underline{g}$ défini sur $\mathbb{Q}$ invariant par $\underline{G}$ et v^* un élément de $\underline{v}^*_{\mathbb{Q}}$. Si τ est un caractère unitaire de F_j, $j = p$, $p \in \mathcal{P}$, ou $\mathbb{A}$. On note τ^{v^*} le caractère unitaire de $F_j^{v^*} = F_j \times \{\pm 1\}$ prolongeant τ et valant -1 en -1.

<u>*4.5.*</u> Soit u^* un élément de $\underline{u}^*_{\mathbb{Q}}$. On pose $\underline{h} = \underline{g}(u^*)$, $H_p = G_p^{u^*}$ et $\underline{H} = \underline{G}(u^*)$. Au § 4.5.1. et § 4.5.2., on peut remplacer $\underline{u}$ par un idéal de $\underline{g}$ défini sur $\mathbb{Q}$ unipotent $\underline{G}$-invariant quelconque.

<u>*4.5.1. Lemme*</u> : Soit g^* un point de $\underline{g}^*_{\mathbb{Q}}$ prolongeant u^* et h^* sa restriction à $\underline{h}$.

> i) Pour presque tout p, $\underline{\underline{H}}_{\mathbb{Z}_p}(h^*) = U_{\mathbb{Z}_p}(u^*)\ \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p}(g^*)$.
>
> ii) $H_{\mathcal{P}}(h^*) = U_{\mathbb{A}}(u^*)\ G_{\mathcal{P}}^{u^*}(g^*)$, $H_{\mathbb{A}}(h^*) = U_{\mathbb{A}}(u^*)\ G_{\mathbb{A}}^{u^*}(g^*)$,

<u>Démonstration</u> :

D'après le lemme 4.1, on a : $\underline{\underline{H}}_p(h^*) = \underline{\underline{G}}_p(g^*)U_p(u^*)$ pour tout $p \in \mathcal{P}$. On a, aussi, $H_p(h^*) = G_p^{u^*}(g^*)U_p(u^*)$ et $H_p^{h^*} = U_p(u^*)((G(g^*))^{u^*})_p^{h^*}$. Ceci résulte, immédiatement, du lemme 4.1iii). Donc, ii) est une conséquence de i). Le groupe $U(u^*)$ est un idéal unipotent défini sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{\underline{H}}(h^*)$. Donc $\underline{\underline{H}}(h^*)/U(u^*)$ est un groupe algébrique défini sur $\mathbb{Q}$ et, pour tout $p \in \mathcal{P}$, l'application de $\underline{\underline{H}}_p(h^*)$ dans $(\underline{\underline{H}}(h^*)/U(u^*))_p$ est surjective. De plus, pour presque tout p, elle envoie $\underline{\underline{H}}_{\mathbb{Z}_p}(h^*)$ sur $(\underline{\underline{H}}(h^*)/U(u^*))_{\mathbb{Z}_p}$. Mais $\underline{\underline{H}}(h^*)/U(u^*)$ s'identifie à $\underline{\underline{G}}(g^*)/U(g^*)$. Le même raisonnement donne lieu à une projection de $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p}(g^*)$ sur $(\underline{\underline{G}}(g^*)/U(g^*))_{\mathbb{Z}_p}$ pour presque tout p. On a, donc, $\underline{\underline{H}}_{\mathbb{Z}_p}(h^*)\ U_p(u^*) = \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p}(g^*)\ U_p(u^*)$ et, par suite, $\underline{\underline{H}}_{\mathbb{Z}_p}(h^*)$ est un sous-groupe de $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p}(g^*)\ U_{\mathbb{Z}_p}(u^*)$ et, donc, lui est égal. D'où i) et le lemme.

<u>*4.5.2.*</u> Soit Ω une $G_{\mathbb{Q}}$-orbite de $\underline{g}_{\mathbb{Q}}^*$ se restreignant sur $\underline{u}_{\mathbb{Q}}$ à $G_{\mathbb{Q}}u^*$. Soit g^* un point de Ω prolongeant u^* et soit h^* sa restriction à $\underline{h}$. La $H_{\mathbb{Q}}$-orbite de h^* dans $\underline{h}_{\mathbb{Q}}^*$ est indépendante du choix de g^* comme indiqué ci-dessus. On la note $T_{u^*}\Omega$.

> <u>*Lemme*</u> : La correspondance $\Omega \to T_{u^*}\Omega$ établit une bijection T_{u^*} de l'ensemble des $G_{\mathbb{Q}}$-orbites de $\underline{g}_{\mathbb{Q}}^*$ se restreignant sur $\underline{u}_{\mathbb{Q}}$ à $G_{\mathbb{Q}}u^*$ et l'ensemble des $H_{\mathbb{Q}}$-orbites de $\underline{h}_{\mathbb{Q}}^*$ se restreignant à u^* sur $\underline{u}(u^*)$. De plus, T_{u^*} échange les orbites de type unipotent.

<u>Démonstration</u> :

Il est clair que l'application T_{u^*} est surjective. Pour voir qu'elle est injective, soit Ω_1 et Ω_2 deux $G_{\mathbb{Q}}$-orbites dans $\underline{g}_{\mathbb{Q}}^*$, se restreignant sur $\underline{u}_{\mathbb{Q}}$ à $G_{\mathbb{Q}}u^*$, vérifiant $T_{u^*}\Omega_1 = T_{u^*}\Omega_2$. On choisit, pour $i = 1,2$, un élément g_i^* de Ω_i et soit h_i^* sa restriction à $\underline{h}$. On suppose que g_1^* prolonge u^*. Il existe un élément x de $H_{\mathbb{Q}}$ tel que $h_2^* = x\, h_1^*$. Quitte à remplacer g_1^* par $x\, g_1^*$, on peut supposer $h_1^* = h_2^*$. Ainsi, les formes g_1^* et g_2^* ont la même restriction à $\underline{u}+\underline{h}$. Le lemme 4.1. ii) dit qu'elles sont, alors, sur la même $U_{\mathbb{Q}}(u^*)$-orbite et, donc, $\Omega_1 = \Omega_2$. L'échange des orbites de type unipotent résulte immédiatement du lemme 4.1. iii). D'où le lemme.

4.6. Comme au § 4.2, on introduit les notations suivantes :

Si g^* est un élément de $\underline{g}_{\mathbb{Q}}^*$, on note :

- $\underline{u}_{g^*}$ le radical unipotent de $\underline{g}(g^*)$;
- U_{g^*} le sous-groupe unipotent défini sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{\underline{G}}$ d'algèbre de Lie $\underline{u}_{g^*}$;
- $\chi_{g^*,\mathbb{A}}$ le caractère unitaire de $U_{g^*,\mathbb{A}}$ associé à la restriction de g^* à $\underline{u}_{g^*}$;
- $Y(g^*,G)$ l'ensemble des représentations unitaires du revêtement à deux feuillets $G_{\mathbb{A}}^{g^*}$ de $G_{\mathbb{A}}(g^*)$ valant -1 en -1 et dont la restriction à $U_{g^*,\mathbb{A}}$ est un multiple de $\chi_{g^*,\mathbb{A}}$;

Si $\tau \in \hat{F}_{\mathbb{A}}$, $Y_\tau(g^*,G)$ la partie de $Y(g^*,G)$ formée des représentations dont la restriction à $F_{\mathbb{A}}$ est un multiple de τ.

Le groupe $G_{\mathbb{Q}}$ opère naturellement sur l'ensemble :

$\tilde{Y}(G) = \{(g^*,\mathfrak{T}) \ / \ g^*$ est une forme de type unipotent sur $\underline{g}_{\mathbb{Q}}$ et $\mathfrak{T} \in Y(g^*,G)\}$.

On note :

- $Y(G)$ l'ensemble de ses $G_{\mathbb{Q}}$-orbites ;
- $\mathfrak{U}(G)$ l'ensemble des $G_{\mathbb{Q}}$-orbites de type unipotent dans $\underline{g}_{\mathbb{Q}}^*$;
- $\mathfrak{u}$ la projection naturelle de $Y(G)$ sur $\mathfrak{U}(G)$;

Si $\tau \in \hat{F}_{\mathbb{A}}$, $\tilde{Y}_\tau(G) = \{(g^*,\mathfrak{T}) \in \tilde{Y}(G) \ / \ \mathfrak{T} \in Y_\tau(g^*,G)\}$;

$Y_\tau(G) = \tilde{Y}_\tau(G) \ / \ G_{\mathbb{Q}}$.

Comme dans le cas local, on va associer, d'une manière canonique, à chaque élément $(g^*, \mathfrak{C})$ de $\tilde{Y}(G)$ une représentation unitaire $T(g^*, \mathfrak{C})$ de $G_{\mathbb{A}}$, d'une manière additive en $\mathfrak{C}$ et vérifiant :

C_1 : $T(g^*, \mathfrak{C})|U_{\mathbb{A}}$ est basée sur la $G_{\mathbb{A}}$-orbite de $\pi_{\mathbb{A},\theta}$, $\theta = U_{\mathbb{Q}} \cdot g^*|\underline{u}$

C_2 : si $\tau \in \hat{F}_{\mathbb{A}}$ et $\mathfrak{C} \in Y_\tau(g^*, G)$, $T(g^*, \mathfrak{C})|F_{\mathbb{A}}$ est un multiple de τ.

Pour cela, on procède par récurrence sur la dimension de $\underline{g}$.

i) Si $\underline{g}(g^*) = \underline{g}$ (en particulier si $\underline{g} = (o)$), on pose :

$$T(g^*, \mathfrak{C}) = \operatorname{ind}_{G_{\mathbb{A}}(g^*)\uparrow G_{\mathbb{A}}} \mathfrak{C}|_{G_{\mathbb{A}}(g^*)}$$

Ceci a un sens car le groupe $G_{\mathbb{A}}^{g^*}$ est canoniquement isomorphe à $G_{\mathbb{A}}(g^*) \times \{\pm 1\}$.

On remarque que si $u^* = g^*|\underline{u}$, on a, aussi, $G_{\mathbb{A}}(u^*) = G_{\mathbb{A}}(g^*)$ et $G_{\mathbb{A}}^{u^*} = G_{\mathbb{A}}(u^*) \times \{\pm 1\}$.

ii) On pose $u^* = g^*|\underline{u}$, $\underline{h} = \underline{g}(u^*)$, $h^* = g^*|\underline{h}$, $H_p = G_p^{u^*}$ et $\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{G}}(u^*)$.

On considère le groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$, $(H, F^{u^*}, \mathcal{S}^{u^*}, F_+^{u^*}, \underline{\underline{H}})$. D'après le lemme 4.1. iii), h^* est de type unipotent sur $\underline{h}$. D'autre part, d'après le lemme 4.5.1., $H_{\mathbb{A}}^{h^*} = U_{\mathbb{A}}(u^*)((G(g^*)^{u^*})_{\mathbb{A}}^{h^*}$, et, on a : $U_{\mathbb{A}}(u^*) \cap ((G(g^*)^{u^*})_{\mathbb{A}}^{h^*} = U_{\mathbb{A}}(g^*)$. Donc la représentation $\lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{u}}\mathfrak{C}$ de $(G(g^*)^{u^*})_{\mathbb{A}}^{h^*}$ se prolonge, d'une manière unique, à $H_{\mathbb{A}}^{h^*}$ en lui imposant d'être multiple de $\chi_{\mathbb{A},u^*}$ sur $U_{\mathbb{A}}(u^*)$.

Comme le radical unipotent de $\underline{h}(h^*)$ est $\underline{u}(u^*) + \underline{u}_{g^*}$, on voit facilement que la représentation, ainsi obtenue, appartient à $Y(h^*, H)$. On la note, encore, $\lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{u}}\mathfrak{C}$. Dans le cas i) ci-dessus, $\underline{g} = \underline{h}$, $g^* = h^*$ et la formule suivante est évidente :

$$T(g^*, \mathfrak{C}) = I_{u^*, T(h^*, \lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{u}}\mathfrak{C})}$$

En fait, c'est la bonne formule dans le cas où $\underline{g} \neq \underline{h}$. Pour qu'elle ait un sens, il faut vérifier que $T(h^*, \lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{u}}\mathfrak{C})$ est une représentation de $G_{\mathbb{A}}^{u^*}$ dont la restriction à $U_{\mathbb{A}}(u^*)$ est un multiple de $\chi_{\mathbb{A},u^*}$, mais ceci résulte de la condition C_1, et valant -1 en -1, et ceci résulte de la propriété additive et de C_2.

L'additivité en $\mathfrak{C}$ de $T(g^*, \mathfrak{C})$ provient de l'additivité de $I_{u^*,E}$

en E . La condition C_1 résulte du théorème 3.3. i) . La condition C_2 résulte du fait que si $E|F_{\mathbb{A}}$ est un multiple de τ , $I_{u^*,E}|F_{\mathbb{A}}$ l'est aussi.

On a le résultat suivant :

Théorème : T passe au quotient pour donner une application sur $Y(G)$ vérifiant :

a) si Y_1 et Y_2 sont des éléments de $Y(G)$ tels que $\mathfrak{U}(Y_1) \neq \mathfrak{U}(Y_2)$, les représentations unitaires $T(Y_1)$ et $T(Y_2)$ sont disjointes ;

b) soit Y_1 et Y_2 deux éléments de $Y(G)$ tels que $\mathfrak{U}(Y_1) = \mathfrak{U}(Y_2)$. Soit $(g^*, \mathfrak{T}_i)$, $i = 1,2$, un élément de Y_i . L'ensemble des opérateurs d'entrelacement de $T(Y_1)$ et $T(Y_2)$ est isomorphe à celui de $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$.

4.7. On se propose dans ce paragraphe de donner une autre construction de T utilisant des sous-algèbres coisotropes de $\underline{g}$ d'un type particulier. On fixe une forme g^* de type unipotent dans $\underline{g}^*_{\mathbb{Q}}$.

4.7.1. Définition : Une sous-algèbre algébrique, définie sur $\mathbb{Q}$, de $\underline{g}$, coisotrope pour g^* est dite coisotrope de type unipotent si, en plus, elle est la somme de $\underline{g}(g^*)$ et de son radical unipotent.

On a la résultat suivant :

Proposition (Duflo {Du 3, ch. I}) :

1) Il existe dans $\underline{g}$ des sous-algèbres coisotropes de type unipotent pour g^* invariantes par $\underline{\underline{G}}(g^*)$.

2) Soit $\underline{u}'$ un idéal unipotent défini sur $\mathbb{Q}$ invariant par $\underline{\underline{G}}$ de $\underline{g}$. On pose $u'^* = g^*|\underline{u}'$, $h' = \underline{g}(u'^*)$, $h'^* = g^*|\underline{h}'$. La forme h'^* est de type unipotent et on a :

i) si $\underline{b}$ est une sous-algèbre de $\underline{g}$ coisotrope de type unipotent pour g^* , l'algèbre $(\underline{b}+\underline{u}') \cap \underline{h}'$ est coisotrope de type unipotent pour h'^* ;

ii) si $\underline{c}$ est une sous-algèbre de $\underline{h}'$ coisotrope de type unipotent pour h'^* , l'algèbre $\underline{c}+\underline{u}'$ est coisotrope de type unipotent pour g^* .

4.7.2. Soit $\underline{b}$ une sous-algèbre de $\underline{g}$ coisotrope de type unipotent pour g^* invariante par $\underline{\underline{G}}(g^*)$ et $\underline{v}$ son radical unipotent. Soit V le sous-groupe unipotent de $\underline{\underline{G}}$, défini sur $\mathbb{Q}$, d'algèbre de Lie $\underline{v}$, v^* la restriction de g^* à $\underline{v}$ et σ la $V_{\mathbb{Q}}$-orbite de v^* dans $\underline{v}^*_{\mathbb{Q}}$. Il est clair que $\underline{v}$ est stable par $\underline{\underline{G}}(g^*)$. D'après M. Duflo {Du 3, §I.9.} , on a : $Vg^* = g^* + \underline{b}^{\perp}$. Il s'ensuit que $\{g \in \underline{\underline{G}} \ / \ gg^* \in g^* + \underline{b}^{\perp}\}$ est un sous-groupe algébrique défini sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{\underline{G}}$ coïncidant avec $V\,\underline{\underline{G}}(g^*)$. On le note $\underline{\underline{B}}$. De plus, $\{g \in G_p \ / \ gg^* \in g^* + \underline{b}^{\perp}\}$ est un sous-groupe fermé de G_p contenant F_p coïncidant avec $V_p\ G_p(g^*)$. On le note B_p . Il est clair que $(B,F,\mathcal{S},F_+,\underline{\underline{B}})$ est un sous-groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$ de G . En procédant, comme dans la démonstration du lemme 4.5.1. i), on montre que pour presque tout p ,

$\underline{\underline{B}}_{\mathbb{Z}_p} = V_{\mathbb{Z}_p}\ \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p}(g^*)$ de sorte qu'on a :

$B_{\mathcal{J}} = V_{\mathbb{A}}\ G_{\mathcal{J}}(g^*)$, $B_{\mathbb{A}} = V_{\mathbb{A}}\ G_{\mathbb{A}}(g^*)$, $B_p^{v^*} = V_p(v^*)G_p^{v^*}(g^*)$, $B_{\mathcal{P}}^{v^*} = V_{\mathbb{A}}(v^*)G_{\mathcal{P}}^{v^*}(g^*)$ et $B_{\mathbb{A}}^{v^*} = V_{\mathbb{A}}(v^*)G_{\mathbb{A}}^{v^*}(g^*)$. De plus, on a : $V_{\mathbb{A}}(v^*) \cap G_{\mathbb{A}}^{v^*}(g^*) = V_{\mathbb{A}}(g^*)$.

Soit $\mathfrak{T}$ une représentation unitaire de $G_{\mathbb{A}}^{g^*}$ appartenant à $Y(g^*,G)$. Comme l'orthogonal de $\underline{v}$ dans $\underline{g}$ relativement à B_{g^*} , à savoir $\underline{g}(g^*)+\underline{v}(v^*)$, est totalement isotrope, $\lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{v}}\mathfrak{T}$ donne lieu à une représentation unitaire de $G(g^*)_{\mathbb{A}}^{v^*}$ valant -1 en -1 et dont la restriction à $U_{g^*,\mathbb{A}}$ est un multiple de $\chi_{g^*,\mathbb{A}}$. Or $V_{\mathbb{A}}(g^*)$ est un sous-groupe fermé de $U_{g^*,\mathbb{A}}$ (car $V(g^*)$ est un idéal unipotent de $\underline{\underline{G}}(g^*)$) , donc $\lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{v}}\mathfrak{T}$ se prolonge, d'une manière unique à $B_{\mathbb{A}}^{v^*}$ en lui imposant d'être multiple de $\chi_{\mathbb{A},v^*}$ sur $V_{\mathbb{A}}(v^*)$. On note, encore $\lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{v}}\mathfrak{T}$, ce prolongement. On peut, donc, former la représentation $\pi_{\mathbb{A},\sigma}\ S_{\mathbb{A},v^*} \otimes \lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{v}}\mathfrak{T}$ de $V_{\mathbb{A}}\ B_{\mathbb{A}}(v^*) = B_{\mathbb{A}}$. On pose :

$$T(g^*, \mathfrak{T} ; \underline{b}) = \operatorname*{ind}_{B_{\mathbb{A}} \uparrow G_{\mathbb{A}}} \pi_{\mathbb{A},\sigma} S_{\mathbb{A},v^*} \otimes \lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{v}} \mathfrak{T} .$$

Théorème : $T(g^*, \mathfrak{T} ; \underline{b}) = T(g^*, \mathfrak{T})$.

Démonstration :

La démonstration est analogue à celle de M. Duflo dans le cas local. Elle va se faire en plusieurs étapes et par récurrence sur dim $\underline{g}$.

On pose $\underline{b}' = \underline{b} + \underline{u}$. C'est une sous-algèbre coisotrope de type unipotent pour g^* invariante par $\underline{\underline{G}}(g^*)$. On définit $\underline{v}',\ldots$ comme $\underline{v}, \ldots$ On a $\underline{v}' \cap \underline{b} = \underline{v}$ et $\underline{v}$ est une sous-algèbre de $\underline{v}'$ coisotrope pour v'^* stable par le sous-groupe $\underline{\underline{B}}'(v'^*) = V'(v'^*) \underline{\underline{G}} (g^*)$ de B . En appliquant le lemme 3.6, on trouve que $\pi_{\mathbb{A},\sigma'} S_{\mathbb{A},v'^*} \otimes \lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{v}'} \mathfrak{T} = \operatorname*{ind}_{B_{\mathbb{A}} \uparrow B'_{\mathbb{A}}} \pi_{\mathbb{A},\sigma} S_{\mathbb{A},v^*} \otimes \lambda_{\mathbb{A}}^{v'^*,\underline{v}} \lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{v}'} \mathfrak{T}$. Il est facile de voir que $\lambda_{\mathbb{A}}^{v'^*,\underline{v}} \lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{v}'} \mathfrak{T} = \lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{v}} \mathfrak{T}$. Par conséquent $T(g^*,\mathfrak{T}; \underline{b}') = T(g^*,\mathfrak{T}; \underline{b})$. On peut, donc, supposer que l'algèbre $\underline{b}$ contient $\underline{u}$. Soit $\underline{b}' = (\underline{b} \cap \underline{h}) + \underline{u}$. D'après le lemme 4.7.1. 2) , $\underline{b}'$ est une sous-algèbre coisotrope de type unipotent pour g^* . De plus $\underline{v} \cap \underline{b}' = \underline{v}'$. Le même raisonnement que ci-dessus montre que $T(g^*, \mathfrak{T} ; \underline{b}) = T(g^*, \mathfrak{T} ; \underline{b}')$. Donc, on peut supposer que l'on a $\underline{b} = (\underline{b} \cap \underline{h}) + \underline{u}$.

Si $\underline{h} = \underline{g}$, le résultat est immédiat . On suppose qu'il n'en est pas ainsi. On pose $\underline{c} = \underline{b} \cap \underline{h}$. D'aprés le Lemme 4.7.1.i) , c'est une sous-algèbre coisotrope de type unipotent dans $\underline{h}$ pour h^* . De plus, elle est invariante par le groupe $\underline{\underline{H}}(h^*) = U(u^*) \underline{\underline{G}}(g^*)$. Soit $\underline{w}$ le radical unipotent de $\underline{c}$, W le sous-groupe unipotent défini sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{\underline{H}}$ associé , ρ la $W_{\mathbb{Q}}$-orbite de $w^* = h^*|\underline{w}$ dans $\underline{w}^*_{\mathbb{Q}}$, $C_p = W_p H_p(h^*)$ et $\underline{\underline{C}} = W \underline{\underline{H}}(h^*)$. Le quintuplet $(C, F^{u^*}, \mathcal{S}^{u^*}, F_+^{u^*}, \underline{\underline{C}})$ est un sous-groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$ de H . L'hypothèse de récurrence dit que :

$$T(h^*, \lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{u}} \mathfrak{T}) = T(h^*, \lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{u}} \mathfrak{T}; \underline{c}) = \operatorname*{ind}_{C_{\mathbb{A}} \uparrow H_{\mathbb{A}}} \pi_{\mathbb{A},\rho} S_{\mathbb{A},w^*} \otimes \lambda_{\mathbb{A}}^{h^*,\underline{w}} \lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{u}} \mathfrak{T} .$$

Il est facile de voir que $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{B}}(u^*)$ et $C_p = B_p^{u^*}$ de sorte que $C_{\mathbb{A}} = B_{\mathbb{A}}^{u^*}$. En appliquant la proposition 3.5 , on trouve que : $T(g^* \mathfrak{T}) = \operatorname*{ind}_{B_{\mathbb{A}} \uparrow G_{\mathbb{A}}} I_{u^*,E'}$ où E' désigne la représentation unitaire $\pi_{\mathbb{A},\rho} S_{\mathbb{A},w^*} \otimes \lambda_{\mathbb{A}}^{h^*,\underline{w}} \lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{u}} \mathfrak{T}$ de $B_{\mathbb{A}}^{u^*}$ .La représentation $\lambda_{\mathbb{A}}^{h^*,\underline{w}}\lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{u}}\mathfrak{T}$ de $(B^{u^*})_{\mathbb{A}}^{w^*} = V_{\mathbb{A}}(v^*)((G(g^*))^{u^*})_{\mathbb{A}}^{w^*}$ est un multiple de $\chi_{\mathbb{A},v^*}$ sur $V_{\mathbb{A}}(v^*)$. Il est facile de voir qu'elle coïncide avec la représentation $\lambda_{\mathbb{A}}^{v^*,\underline{u}}\lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{v}}\mathfrak{T}$ sur $((G(g^*))^{u^*})_{\mathbb{A}}^{w^*}$. D'autre part, $\pi_{\mathbb{A},\sigma}S_{\mathbb{A},v^*} \otimes \lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{v}}\mathfrak{T}$ coïncide, d'aprés le lemme 3.7 , avec la représentation $I_{u^*,E}$ avec E la représentation unitaire $\pi_{\mathbb{A},\rho}S_{\mathbb{A},w^*} \otimes \lambda_{\mathbb{A}}^{v^*,\underline{u}}\lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{v}}\mathfrak{T}$ où, par convention, $\lambda_{\mathbb{A}}^{v^*,\underline{u}}\lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{v}}\mathfrak{T}$ est prolongée sur $V_{\mathbb{A}}(v^*)$ par un multiple de $\chi_{\mathbb{A},v^*}$. Ce qui signifie, alors, que les représentations E et E' coïncident . Le résultat désiré découle immédiatement D'où le théorème .

<u>4.8</u>. Dans la construction,par récurrence de T , on peut remplacer $\underline{u}$ par un un idéal unipotent $\underline{u}'$ défini sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{g}$ invariant par $\underline{G}$ quelconque . Plus précisément, soit $(g^*,\mathfrak{T})$ un élément de $\tilde{Y}(G)$, u^* la restriction de g^* à $\underline{u}$, etc...,u'^* la restriction de g^* à $\underline{u}'$,etc...

Théorème: $T(g^*,\mathfrak{T}) = I_{u'^*,T(h'^*,\lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{u}'}\mathfrak{T})}$.

<u>Démonstration:</u>

Soit $\underline{c}$ une sous-algèbre coisotrope de type unipotent dans $\underline{h}'$ pour h'^* . On pose $\underline{b} = \underline{c} + \underline{u}'$. C'est une sous-algèbre coisotrope de type unipotent dans $\underline{g}$ pour g^* . En écrivant que $T(h'^*,\lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{u}'}\mathfrak{T}) = T(h'^*,\lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{u}'}\mathfrak{T};\underline{c})$ et en procédant comme dans la démonstration du théorème 4.7.2 ,dernière étape, en remplaçant $\underline{u}$ par $\underline{u}'$,etc... ,on montre que cette représentation coïncide avec $T(g^*,\mathfrak{T};\underline{b})$. Le théorème 4.7.2 permet, alors, de conclure . D'où le théorème .

<u>4.9</u>. Dans ce paragraphe, on va étudier la décomposibilité en produit tensoriel infini des représentations $T(Y)$, $Y \in Y(G)$, de $G_{\mathbb{A}}$. On note $Y^{irr}(g^*,G)$ et $Y^{irr}(g^*,G_p)$ l'ensemble des représentations irréductibles dans $Y(g^*,G)$ et $Y(g^*,G_p)$ respectivement . Ceci permet d'avoir une partie $\tilde{Y}^{irr}(G)$ de $\tilde{Y}(G)$, $Y^{irr}(G)$ de $Y(G)$, etc...

D'aprés le théorème 4.5 , T induit une injection de $Y^{irr}(G)$ dans $\hat{G}_{\mathbb{A}}$

et, d'aprés le théorème 4.2 et pour chaque p , on a une injection de $Y^{irr}(G_p)$ dans $\hat{G}_p$. De plus, on a une projection $\mathfrak{U}$ de $Y^{irr}(G)$ sur $\mathfrak{U}(G)$ et une projection $\mathfrak{U}_p$ de $Y^{irr}(G_p)$ sur $\mathfrak{U}(G_p)$.

4.9.1. D'aprés le théorème 1.2 , les groupes $G_\infty^{g^*}$ et G_∞ sont de type I . En considérant, alors, les composantes infinies, on obtient une application de $Y^{irr}(g^*,G)$ dans $Y^{irr}(g^*,G_\infty)$ et une application de $\hat{G}_{\mathbb{A}}$ dans $\hat{G}_\infty$. On a le résultat suivant :

Lemme: Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{U}(G) \arrow[d, dotted] & \\
Y^{irr}(G) \arrow[ur, "\mathfrak{U}"] \arrow[rr, "T"] \arrow[d] & & \hat{G}_{\mathbb{A}} \arrow[d] \\
 & \mathfrak{U}(G_\infty) & \\
Y^{irr}(G_\infty) \arrow[ur, dotted, "\mathfrak{U}_\infty"] \arrow[rr, "T"] & & \hat{G}_\infty
\end{tikzcd}$$

Démonstration:

On va procéder par récurrence sur la dimension de $\underline{g}$. Soit $(g^*,\mathfrak{C})$ un élément de $\tilde{Y}^{irr}(G)$. Soit $\mathfrak{C}_\infty$ la composante de $\mathfrak{C}$ sur $G_\infty^{g^*}$ et $T_\infty(g^*,\mathfrak{C})$ celle de $T(g^*,\mathfrak{C})$ sur G_∞ . Il s'agit de montrer que $T_\infty(g^*,\mathfrak{C}) = T(g^*,\mathfrak{C}_\infty)$. Le résultat est évident si $\underline{g} = \underline{g}(g^*)$. On suppose, donc, qu'il n'en est pas ainsi et soit u^* la restriction de g^* à $\underline{u}$, $\underline{h} = \underline{g}(u^*)$ etc... On a :

$$T(g^*,\mathfrak{C}) = I_{u^*,T(h^*,\lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{u}}\mathfrak{C})}$$

et
$$T(g^*,\mathfrak{C}_\infty) = I_{u^*,T(h^*,\lambda_\infty^{g^*,\underline{u}}\mathfrak{C}_\infty)}$$

Il est clair que $T_\infty(g^*,\mathfrak{C}) = I_{u^*,T_\infty(h^*,\lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{u}}\mathfrak{C})}$. L'hypothèse de récurrence prouve que $T_\infty(h^*,\lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{u}}\mathfrak{C}) = T(h^*,(\lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{u}}\mathfrak{C})_\infty)$. Lassertion résulte, alors, du fait que $(\lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{u}}\mathfrak{C})_\infty = \lambda_\infty^{g^*,\underline{u}}\mathfrak{C}_\infty$. D'où le lemme .

4.9.2. On suppose que le groupe G est de classe $C^{\circ}_{\mathbb{Q}}$. Ce qui a été fait au §4.9.1 pour la place infinie peut être fait pour une place quelconque en faisant les mêmes raisonnements . Dans ce cas, on a le résultat suivant :

> *Proposition:* Soit G un groupe de classe $C^{\circ}_{\mathbb{Q}}$. Alors, pour chaque p infini ou premier, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{U}(G) \arrow[dd, dotted] & \\
Y^{irr}(G) \arrow[ur, "\mathfrak{U}"] \arrow[rr, "T"] \arrow[dd] & & \hat{G}_{\mathbb{A}} \arrow[dd] \\
 & \mathfrak{U}(G_p) & \\
Y^{irr}(G_p) \arrow[ur, dashed, "\mathfrak{U}_p"] \arrow[rr, "T"] & & \hat{G}_p
\end{tikzcd}$$

De plus, on a le théorème suivant :

> *Théorème:* Soit G un groupe de classe $C^{\circ}_{\mathbb{Q}}$ et $(g^*,\mathfrak{T})$ un point de $\tilde{Y}^{irr}(G)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que la représentation $T(g^*,\mathfrak{T})$ de $G_{\mathbb{A}}$ soit un produit tensoriel restreint est que $\mathfrak{T}$ le soit . Ceci équivaut encore à dire que la représentation $\mathfrak{T}$ est CCR . Dans ce cas, la représentation $T(g^*,\mathfrak{T})$ est le produit tensoriel infini des représentations unitaires irréductibles $T(g^*,\mathfrak{T}_p)$ restreint à une direction invariante canoniquement déterminée .

Démonstration:

Soit u^* la restriction de g^* à $\underline{u}$, $\underline{h} = \underline{g}(u^*)$ etc... On a :

$$T(g^*,\mathfrak{T}) = I_{u^*,T(h^*,\lambda^{g^*,\underline{u}}_{\mathbb{A}}\mathfrak{T})}$$

D'aprés la proposition 3.4 , pour que la représentation $T(g^*,\mathfrak{T})$ soit un produit tensoriel infini il faut et il suffit que $T(h^*,\lambda^{g^*,\underline{u}}_{\mathbb{A}}\mathfrak{T})$ le soit et une direction invariante s'obtient par induction . Il est facile de voir que pour que la représentation $\mathfrak{T}$ soit un produit tensoriel infini il faut et il suffit que la représentation $\lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{u}}\mathfrak{C}$ le soit puisque le caractère $\lambda_{\mathbb{A}}^{g^*,\underline{u}}$ l'est . On est, donc, réduit au cas où $G(g^*) = G(u^*) = G$. Mais ce cas est évident . Reste à remplacer la décomposabilité de $\mathfrak{C}$ par la propriété CCR . Or, par construction, la représentation $\mathfrak{C}$ de $G_{\mathbb{A}}^{g^*}$ est impaire et sa restriction à $U_{g^*;\mathbb{A}}$ est un multiple du caractère $\chi_{g^*;\mathbb{A}}$. Soir $\underline{\underline{R}}$ un facteur réductif de $\underline{\underline{G}}(g^*)$ et R_p l'image réciproque de $\underline{\underline{R}}_p$ dans $G_p^{g^*}$. Le groupe $(R, F^{g^*}, \mathcal{S}^{g^*}, F_+^{g^*}, \underline{\underline{R}})$ est un sous-groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}^{\circ}$ de G^{g^*} et on a $G_{\mathbb{A}}^{g^*} = U_{g^*;\mathbb{A}} \times R_{\mathbb{A}}$. Les propriétés de décomposabilité en produit tensoriel infini ou CCR de $\mathfrak{C}$ sont équivalentes à celles pour sa restriction à $R_{\mathbb{A}}$. D'aprés le théorème 1.2 , pour chaque $p \in \mathcal{P}$, le groupe R_p est CCR . Le théorème 8 de {Moo2} assure , alors, que $\mathfrak{C}$ est décomposable en un produit tensoriel infini restreint si et seulement si elle est CCR . De plus, dans ce cas on a l'unicité de la direction invariante (voir , aussi, la proposition 1.3.5.) . D'où le théorème .

5 - *DÉCOMPOSITION DE* $\operatorname{ind}_{G_{\mathbb{Q}}\uparrow G_{\mathbb{A}}} \tau$. *PREMIER RÉSULTAT PRINCIPAL*

<u>5.1</u> Soit $(G,F,\mathcal{S},F_+,\underline{\underline{G}})$ un groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$ et $\underline{g}$ l'algèbre de Lie algébrique définie sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{\underline{G}}$. On se donne une représentation unitaire de dimension finie $(\tau,\mathcal{E})$ du sous-groupe $G_{\mathbb{Q}}$ de $G_{\mathbb{A}}$ ayant un noyau d'indice fini dans $G_{\mathbb{Q}}$. On va s'intéresser à la décomposition de la représentation induite unitaire de la représentation τ du groupe $G_{\mathbb{Q}}$ au groupe $G_{\mathbb{A}}$. Dans le cas où $G = \underline{\underline{G}}$ est un groupe unipotent défini sur $\mathbb{Q}$, ce problème a été étudié par C.C. Moore {Moo 2}. Il a prouvé que la représentation régulière de $G_{\mathbb{A}}$ dans $L^2(G_{\mathbb{A}}/G_{\mathbb{Q}})$ est la somme discrète des représentations unitaires irréductibles $\pi_{\mathbb{A},\theta}$ construites sur les $G_{\mathbb{Q}}$ -orbites θ de $\underline{g}^*_{\mathbb{Q}}$. On va donner un résultat analogue en considérant les $G_{\mathbb{Q}}$ -orbites de $\underline{g}^*_{\mathbb{Q}}$ de type unipotent, qui permet de ramener le problème posé au cas où $\underline{\underline{G}}$ est un groupe algébrique défini sur $\mathbb{Q}$ réductif. Pour ce cas, on peut consulter l'exposé de A. Borel au séminaire Bourbaki, {BO 5}, S. Gelbart {Gelb 1,2}, Gelfand-Graev-Shapiro {G.G.P.S. 1,2}, R. Langlands {La 1},... On reviendra sur ce cas au paragraphe 6.2.

<u>5.2</u> Soit g^* un point de $\underline{g}^*_{\mathbb{Q}}$ de type unipotent. On utilise les notations du § 4.6. On a vu au § 1.9.4. que le groupe $G^{g^*}_{\mathbb{Q}}$ s'écrit d'une manière canonique sous la forme $G^{g^*}_{\mathbb{Q}} = G_{\mathbb{Q}}(g^*) \times \{\pm 1\}$. On note τ^{g^*} la représentation unitaire de dimension finie de $G^{g^*}_{\mathbb{Q}}$ prolongeant τ sur $G_{\mathbb{Q}}(g^*)$ et valant -1 en -1. On considère la sous-représentation, $\mathcal{T}_{g^*,\tau}$, de l'induite unitaire de la représentation τ^{g^*}, du groupe $G^{g^*}_{\mathbb{Q}}$ au groupe $G^{g^*}_{\mathbb{A}}$, où le groupe $U_{g^*,\mathbb{A}}$ opère comme multiple du caractère unitaire $\chi_{g^*,\mathbb{A}}$. La représentation $\mathcal{T}_{g^*,\tau}$

appartient à $Y(g^*,G)$ de sorte qu'on peut former la représentation unitaire $T(g^*,\mathcal{E}_{g^*,\tau})$ du groupe $G_{\mathbb{A}}$. La $G_{\mathbb{Q}}$-orbite de $(g^*,\mathcal{E}_{g^*,\tau})$ ne dépend que de la $G_{\mathbb{Q}}$-orbite Ω de g^* et de τ. On la note $Y_{\Omega,\tau}$. On a $Y_{\Omega,\tau} \in Y(G)$ et, on pose

$$\pi_{\Omega,\tau} = T(Y_{\Omega,\tau}) = T(g^*,\mathcal{E}_{g^*,\tau}).$$

Le théorème suivant est le premier résultat principal du présent travail. Sa signification est détaillée au § 5.3 ci-dessous.

<u>*THÉORÈME*</u> : Les représentations $T(Y_{\Omega,\tau})$, Ω parcourant $\mathfrak{U}(G)$, sont deux à deux disjointes et leur somme coïncide avec la représentation induite unitaire de la représentation τ du groupe $G_{\mathbb{Q}}$ au groupe $G_{\mathbb{A}}$.

La première partie du théorème est une conséquence immédiate du théorème 4.6 i). Pour montrer que $\operatorname{ind}_{G_{\mathbb{Q}}\uparrow G_{\mathbb{A}}} \tau = \bigoplus_{\Omega\in\mathfrak{U}(G)} \pi_{\Omega,\tau}$, on va procéder par récurrence sur la dimension de $\underline{g}$. Si $\dim \underline{g} = 0$, ce résultat est une tautologie. On suppose que le théorème est vérifié pour les dimensions inférieures à celle de $\underline{g}$. On note $\underline{u}$ le radical unipotent de $\underline{g}$ et U le sous-groupe unipotent défini sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{\underline{G}}$ associé.

<u>*5.2.1*</u> Soit λ une $G_{\mathbb{Q}}$-orbite de $\underline{u}^*_{\mathbb{Q}}$ et $\mathfrak{U}(G;\lambda)$ l'ensemble des $G_{\mathbb{Q}}$-orbites de $\underline{g}^*_{\mathbb{Q}}$ de type unipotent qui se restreignent à λ sur $\underline{u}_{\mathbb{Q}}$. On va s'intéresser, d'abord, à la somme $\bigoplus_{\Omega\in\mathfrak{U}(G;\lambda)} \pi_{\Omega,\tau}$.

On fixe un élément u^* de λ. On pose $\underline{h} = \underline{g}(u^*)$, $\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{G}}(u^*)$, $H_p = G_p^{u^*}$, $H_{\mathbb{A}} = G_{\mathbb{A}}^{u^*}$ et $H_{\mathbb{Q}} = G_{\mathbb{Q}}^{u^*}$. On note v^* la restriction de u^* à $\underline{v} = \underline{u}(u^*)$, μ la $H_{\mathbb{Q}}$-orbite de v^* dans $\underline{v}^*_{\mathbb{Q}}$ et $\mathfrak{U}(H,\mu)$ l'ensemble des $H_{\mathbb{Q}}$-orbites de $\underline{h}^*_{\mathbb{Q}}$ de type unipotent qui se restreignent à μ sur $\underline{v}$. Soit τ^{u^*} la représentation de $H_{\mathbb{Q}} = G_{\mathbb{Q}}(u^*) \times \{\pm 1\}$ dont la restriction à $G_{\mathbb{Q}}(u^*)$ coïncide avec τ et valant -1 en -1. On note $\chi_{\mathbb{A},u^*}$ le caractère de $U_{\mathbb{A}}(u^*)$ associé par la méthode des orbites à la restriction de u^* à $\underline{u}(u^*)$ et E^{u^*} la sous-représentation de $\operatorname{ind}_{H_{\mathbb{Q}}\uparrow H_{\mathbb{A}}} \tau^{u^*}$ où le groupe $U_{\mathbb{A}}(u^*)$ opère comme multiple de $\chi_{\mathbb{A},u^*}$.

5.2.1. i) LEMME : $E^{u*} = \bigoplus_{\sigma\in \mathfrak{U}(H;\mu)} \pi_{\sigma,\tau}{}^{u*}$ et $\bigoplus_{\Omega\in \mathfrak{U}(G;\lambda)} \pi_{\Omega,\tau} = I_{u*,E^{u*}}$.

Démonstration du lemme.

On considère la bijection T_{u*} de $\mathfrak{U}(G;\lambda)$ sur $\mathfrak{U}(H;\mu)$ construite au § 4.5.2. Soit Ω un élément de $\mathfrak{U}(G;\lambda)$ et $g*$ un point de Ω prolongeant $u*$, $\sigma = T_{u*}(\Omega)$ est la $H_{\mathbb{Q}}$-orbite dans $\underline{h}^*_{\mathbb{Q}}$ de la restriction $h*$ de $g*$ à $\underline{h}$.

a) On a : $T(Y_{\sigma,\tau}u*) = T(h*,\lambda_{\mathbb{A}}^{g*,\underline{u}}\mathfrak{T}_{g*,\tau})$ où $\lambda_{\mathbb{A}}^{g*,\underline{u}}\mathfrak{T}_{g*,\tau}$ est la représentation de $H_{\mathbb{A}}^{h*}$, comme décrit au § 4.6. Pour celà, il suffit de voir que la représentation $\lambda_{\mathbb{A}}^{g*,\underline{u}}\mathfrak{T}_{g*,\tau}$ coïncide avec $\mathfrak{T}_{h*,\tau}u*$. On rappelle que

$H_{\mathbb{A}}^{h*} = U_{\mathbb{A}}(u*)(G(g*)^{u*})_{\mathbb{A}}^{h*}$, d'après le lemme 4.5.1.ii) et que la représentation

$\lambda_{\mathbb{A}}^{g*,\underline{u}}\mathfrak{T}_{g*,\tau}$ opère dans l'espace de $\mathfrak{T}_{g*,\tau}$ comme multiple de $\chi_{\mathbb{A},u*}$ sur $U_{\mathbb{A}}(u*)$ et sur $(G(g*)^{u*})_{\mathbb{A}}^{h*}$ comme suit :

$$\lambda_{\mathbb{A}}^{g*,\underline{u}}\mathfrak{T}_{g*,\tau}(\ddot{g}) = \lambda_{\mathbb{A}}^{g*,\underline{u}}(\dot{g},\ddot{g})\mathfrak{T}_{g*,\tau}(\dot{g})$$

pour tout $(\dot{g},\ddot{g})$ appartenant à $G_{\mathbb{A}}^{g*} \times (G(g*)^{u*})_{\mathbb{A}}^{h*}$ représentant un élément de $G_{\mathbb{A}}^{g*,\underline{u}}$. De plus, on a $(\tau^{u*})^{h*}(\ddot{g}) = \lambda_{\mathbb{A}}^{g*,\underline{u}}(\dot{g},\ddot{g})\tau^{g*}(\dot{g})$ car c'est vrai sur $(F^{u*})_{\mathbb{A}}^{h*}$ et le caractère $\lambda_{\mathbb{A}}^{g*,\underline{u}}$ est trivial sur $G_{\mathbb{Q}}(g*)$ d'après le lemme 1.9.6. Ceci étant, le radical unipotent $\underline{u}_{h*}$ de $\underline{h}(h*) = \underline{u}(u*)+\underline{g}(g*)$ est égal à $\underline{u}(u*)+\underline{u}_{g*}$; le radical unipotent U_{h*} de $\underline{\underline{H}}(h*)$ est engendré par $U(u*)$ et U_{g*} et on a : $U_{h*,\mathbb{A}} = U(u*)_{\mathbb{A}}U_{g*,\mathbb{A}}$. Le caractère $\chi_{h*,\mathbb{A}}$ de $U_{h*,\mathbb{A}}$, associé par la méthode des orbites à la restriction de $h*$ à $\underline{u}_{h*}$, prolonge le caractère $\chi_{\mathbb{A},u*}$ de $U_{\mathbb{A}}(u*)$ et le caractère $\chi_{g*,\mathbb{A}}$ de $U_{g*,\mathbb{A}}$. Donc la représentation $\mathfrak{T}_{h*,\tau}u*$ du groupe $H_{\mathbb{A}}^{h*}$ est un multiple de $\chi_{\mathbb{A},u*}$ sur $U_{\mathbb{A}}(u*)$ et coïncide sur $(G(g*)^{u*})_{\mathbb{A}}^{h*}$ avec la sous-représentation de l'induite de la représentation $(\tau^{u*})^{h*}$ du groupe $(G(g*)^{u*})_{\mathbb{Q}}^{h*}$ à ce groupe, où $U_{g*,\mathbb{A}}$ opère comme multiple de $\chi_{g*,\mathbb{A}}$. On réalise les induites par translation à gauche sur des espaces de fonctions. On obtient, alors, un opérateur d'entrelacement de la représentation $\lambda_{\mathbf{A}}^{g^*,\underline{u}}\mathfrak{T}_{g^*,\tau}$ et de la représentation $\mathfrak{T}_{h^*,\tau}{}^{u^*}$ en associant à une fonction ϕ sur $G_{\mathbf{A}}^{g^*}$ à valeurs dans l'espace de τ, appartenant à l'espace de $\mathfrak{T}_{g^*,\tau}$, la fonction $\lambda\phi$ sur $(G(g^*)^{u^*})_{\mathbf{A}}^{h^*}$ à valeurs dans l'espace de τ, appartenant à l'espace de $\mathfrak{T}_{h^*,\tau}{}^{u^*}$, donnée par : $\lambda\phi(\ddot{g}) = \lambda_{\mathbf{A}}^{g^*,\underline{u}}(\bar{g},\ddot{g})\phi(\bar{g})$ pour tout $(\bar{g},\ddot{g})$ appartenant à $G_{\mathbf{A}}^{g^*} \times (G(g^*)^{u^*})_{\mathbf{A}}^{h^*}$ représentant un élément de $G_{\mathbf{A}}^{g^*,\underline{u}}$. D'où l'assertion.

b) D'après le paragraphe 4.6., on a, alors $T(Y_{\Omega,\tau}) = I_{u^*,T(Y_{\sigma,\tau}u^*)}$. Donc, pour avoir le lemme, il suffit de montrer que

$$E^{u^*} = \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{U}(H,\mu)} T(Y_{\sigma,\tau}u^*)$$

Pour celà, on va distinguer deux cas.

<u>1er cas.</u> On suppose que l'on a : $\underline{h} = \underline{g}$. D'après le lemme 4.1., $\mathfrak{U}(G;\lambda)$ est réduit à une seule orbite Ω et l'orbite $\sigma = T_{u^*}(\Omega)$ est réduite à un seul point $g^* \in \underline{g}^*_{\mathbf{Q}} = \underline{h}^*_{\mathbf{Q}}$, l'unique forme de type unipotent prolongeant u^* .
Avec les notations ci-desssus, on a $h^* = g^*$, $G_{\mathbf{A}}^{g^*} = H_{\mathbf{A}}$, $G_{\mathbf{Q}}^{g^*} = H_{\mathbf{Q}}$ et $\mathfrak{T}_{h^*,\tau}{}^{u^*}$ est la sous représentation de $\operatorname{ind}_{H_{\mathbf{Q}}\uparrow H_{\mathbf{A}}} \tau^{u^*}$ où le groupe $U_{\mathbf{A}}(u^*) = U_{\mathbf{A}}$ opère comme multiple de $\chi_{\mathbf{A},u^*}$. D'où l'égalité dans ce cas.

<u>2ème cas.</u> On suppose que $\dim \underline{h} < \dim \underline{g}$. L'hypothèse de récurrence permet d'affirmer que $\bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{U}(H;\mu)} T(Y_{\sigma,\tau}u^*)$ coïncide avec la sous-représentation de $\operatorname{ind}_{H_{\mathbf{Q}}\uparrow H_{\mathbf{A}}} \tau^{u^*}$ où le groupe $U_{\mathbf{A}}(u^*)$ opère comme multiple de $\chi_{\mathbf{A},u^*}$. D'où l'égalité désirée. Le lemme 5.2.1. i) est ainsi démontré.

<u>*5.2.1. ii)*</u> Soit θ la $U_{\mathbf{Q}}$ orbite de u^* dans $\underline{u}^*_{\mathbf{Q}}$. On réalise $\pi_{\mathbf{A},\theta}$ dans le sous-espace $\mathcal{H}_{\mathbf{A},\theta}$ de $L^2(U_{\mathbf{A}}/U_{\mathbf{Q}})$. On considère la représentation unitaire δ_{u^*} du groupe $SA_{\mathbf{Q}}(u^*)$ dans $\mathcal{H}_{\mathbf{A},\theta}$ étudiée en § 2.3. Elle induit, par composition, une représentation de $G_{\mathbf{Q}}(u^*)$ dans $\mathcal{H}_{\mathbf{A},\theta}$ qu'on

notera de la même façon. On a, en fait, $\delta_{u*}(g)\phi(u) = \phi(g^{-1}ug)$ pour tout $g \in G_{\mathbb{Q}}(u*)$, $u \in U_{\mathbb{A}}$ et $\phi \in \mathcal{X}_{\mathbb{A},\theta}$. On définit une représentation $\pi_{\mathbb{A},\theta}\delta_{u*}\tau$ de $U_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{Q}}(u*)$ dans $\mathcal{X}_{\mathbb{A},\theta} \otimes \mathcal{E}$ en posant pour tout $u \in U_{\mathbb{A}}$ et $g \in G_{\mathbb{Q}}(u*)$:

$$\pi_{\mathbb{A},\theta}\delta_{u*}\tau(ug) = \pi_{\mathbb{A},\theta}(u)\delta_{u*}(g)\otimes\tau(g)$$

En effet, si $u \in U_{\mathbb{A}}$, $g \in G_{\mathbb{Q}}(u*)$, $u_{\mathbb{Q}} \in U_{\mathbb{Q}}(u*)$, $u' \in U_{\mathbb{A}}$ et $\phi \in \mathcal{X}_{\mathbb{A},\theta}\otimes\mathcal{E}$ on a :

$$\pi_{\mathbb{A},\theta}(uu_Q)\delta_{u*}(u_{\mathbb{Q}}^{-1}g)\tau(u_{\mathbb{Q}}^{-1}g)\phi(u') = \tau(u_{\mathbb{Q}}^{-1}g)\phi(g^{-1}u^{-1}u' \;\; u_{\mathbb{Q}}^{-1}g)$$

$$= \tau(u_{\mathbb{Q}}^{-1}g)\phi(g^{-1}u^{-1}u' \;\; g.g^{-1}u_{\mathbb{Q}}^{-1}g) = \tau(u_{\mathbb{Q}}^{-1}g)\phi(g^{-1}u^{-1}u' \;\; g)$$

$$= \tau(u_{\mathbb{Q}}^{-1})\pi_{\mathbb{A},\theta}(u)\delta_{u*}(g)\tau(g)\phi(u') \qquad .$$

Le fait que τ est de noyau d'indice fini dans $G_{\mathbb{Q}}$ et que U est un groupe unipotent implique que τ est trivial sur $U_{\mathbb{Q}}$. Reste à montrer qu'on définit ainsi une représentation. Mais ceci résulte immédiatement du fait que :

$$\delta_{u*}(g)\pi_{\mathbb{A},\theta}(u)\delta_{u*}(g^{-1}) = \pi_{\mathbb{A},\theta}(gug^{-1}) \qquad (g \in G_{\mathbb{Q}}(u*),\ u \in U_{\mathbb{A}})$$

<u>*LEMME*</u> : $\operatorname{ind}_{U_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{Q}}(u*)\uparrow G_{\mathbb{A}}} \pi_{\mathbb{A},\theta}\delta_{u*}\tau = I_{u*,E^{u*}}$.

<u>Démonstration du lemme</u> :

D'après le lemme 2.3, les représentations δ_{u*} et $S_{\mathbb{A},u*}$ coïncident sur $G_{\mathbb{Q}}(u*)$. Par conséquent la représentation $\pi_{\mathbb{A},\theta}\delta_{u*}\tau$ coïncide avec la représentation de $U_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{Q}}(u*)$ obtenue de la représentation $\pi_{\mathbb{A},\theta}S_{\mathbb{A},u*}\otimes\tau^{u*}$ du groupe $U_{\mathbb{A}} \times G_{\mathbb{Q}}^{u*}$ par passage au quotient. Ceci provient du fait que $\tau^{u*}(-1) = -1$ et que le caractère $\chi_{\mathbb{A},u*}$ de $U_{\mathbb{A}}(u*)$ est trivial sur le sous-groupe $U_{\mathbb{Q}}(u*)$. Pour avoir le lemme il suffit de voir que la représentation $\pi_{\mathbb{A},\theta}S_{\mathbb{A},u*}\otimes E^{u*}$ coïncide avec la représentation induite de $U_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{Q}}(u*)$ à $U_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{A}}(u*)$ de $\pi_{\mathbb{A},\theta}\delta_{u*}\tau$. On considère l'homomorphisme surjectif $\alpha_{\mathbb{A}}$ du groupe $U_{\mathbb{A}} \times G_{\mathbb{A}}^{u*}$ sur le groupe $U_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{A}}(u*)$ (voir § 3.3). Son noyau est :

$N_{\mathbb{A}} = \{(u^{-1},u),\ u\in U_{\mathbb{A}}(u^*)\}\times\{\pm 1\}$. On a : $\alpha_{\mathbb{A}}^{-1}(U_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{Q}}(u^*)) = (U_{\mathbb{A}}\times G_{\mathbb{Q}}^{u^*})N_{\mathbb{A}} = U_{\mathbb{A}}\times U_{\mathbb{A}}(u^*)G_{\mathbb{Q}}^{u^*}$. Il s'en suit que $U_{\mathbb{A}}(u^*)G_{\mathbb{Q}}^{u^*}$ est un sous-groupe fermé de $G_{\mathbb{A}}^{u^*}$; son quotient par $G_{\mathbb{Q}}^{u^*}$ est compact et le quotient de $\alpha_{\mathbb{A}}^{-1}(U_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{Q}}(u^*))$ par $U_{\mathbb{A}}\times G_{\mathbb{Q}}^{u^*}$ l'est aussi. Sur $U_{\mathbb{A}}\times G_{\mathbb{Q}}^{u^*}$, les deux représentations $\pi_{\mathbb{A},\theta}\delta_{u^*}\tau\ o\alpha_{\mathbb{A}}$ et $\pi_{\mathbb{A},\theta}S_{\mathbb{A},u^*}\otimes\tau^{u^*}$ coïncident. Il en résulte que :

$$\operatorname{ind}_{U_{\mathbb{A}}\times G_{\mathbb{Q}}^{u^*}\uparrow U_{\mathbb{A}}\times G_{\mathbb{A}}^{u^*}}(\pi_{\mathbb{A},\theta}\delta_{u^*}\tau)o\alpha_{\mathbb{A}} = \pi_{\mathbb{A},\theta}S_{\mathbb{A},u^*}\otimes \operatorname{ind}_{G_{\mathbb{Q}}^{u^*}\uparrow G_{\mathbb{A}}^{u^*}}\tau^{u^*}$$

et la sous-représentation où $N_{\mathbb{A}}$ opère trivialement est $\pi_{\mathbb{A},\theta}S_{\mathbb{A},u^*}\otimes E^{u^*}$ car la restriction de $\pi_{\mathbb{A},\theta}S_{\mathbb{A},u^*}$ à $N_{\mathbb{A}}$ est un multiple du caractère $\chi_{\mathbb{A}}^{u^*}$ (voir § 3.3). Pour conclure, il suffit de remarquer que la composition par $\alpha_{\mathbb{A}}$ réalise un entrelacement entre la sous-représentation de $\operatorname{ind}_{U_{\mathbb{A}}\times G_{\mathbb{Q}}^{u^*}\uparrow U_{\mathbb{A}}\times G_{\mathbb{A}}^{u^*}}(\pi_{\mathbb{A},\theta}\delta_{u^*}\tau\ o\alpha_{\mathbb{A}})$ où $N_{\mathbb{A}}$ opère trivialement et la représentation du groupe $U_{\mathbb{A}}\times G_{\mathbb{A}}^{u^*}$ obtenue par composition par $\alpha_{\mathbb{A}}$ de $\operatorname{ind}_{U_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{Q}}(u^*)\uparrow U_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{A}}(u^*)}(\pi_{\mathbb{A},\theta}\delta_{u^*}\tau)$ D'où le lemme.

<u>*5.2.1. iii)*</u> La représentation $\operatorname{ind}_{G_{\mathbb{Q}}\uparrow U_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{Q}}}\tau$ se réalise dans l'espace $\mathcal{H}_{\mathbb{A}}$ produit tensoriel de $L^2(U_{\mathbb{A}}/U_{\mathbb{Q}})$ et $\mathcal{E}$ car la représentation τ est triviale sur le groupe $U_{\mathbb{Q}}$. De plus, elle prolonge la représentation régulière $\pi_{\mathbb{A}}$ de $U_{\mathbb{A}}$ dans $\mathcal{H}_{\mathbb{A}}$ et sa restriction à $G_{\mathbb{Q}}$ coïncide avec la représentation $\delta\tau$ donnée par :

$$\delta\tau(g)\phi\otimes v(u) = \phi(g^{-1}ug)\tau(g)v \quad \text{avec} \quad g\in G_{\mathbb{Q}},\ u\in U_{\mathbb{A}} \quad \text{et} \quad \phi\otimes v\in\mathcal{H}_{\mathbb{A}} ,$$

L'espace $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\lambda} = \bigoplus_{\theta\in\lambda/U_{\mathbb{Q}}}\mathcal{H}_{\mathbb{A},\theta}\otimes\mathcal{E}$ est invariant par la représentation $\delta\tau$ et par suite par la représentation $\operatorname{ind}_{G_{\mathbb{Q}}\uparrow U_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{Q}}}\tau$. On note $(\operatorname{ind}_{G_{\mathbb{Q}}\uparrow U_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{Q}}}\tau)_\lambda$ la représentation de $U_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{Q}}$ obtenue en restreignant à $\mathcal{H}_{\mathbb{A},\lambda}$ la représentation $\operatorname{ind}_{G_{\mathbb{Q}}\uparrow U_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{Q}}}\tau$.

<u>*LEMME*</u> : $\displaystyle\bigoplus_{\Omega\in \mathfrak{U}(G;\lambda)} T(Y_{\Omega,\tau}) = \operatorname*{ind}_{U_{\mathbf{A}}G_{\mathbf{Q}}\uparrow G_{\mathbf{A}}} \big(\operatorname*{ind}_{G_{\mathbf{Q}}\uparrow U_{\mathbf{A}}G_{\mathbf{Q}}} \tau\big)_{\lambda}$

<u>Démonstration du lemme</u> :

D'après les lemmes 5.2.1. i) et ii), on a :

$$\bigoplus_{\Omega\in\mathfrak{U}(G;\lambda)} \pi_{\Omega,\tau} = I_{u^*,E^{u^*}} = \operatorname*{ind}_{U_{\mathbf{A}}G_{\mathbf{Q}}(u^*)\uparrow G_{\mathbf{A}}} (\pi_{\mathbf{A},\theta}\,\delta_{u^*}\tau)$$

Donc, il suffit de voir que les représentations $\big(\operatorname*{ind}_{G_{\mathbf{Q}}\uparrow U_{\mathbf{A}}G_{\mathbf{Q}}} \tau\big)_{\lambda}$ et $\operatorname*{ind}_{U_{\mathbf{A}}G_{\mathbf{Q}}(u^*)\uparrow U_{\mathbf{A}}G_{\mathbf{Q}}} (\pi_{\mathbf{A},\theta}\,\delta_{u^*}\tau)$ coïncident. Or cette dernière coincide avec $\big(\operatorname*{ind}_{U_{\mathbf{A}}G_{\mathbf{Q}}(u^*)\uparrow U_{\mathbf{A}}G_{\mathbf{Q}}} \pi_{\mathbf{A},\theta}\,\delta_{u^*}\big)\tau$ car τ se prolonge au groupe $U_{\mathbf{A}}G_{\mathbf{Q}}$ trivialement sur $U_{\mathbf{A}}$. La représentation $\operatorname*{ind}_{U_{\mathbf{A}}G_{\mathbf{Q}}(u^*)\uparrow U_{\mathbf{A}}G_{\mathbf{Q}}} (\pi_{\mathbf{A},\theta}\,\delta_{u^*})$ se réalise sur l'espace $\mathcal{H}_{\mathbf{A},\lambda}$ comme la restriction de $\operatorname*{ind}_{G_{\mathbf{Q}}\uparrow U_{\mathbf{A}}G_{\mathbf{Q}}}$ qu'on note $\big(\operatorname*{ind}_{G_{\mathbf{Q}}\uparrow U_{\mathbf{A}}G_{\mathbf{Q}}}\big)_{\lambda}$. Il est clair que la représentation $\big(\operatorname*{ind}_{G_{\mathbf{Q}}\uparrow U_{\mathbf{A}}G_{\mathbf{Q}}} \tau\big)_{\lambda}$ coïncide avec $\big(\operatorname*{ind}_{G_{\mathbf{Q}}\uparrow U_{\mathbf{A}}G_{\mathbf{Q}}}\big)_{\lambda}\tau$. Le lemme découle immédiatement.

<u>*5.2.2.*</u> Compte-tenu du fait que $\bigoplus_{\lambda\in\underline{u}^*_{\mathbf{Q}}/G_{\mathbf{Q}}} \mathcal{H}_{\mathbf{A},\lambda} = \mathcal{H}_{\mathbf{A}}$, le lemme 5.2.1. iii) implique que :

$$\bigoplus_{\Omega\in\mathfrak{U}(G)} T(Y_{\Omega,\tau}) = \bigoplus_{\lambda\in\underline{u}^*_{\mathbf{Q}}/G_{\mathbf{Q}}}\ \bigoplus_{\Omega\in\mathfrak{U}(G;\lambda)} T(Y_{\Omega,\tau}) = \bigoplus_{\lambda\in\underline{u}^*_{\mathbf{Q}}/G_{\mathbf{Q}}} \operatorname*{ind}_{U_{\mathbf{A}}G_{\mathbf{Q}}\uparrow G_{\mathbf{A}}} \big(\operatorname*{ind}_{G_{\mathbf{Q}}\uparrow U_{\mathbf{A}}G_{\mathbf{Q}}} \tau\big)_{\lambda}$$

$$= \operatorname*{ind}_{U_{\mathbf{A}}G_{\mathbf{Q}}\uparrow G_{\mathbf{A}}} \bigoplus_{\lambda\in\underline{u}^*_{\mathbf{Q}}/G_{\mathbf{Q}}} \big(\operatorname*{ind}_{G_{\mathbf{Q}}\uparrow U_{\mathbf{A}}G_{\mathbf{Q}}} \tau\big)_{\lambda} = \operatorname*{ind}_{U_{\mathbf{A}}G_{\mathbf{Q}}\uparrow G_{\mathbf{A}}} \operatorname*{ind}_{G_{\mathbf{Q}}\uparrow U_{\mathbf{A}}G_{\mathbf{Q}}} \tau$$

$$= \operatorname*{ind}_{G_{\mathbf{Q}}\uparrow U_{\mathbf{A}}G_{\mathbf{Q}}} \tau$$

Le théorème est maintenant démontré.

5.3 Soit $\Omega \in \mathfrak{U}(G)$, $g^* \in \Omega$, $Y_{\Omega,\tau} \in Y(G)$ correspondant à $(g^*, \mathfrak{T}_{g^*,\tau})$ comme au § 5.2. Le théorème précédent ramène la décomposition de $\operatorname{ind}_{G_{\mathbf{Q}} \uparrow G_{\mathbf{A}}} \tau$ à celle de $T(Y_{\Omega,\tau})$ qui, elle-même, se déduit de celle de $\mathfrak{T}_{g^*,\tau}$ grâce au théorème 4.6. Soit $\underline{\underline{R}}$ un facteur réductif de $\underline{\underline{G}}(g^*)$ défini sur $\mathbf{Q}$ et pour chaque $p \in \mathcal{P}$, R_p l'image réciproque de $\underline{\underline{R}}_p$ dans $G_p^{g^*}$. Il est clair que $G_p^{g^*} = U_{g^*;p} \times R_p$ et pour presque tout p, $S^{g^*}(\underline{\underline{G}}_{\mathbf{Z}_p}(g^*)) = U_{g^*;\mathbf{Z}_p} \times S^{g^*}(\underline{\underline{R}}_{\mathbf{Z}_p})$. $(R, F^{g^*}, S^{g^*}, F_+^{g^*}, \underline{\underline{R}})$ est un sous-groupe de classe $C_{\mathbf{Q}}$ de G^{g^*} et on a

$$G_{\mathcal{P}}^{g^*} = U_{g^*;\mathbf{A}} \times R_{\mathcal{P}} \;; \quad G_{\mathbf{A}}^{g^*} = U_{g^*;\mathbf{A}} \times R_{\mathbf{A}} \quad \text{(produits semi-directs)}$$

Comme U_{g^*} est un groupe unipotent et comme τ^{g^*} a un noyau d'indice fini dans $G_{\mathbf{Q}}^{g^*}$, τ^{g^*} est une représentation triviale sur $U_{g^*,\mathbf{Q}}$. D'autre part le caractère $\chi_{g^*,\mathbf{A}}$ de $U_{g^*;\mathbf{A}}$ se prolonge à $G_{\mathbf{A}}^{g^*}$ trivialement sur $R_{\mathbf{A}}$. Par conséquent, on a : $\mathfrak{T}_{g^*,\tau} = \chi_{g^*;\mathbf{A}} \otimes \operatorname{ind}_{R_{\mathbf{Q}} \uparrow R_{\mathbf{A}}} \tau^{g^*}$. Ainsi, on est ramené à la décomposition de $\operatorname{ind}_{R_{\mathbf{Q}} \uparrow R_{\mathbf{A}}} \tau^{g^*}$ avec $\underline{\underline{R}}$ un groupe réductif. Un cas particulier important est le suivant. On suppose qu'il existe un groupe fini $\mathcal{F}$ tel que $F_p = \mathcal{F}$ pour tout $p \in \mathcal{P}$. On prend $F_+ = \{(f_p) \in F_{\mathcal{P}}$ tel que $\prod_{p \in \mathcal{P}} f_p = 1\}$. L'application $(f_p) \to \prod_{p \in \mathcal{P}} f_p$ permet d'identifier $F_{\mathbf{A}}$ à $\mathcal{F}$. On suppose que pour chaque $p \in \mathcal{P}$, $G_p / F_p = \underline{\underline{G}}_p$ et qu'il existe un relèvement de $\underline{\underline{G}}_{\mathbf{Q}}$ à $G_{\mathbf{A}}$. On a donc, $G_{\mathbf{Q}} = \underline{\underline{G}}_{\mathbf{Q}} \times \mathcal{F}$. Le groupe G^{g^*} est de même type, $G_{\mathbf{A}}^{g^*}$ est un revêtement de $G_{\mathbf{A}}(g^*)$ de fibre type $\mathcal{F}^{g^*} = \mathcal{F} \times \{\pm 1\}$ et le groupe $R_{\mathbf{Q}}$ s'identifie canoniquement à $\underline{\underline{R}}_{\mathbf{Q}} \times \mathcal{F}^{g^*}$. En particulier si τ est un caractère de $G_{\mathbf{Q}}$ trivial sur $\underline{\underline{G}}_{\mathbf{Q}}$, τ^{g^*} est le caractère de $R_{\mathbf{Q}}$ trivial sur $\underline{\underline{R}}_{\mathbf{Q}}$, se restreignant à τ sur $\mathcal{F}$ et valant -1 en -1.

6 - ANALYSE DE $L^2(G_A/\Gamma)$ et $L^2(G_R/\Delta)$

6.1. On va commencer par relier le cas adélique au cas réel. Soit $(G,F,\mathcal{S},F_+,\underline{\underline{G}})$ un groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$ et $\underline{g}$ l'algèbre de Lie algébrique définie sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{\underline{G}}$. Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de $G_{\mathbb{Q}}$. On note ϕ la projection de G sur $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}}$ et $\tilde{\Gamma}$ l'image réciproque dans $G_{\mathcal{P}}$ du sous-groupe Γ de $G_{\mathbb{A}} = G_{\mathcal{P}}/F_+$. Par composition, les représentations $\operatorname{ind}_{\Gamma\uparrow G_{\mathbb{A}}}$ et $\operatorname{ind}_{\tilde{\Gamma}\uparrow G_{\mathcal{P}}}$ coïncident.

6.1.1. On choisit une partie finie P de $\mathcal{P}$ contenant ∞ telle que pour tout p premier n'appartenant pas à P, la section $\mathcal{S}_p$ soit définie et on pose $K_p = \mathcal{S}_p(\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p})$. Si p est dans P, on pose $K_p = \phi^{-1}(\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p}) \cap G_p$. Pour tout p premier, le groupe K_p est compact ouvert dans G_p et le produit infini $K_{\mathcal{P}-\infty} = \prod_{p\neq\infty} K_p$ s'identifie à un sous-groupe compact ouvert de $G_{\mathcal{P}-\infty}$. On pose $\underline{\underline{G}}^{\infty}_{\mathbb{A}} = \underline{\underline{G}}_{\infty} \times \prod_{p\in\mathcal{P}-\infty} \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p}$ et $G^{\infty}_{\mathcal{P}} = G_{\infty} \times K_{\mathcal{P}-\infty}$. Le groupe $G^{\infty}_{\mathcal{P}}$ (resp. $\underline{\underline{G}}^{\infty}_{\mathbb{A}}$) est un sous groupe-ouvert de $G_{\mathcal{P}}$ (resp. $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}}$) et $\phi(G^{\infty}_{\mathcal{P}})$ est un sous-groupe d'indice fini dans $\underline{\underline{G}}^{\infty}_{\mathbb{A}}$.

Lemme: L'ensemble des doubles classes $G^{\infty}_{\mathcal{P}}\backslash G_{\mathcal{P}}/\tilde{\Gamma}$ est fini.

Démonstration:

D'aprés Borel {Bo3;théorème5.1} l'ensemble $\underline{\underline{G}}^{\infty}_{\mathbb{A}}\backslash\underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}}/\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}$ est fini. Donc, l'ensemble $\phi(G^{\infty}_{\mathcal{P}})\backslash\underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}}/\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}$ l'est aussi et, parsuite, $\phi(G^{\infty}_{\mathcal{P}})\backslash\phi(G_{\mathcal{P}})/\phi(G_{\mathcal{P}})\cap\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}$ l'est encore. Mais $\tilde{\Gamma}$ est dindice fini dans $\phi^{-1}(\phi(G_{\mathcal{P}})\cap\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}})$;d'où le lemme.

6.1.2. On note C un ensemble de représentants des doubles-classes dans $G_{\mathcal{P}}^{\infty}\backslash G_{\mathcal{P}}/\tilde{\Gamma}$ ayant une projection triviale sur G_{∞} . Si A est une partie de $G_{\mathcal{P}}$ on note A_{∞} sa projection sur G_{∞} et $A_{\mathcal{P}-\infty}$ sa projection sur $G_{\mathcal{P}-\infty}$ suivant la décomposition $G_{\mathcal{P}} = G_{\infty} \times G_{\mathcal{P}-\infty}$. En particulier, si g est un élément de $G_{\mathcal{P}}$, on a $g = g_{\infty}g_{\mathcal{P}-\infty}$ où $g_{\infty}\in G_{\infty}$ et $g_{\mathcal{P}-\infty} \in G_{\mathcal{P}-\infty}$.

6.1.3. D'aprés le théorème 12.1 de Mackey {Ma3} , on a :

$$\operatorname*{ind}_{\tilde{\Gamma}\uparrow G_{\mathcal{P}}} 1\big|_{G_{\mathcal{P}}^{\infty}} = \bigoplus_{x\in C} \operatorname*{ind}_{\tilde{\Gamma}_x\uparrow G_{\mathcal{P}}^{\infty}} \qquad \text{où} \quad \tilde{\Gamma}_x = x\tilde{\Gamma}x^{-1} \cap G_{\mathcal{P}}^{\infty}$$

6.1.3.i) On fixe x dans C . On a $x_{\infty} = 1$ par construction . On pose $A = \tilde{\Gamma}_x$.

Lemme: A_{∞} est un sous-groupe discret de G_{∞} et $\phi(A_{\infty})$ est un sous-groupe de $\underline{\underline{G}}_{\infty}$ commensurable avec $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}}$.

Démonstration:

On a $A = x(\tilde{\Gamma}\cap x^{-1}G_{\mathcal{P}}^{\infty}x)x^{-1}$ et $x_{\infty} = 1$. Donc, $A_{\infty} = (\tilde{\Gamma}\cap x^{-1}G_{\mathcal{P}}^{\infty}x)_{\infty}$. Puisque $\tilde{\Gamma}$ est un sous-groupe d'indice fini de $\tilde{G}_{\mathbb{Q}} = \phi^{-1}(\phi(G_{\mathcal{P}})\cap\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}})$ et $G_{\mathcal{P}}^{\infty}$ et $x^{-1}G_{\mathcal{P}}^{\infty}x$ sont commensurables, il suffit de montrer que $\phi((\tilde{G}_{\mathbb{Q}}\cap G_{\mathcal{P}}^{\infty})_{\infty})$ est d'indice fini dans $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}}$. Ceci résulte du fait que $\phi(G_{\mathcal{P}}^{\infty})$ est d'indice fini dans $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}}^{\infty}$ et $\phi((\tilde{G}_{\mathbb{Q}}\cap G_{\mathcal{P}}^{\infty})_{\infty}) = (\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}\cap\phi(G_{\mathcal{P}}^{\infty}))_{\infty}$. D'où le lemme .

Définition: Un groupe vérifiant les propriétés du lemme précédent est dit arithmétique dans G_{∞} .

On va s'intéresser à la décomposition de la représentation induite unitaire de la représentation triviale de A à $A_{\infty} \times K_{\mathcal{P}-\infty}$. Un élément de $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}$ est complètement déterminé par sa projection sur $\underline{\underline{G}}_{\infty}$. Donc, un élément γ_{∞} de $\tilde{\Gamma}_{\infty}$ définit un unique élément $\gamma_{\mathcal{P}-\infty}$ de $\tilde{\Gamma}_{\mathcal{P}-\infty}$ modulo $F_{\mathcal{P}-\infty}\cap\tilde{\Gamma}$ tel que $\gamma_{\infty}\gamma_{\mathcal{P}-\infty}$ appartient à $\tilde{\Gamma}$. Il s'en suit qu'un élément a_{∞} de A_{∞} définit un unique élément $a_{\mathcal{P}-\infty}$ de $A_{\mathcal{P}-\infty}$ modulo $F_{\mathcal{P}-\infty}\cap A$ tel que $a_{\infty}a_{\mathcal{P}-\infty}$ appartient à A .

On obtient, ainsi, un homomorphisme de A_∞ sur $A_{\mathcal{P}-\infty}/(F_{\mathcal{P}-\infty}\cap A)$ de noyau $F_\infty \cap A$. D'où un isomorphisme de $B_\infty = A_\infty/(F_\infty \cap A)$ sur $B_{\mathcal{P}-\infty} = A_{\mathcal{P}-\infty}/(F_{\mathcal{P}-\infty}\cap A)$. Ces groupes sont aussi isomorphes à $B = A/(F_\infty \cap A) \times (F_{\mathcal{P}-\infty}\cap A)$. Si b est un élément de B , on note b_∞ et $b_{\mathcal{P}-\infty}$ les éléments de B_∞ et $B_{\mathcal{P}-\infty}$ correspondants . On remarque que les groupes $F_\infty \cap A$ et $F_{\mathcal{P}-\infty}\cap A$ sont finis,car F_∞ l'est, et $F_{\mathcal{P}-\infty}\cap A$ est un sous-groupe du groupe compact $K_{\mathcal{P}-\infty}$. On note K le quotient $K_{\mathcal{P}-\infty}/(F_{\mathcal{P}-\infty}\cap A)$ et λ(resp. ρ) la représentation régulière gauche (resp. droite) du groupe K dans $L^2(K)$. La restriction de la représentation $\rho\otimes\lambda$ à $B_{\mathcal{P}-\infty} \times K$ induit une représentation de $B_\infty \times K$ qui, par composition, donne lieu à une représentation de $A_\infty \times K_{\mathcal{P}-\infty}$ dans $L^2(K)$ qu'on note, encore, $\rho\otimes\lambda$.

<u>*Lemme*</u>: Les représentations $\operatorname{ind}_{A\uparrow A_\infty \times K_{\mathcal{P}-\infty}}$ et $\rho\otimes\lambda$ coincident .

<u>Démonstration</u>:

Soit F une fonction sur K . On définit une fonction G sur $A_\infty \times K_{\mathcal{P}-\infty}$ en posant $G(a_\infty, k_{\mathcal{P}-\infty}) = F(kb_{\mathcal{P}-\infty}^{-1})$ où b_∞ (resp. k) est l'image de a_∞ (resp. $k_{\mathcal{P}-\infty}$) dans B_∞ (resp. K) . La correspondance $F \to G$ échange les fonctions continues et induit un isomorphisme de $L^2(K)$ sur $L^2(A_\infty \times K_{\mathcal{P}-\infty}/A)$ entrelaçant $\rho\otimes\lambda$ et $\operatorname{ind}_{A\uparrow A_\infty \times K_{\mathcal{P}-\infty}}$; D'où le lemme .

Soit σ une représentation unitaire irréductible du groupe K . On note σ^* sa contragrédiante et σ^*_x la représentation unitaire de dimension finie du groupe A_∞ obtenue en restreignant σ^* à $B_{\mathcal{R}\infty}$ et en faisant correspondre $B_{\mathcal{R}\infty}$ à B_∞ . La représentation σ regardée comme représentation de $K_{\mathcal{P}-\infty}$ se décompose en un produit tensoriel infini de représentations irréductibles σ_p de K_p triviales pour presque tout p premier . Puisque le groupe K_p est, pour tout p premier, totalement discontinu, il en résulte que le noyau de σ est d'indice fini dans $K_{\mathcal{P}-\infty}$. Par conséquent, le noyau de σ^*_x est d'indice fini dans A_∞ . Ceci étant, la représentation $\rho\otimes\lambda$ de $K \times K$ se décompose en la somme directe $\rho \otimes \lambda = \bigoplus_{\sigma \in \hat{K}} \sigma^* \otimes \sigma$. Il en résulte que $\operatorname{ind}_{A \uparrow A_\infty \times K_{\mathcal{P}-\infty}} = \bigoplus_{\sigma \in \hat{K}} \sigma_x^* \otimes \sigma$ d'aprés le lemme précédent . Par suite

$$\operatorname{ind}_{A \uparrow G_{\mathcal{P}}^\infty} = \bigoplus_{\sigma \in \hat{K}} \operatorname{ind}_{A_\infty \uparrow G_\infty} \sigma_x^* \otimes \sigma \; .$$

<u>6.1.3.ii)</u> En résumé, si x est un élément de C , $\tilde{\Gamma}_x$ l'intersection de $G_{\mathcal{P}}^\infty$ avec $x\tilde{\Gamma}x^{-1}$, $\tilde{\Gamma}_{x;\infty}$ la projection de $\tilde{\Gamma}_x$ sur G_∞ et $\tilde{\Gamma}_{x;\mathcal{P}-\infty}$ sa projection sur $K_{\mathcal{P}-\infty}$, on peut mettre en correspondance bijective les groupes quotients $\tilde{\Gamma}_{x;\infty}/F_\infty \cap \tilde{\Gamma}_x$ et $\tilde{\Gamma}_{x;\mathcal{P}-\infty}/F_{\mathcal{P}-\infty} \cap \tilde{\Gamma}_x$ de sorte que :

$$\operatorname{ind}_{\tilde{\Gamma}_x \uparrow G_{\mathcal{P}}^\infty} = \bigoplus_{\sigma \in \hat{K}^I_{\mathcal{P}-\infty}} \operatorname{ind}_{\tilde{\Gamma}_{x;\infty} \uparrow G_\infty} \sigma_x^* \otimes \sigma$$

avec $\hat{K}^I_{\mathcal{P}-\infty} = \{ \sigma \in \hat{K}_{\mathcal{P}-\infty} \;/\; F_{-\infty} \cap \tilde{\Gamma}_x \text{ soit dans } \ker \sigma \}$.

On remarque que $F_{\mathcal{P}-\infty} \cap \tilde{\Gamma}_x \equiv F_{\mathcal{P}-\infty} \cap \tilde{\Gamma} \cap G_{\mathcal{P}}^\infty$ et, est indépendant de x . Il en est, donc, de même pour $\hat{K}^I_{\mathcal{P}-\infty}$. De plus, le noyau de σ_x^* est un sous-groupe arithmétique de G_∞ pour tout x dans C et $\sigma \in \hat{K}^I_{\mathcal{P}-\infty}$. On pose

$$T_\sigma = \bigoplus_{x \in C} \operatorname{ind}_{\tilde{\Gamma}_{x;\infty} \uparrow G_\infty} \sigma_x^* \; .$$

> <u>*Lemme*</u>: Avec les notations précédentes, on a :
>
> a) $\operatorname{ind}_{\tilde{\Gamma} \uparrow G_{\mathcal{P}}} \big|_{G_{\mathcal{P}}^\infty} = \bigoplus_{\sigma \in \hat{K}^I_{\mathcal{P}-\infty}} T_\sigma \otimes \sigma$.
>
> b) Il existe un sous-groupe arithmétique Δ_σ de G_∞ tel que la représentation T_σ soit contenue dans un multiple fini de $\operatorname{ind}_{\Delta_\sigma \uparrow G_\infty}$.

<u>Démonstration</u> :

a) évident d'après ce qui précède

b) On pose $\Delta_\sigma = \bigcap_{x \in C} \ker \sigma_x^*$. C'est un sous-groupe d'indice fini dans chacun des groupes $\tilde{\Gamma}_{x\,;\,\infty}$. Donc il est arithmétique. D'après le théorème de réciprocité de Frobenius et compte tenu du fait que la représentation σ_x^* est triviale sur Δ_σ , on a : $\operatorname{mult}(\sigma_x^* , \operatorname{ind}_{\Delta_\sigma \uparrow \tilde{\Gamma}x;\infty}) = \dim \sigma$.
Il en résulte, aussitôt, que la représentation T_σ est contenue $\dim\sigma$ fois dans card(C)fois la représentation $\operatorname{ind}_{\Delta_\sigma \uparrow G_\infty}$. D'où le lemme.

<u>*6.2.*</u> On va s'intéresser, dans ce paragraphe, au cas où le groupe algèbrique $\underline{\underline{G}}$ est réductif sur $\mathbb{Q}$. On utilise les notations du §6.1.

<u>*6.2.1.*</u> <u>*Lemme*</u> : ({B. G}) : Soit Δ un sous-groupe arithmétique de G_∞. Alors la partie discrète de $L^2(G_\infty/\Delta)$ se décompose avec multiplicités finies.

Sur la base de ce résultat de Borel-Garland, on va montrer le résultat adélique important suivant :

<u>*6.2.2.*</u> <u>*Lemme*</u> : On suppose que le groupe algébrique $\underline{\underline{G}}$ est réductif.

i) toute sous-représentation factorielle de $L^2(G_{\mathbb{A}}/\Gamma)$ est de type I

ii) la partie discrète de $L^2(G_{\mathbb{A}}/\Gamma)$ se décompose avec multiplicités finies en représentations irréductibles CCR.

iii) soit μ la mesure sur $\widehat{G}_{\mathbb{A}}$ donnant la désintégration centrale de la partie continue de $L^2(G_{\mathbb{A}}/\Gamma)$. Alors pour toute représentation unitaire irréductible π_∞ de G_∞, l'ensemble des représentations factorielles de $G_{\mathbb{A}}$ dont la restriction à G_∞ est un multiple de π_∞ est μ-négligeable.

<u>Démonstration</u> :

D'après le lemme 6.1.3.ii), on a : $\operatorname{ind}_{\Gamma\uparrow G_{\mathbb{A}}}\Big|_{G^\infty_{\mathcal{P}}} = \bigoplus_{\sigma\in \hat{K}^{I}_{\mathcal{P}-\infty}} T_\sigma \otimes \sigma$ où

T_σ est une sous-représentation d'un multiple fini de l'induite unitaire à G_∞ de la représentation triviale d'un sous-groupe arithmétique Δ_σ de G_∞. Le lemme 6.2.1. implique, alors, que la partie discrète de T_σ se décompose avec multiplicités finies. Soit π une sous-représentation factorielle de la représentation régulière de $G_{\mathbb{A}}$ dans $L^2(G_{\mathbb{A}}/\Gamma)$. Puisque le groupe G_∞ est CCR, il existe une représentation irréductible CCR, π_∞, de G_∞ et une représentation factorielle $\pi_{\mathcal{P}-\infty}$ de $G_{\mathcal{P}-\infty}$ telles que $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_{\mathcal{P}-\infty}$. D'après la décomposition précédente donnée par le lemme 6.1.3.ii), pour tout $\sigma \in \hat{K}^{I}_{\mathcal{P}_{-\infty}}$, il existe un entier naturel n_σ tel que $\pi \Big|_{G^{\infty}_{\mathcal{P}}} = \bigoplus_{\sigma \in \hat{K}^{I}_{\mathcal{P}_{-\infty}}} n_\sigma \pi_\infty \otimes \sigma$. Donc, $\pi_{\mathcal{P}_{-\infty}}|K_{\mathcal{P}_{-\infty}} = \bigoplus_{\sigma \in \hat{K}^{I}_{\mathcal{P}_{-\infty}}} n_\sigma \sigma$

Puisque $K_{\mathcal{P}_{-\infty}}$ est un sous-groupe compact (ouvert) de $G_{\mathcal{P}_{-\infty}}$, le théorème 7 de R.GODEMENT [GO1] assure que la représentation $\pi_{\mathcal{P}_{-\infty}}$ est un multiple fini d'une représentation irréductible CCR de $G_{\mathcal{P}_{-\infty}}$. Il s'en suit que π est, aussi, un multiple fini d'une représentation irréductible CCR de $G_{\mathbb{A}}$. D'où i) et ii).

Pour avoir iii), on va raisonner par l'absurde. On suppose que l'ensemble $\{\pi \in \hat{G}_{\mathbb{A}} /$ la restriction de π à G_∞ soit un multiple de $\pi_\infty\}$ est de mesure non nulle. Il permet alors de distinguer une sous-représentation de $\operatorname{ind}_{\Gamma \uparrow G_{\mathbb{A}}}$ contenue dans la partie continue se mettant sous la forme $\pi_\infty \otimes \pi_{\mathcal{P}_{-\infty}}$ où $\pi_{\mathcal{P}_{-\infty}}$ est une représentation de $G_{\mathcal{P}_{-\infty}}$. On considère, de nouveau, la décomposition citée plus haut (lemme 6.1.3.ii)). Comme ci-dessus, on obtient la décomposition : $\pi_{\mathcal{P}_{-\infty}}|K_{\mathcal{P}_{-\infty}} = \bigoplus_{\sigma \in \hat{K}^{I}_{\mathcal{P}_{-\infty}}} n_\sigma \sigma$ avec n_σ des entiers naturels.

Soit σ un élément de $\hat{K}^{I}_{\mathcal{P}_{-\infty}}$ tel que $n_\sigma \neq 0$, soit $\mathcal{X}$ une réalisation concrète de $\pi_{\mathcal{P}_{-\infty}}$ et soit $\mathcal{X}_\sigma$ un sous-espace de $\mathcal{X}$ où $K_{\mathcal{P}_{-\infty}}$ opère par une sous-représentation équivalente à σ. On considère l'intersection $\mathcal{E}$ de toutes les sous-représentations de $\pi_{\mathcal{P}_{-\infty}}$ dont l'espace rencontre (et donc contient) $\mathcal{X}_\sigma$. C'est une sous-représentation non triviale de $\pi_{\mathcal{P}_{-\infty}}$ contenant $\mathcal{X}_\sigma$. Si $\mathcal{E}$ est irréductible, $\pi_\infty \otimes \mathcal{E}$ est dans la partie discrète de $\operatorname{ind}_{\Gamma \uparrow G_{\mathbb{A}}}$, d'où une contradiction. Si $\mathcal{E}$ n'est pas irréductible, $\mathcal{E}$ est la somme de deux sous-représentations propres non triviales $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. Soit $\mathcal{X}^1_\sigma$ et $\mathcal{X}^2_\sigma$ les projections de $\mathcal{X}_\sigma$ sur $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ respectivement. Il est facile de voir que $\mathcal{X}^i_\sigma$, $i = 1,2$, est une représentation de type σ. En répétant le procédé avec $\mathcal{E}^1$ au lieu de $\pi_{\mathcal{P}_{-\infty}}$ et $\mathcal{X}^1_\sigma$ au lieu de $\mathcal{X}_\sigma$, et, peut être, encore plusieurs fois, on est sûr de tomber sur une sous-représentation irréductible contenant σ car la multiplicité de σ dans $\pi_{\mathcal{P}_{-\infty}}|K_{\mathcal{P}_{-\infty}}$ est finie. D'où iii).

6.3. Le second résultat principal est le suivant :

Théorème: Soit $(G,F,\mathcal{S},F_+,\underline{G})$ un groupe de classe $C_{\mathbb{Q}}$ et τ une représentation unitaire irréductible de $G_{\mathbb{Q}}$ de noyau d'indice fini dans $G_{\mathbb{Q}}$.
i)Toute sous-représentation factorielle de $\operatorname{ind}_{G_{\mathbb{Q}}\uparrow G_{\mathbb{A}}} \tau$ est de type I et toute sous-représentation irréductible intervient avec multiplicité finie .
ii)Soit μ la mesure donnant la désintégration centrale de la partie continue de $\operatorname{ind}_{G_{\mathbb{Q}}\uparrow G_{\mathbb{A}}} \tau$ .Alors, pour toute représentation irréductible π_∞ de G_∞ , l'ensemble des représentations factorielles de $G_{\mathbb{A}}$ dont la restriction à G_∞ est un multiple de π_∞ est μ -négligeable.
iii)Si le groupe G est de classe $C^\circ_{\mathbb{Q}}$,toute sous-représentation irréductible de $\operatorname{ind}_{G_{\mathbb{Q}}\uparrow G_{\mathbb{A}}} \tau$ est un produit tensoriel infini de représentations irréductibles de G_p restreint à une direction invariante canoniquement déterminée .

Démonstration:

Les théorèmes 5.2 , 4.6 et 4.9.2 permettent de se ramener au cas où le groupe $\underline{G}$ est réductif sur $\mathbb{Q}$ comme expliqué au §5.3 . Dans ce cas, en prenant pour Γ le noyau de τ , la représentation $\operatorname{ind}_{G_{\mathbb{Q}}\uparrow G_{\mathbb{A}}} \tau$ est une sous-représentation de $\operatorname{ind}_{\Gamma\uparrow G_{\mathbb{A}}}$ et le lemme 6.2.2 permet de conclure . D'où le théorème .

6.4. Comme cas particulier important, on a le résultat suivant :

Théorème: Soit $\underline{G}$ un groupe algébrique défini sur $\mathbb{Q}$. Alors :
i) Toute sous représentation factorielle de $L^2(\underline{G}_{\mathbb{A}}/\underline{G}_{\mathbb{Q}})$ est de type I .
ii) La partie discrète de $L^2(\underline{G}_{\mathbb{A}}/\underline{G}_{\mathbb{Q}})$ se décompose avec multiplicités finies
iii) Toute sous-représentation irréductible de $L^2(\underline{G}_{\mathbb{A}}/\underline{G}_{\mathbb{Q}})$ est le produit tensoriel infini de représentations irréductibles de $\underline{G}_p$ restreint à une direction invariante canoniquement déterminée .
iv) Soit μ la mesure sur $\underline{G}_{\mathbb{A}}$ donnant la désintégration centrale de la

partie continue de $L^2(\underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}}/\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}})$ et π_∞ une représentation irréductible de $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}$. L'ensemble des représentations factorielles de $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}}$ dont la restriction à $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}$ est un multiple de π_∞ est μ -négligeable .

6.5. Soit $\underline{\underline{G}}$ un groupe algébrique défini sur $\mathbb{Q}$ muni de la donnée d'un réseau rationnel de sorte que les groupes $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}}$ et $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p}$, pour tout nombre premier p , sont bien définis . Dans ce paragraphe, on va donner la décomposition de la partie discrète de $L^2(\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}/\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}})$,en utilisant les résultats adéliques qu'on vient d'établir . Pour celà, on pose :

$$\underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}}^{\infty} = \underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}} \times \prod_{p \text{ premier}} \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p} = \underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}} \times K$$

on désigne par 1_p la représentation triviale de $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p}$, par $\mathcal{S}$ le spectre discret de $L^2(\underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}}/\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}})$ et, si $\pi \in \mathcal{S}$, n_π sa multiplicité dans $L^2(\underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}}/\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}})$ (qui est finie) et π_p sa composante sur G_p , $p \in \mathcal{P}$. On a le résultat réel suivant :

Proposition: La partie discrète de $L^2(\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}/\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}})$ est contenue dans la somme $\bigoplus_{\pi \in \mathcal{S}} n_\pi \prod_{p \text{ premier}} \text{mult}(1_p , \pi_p)\pi_\infty$. On a l'égalité si l'on a : $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}} = \underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}}^{\infty} \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}$.

Démonstration :

Soit π_∞^o une représentation unitaire irréductible intervenant discrètement dans $L^2(\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}/\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}})$ et m sa multiplicité. D'après le lemme 6.1.3.ii), on a : $m \leq \text{mult} (\pi_\infty^o \otimes 1_K , \text{ind}_{\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}} \uparrow \underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}}} |_{\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}} \times K})$ et on a l'égalité si $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}} = (\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}} \times K) \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}$. Compte-tenu du théorème 6.4.iv), on a :

$$\text{mult} (\pi_\infty^o \otimes 1_K , \text{ind}_{\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}} \uparrow \underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}}} |_{\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}} \times K}) = \sum_{\pi \in \mathcal{S}} n_\pi \quad \text{mult}(\pi_\infty^o \otimes 1_K, \pi |_{\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}} \times K}).$$

on est donc ramené à montrer que $\text{mult} (\pi_\infty \otimes 1_K,\pi |_{\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}} \times K})$ coïncide avec $\prod_{p \text{ premier}} \text{mult} (1_p, \pi_p)$. Soit $\mathcal{H}_p$ une réalisation concrète de π_p et

$(\phi_p)_{p \geq p_o}$ une famille de vecteurs $\phi_p \in \mathcal{H}_p$ invariants par $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}p}$ tels que la composante $\pi_{\mathcal{P}-\infty}$ de π sur $G_{\mathcal{P}-\infty}$ soit réalisée dans le produit tensoriel infini $\mathcal{H}_{\mathcal{P}-\infty}$ des espaces $\mathcal{H}_p$, $p \in \mathcal{P}-\infty$, restreint à la famille (ϕ_p). Pour $p \geq p_o$, on pose $\mathcal{H}_{p_i} = (\bigotimes_{q \leq p} \mathcal{H}_q) \otimes (\bigotimes_{q>p} \phi_q)$. C'est un sous-espace fermé K-invariant de $\mathcal{H}_{\mathcal{P}-\infty}$ et on a :

$$\mathrm{mult}\,(1_K, \pi_{\mathcal{P}-\infty}|_K) = \lim_{p \to \infty} \mathrm{mult}\,(1_K, \mathcal{H}_{p_i}).$$

Il est clair que $\mathrm{mult}\,(1_K, \mathcal{H}_{p_i}) = \prod_{q \leq p} \mathrm{mult}(1_q, \mathcal{H}_q)$. D'où la proposition.

6.6. Remarques.

i) Evidemment, un groupe $\underline{\underline{G}}$ vérifiant la propriété de la forte approximation est tel que $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}} = \underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}}^{\infty}\, \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}$. On sait qu'il en est ainsi si $\underline{\underline{G}} = GL_n, SL_n$, un groupe unipotent ou un produit semi-direct de tels groupes ([BO3] , [HU]). Ce n'est pas toujours le cas comme sera expliqué au § 7.5.

ii) Dans $L^2(\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}/\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}})$ les multiplicités ne sont pas toujours finies. On donnera de tels exemples au § 7.1.5., 7.2.

Au paragraphe 6.7. et 6.8. suivants, on va donner une complète description des groupes $\underline{\underline{G}}$ tels que $L^2(\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}/\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}})$ se décompose avec multiplicités finies.

6.7. *Théorème:* Soit $\underline{\underline{G}}$ un groupe algébrique défini sur $\mathbb{Q}$ tel que le centre de $\underline{\underline{G}}^{\circ}$ soit anisotrope sur $\mathbb{Q}$. Alors, pour tout sous-groupe arithmétique Δ de $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}$, il existe une représentation irréductible de $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}$ contenue dans $L^2(\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}/\Delta)$.

Démonstration :

Soit $\underline{\underline{U}}$ le radical unipotent de $\underline{\underline{G}}$, $\underline{\underline{R}}$ une composante de Levi de $\underline{\underline{G}}$ définie sur $\mathbb{Q}$, T_m(resp.T_c) un tore déployé (resp. déployé central) maximal, dans la composante irréductible $\underline{\underline{R}}^{o}$ de $\underline{\underline{R}}$, défini sur $\mathbb{Q}$ et soit $\underline{u}^i$ la suite centrale descendante de $\underline{u}$. On a $\underline{u}^1 = \underline{u}$, si $\underline{u} \neq 0$ et pour chaque $i>1$, $\underline{u}^i$ est l'idéal de $\underline{u}$ défini sur $\mathbb{Q}$ stable par $\underline{\underline{G}}$ défini par $\underline{u}^i = [\underline{u}, \underline{u}^{i-1}]$. Soit $\underline{u}^\varepsilon$ le dernier terme non nul de la suite. Si $\underline{u} = 0$, on prend $\varepsilon = 0$. On va raisonner par récurrence sur la dimension de $\underline{\underline{G}}$.

<u>1er cas</u> $\varepsilon \leq 1$. Autrement dit, l'algèbre $\underline{u}$ est abélienne. Si $\dim \underline{u} = 0$, le groupe $\underline{\underline{G}}$ est réductif et $\underline{\underline{G}}^o$ n'a aucun caractère rationnel sur $\mathbb{Q}$. Dans ce cas, le volume de $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}/\Delta$ est fini et la représentation régulière de $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}$ dans $L^2(\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}/\Delta)$ contient la représentation triviale. On suppose donc, que l'algèbre $\underline{u}$ est abélienne non nulle.

i) Le groupe $\Delta \cap \underline{\underline{U}}_{\mathbb{R}}$ est un sous-groupe arithmétique de $\underline{\underline{U}}_{\mathbb{R}}$ et le quotient $\underline{\underline{U}}_{\mathbb{R}}/\Delta\cap\underline{\underline{U}}_{\mathbb{R}}$ est compact. Il s'en suit que le groupe $\Delta\underline{\underline{U}}_{\mathbb{R}}$ est fermé dans $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}$ et le quotient $\Delta\underline{\underline{U}}_{\mathbb{R}}/\Delta$ est un compact homéomorphe à $\underline{\underline{U}}_{\mathbb{R}}/\Delta\cap\underline{\underline{U}}_{\mathbb{R}}$. On considère la représentation $\operatorname{ind}_{\Delta\uparrow\Delta U_{\mathbb{R}}}$. On a: $\operatorname{ind}_{\Delta\uparrow\Delta\underline{\underline{U}}_{\mathbb{R}}}\Big|_{\underline{\underline{U}}_{\mathbb{R}}} = \operatorname{ind}_{\Delta\cap\underline{\underline{U}}_{\mathbb{R}}\uparrow\underline{\underline{U}}_{\mathbb{R}}} = \bigoplus_{\chi\in\mathcal{A}} \chi$,

où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des caractères de $\underline{\underline{U}}_{\mathbb{R}}$ triviaux sur $\Delta\cap\underline{\underline{U}}_{\mathbb{R}}$. Il en résulte que la représentation $\operatorname{ind}_{\Delta\uparrow\Delta\underline{\underline{U}}_{\mathbb{R}}}$ est somme discrète de représentations irréductibles, chacune intervenant avec la multiplicité un. En fait, on a :

$$\operatorname{ind}_{\Delta\uparrow\Delta\underline{\underline{U}}_{\mathbb{R}}} = \bigoplus_{\chi\in\mathcal{A}/\Delta} \operatorname{ind}_{\Delta_\chi\underline{\underline{U}}_{\mathbb{R}}\uparrow\Delta\underline{\underline{U}}_{\mathbb{R}}} \chi'$$

avec χ' le caractère de $\Delta_\chi\underline{\underline{U}}_{\mathbb{R}}$ prolongeant χ et trivial sur Δ_χ . De plus, le caractère χ' se prolonge à $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}\chi} = \underline{\underline{U}}_{\mathbb{R}}\underline{\underline{R}}_{\mathbb{R}\chi}$ trivialement sur $\underline{\underline{R}}_{\mathbb{R}\chi}$ de sorte que l'on a :

$$\operatorname{ind}_{\Delta_\chi\underline{\underline{U}}_{\mathbb{R}}\uparrow\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}\chi}} \chi' = \chi'\otimes \operatorname{ind}_{\Delta_\chi\underline{\underline{U}}_{\mathbb{R}}\uparrow\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}\chi}}$$

. Il s'en suit, alors que :

$$\operatorname{ind}_{\Delta\uparrow\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}} = \bigoplus_{\chi\in\mathcal{A}/\Delta} \operatorname{ind}_{\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}\chi}\uparrow\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}} \chi'\otimes\operatorname{ind}_{\Delta_\chi\underline{\underline{U}}_{\mathbb{R}}\uparrow\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}\chi}}$$

Il nous suffit alors de montrer qu'il existe $\chi\in \mathcal{A}$ et un sous-groupe algébrique définie sur $\mathbb{Q}$, $\underline{\underline{R}}_\theta$, de $\underline{\underline{R}}$ tels que le centre de $(\underline{\underline{R}}_\theta)^o$ soit anisotrope sur $\mathbb{Q}$ et $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}\chi} = \underline{\underline{U}}_{\mathbb{R}}(\underline{\underline{R}}_\theta)_{\mathbb{R}}$.

ii) Si le tore T_c est trivial, le centre de $\underline{\underline{R}}^o$ est anisotrope sur $\mathbb{Q}$ et on peut prendre $\chi=1$ et $\underline{\underline{R}}_\theta = \underline{\underline{R}}$. On suppose donc que le tore T_c est non trivial. Si α est un caractère rationnel sur $\mathbb{Q}$ de T_c, on note $\underline{u}^*_\alpha = \{u^*\in \underline{u}^* \ / \ tu^* = \alpha(t)u^* \quad \forall t\in T_c\}$.

Soit σ l'ensemble des tels α vérifiant $\underline{u}^*_\alpha \neq 0$. On a $\underline{u}^* = \bigoplus_{\alpha\in\sigma} \underline{u}^*_\alpha$.
De plus, pour chaque $\alpha\in\sigma$, l'espace $\underline{u}^*_\alpha$ est rationnel sur $\mathbb{Q}$ et $\underline{\underline{R}}^o$-invariant. Ceci étant, soit Σ un système de racines positives de l'algèbre de Lie $\underline{r}$ de $\underline{\underline{R}}$ suivant T_m. L'espace $\underline{n} = \bigoplus_{\beta\in\Sigma} \underline{r}_\beta$ est une sous-algèbre unipotente définie sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{r}$. Soit $\underline{\underline{N}}$ le sous-groupe unipotent défini sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{\underline{R}}^o$ associé. Pour $\alpha\in\sigma$, on pose $\mathcal{E}_\alpha = \{u^*\in \underline{u}^*_\alpha \ / \ nu^* = u^* \quad \forall n\in \underline{\underline{N}}\}$.
L'espace $\mathcal{E}_\alpha$ est non nul et est défini sur $\mathbb{Q}$. On y choisit un élément rationnel non nul θ_α et on pose $\theta = \sum_{\alpha\in\sigma}\theta_\alpha$. Quitte à changer θ en un multiple entier, on peut supposer que le caractère unitaire χ de $\underline{\underline{U}}_{\mathbb{R}}$ de différentielle $2i\pi\theta$ se trouve dans $\mathcal{A}$. Il est clair que le groupe $\underline{\underline{R}}_\theta$ est un sous-groupe algébrique défini sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{\underline{R}}$ contenant $\underline{\underline{N}}$ et vérifiant $(\underline{\underline{R}}_\theta)_{\mathbb{R}} = \underline{\underline{R}}_{\mathbb{R}\chi}$. Il ne reste plus qu'à voir que le centre de $(\underline{\underline{R}}_\theta)^o$ est anisotrope sur $\mathbb{Q}$. Soit T un tore déployé sur $\mathbb{Q}$ central dans $(\underline{\underline{R}}_\theta)^o$. Il centralise $\underline{\underline{N}}$ et, donc le normalise. Donc le tore T est contenu dans T_m et par suite dans T_c. Mais $T_c\cap\underline{\underline{R}}_\theta = \bigcap_{\alpha\in\sigma} \ker\alpha = \{1\}$, car le centralisateur de $\underline{u}$ dans T_c est trivial. Il s'en suit que T est trivial. Par suite le centre de $(\underline{\underline{R}}_\theta)^o$ est anisotrope sur $\mathbb{Q}$.

<u>2ème cas</u> : $\varepsilon \geq 2$. On note $\underline{\underline{A}}$ l'idéal unipotent défini sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{\underline{G}}$ d'algèbre de Lie $\underline{a} = \underline{u}^\varepsilon$. On pose $\underline{b} = \underline{u}^{\varepsilon-1}$. On a $\underline{u} = \underline{u}' \oplus \underline{a}$ et $\underline{b} = \underline{b}' \oplus \underline{a}$ où u' et $\underline{b}'$ sont des sous-espaces rationnels sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{u}$, invariants par T_c. On note σ_1(resp. σ_2, resp σ_3) l'ensemble des poids de T_c dans $\underline{u}'$ (resp. $\underline{a}$, resp. $\underline{b}'$). Ainsi, on a :

$$\underline{a} = [\underline{u}\,,\,\underline{b}] = [\bigoplus_{\alpha\in\sigma_1} \underline{u}'_\alpha \,,\, \bigoplus_{\alpha\in\sigma_3} \underline{b}'_\alpha\,] = \bigoplus_{\alpha\in\sigma_2} \underline{a}_\alpha \,.$$

Donc, pour tout $\alpha_2 \in \sigma_2$, il existe $\alpha_1 \in \sigma_1$ et $\alpha_3 \in \sigma_3$ tels que $\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3$. Il s'en suit que $\bigcap_{\alpha\in\sigma_1} \ker\alpha = \bigcap_{\alpha\in \sigma_1\cup\sigma_2} \operatorname{Ker}\alpha = (1)$.

Celà implique que le centralisateur dans T_c de $\underline{U}/\underline{A}$ est trivial . Par conséquent, le centre de $(\underline{G}/\underline{A})^\circ$ est anisotrope sur $\mathbb{Q}$. L'hypothèse de récurrence montre que la représentation induite de la représentation triviale de $\Delta\underline{\underline{A}}_{\mathbb{R}}/\underline{\underline{A}}_{\mathbb{R}}$ à $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}/\underline{\underline{A}}_{\mathbb{R}}$ contient une représentation irréductible . Celà signifie que la représentation induite de la représentation triviale de Δ à $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}$ contient une représentation irréductible de $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}$ triviale sur $\underline{\underline{A}}_{\mathbb{R}}$ .D'où le théorème .

Remarque: La condition du théorème 6.7 est, évidemment, nécessaire .

6.8. Théorème: Soit $\underline{G}$ un groupe algébrique défini sur $\mathbb{Q}$ tel que le centre de $\underline{G}^\circ$ soit anisotrope sur $\mathbb{Q}$ et soit $(G,F,\underline{G})$ un groupe de classe $C_{\mathbb{R}}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i)Il existe un sous-groupe arithmétique Δ de G tel que la partie discrète de $L^2(G/\Delta)$ se décompose avec multiplicités finies ;

ii)Pour tout sous-groupe arithmétique Δ de G la partie discrète de $L^2(G/\Delta)$ se décompose avec multiplicités finies ;

iii)Tout tore déployé sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{G}$ centralise le radical unipotent .

Démonstration :

i) = > iii) On va raisonner par récurrence sur la longueur ε de la suite centrale descendante $\underline{u}^i$ du radical unipotent $\underline{u}$ de l'algèbre de Lie $\underline{g}$ de $\underline{G}$. Si $\varepsilon = 0$, le groupe $\underline{G}$ est réductif et le théorème est donné par le lemme 6.2.1. On suppose, donc, que $\varepsilon \geq 1$. Soit T_m un tore déployé maximal sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{G}$ et Δ comme en i). Il s'agit de montrer que T_m centralise $\underline{u}$.

1er cas : $\varepsilon \geq 2$. On note $\underline{\underline{A}}$ l'idéal unipotent défini sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{\underline{G}}$ ayant $\underline{a} = \underline{u}^{\varepsilon}$ comme algèbre de Lie. Le groupe $\underline{\underline{A}}_{\mathbb{R}}$ se relève en un sous-groupe A invariant de G fermé. On pose $\underline{\underline{G}}' = \underline{\underline{G}}/\underline{\underline{A}}$, $G' = G/A$, $F' = F$ et $\Delta' = \Delta A/A$: le groupe $(G', F', \underline{\underline{G}}')$ est de classe $C_{\mathbb{R}}$ et Δ' est un sous-groupe arithmétique de G'. Comme le quotient $\Delta A/\Delta$ est compact, par composition on a une injection de $L^2(G'/\Delta')$ dans $L^2(G/\Delta)$. En particulier, $L^2(G'/\Delta')$ se décompose avec multiplicités finies. L'hypothèse de récurrence assure que le tore T_m centralise le radical unipotent $\underline{u}/\underline{a}$ de l'algèbre de Lie $\underline{g}' = \underline{g}/\underline{a}$ de $\underline{\underline{G}}'$. Donc, toute direction propre de $\underline{u}$ associée à un poids de T_m non trivial est contenue dans $\underline{a}$. Il s'en suit que $\underline{u} = \underline{a} + \underline{u}_1$ où $\underline{u}_1$ est l'espace propre de $\underline{u}$ associé au poids trivial de T_m. On a alors, $\underline{a} \subset [\underline{u}, \underline{u}] \subset [\underline{u}_1, \underline{u}_1] \subset \underline{u}_1$ et, par conséquent, T_m centralise $\underline{u}$.

2ème cas : $\varepsilon = 1$. L'algèbre $\underline{u}$ est abélienne non nulle. Soit $\underline{\underline{R}}$ une composante de Levi définie sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{\underline{G}}$ contenant T_m et $\underline{r}$ son algèbre de Lie. On va raisonner par l'absurde. On suppose, donc, que T_m ne centralise pas $\underline{u}$. Soit Σ un système de racines positives de $\underline{r}$ suivant T_m et $\underline{n} = \bigoplus_{\beta \in \Sigma} \underline{r}_{-\beta}$ où $\underline{r}_{-\beta}$ est l'espace propre de $\underline{r}$ associé au poids $\beta \in \Sigma$. L'algèbre $\underline{n}$ est unipotente définie sur $\mathbb{Q}$. On note N le sous-groupe unipotent défini sur $\mathbb{Q}$ de $\underline{\underline{R}}^{o}$ associé.

Soit $\underline{u} = \underline{u}_1 \oplus \dots \oplus \underline{u}_n$ une décomposition de $\underline{u}$ en $\underline{\underline{R}}$-modules simples.

On pose :

$$\mathcal{E} = \{u^* \in \underline{u}^* \;/\; nu^* = u^* \text{ pour tout } n \in N\}$$

$$\mathcal{E}_i = \{u^* \in \underline{u}_i^* \;/\; nu^* = u^* \text{ pour tout } n \in N\}$$

On a $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{E}_n$. Le tore T_m opère dans $\mathcal{E}_i$ par le poids dominant α_i du $\underline{\underline{R}}$-module simple $\underline{u}_i^*$ relativement à Σ. On choisit un système libre maximal $\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_s}\}$ de $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ et, pour $j = 1, \dots, s$, un élément non nul θ_j de $\mathcal{E}_{i_j} \cap \underline{u}^*_{\mathbb{Q}}$. On pose $\theta = \sum_{j=1}^{s} \theta_j$.

Quitte à multiplier θ par un entier, on peut supposer que le caractère unitaire χ_θ de U de différentielle $2i\pi\theta$ est trivial sur $\Delta \cap U$ où U est le relèvement à G de $\underline{\underline{U}}_{\mathbb{R}}$. En procédant comme dans la démonstration du théorème 6.7, on montre que le centre de $(\underline{\underline{R}}_\theta)^o$ est anisotrope sur $\mathbb{Q}$ et que :

$$L^2(G/\Delta) = \bigoplus_{\chi\in\mathcal{A}/\Delta} \operatorname{ind}_{G_\chi \uparrow G} \chi' \otimes L^2(G_\chi / \Delta_\chi U)$$

où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des caractères de U triviaux sur $\Delta \cap U$ et, pour $\chi \in \mathcal{A}$, χ' désigne le prolongement de χ à G_χ, trivial sur R_χ (R est l'image réciproque de $\underline{\underline{R}}_{\mathbb{R}}$ dans G. On a $G = U\times R$). D'après le théorème 6.7., la représentation $L^2(G_\theta/\Delta_\theta U)$ contient une représentation irréductible ρ_θ. Il suffit de montrer que la représentation irréductible $\pi = \operatorname{ind}_{G_{\chi_\theta}\uparrow G} \chi'_\theta \otimes \rho_\theta$ intervient avec une multiplicité infinie dans $L^2(G/\Delta)$ pour avoir une contradiction. Soit, pour chaque entier naturel n non nul, $\underline{\underline{t}}_n$ un élement de $(T_m)_{\mathbb{Q}} \cap (\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}})_o$ tel que $\alpha_{i_j}(\underline{\underline{t}}_n) = n$ pour $j=1,\dots,s$ et t_n un antécédent de $\underline{\underline{t}}_n$ dans G. On a, $t_n\theta=n\theta$, $\chi_{n\theta} = \chi_\theta^n \in \mathcal{A}$ et $G_{n\theta} = G_\theta$. Par conqéquent, $\operatorname{ind}_{G_{n\theta}\uparrow G} \chi'_{n\theta} \otimes \rho_\theta$ est une sous-représentation irréductible de $L^2(G/\Delta)$ équivalente à π. Pour avoir l'assertion il suffit de remarquer que $\{\Delta t_n\theta \ , \ n \in \mathbb{N}-\{o\} \}$ est un sous-ensemble infini de $\mathcal{A}/\Delta$. D'où iii).

iii) $\Rightarrow$ ii) On suppose, maintenant, que le tore T_m centralise $\underline{u}$. Soit Δ un sous groupe arithmétique de G. Il s'agit de montrer que la partie discrète de $L^2(\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}/\Delta)$ se décompose avec multiplicités finies. Il suffit de le montrer lorsque Δ est un sous-groupe de G_o ($L^2(G/\Delta) \subset L^2(G/\Delta\cap G_o)$). Aussi, on peut supposer que le groupe G est connexe et le groupe $\underline{\underline{G}}$ est irréductible.

> <u>*Lemme*</u>: Soit $\underline{\underline{G}}$ un groupe algébrique irréductible sur un corps k tel que tout tore déployé sur k de $\underline{\underline{G}}$ centralise le radical unipotent. Alors $\underline{\underline{G}}$ est le produit presque direct d'un groupe réductif et d'un groupe anisotrope sur k .

On admet, pour un moment, ce lemme. Le groupe $\underline{\underline{G}}$ est le produit presque direct d'un groupe réductif $\underline{\underline{G}}_1$ défini sur $\mathbb{Q}$ et d'un groupe $\underline{\underline{G}}_2$ anisotrope sur $\mathbb{Q}$. Soit G_1 (resp. G_2) la composante connexe de l'élément neutre de l'image réciproque dans G de $(\underline{\underline{G}}_1)_{\mathbb{R}}$ (resp.$(\underline{\underline{G}}_2)_{\mathbb{R}}$). Comme le groupe G est supposé connexe, il est alors, le produit direct de G_1 et G_2. De plus, le quotient $G_2/\Delta \cap G_2$ est compact et, donc, $L^2(G_2/\Delta \cap G_2)$ se décompose avec multiplicités finies. D'après le lemme 6.2.1., les multiplicités de $L^2(G_1/\Delta\cap G_1)$ sont finies. Celles de $L^2(G/\Delta)$ le sont alors. D'où le théorème.

<u>Démonstration du lemme</u> :

Soit U le radical unipotent de $\underline{\underline{G}}$, R une composante de Lévi définie sur k, R_1 la composante irréductible du centralisateur dans R de U, R_2 la composante irréductible du centralisateur dans R de R_1 et $\underline{u}$, $\underline{r}$, $\underline{r}_1$, $\underline{r}_2$ les algèbres de Lie respectives des sous-groupes U, R, R_1, R_2 de $\underline{\underline{G}}$ définies sur k. Les groupes R_1 et R_2 sont réductifs et $R_1 \cap R_2$ est le centre de R_1. De plus, R_1 contient tout tore déployé sur k de R. Soit T_c le tore déployé sur k central maximal dans R_1 et G_1 le sous-groupe algébrique de R_1 engendré par T_c et $[R_1, R_1]$. Il est clair que tout tore déployé sur k de R est contenu dans G_1. De plus $G_1 \cap R_2$ est un groupe algébrique fini modulo T_c et R_2 est le produit presque direct de T_c et d'un sous-groupe R_2' anisotrope sur k invariant de R. Soit G_2 le produit semi-direct de U et R_2'. Le groupe $\underline{\underline{G}}$ est le produit presque direct de G_1 et G_2 et on a le lemme.

<u>*6.9*</u>. - Le théorème 6.8. rappelle la caractérisation de R. Lipsman [Li] qui caractérise les groupes algébriques CCR sur un corps local de caractéristique o. C'est, en fait, l'équivalent "global". On va saisir l'occasion pour en donner une généralisation aux groupes de classe C_k.

Théorème: Soit $\underline{\underline{G}}$ un groupe algébrique défini sur un corps local k de caractéristique 0 . Soit $(G,F,\underline{\underline{G}})$ un groupe de classe C_k et on suppose qu'il est de classe C_k° si k est à valuation discrète. Une condition nécessaire et suffisante pour que le groupe G soit CCR est que tout tore déployé sur k de $\underline{\underline{G}}$ centralise le radical unipotent .

Démonstration :

On peut, naturellement, supposer que le groupe $\underline{\underline{G}}$ est irréductible. Si le groupe G est CCR, G/F l'est aussi et, par suite, $\underline{\underline{G}}_R$ aussi. D'après Lipsman [Li] , on conclue. On suppose, maintenant, que tout tore déployé sur k de $\underline{\underline{G}}$ centralise le radical unipotent. D'après le lemme 6.8., le groupe $\underline{\underline{G}}$ est le produit presque direct d'un sous-groupe réductif $\underline{\underline{G}}_1$ défini sur k et d'un-sous groupe $\underline{\underline{G}}_2$ anisotrope sur k. Soit G_i, $i=1,2$, l'image réciproque de $(\underline{\underline{G}}_i)_k$ dans G. Il est facile de voir que G_1G_2 est un sous-groupe d'indice fini de G et $[G_1, G_2]$ est un sous-groupe de F. Soit G_1' le centralisateur dans G_1 de G_2. C'est un sous-groupe d'indice fini de G_1 et le produit $G_1' G_2$ est presque direct et est d'indice fini dans G. Comme le groupe $(G_1', F, \underline{\underline{G}}_1)$ est de classe C_k (de classe C_k^o si k est à valuation discrète) et le groupe $\underline{\underline{G}}_1$ est réductif, d'après le théorème 1.2., le groupe G_1' est CCR. Il reste à prouver que le groupe G_2 est CCR. Mais le groupe $\underline{\underline{G}}_2$ est anisotrope sur k. Donc $\underline{\underline{G}}_2 = \underline{\underline{U}} \times \underline{\underline{R}}_2$ où $\underline{\underline{U}}$ est le radical unipotent et $\underline{\underline{R}}_2$ est une composante de Levi définie sur k anisotrope. Soit U le relèvement de $\underline{\underline{U}}_k$ à G_2 et R_2 l'image réciproque de $(\underline{\underline{R}}_2)_k$ dans G_2. Il est clair que $G_2 = U \times R_2$ et que $(\underline{\underline{R}}_2)_k$ et, par suite R_2, est compact. La théorie de Mackey appliquée à U comme sous-groupe de type I invariant de G_2 montre que toute représentation unitaire irréductible de G_2 est traçable et, donc, CCR. D'où le théorème.

Corollaire: Soit $\underline{\underline{G}}$ un groupe algébrique défini sur $\mathbb{Q}$ (tel que le centre de $\underline{\underline{G}}^\circ$ soit anisotrope sur $\mathbb{Q}$) . S'il existe p , infini ou premier, tel que le groupe $\underline{\underline{G}}_p$ soit CCR , alors, la partie discrète de $L^2(\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}/\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}})$ se décompose avec multiplicités finies .

La démonstration de ce corollaire est évidente. La réciproque est fausse. Un contre-exemple est le suivant :

Soit T_m le tore défini sur $\mathbb{Q}$ formé des matrices $\begin{pmatrix} a & mb \\ b & a \end{pmatrix}$ de SL_2 et G_m son produit semi-direct avec le groupe d'Heisenberg de dimension 3 (obtenu comme sous-groupe du groupe algébrique $\tilde{G}$ qu'on introduit au § 7.8). Soit $\underline{\underline{G}}$ le produit direct $G_{-1} \times G_m \times \underline{\underline{G}}_{-m}$ avec m un nombre premier congru à 1 modulo 8 (prendre par exemple $m=17$). Le groupe $\underline{\underline{G}}$ est anisotrope sur $\mathbb{Q}$. Par contre, pour tout $p \in \mathcal{P}$, le groupe $\underline{\underline{G}}_p$ n'est pas C.C.R. En effet : T_m se déploie sur $\mathbb{Q}_2$ car m est un carré dans $\mathbb{Q}_2$ (Serre {Se;ch.II,th.4}) Le tore T_{-1} se déploie sur $\mathbb{Q}_m$ car -1 est un carré dans $\mathbb{Q}_m$ puisque le symbole de Legendre $\left(\frac{-1}{m}\right) = 1$ (J.P. Serre {Se; ch I, Th.5}).
On suppose donc, que $p \neq 2, m$. Dans ce cas, ou bien le symbole de Legendre $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ auquel cas T_{-1} se déploie sur $\mathbb{Q}_p$ ou bien $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$ et dans ce cas m ou $-m$ est un carré dans $\mathbb{Q}_p$ et, par suite, T_m ou T_{-m} se déploie sur $\mathbb{Q}_p$. D'où l'assertion.

7 - CAS RÉSOLUBLE - EXEMPLES

7.1 La décomposition des espaces L^2 engendrés par le quotient d'un groupe résoluble par un sous-groupe discret a fait l'objet d'un grand nombre de travaux. On peut citer ceux de Brezin {Br}, R. Howe {HO 1,3}, H. Moscovici et A. Verona {M.V. 1}, J. Rosenberg {RO 2}. On expose dans ce qui suit, une technique adélique, en application aux résultats généraux obtenus, et on donnera des exemples soulignant la possibilité d'avoir des multiplicités infinies et les difficultés de la théorie des nombres qui peuvent surgir.

Soit $\underline{G}$ un groupe résoluble algébrique défini sur $\mathbb{Q}$ irréductible, U son radical unipotent et $\underline{g}$ (resp. $\underline{u}$) l'algèbre de Lie algébrique de $\underline{G}$ (resp. U).

7.1.1. THÉORÈME : $L^2(\underline{G}_{\mathbb{A}}/\underline{G}_{\mathbb{Q}})$ est sans multiplicité.

Démonstration.

Soit g^* une forme de type unipotent dans $\underline{g}^*_{\mathbb{Q}}$, U_{g^*} le radical unipotent de $\underline{G}(g^*)$, $\underline{R}$ une composante de Levi définie sur $\mathbb{Q}$, $\chi_{g^*;\mathbb{A}}$ le caractère unitaire de $U_{g^*;\mathbb{A}}$ associé à la restriction de g^* au radical unipotent de $\underline{g}(g^*)$ et $\mathcal{C}$ la sous représentation de $\mathrm{ind}_{\underline{R}_{\mathbb{Q}}\uparrow\underline{R}^{g^*}_{\mathbb{A}}}$ où -1 opère par multiplication par -1. D'après le théorème 5.2. et le commentaire du § 5.3, il suffit de voir que la représentation $\mathcal{C}$ est sans multiplicité. Le groupe $\underline{R}$ étant un tore, le groupe $\underline{R}^{g^*}_{\mathbb{A}}$ est abélien d'après le lemme 1.10 et on conclut immédiatement. D'où le théorème.

7.1.2 D'après M. Duflo {DU 3}, l'ensemble $\mathfrak{U}(\underline{G})$ des $\underline{\underline{G}}_{\mathbf{Q}}$-orbites de $\underline{g}^*_{\mathbf{Q}}$ de type unipotent s'identifie, par restriction, à l'ensemble $\underline{u}^*_{\mathbf{Q}}/\underline{\underline{G}}_{\mathbf{Q}}$. Soit Ω un élément de $\mathfrak{U}(\underline{G})$, $u^* \in \underline{u}^*_{\mathbf{Q}}$ un élément de Ω et θ sa $U_{\mathbf{Q}}$-orbite. D'après le lemme 5.2.1. i), le théorème 5.2. donne :

$$\operatorname{ind}_{\underline{\underline{G}}_{\mathbf{Q}}\uparrow\underline{\underline{G}}_{\mathbf{A}}} = \bigoplus_{\Omega\in\mathfrak{U}(\underline{G})} \operatorname{ind}_{U_{\mathbf{A}}G_{\mathbf{A}}(u^*)\uparrow G_{\mathbf{A}}} \pi_{\mathbf{A},\theta}S_{\mathbf{A},u^*} \otimes E^{u^*}$$

où E^{u^*} désigne la sous-représentation de $\operatorname{ind}_{\underline{\underline{G}}_{\mathbf{Q}}(u^*)\uparrow\underline{\underline{G}}^{u^*}_{\mathbf{A}}}$ dans laquelle le groupe $U_{\mathbf{A}}(u^*)$ opère comme multiple du caractère $\chi_{\mathbf{A};u^*}$ et dans laquelle (-1) opère par multiplication par -1. Soit V le radical unipotent de $\underline{G}(u^*)$ et $\underline{S}$ une composante de Lévi définie sur $\mathbf{Q}$. Le groupe $\underline{\underline{S}}$ est abélien et $\underline{\underline{S}}^{u^*}_{\mathbf{A}}$ aussi. On choisit un caractère χ^{u^*} du groupe $\underline{\underline{S}}^{u^*}_{\mathbf{A}}$ trivial sur $\underline{\underline{G}}_{\mathbf{Q}}(u^*)$, valant -1 en -1 et trivial sur $V_{\mathbf{A}}$. La représentation $\pi_{\mathbf{A},\theta}S_{\mathbf{A},u^*} \otimes \chi^{u^*}$ de $U_{\mathbf{A}} \times \underline{\underline{G}}^{u^*}_{\mathbf{A}}$ passe au quotient pour donner une représentation unitaire de $U_{\mathbf{A}} \times \underline{\underline{G}}_{\mathbf{A}}(u^*)$ prolongeant la représentation $\pi_{\mathbf{A},\theta}\delta_{u^*}$ du sous-groupe $U_{\mathbf{A}} \times \underline{\underline{G}}_{\mathbf{Q}}(u^*)$ étudiée au § 5.2.1. ii). Ceci étant, la représentation $\overline{\chi}^{u^*} \otimes E^{u^*}$ de $\underline{\underline{G}}^{u^*}_{\mathbf{A}}$ passe au quotient pour donner une représentation de $\underline{\underline{G}}_{\mathbf{A}}(u^*)$ équivalente à la sous-représentation de $\operatorname{ind}_{\underline{\underline{G}}_{\mathbf{Q}}(u^*)\uparrow\underline{\underline{G}}_{\mathbf{A}}(u^*)}$ où le groupe $U_{\mathbf{A}}(u^*)$ opère comme multiple du caractère $\chi_{\mathbf{A},u^*}$. On note E_{u^*} cette dernière. Le théorème 5.2 peut, alors, s'énoncer ainsi :

> *PROPOSITION* : $$\operatorname{ind}_{\underline{\underline{G}}_{\mathbf{Q}}\uparrow\underline{\underline{G}}_{\mathbf{A}}} = \bigoplus_{\Omega\in\underline{u}^*_{\mathbf{Q}}/\underline{\underline{G}}_{\mathbf{Q}}} \operatorname{ind}_{U_{\mathbf{A}}G_{\mathbf{A}}(u^*)\uparrow\underline{\underline{G}}_{\mathbf{A}}} \pi'_{u^*} \otimes E_{u^*}$$
> où π'_{u^*} est une représentation irréductible quelconque de $U_{\mathbf{A}} \times \underline{\underline{G}}_{\mathbf{A}}(u^*)$ prolongeant la représentation $\pi_{\mathbf{A},\theta}\delta_{u^*}$ du sous-groupe $U_{\mathbf{A}} \times \underline{\underline{G}}_{\mathbf{Q}}(u^*)$ dans $\mathcal{H}_{\mathbf{A},\theta}$.

7.1.3 Concernant la décomposition de $L^2(\underline{\underline{G}}_{\mathbf{R}}/\underline{\underline{G}}_{\mathbf{Z}})$, pour qu'il y ait une partie discrète il est nécessaire et suffisant (Théorème 6.7) que le centre de $\underline{\underline{G}}$ soit anisotrope. Pour que la partie discrète de $L^2(\underline{\underline{G}}_{\mathbf{R}}/\underline{\underline{G}}_{\mathbf{Z}})$ se décompose avec multiplicités finies il est nécessaire et suffisant (Théorème 6.8) que tout tore déployé sur $\mathbf{Q}$ de $\underline{\underline{G}}$ entralise son radical unipotent. Combinant les deux résultats, on obtient :

> *PROPOSITION* : Pour que $L^2(\underline{\underline{G}}_{\mathbf{R}}/\underline{\underline{G}}_{\mathbf{Z}})$ ait une partie discrète non nulle qui se décompose avec multiplicités finies il faut et il suffit que le quotient $\underline{\underline{G}}_{\mathbf{R}}/\underline{\underline{G}}_{\mathbf{Z}}$ soit compact. Ceci est encore équivalent à dire que le volume de $\underline{\underline{G}}_{\mathbf{R}}/\underline{\underline{G}}_{\mathbf{Z}}$ est fini.

7.1.4 On pose, pour $\Omega \in \underline{u}^*_{\mathbf{Q}}/\underline{\underline{G}}_{\mathbf{Q}}$, $\pi_\Omega = \operatorname{ind}_{U_{\mathbf{A}}\underline{\underline{G}}_{\mathbf{A}}(u^*)\uparrow\underline{\underline{G}}_{\mathbf{A}}} \pi'_{u^*} \otimes E_{u^*}$. On a donc, $\operatorname{ind}_{\underline{\underline{G}}_{\mathbf{Q}}\uparrow\underline{\underline{G}}_{\mathbf{A}}} = \bigoplus_{\Omega\in\underline{u}^*_{\mathbf{Q}}/\underline{\underline{G}}_{\mathbf{Q}}} \pi_\Omega$. Soit π_∞ une représentation unitaire irréductible de $\underline{\underline{G}}_{\mathbf{R}}$. Il est possible qu'il y ait une infinité d'orbites Ω pour lesquelles la représentation π_Ω contient une sous-représentation irréductible dont la restriction à $\underline{\underline{G}}_{\mathbf{R}}$ soit un multiple de π_∞ même si le quotient $\underline{\underline{G}}_{\mathbf{R}}/\underline{\underline{G}}_{\mathbf{Z}}$ est compact. En d'autres termes, étant donné un élément u^* de $\underline{u}^*_{\mathbf{Q}}$, il est possible qu'il y ait une infinité de $\underline{\underline{G}}_{\mathbf{Q}}$-orbites de $\underline{u}^*_{\mathbf{Q}}$ dans sa $\underline{\underline{G}}_{\mathbf{R}}$-orbite. De plus, l'orbite Ω étant fixée, il est possible que l'ensemble des sous-représentations irréductibles de π_Ω dont la restriction à $\underline{\underline{G}}_{\mathbf{R}}$ est un multiple de π_∞ soit infini, comme le prouvent les exemples suivants :

Exemple 1 : Soit $\underline{\underline{G}}$ le produit semi-direct du groupe unipotent abélien $U = \mathcal{M}_{2,1}$ de dimension 2 par le groupe $SO(2)$ agissant sur $\underline{u} = \mathcal{M}_{2,1}$ par le carré de l'action naturelle. On identifie $\underline{u}^*$ à $\mathcal{M}_{1,2}$ et on prend $u^* = (1,0)$. Sa $\underline{\underline{G}}_{\mathbf{R}}$-orbite est le cercle unité $\mathbf{T}$. Il est facile de voir que la pente de la droite joignant un point $(x,y) \in \mathbf{T} \cap \underline{u}^*_{\mathbf{Q}}$ et un point de sa $\underline{\underline{G}}_{\mathbf{Q}}$-orbite est de la forme $\frac{ax+by}{bx-ay}$ avec $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix} \in SO(2,\mathbf{Q})$. Inversement, si $r \in \mathbf{Q}$, pour qu'il existe $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix} \in SO(2,\mathbf{Q})$ tel que $r = \frac{ax+by}{bx-ay}$ il est nécessaire et suffisant que $1+r^2$ soit un carré dans $\mathbf{Q}$, à condition que

$rx \neq y$. Il s'en suit que $r = \frac{2k\ell}{k^2-\ell^2}$ où k et ℓ sont des entiers naturels premiers entre eux et la représentation irréductible $r = \frac{\alpha}{\beta}$ est telle que α ou β est un entier pair. Donc, il y a une infinité de $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}$-orbites dans $\underline{u}^*_{\mathbb{Q}}$ sur la $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}$-orbite de u^*.

Soit Ω la $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}$-orbite de u^*. Il est facile de voir que $\underline{\underline{G}}(u^*) = U \times \{\pm 1\}$, $U_{\mathbb{A}}\underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}}(u^*) = U_{\mathbb{A}} \times K$, où K désigne le compact $\prod_{P \in \mathcal{P}} \{\pm 1\}$, $U_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{Q}}(u^*) = U_{\mathbb{A}} \times \{\pm 1\}$ et $\pi'_{u^*} \otimes E_{u^*} = \pi_{\mathbb{A},\theta} \otimes \operatorname{ind}_{\{\pm 1\}\uparrow K}$. Or $\operatorname{ind}_{\{\pm 1\}\uparrow K} = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} \chi_\alpha$ où $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des suites $(\alpha_p)_{P \in \mathcal{P}}$ tels que $\alpha_p = 0$ ou 1, $\alpha_p = 0$ pour presque tout p et $\sum_{P \in \mathcal{P}} \alpha_p = 0$ et où χ_α désigne le caractère de K donné par $\chi_\alpha(k) = \prod_{P \in \mathcal{P}} k_p^{\alpha_p}$ si $k = (k_p)$ et $\alpha = (\alpha_p)$. L'ensemble $\mathcal{A}$ est clairement infini et le sous-ensemble $\mathcal{A}_+$ formé par les éléments $\alpha = (\alpha_p)$ de $\mathcal{A}$ tels que $\alpha_\infty = 1$ aussi. Les représentations $\operatorname{ind}_{U_{\mathbb{A}}\underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}}(u^*)\uparrow \underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}}} \pi_{\mathbb{A},\theta} \otimes \chi_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}_+$, sont des sous-représentations irréductibles de π_Ω, deux à deux inéquivalentes et dont les restrictions à $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}$ sont multiples de la même représentation irréductible. On a :

$$\operatorname{ind}_{\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}\uparrow \underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}}} = \operatorname{ind}_{SO(2,\mathbb{Q})\uparrow SO(2,\mathbb{A})} \bigoplus_{\Omega} \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} \operatorname{ind}_{U_{\mathbb{A}}\times K \uparrow G_{\mathbb{A}}} \pi_{\mathbb{A},\theta} \otimes \chi_\alpha$$

avec Ω parcourant $\underline{u}^*_{\mathbb{Q}}/\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}-\{0\}$ et $\theta \in \Omega$. Il est facile de voir que la représentation $\rho_{\theta,\alpha} = \operatorname{ind}_{U_{\mathbb{A}}\times K\uparrow G_{\mathbb{A}}} \pi_{\mathbb{A},\theta} \otimes \chi_\alpha$ prolonge la représentation $\operatorname{ind}_{K\uparrow SO(2,\mathbb{A})} \chi_\alpha$ par l'action suivante de $U_{\mathbb{A}}$:

$$\rho_{\theta,\alpha}(u)f(Z) = (\theta Z^{-2}u)f(Z), \quad (u \in U_{\mathbb{A}}, \ Z \in SO(2,\mathbb{A}))$$

Donc, une condition nécessaire pour que la représentation $\rho_{\theta,\alpha}$ contienne la représentation triviale de $\prod_{p \text{ premier}} SO(2,\mathbb{Z}_p)$ est que $\alpha_p = 0$ pour tout p premier. C'est-à-dire $\alpha = \alpha_+ = (0,0,\dots)$ et $\alpha = \alpha_- = (1,0,0,\dots)$.

Ceci étant, l'espace des vecteurs invariants par $\underset{p \text{ premier}}{\pi} \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p}$ dans l'espace de $\rho_{\theta,\alpha}$ s'identifie à $\underset{U_{\mathbb{R}}\times\{\pm 1\}}{\operatorname{ind}} \pi_{\infty,\theta} \otimes \chi_{\alpha_\infty} \otimes \mathcal{E}$ avec $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions f sur $SO(2)_{\mathcal{P}_{-\infty}}$ invariantes par $\underset{p \text{ premier}}{\pi} SO(2,\mathbb{Z}_p)$ et telles que si $Z \in \text{support}(f)$, $\theta Z^{-2} \in \underset{p \text{ premier}}{\pi} \mathbb{Z}_p^2$. Il est facile de voir que la dimension de $\mathcal{E}$ est, alors, égale au cardinal de $\Omega \cap \mathbb{Z}^2/SO(2,\mathbb{Z})$. On note n_Ω cet entier. On a :

$$\underset{\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}\uparrow \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}}}{\operatorname{ind}} = \underset{SO(2,\mathbb{Z})\uparrow SO(2,\mathbb{R})}{\operatorname{ind}} \bigoplus_{\Omega\in(\underline{u}^*_{\mathbb{Q}}/\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}})-\{0\}} n_\Omega(\rho_{\theta,+} \oplus \rho_{\theta,-})$$

avec $\theta\in\Omega$, $\rho_{\theta,+}$ (resp. $\rho_{\theta,-}$) la sous-représentation de $\underset{U_{\mathbb{R}}\uparrow G_{\mathbb{R}}}{\operatorname{ind}} \pi_{\infty,\theta}$ où -1 opère par multiplication par 1 (resp. -1). Ou encore,

$$\underset{\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}\uparrow \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}}}{\operatorname{ind}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} Z^{4n} \bigoplus_{r\in\mathbb{N}-\{0\}} n_r(\rho_{\theta_{r,+}} \oplus \rho_{\theta_{r,-}})$$

où Z^{4n} est le caractère $Z \to Z^{4n}$ de $SO(2,\mathbb{R})$, $\theta_r = (\sqrt{r},0)$ et n_r le cardinal de $C_r \cap \mathbb{Z}^2$ divisé par 2, où C_r est le cercle de rayon $\sqrt{r}$ centré à l'origine. Il est facile de voir que le nombre n_r est non nul si et seulement si tout nombre premier congrus à 3 modulo 4 intervient avec un exposant pair (voir P. Samuel {Sa, § 5.6}). Dans ce cas, si S désigne le produit des facteurs premiers congrus à 1 modulo 4, le nombre $(1/2)n_r$ coïncide avec le nombre de diviseurs de S.

<u>Exemple 2</u> : Soit $\underline{\underline{G}}$ le sous-groupe algébrique défini sur $\mathbb{Q}$ de GL_2 formé des matrices $\begin{pmatrix} t^n & X \\ 0 & t^{-1}\end{pmatrix}$, $n\in\mathbb{N}-\{0\}$. Ici $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}/\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}}$ est de volume infini. D'après le §7.1.3., il va y avoir une représentation irréductible intervenant dans $L^2(\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}/\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}})$ avec une multiplicité infinie. On note (X,t) l'élément $\begin{pmatrix} t^n & X \\ 0 & t^{-1}\end{pmatrix}$. Si on prend n pair la situation est semblable qu'en exemple 1. On va prendre l'entier n impair positif. Si $\theta \in \underline{u}^*_{\mathbb{Q}}-\{0\} = \mathbb{Q}^X$, $\underline{\underline{G}}(\theta) = U\times H$ avec $H = \{t/t^{n+1} = 1\}$, $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}(\theta) = U_{\mathbb{Q}}$ et, par conséquent :

$$\operatorname{ind}_{\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}\uparrow\underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}}} = \operatorname{ind}_{\mathbb{Q}^X\uparrow\mathbb{A}^X} \bigoplus_{\Omega\in\mathbb{Q}^X/\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}} \operatorname{ind}_{U_{\mathbb{A}}\times H_{\mathbb{A}}\uparrow\underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}}} \pi_{\mathbb{A},\theta} \otimes L^2(H_{\mathbb{A}})$$

Si α est un caractère de $H_{\mathbb{A}}$, la représentation $\rho_{\theta,\alpha} = \operatorname{ind}_{U_{\mathbb{A}}\times H_{\mathbb{A}}\uparrow\underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}}} \pi_{\mathbb{A},\theta} \otimes \alpha$ est la représentation de $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}}$ prolongeant $\operatorname{ind}_{H_{\mathbb{A}}\uparrow\mathbb{A}^X} \alpha$ par :

$$\rho_{\theta,\alpha}(X_o)f(t) = (\theta t^{-(n+1)}X_o)f(t), \quad (X_o \in U_{\mathbb{A}}, \quad t \in \mathbb{A}^X).$$

En procédant comme dans l'exemple précédent, on voit que l'ensemble des vecteurs dans l'espace de $\rho_{\theta,\alpha}$ invariants par $\prod_{p \text{ premier}} \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p}$ coïncide, si α est trivial, avec $\operatorname{ind}_{U_{\mathbb{R}}\uparrow\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}} \pi_{\infty,\theta} \otimes \mathcal{E}$ avec $\mathcal{E}$ un espace ayant une base indexée par $(\mathbb{Q}^X \cap \mathbb{Z})/\{\pm 1\} = \mathbb{N}-\{0\}$ et nul sinon. Comme $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{A}} = (\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}} \times \prod_p \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p})\, \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}$, on en déduit que :

$$\operatorname{ind}_{\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}}\uparrow\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}} = \operatorname{ind}_{\{\pm 1\}\uparrow\mathbb{R}^X} \otimes \infty \operatorname{ind}_{\mathbb{R}\uparrow\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}} \mathcal{X}$$

<u>*7.1.5*</u> L'exemple suivant est déjà connu par plusieurs personnes et a été traité par Green lors d'un exposé, en 1978, à Maryland. Soit $\underline{\underline{G}}$ le produit semi-direct de $U = \mathcal{M}_{2,1}$ et de SL_2 réalisé comme le sous-groupe algébrique défini sur $\mathbb{Q}$ de GL_3 formé des matrices $\begin{pmatrix} a & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in SL_2$ et $u \in \mathcal{M}_{1,2}$. On a $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}^2 \times SL_2(\mathbb{Z})$ et $U_{\mathbb{R}}\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}^2 \times SL_2(\mathbb{Z})$. On note H le sous-groupe fermé $U_{\mathbb{R}}\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}}$ de $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}$. Si $n \in \mathbb{Z}^2$, on note $\mathcal{X}_n$ le caractère $u \to \mathcal{X}(nu)$ de $U_{\mathbb{R}}$. On a :

$$\operatorname{ind}_{\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}}\uparrow H}\Big|_{U_{\mathbb{R}}} = L^2(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}^2} \mathcal{X}_n$$

On pose, pour $\alpha \in \mathbb{N}-\{0\}$, $\mathcal{U}_\alpha = SL(2,\mathbb{Z})\binom{\alpha}{0} = \{n \in \mathbb{Z}^2/\mathrm{pgcd}(n_1,n_2) = \alpha\}$,

$\mathcal{X}_\alpha = \bigoplus_{n\in\mathcal{U}_\alpha} \mathcal{X}_n$ et ρ_α l'unique prolongement de $\mathcal{X}_\alpha$ contenu dans $\operatorname{ind}_{\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}}\uparrow H}$.

On a : $\operatorname{ind}_{\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}}\uparrow H} 1 = \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{N}-\{0\}} \rho_\alpha$. On identifie $\mathcal{H}_1$ à $\mathcal{H}_\alpha$ via l'opérateur T_α défini par $T_\alpha f(u) = f(\alpha u)$. On a $\rho_\alpha(u,a) = \rho_1(\alpha u,a)$ et $\rho_\alpha = \operatorname{ind}_{U_{\mathbb{R}}\uparrow H} \chi_{(\alpha,0)}$. Par conséquent $\operatorname{ind}_{H\uparrow \underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}} \rho_\alpha = \operatorname{ind}_{\underline{\underline{U}}_{\mathbb{R}}\uparrow\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}} \chi_{(\alpha,0)}$ et c'est une représentation équivalente à $\operatorname{ind}_{H\uparrow\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}} \rho_1$. On en déduit que :

$$\operatorname{ind}_{\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}}\uparrow\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}} = L^2(SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})) \oplus \infty \operatorname{ind}_{\underline{\underline{U}}_{\mathbb{R}}\uparrow\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}} \chi_{(1,0)}$$

<u>7.2</u> Soit G le groupe $x\to ax+b$ réalisé dans GL_2 comme l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$. Son radical unipotent est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1\end{pmatrix}$. on identifie, naturellement, G_p à $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p^\times$, $G_{\mathbb{A}}$ à $\mathbb{A}\times\mathbb{A}^\times$, $G_{\mathbb{Q}}$ à $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}^\times$ et $G_{\mathbb{Z}}$ à $\mathbb{Z}\times\{\pm 1\}$. Il est facile de voir que :

$$\operatorname{ind}_{G_{\mathbb{Q}}\uparrow G_{\mathbb{A}}} = \operatorname{ind}_{\mathbb{Q}^\times\uparrow\mathbb{A}^\times} \oplus \operatorname{ind}_{\mathbb{A}\uparrow G_{\mathbb{A}}} \chi$$

La représentation irréductible $\operatorname{ind}_{\mathbb{A}\uparrow G_{\mathbb{A}}} \chi$ n'est pas GCR. En effet, soit, pour $p\in\mathcal{P}$, $a^{(p)}$ l'adèle telle que $a_q^{(p)} = 1$ si $q<p$, $a_q^{(p)} = q$ sinon, q étant un nombre premier, et $a_\infty^{(p)} = 1$. On a $a^{(2)} = (1,2,3,\ldots)$. Il est facile de voir que la suite $a^{(p)}$ converge vers 1 dans $\mathbb{A}$. On note $\chi^{(p)}$ le caractère de $\mathbb{A}$ donné par $\chi^{(p)}(a) = \chi(a^{(p)}a)$. La suite $\chi^{(p)}$ converge vers χ. On note $I^{(p)}$ le noyau dans la $\mathbb{C}$*-algèbre de $G_{\mathbb{A}}$ de la représentation irréductible $\operatorname{ind}_{\mathbb{A}\uparrow G_{\mathbb{A}}} \chi^{(p)}$. La suite $I^{(p)}$ converge vers $I^\infty = \ker \operatorname{ind}_{\mathbb{A}\uparrow G_{\mathbb{A}}} \chi$ dans le dual de la $\mathbb{C}$*-algèbre. Par conséquent I^∞ contient $\bigcap_{p\geq 2} I^{(p)}$. Comme $a^{(p)-1}a^{(2)} \in \mathbb{A}^\times$ pour tout $p\geq 2$, la représentation $\operatorname{ind}_{\mathbb{A}\uparrow G_{\mathbb{A}}} \chi^{(p)}$ est équivalente à $\operatorname{ind}_{\mathbb{A}\uparrow G_{\mathbb{A}}} \chi^{(2)}$ et $\bigcap_{p\geq 2} I^{(p)} = I^{(2)}$. Ainsi $I^{(2)} = I^\infty$. D'autre part, la suite $b^{(p)} = a^{(p)-1}a^{(2)}$ converge vers $a^{(2)}$ dans $\mathbb{A}$. En notant $J^{(p)}$ le noyau de la représentation irréductible

$\operatorname{ind}_{\mathbb{A}\uparrow G_{\mathbb{A}}} \eta^{(p)}$, avec $\eta^{(p)}(a) = \chi(b^{(p)}a)$, la suite $J^{(p)}$ converge vers $I^{(2)}$.
Comme $b^{(p)}$ est une idèle, la représentation $\operatorname{ind}_{\mathbb{A}\uparrow G_{\mathbb{A}}} \eta^{(p)}$ est équivalente à $\operatorname{ind}_{\mathbb{A}\uparrow G_{\mathbb{A}}} \chi$ et, donc, $J^{(p)} = I^{\infty}$. Par conséquent $I^{\infty} \subset I^{(2)}$. On a, par suite, l'égalité $I^{(2)} = I^{\infty}$. Mais $a^{(2)}$ n'est pas une idèle, donc les représentations $\operatorname{ind}_{\mathbb{A}\uparrow G_{\mathbb{A}}} \chi^{(2)}$ et $\operatorname{ind}_{\mathbb{A}\uparrow G_{\mathbb{A}}} \chi$ ne sont pas équivalentes. Il en résulte immédiatement qu'elles ne sont pas GCR. D'où l'assertion.

Comme le groupe G vérifie la propriété $G_{\mathbb{A}} = (G_{\infty} \times \pi_p\, G_{\mathbb{Z}_p})G_{\mathbb{Q}}$, un calcul simple prouve que :

$$\operatorname{ind}_{G_{\mathbb{Z}}\uparrow G_{\mathbb{R}}} = \int_{\mathbb{R}} \chi_t dt \otimes \infty \operatorname{ind}_{\mathbb{R}\uparrow G_{\mathbb{R}}}$$

avec χ_t le caractère de $\mathbb{R}^{\times}$ donné par $\chi_t(y) = |y|^{it}$.

7.3 L'exemple suivant décrit la technique de réduction au cas réductif développé au cours de ce travail et généralise l'exemple du § 7.2.

Soit n un entier naturel non nul et G_n le groupe $X \to AX+B$ des déplacement de l'espace à n dimensions .On le réalise comme sous-groupe défini sur $\mathbb{Q}$ de GL_{n+1} comme suit :

$$G_n = \left\{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_{n+1},\ A \in GL_n \quad \text{et} \quad B \ \text{quelconque}\right\}$$

L'algèbre de Lie de G_n est $\underline{g}_n = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in gl_{n+1},\ a \in gl_n \text{ et } b \text{ quelconque}\right\}$.
Le radical unipotent de $\underline{g}_n$ est $\underline{u}_n = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} / a = 0\right\}$ et le sous-groupe unipotent de G_n associé est $U_n = \left\{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / A = 1\right\}$. Les $G_{n;\mathbb{Q}}$ orbites de $\underline{u}^*_{\mathbb{Q}}$ sont au nombre de deux ayant pour représentants 0 et $E^*_{n,n+1}$. On injecte G_{n-1} dans G_n par l'application $A \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De même, on injecte $\underline{g}_{n-1}$ dans $\underline{g}_n$, $\underline{u}_{n-1}$ dans $\underline{g}_n$ et U_{n-1} dans G_n. On a

$G_n(E^*_{n,n+1}) = U_nG_{n-1} = U_nU_{n-1}GL_{n-1}$. On pose $g^*_{n,k} = \sum_{\ell=k}^{n} E^*_{\ell,\ell+1}$ pour $k = 1,\dots,n$ et $g^*_{n,n+1} = 0$. En appliquant le lemme 4.1. iii) b) et iv) et le lemme 4.5.2, on voit facilement que les $G_{n;\mathbb{Q}}$-orbites de $\underline{g}^*_{n;\mathbb{Q}}$ de type unipotent sont représentées par les forme $g^*_{n,k}$ pour $k = 1,\dots,n+1$. De plus, on a :

$$G_n(g^*_{n,k}) = U_n\dots U_{k-1}GL_{k-1} \quad \text{pour} \quad k = 1,\dots,n,$$

$G_n(g^*_{n,n+1}) = G_n$ et le revêtement $G_n^{g^*_{n,k}}$ de $G_n(g^*_{n,k})$ est trivial. Par conséquent le théorème 5.2 ramène la décomposition de $G_{n;\mathbb{A}}/G_{n;\mathbb{Q}}$ à la décomposition de $GL_{k-1;\mathbb{A}}/GL_{k-1;\mathbb{Q}}$ pour $k = 2,\dots,n+1$. En fait si

$\operatorname{ind}_{GL_{k-1,\mathbb{Q}}\uparrow GL_{k-1,\mathbb{A}}} = \int_{\widehat{GL}_{k-1;\mathbb{A}}} \pi_k d\mu_k(\pi_k)$ est une désintégration centrale et

χ_k est le caractère $\chi_{g^*_{n,k};\mathbb{A}}$ de $U_{g^*_{n,k};\mathbb{A}} = U_{n,\mathbb{A}}\dots U_{k-1;\mathbb{A}}$, on a la désintégration centrale :

$$\operatorname{ind}_{G_{n;\mathbb{Q}}\uparrow G_{n;\mathbb{A}}} = \bigoplus_{k=1}^{n+1} \int_{\widehat{GL}_{k-1,\mathbb{A}}} \operatorname{ind}_{U_{n;\mathbb{A}}\dots GL_{k-1;\mathbb{A}}\uparrow G_{n;\mathbb{A}}} (\chi_k\pi_k)d\mu_k(\pi_k)$$

<u>7.4</u> Pour avoir un exemple où l'application de la technique de décomposition de $\operatorname{ind}_{G_{\mathbb{Q}}\uparrow G_{\mathbb{A}}}$ nécessite le passage à des revêtements à deux feuillets il suffit de prendre le groupe algébrique G produit semi-direct du groupe de Heisenberg U de dimension 3 et de SL_2 regardé comme sous-groupe du groupe $\tilde{G} = U \times GL_2$ décrit au § 7.1.8. On considère la forme u^* sur $\underline{u}_{\mathbb{Q}}$ définie par $u^*\binom{t}{v} = t$. On a $G_{u^*} = Z \times SL_2$ (produit direct) et l'unique forme g^* de type unipotent sur $\underline{g}_{\mathbb{Q}}$ prolongeant u^* est nulle sur $s\ell_2$. De plus, $G(g^*) = Z \times SL_2$ et $G^{g^*} = Z \times Mp_2$. La sous-représentation de $\operatorname{ind}_{G_{\mathbb{Q}}\uparrow G_{\mathbb{A}}}$ correspondante à la $G_{\mathbb{Q}}$-orbite de type unipotent de g^* par le théorème 5.2 est égale à $\pi_{\mathbb{A},\theta}S_{\mathbb{A},u^*} \otimes \pi_-$ où θ. est la $U_{\mathbb{Q}}$-orbite de u^*

dans $\underline{u}^*_{\mathbb{Q}}$ et π_- est la sous-représentation de $L^2(Mp_{2,\mathbb{A}}/Sp_{2,\mathbb{Q}})$ où -1 opère par multiplication par -1 (cf. Gelb 2 pour l'étude de $\pi_{\pm}$)

<u>7.5</u> Un groupe résoluble ne vérifie pas, en général la propriété $G_{\mathbb{A}} = G^{\infty}_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{Q}}$ avec $G^{\infty}_{\mathbb{A}} = G_{\infty} \times \pi_p\, G_{\mathbb{Z}_p}$. Ceci revient à dire qu'elle est, en général, non vérifiée pour un tore. Un exemple significatif est le suivant :

Soit k un corps algébrique de nombre. L'inclusion de $\mathbb{Q}$ dans k confère à k la structure d'un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. On munit k du réseau des entiers algébriques. On réalise $k^{\times}$ comme un tore $\tilde{T}$ d'automorphisme de k par homotéties. En fait, $k^{\times} = \tilde{T}_{\mathbb{Q}}$ et $\tilde{T}_{\mathbb{Z}}$ est l'ensemble des unités de k. On sait (voir A. Weil {We 3, page 87}) que le quotient $\tilde{T}_{\mathbb{A}}/\tilde{T}^{\infty}_{\mathbb{A}}\tilde{T}_{\mathbb{Q}}$ s'identifie au groupe des classes d'idéaux du corps k. En particulier, $\tilde{T}_{\mathbb{A}} = \tilde{T}^{\infty}_{\mathbb{A}}\tilde{T}_{\mathbb{Q}}$ si et seulement si l'anneau des entiers de k est principal.

<u>7.6</u> Soit $m \in \mathbb{Z}-\{0\}$ un entier sans facteur carré et k l'extension quadratique de $\mathbb{Q}$ associée. On considère le tore $\tilde{T}$ défini sur $\mathbb{Q}$ tel que $\tilde{T}_{\mathbb{Q}} = k^{\times}$ comme décrit au § 7.5. On a le résultat suivant :

> <u>*PROPOSITION*</u> *:* On suppose que l'anneau des entiers de k est principal et $m < 100$. Soit T le sous-tore de $\tilde{T}$ formé des éléments de norme 1. Alors T vérifie la propriété $T_{\mathbb{A}} = T^{\infty}_{\mathbb{A}}T_{\mathbb{Q}}$.

<u>Démonstration</u> :

Le groupe $\tilde{T}$ vérifie la propriété $\tilde{T}_{\mathbb{A}} = \tilde{T}^{\infty}_{\mathbb{A}}\tilde{T}_{\mathbb{Q}}$. Donc, étant donné $t \in T_{\mathbb{A}}$, il existe $\xi \in \tilde{T}_{\mathbb{Q}}$ et $\eta \in \tilde{T}^{\infty}_{\mathbb{A}}$ tels que $t = \xi\eta$. Donc $N(t_p) = N(\xi)N(\eta_p) = 1$ pour tout $p \in \mathcal{P}$. Donc, pour tout p premier, $N(\xi) = N(\eta_p)^{-1} \in \mathbb{Q}^{\times} \cap \mathbb{Z}^{\times}_p$. Par conséquent $N(\xi) = \pm 1$. Si $m < 0$, $N(\xi)$ est un nombre positif et, donc, $\xi \in T_{\mathbb{Q}}$ clairement, alors, pour chaque $p \in \mathcal{P}$,

$\eta_p \in T_p$. D'où le lemme. Si $m > 0$, le problème se pose lorsque $N(\xi) = -1$ et on saura conclure dès qu'il existe $\xi_o \in \tilde{T}_{\mathbf{Z}}$ tel que $N(\xi_o) = -1$ (en remplaçant ξ par $\xi\xi_o$ et η par $\xi_o^{-1}\eta$). En d'autres termes, s'il existe $\xi \in k^\times$ de norme -1, est-ce que l'unité fondamentale de k est de norme -1. L'existence d'un élément $\xi \in k^\times$ de norme -1 équivaut à l'existence de u,v,w dans $\mathbf{Z}$ tels que $u^2+v^2 = mw^2$ et $w \neq 0$. D'après P. Samuel {Sa, § 5.6 Théorème 1}, un tel triplet existe si et seulement si tout nombre premier $p \equiv 3 \pmod 4$ intervient dans la décomposition de m avec un exposant pair et, donc, nul. Pour $2 \leq m < 100$, en regardant la table élaborée par H. Cohn {CO , page 271}, on voit que l'unité fondamentale est de norme 1 exactement pour $m = 3,6,7,11,14,19,21,23,31,33,$ $38,43,46,47,57,59,62,67,69,71,77,83,86,93$ et 94. On vérifie facilement, que dans tous ces cas, qu'il existe un diviseur premier de m congrus à 3 modulo 4. D'où le lemme.

<u>*7.7*</u> Le cas unipotent ne possède aucune difficulté théorique du fait que la description du spectre adélique est simple et du fait qu'on a la propriété de la forte approximation. La description du spectre réel découle immédiatement de la proposition 6.5 et on a la formule suivante déjà établie par R. Howe {HO 1} :

$$\operatorname{ind}_{U_{\mathbf{Z}}\uparrow U_{\mathbf{R}}} = \bigoplus_{\theta \in \underline{u}^*_{\mathbf{Q}}/U_{\mathbf{Q}}} \Big(\prod_{p \text{ premier}} \operatorname{mult}(1_p, \pi_{p,\theta})\Big)\pi_{\infty,\theta}$$

La difficulté vient avec le calcul explicite des multiplicités. On expose, dans ce qui suit, le cas des groupes d'Heisenberg en donnant les réalisations concrètes des constituantes du spectre. Ce calcul va être utilisé au § 7.8 pour étudier le produit semi-direct du groupe d'Heisenberg de dimension 3 et du tore $\left\{\begin{pmatrix} a & mb \\ b & a\end{pmatrix} / a^2-mb^2 = 1\right\}$.

Soit U le groupe de Heisenberg de dimension $2k+1$. On le réalise dans GL_{k+2} comme l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_1 & I & 0 \\ t & {}^t v_2 & 1 \end{pmatrix}$ avec I

l'identité de GL_k, v_1 et v_2 éléments de $\mathcal{M}_{k,1}$ et t un scalaire. On note v l'élément $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{2k,1}$, (t,v) (resp. $\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix}$) la matrice

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_1 & I & 0 \\ t & {}^t v_2 & 1 \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ v_1 & 0 & 0 \\ t & {}^t v_2 & 0 \end{pmatrix}$). On a :

$$\exp\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} = (t + \frac{1}{2}\, {}^t v_2 v_1,\ v)$$

$$(t,v)(t',v') = (t+t'+{}^t v_2 v'_1,\ v+v')$$

$$\mathrm{Ad}(t,v)\begin{pmatrix} t' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t'+{}^t v_2 v'_1 - {}^t v'_2 v_1 \\ v' \end{pmatrix}$$

et le centre $\underline{z}$ de $\underline{u}$ est $\{\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} \in \underline{u} / v = 0\}$. Si $\lambda \in \mathbb{Q}^{\times}$, on note de la même façon l'élément de $\underline{u}^*_{\mathbb{Q}}$ défini par $\lambda\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} = \lambda t$. On note, aussi, λ la $U_{\mathbb{Q}}$-orbite (qui coïncide avec $\lambda + z^{\perp}_{\mathbb{Q}}$). Si $\mu \in \mathcal{M}_{1,2k}(\mathbb{Q})$, on note de la même façon l'élément de $\underline{u}^*_{\mathbb{Q}}$ défini par $\mu\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} = \mu v$ et la $U_{\mathbb{Q}}$-orbite (qui lui est réduite). On a :

$$\underline{u}^*_{\mathbb{Q}} / U_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}^{\times} \cup \mathcal{M}_{1,2k}(\mathbb{Q})$$

De plus, on a : $\operatorname{ind}_{U_{\mathbb{Q}} \uparrow U_{\mathbb{A}}} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}^{\times}} \pi_{\mathbb{A},\lambda} \quad \bigoplus_{\mu \in \mathcal{M}_{1,2k}(\mathbb{Q})} \pi_{\mathbb{A},\mu}$. Le groupe U étant unipotent, il vérifie la propriété de la forte approximation et donc $U_{\mathbb{A}} = (U_{\mathbb{R}} \times \prod_{p \text{ premier}} U_{\mathbb{Z}_p})U_{\mathbb{Q}}$. Par conséquent, on a :

$$\operatorname{ind}_{U_{\mathbb{Z}} \uparrow U_{\mathbb{R}}} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}^{\times}} n_{\lambda}\, \pi_{\infty,\lambda} \quad \bigoplus \bigoplus_{\mu \in \mathcal{M}_{1,2k}(\mathbb{Q})} n_{\mu}\, \pi_{\infty,\mu}$$

comme $\pi_{\infty,\mu}$ est un caractère, n_{μ} est égal à 0 ou 1. En fait $n_{\mu} = 1$ si et seulement si $\pi_{\infty,\mu}$ est trivial sur $\prod_{p \text{ premier}} U_{\mathbb{Z}_p}$, ou encore, si et seulement si $\chi(\mu v) = 1$ pour tout $v \in \mathcal{M}_{1,2k}(\mathbb{Z}_p)$. Ceci équivaut à dire que $\mu \in \mathcal{M}_{1,2k}(\mathbb{Z})$, condition prévisible car elle traduit le fait que le caractère $\pi_{\infty,\mu}$ est trivial sur $U_{\mathbb{Z}}$. La multiplicité n_{λ} vaut

$\mathrm{vol}(U_{\mathbb{R}}/Z_{\mathbb{R}}U_{\mathbb{Z}})|P(\lambda)|$, où Z est le centre de U et $P(\lambda)$ est le Phaffien de la 2-forme symplectique sur $\underline{u}/\underline{z}$ associée à B_λ relativement à la forme volume héritée de celle sur $U_{\mathbb{R}}/Z_{\mathbb{R}}$, si $\lambda \in \mathbb{Z}$ et elle vaut 0 sinon. Ce qui donne $n_\lambda = \begin{cases} |\lambda|^k & \text{si } \lambda \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On va faire le calcul adélique, qui servira ultérieurement, pour retrouver, en particulier, ce résultat et réaliser concrètement les sous-représentations de $L^2(U_{\mathbb{R}}/U_{\mathbb{Z}})$ équivalentes à $\pi_{\infty,\lambda}$.

Pour chaque $p \in \mathcal{P}$, la représentation $\pi_{p,\lambda}$ se réalise dans l'espace $\mathcal{H}_{p,\lambda} = L^2(\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{Q}_p))$ comme suit :

$$\pi_{p,\lambda}(t,v)f(\xi) = \mathcal{X}[\lambda t+\lambda\, {}^t v_2(\xi-v_1)]f(\xi-v_1)$$

Donc, pour que $f \in \mathcal{H}_{p,\lambda}$ soit $U_{\mathbb{Z}_p}$-invariante il faut et il suffit qu'elle soit invariante, par translation, par $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{Z}_p)$ et ayant un support contenu dans $\frac{1}{\lambda}\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{Z}_p)$. Donc l'espace $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_{p,\lambda}}$ des vecteurs $U_{\mathbb{Z}_p}$-invariants est engendré, si $\lambda \in \mathbb{Z}_p$, par les fonctions $E_{j_p} : \xi \to E_p(\xi - j_p|\lambda|_p)$, j_p parcourant $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{Z}/|\lambda|_p^{-1}\mathbb{Z})$, où E_p est la fonction caractéristique de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{Z}_p)$. De plus, si $\lambda \notin \mathbb{Z}_p$, $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_{p,\lambda}} = 0$. En particulier, $n_\lambda = \prod_{p \text{ premier}} \dim \mathcal{H}_{\mathbb{Z}_{p,\lambda}} = \begin{cases} \prod_{p \text{ premier}} |\lambda|_p^{-k} & \text{si } \lambda \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

et donc, $n_\lambda = \begin{cases} |\lambda|^k & \text{si } \lambda \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On pose :

$$\mathcal{H}_{\bar{\infty},\lambda} = \bigotimes_{p \text{ premier}} \mathcal{H}_{\mathbb{Z}_{p,\lambda}},\quad E_{\bar{\infty}} \text{ la fonction caractéristique}$$

de $\prod_{p \text{ premier}} \mathbb{Z}_p$ et si $j \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z})$, on note j_p l'élément de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{Z}/|\lambda|_p^{-1}\mathbb{Z})$ qu'il détermine et $E_j = \bigotimes_{p \text{ premier}} E_{j_p}$. On a :

$$E_j(\xi) = E_{\bar{\infty}}(\xi - j|\lambda|^{-1}),$$

$\{E_j,\ j \in \mathcal{M}_{k,1}(Z/\lambda Z)\}$ est une base de $\mathcal{X}_{\bar{\infty},\lambda}$ et l'ensemble des vecteurs de $\underset{p\in\mathcal{P}}{\otimes} \mathcal{X}_{p,\lambda}$ invariants par $\underset{p \text{ premier}}{\pi} U_{\mathbf{Z}_p}$ coïncide avec $\mathcal{X}_{\infty,\lambda} \otimes \mathcal{X}_{\bar{\infty},\lambda}$. Le sous-espace $\mathcal{X}_{\mathbf{A},\lambda}$ de $L^2(U_{\mathbf{A}}/U_{\mathbf{Q}})$, où $\pi_{\mathbf{A},\lambda}$ se réalise, s'entrelace avec $\underset{p\in\mathcal{P}}{\otimes} \mathcal{X}_{p,\lambda}$ comme suit :

Soit $\underline{h}$ la polarisation dans $\underline{u}$ pour λ formée par les vecteurs $\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} \in \underline{u}$ tels que $v_1 = 0$ et soit H le sous-groupe unipotent, défini sur $\mathbf{Q}$, de U, d'algèbre $\underline{h}$. Le groupe H est l'ensemble des éléments $(t,v) \in U$ tels que $v_1 = 0$. La construction de Kirillov donne :

$$\pi_{p,\lambda} = \underset{H_p \uparrow U_p}{\mathrm{ind}}\ \chi_\lambda \quad ; \quad \pi_{\mathbf{A},\lambda} = \underset{H_{\mathbf{A}} \uparrow U_{\mathbf{A}}}{\mathrm{ind}}\ \chi_\lambda$$

avec χ_λ le caractère de $H_{\mathbf{A}}$ donné par $\chi_\lambda(t,v) = \chi(\lambda t)$.
A l'élément $f = \underset{p\in\mathcal{P}}{\otimes} f_p \in \underset{p\in\mathcal{P}}{\otimes} \mathcal{X}_{p,\lambda}$, on associe l'élément $\tilde{f}$ de $\underset{H_{\mathbf{A}} \uparrow U_{\mathbf{A}}}{\mathrm{ind}}\ \mathbf{C}(\chi_\lambda)$ donné par : $\tilde{f}(t,v) = \chi(-\lambda t) \underset{p\in\mathcal{P}}{\pi} f_p(v_{1;p})$. L'opérateur $f \to \tilde{f}$ entrelace les représentations dans $\underset{p\in\mathcal{P}}{\otimes} \mathcal{X}_{p,\lambda}$ et $\underset{H_{\mathbf{A}} \uparrow U_{\mathbf{A}}}{\mathrm{ind}}\ \mathbf{C}(\chi_\lambda)$. On obtient alors, un entrelacement entre $\underset{p\in\mathcal{P}}{\otimes} \mathcal{X}_{p,\lambda}$ et $\mathcal{X}_{\mathbf{A},\lambda}$ en associant à f la fonction F sur $U_{\mathbf{A}}$ donnée par :

$$F(t,v) = \sum_{q\in U_{\mathbf{Q}}/H_{\mathbf{Q}}} \tilde{f}[(t,v)q] = \chi(-\lambda t) \sum_{q\in\mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{Q})} \underset{p\in\mathcal{P}}{\pi} \chi(-\lambda\, {}^t v_{2,p} q) f_p(v_{1,p}+q)$$

en identifiant $U_{\mathbf{Q}}/H_{\mathbf{Q}}$ naturellement à $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{Q})$. En particulier, si $f = \phi \otimes E_j$, avec $\phi \in \mathcal{X}_{\infty,\lambda}$ et $j \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{Z}/\lambda\mathbf{Z})$, on a $F(t;v) = \mathcal{F}_j\phi(t_\infty,v_\infty)$ pour tout $(t,v) \in U^\infty_{\mathbf{A}} = U_\infty \times \underset{p \text{ premier}}{\pi} U_{\mathbf{Z}_p}$ où

$$\mathcal{F}_j\phi(t_\infty,v_\infty) = \chi(-\lambda t_\infty) \sum_{n\in j} \chi(-{}^t v_{\infty,2} n)\phi(v_{\infty,1} + \frac{n}{\lambda}).$$

L'opérateur $\mathcal{F}_j$ réalise un entrelacement entre $\mathcal{X}_{\infty,\lambda} = L^2(\mathbf{R})$ et une sous-représentation $\mathcal{X}_{\lambda,j} = \mathcal{F}_j \mathcal{X}_{\infty,\lambda}$ de $L^2(U_\infty/U_{\mathbf{Z}})$. De plus,

$\mathcal{H}_\lambda = \bigoplus_{j \in \mathcal{U}_{k,1}(\mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z})} \mathcal{H}_{\lambda,j}$ est le sous-espace isotypique de $L^2(U_\infty/U_{\mathbb{Z}})$ associé à $\pi_{\infty,\lambda}$.

<u>Remarque</u> : Soit $\mathcal{L}^j$ l'opérateur unitaire dans $\mathcal{H}_\lambda$ défini par :

$$\mathcal{L}^j F(t_\infty,v_\infty) = F[(t_\infty,v_\infty)(0,\tfrac{j}{\lambda},0)]$$

et A^j l'opérateur :

$$A^j F(t_\infty,v_\infty) = F[(t_\infty,v_\infty)(0,0.\tfrac{j}{\lambda})]$$

On a : $\mathcal{F}_j = \mathcal{L}^j \mathcal{F}_o$, $\mathcal{H}_{\lambda,j} = \mathcal{L}^j \mathcal{H}_{\lambda,o}$, A^j opère trivialement dans $\mathcal{H}_{\lambda,o}$ et $A^k \mathcal{L}^j = \boldsymbol{\chi}(-\frac{1}{\lambda}\,{}^t jk)\,\mathcal{L}^j A^k$.

7.8 On conserve les notations du § 7.6. On suppose que T vérifie la propriété $T_{\mathbb{A}} = T^\infty_{\mathbb{A}} T_{\mathbb{Q}}$ et que m est congrus à 2 ou 3 modulo 4 de sorte que l'anneau des entiers de k coïncide avec $Z+\sqrt{m}Z$. Dans ce cas T s'identifie à l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & mb \\ b & a \end{pmatrix}$ de SL_2. Soit U le groupe d'Heisenberg de dimension 3. On utilise les notations du § 7.7.

On fait opérer GL_2 sur $\underline{u}$ par : $M\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \det M \\ Mv \end{pmatrix}$. On note $\tilde{G}$ le produit semi-direct $U \times GL_2$ qui en résulte. Soit $\underline{d}$ l'idéal de gl_2 formé des matrices diagonales et ρ la représentation de $\tilde{G}$ dans $\underline{u} \times \underline{d}$ déduite de la représentation adjointe. On a :

$$\rho(t,v;M) = \begin{pmatrix} \det M & -{}^tM\check{v} & v_1v_2-2t \\ 0 & M & -v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en convenant de noter $\check{v}$ le vecteur $\begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$ associé à $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. La représentation ρ est fidèle et elle permet de réaliser $\tilde{G}$ comme sous-groupe algébrique défini sur $\mathbb{Q}$ de GL_4. On identifie $\tilde{G}$ à son image.

On considère le sous-groupe algébrique G de $\tilde{G}$ obtenu en faisant le produit semi-direct $U \times T$. On remarque que :

i) le groupe $G_{\mathbb{Z}_2}$ est engendré par $U_{\mathbb{Z}_2} \times T_{\mathbb{Z}_2}$ et $\omega_o = (\frac{1}{2},0;I)$;

ii) Pour p premier, $p \neq 2$, on a l'égalité $G_{\mathbb{Z}_p} = U_{\mathbb{Z}_p} \times T_{\mathbb{Z}_p}$;

iii) le groupe $G_{\mathbb{Z}}$ est engendré par $U_{\mathbb{Z}} \times T_{\mathbb{Z}}$ et ω_o ;

iv) le quotient $\underline{u}^*_{\mathbb{Q}}/G_{\mathbb{Q}}$ s'identifie à $\mathbb{Q}^x \cup (\mathbb{Q}^2/T_{\mathbb{Q}})$.

On signale que ce type de groupes a été étudié par J. Brezin {Br; § 4}. Il a utilisé l'outil d'adélisation pour le calcul des multiplictés dans $L^2(G_{\mathbb{R}}/G_{\mathbb{Z}})$ des représentations non de carré intégrables. Pour les représentations de carré intégrable, il a fait de l'analyse purement réelle. Les résultats qu'on va exposer sont semblables à ceux de Brézin et la présentation semble plus simple. On signale que les groupes discrets qu'il considère diffèrent de ceux qu'on va étudier. Il ne considère pas le groupe $G_{\mathbb{Z}}$ mais un groupe qui s'adapte bien avec l'analyse qu'il fait.

On note $\bar{\mu}$ l'élément de $\mathbb{Q}^2/T_{\mathbb{Q}}$ associé à un élément μ de $\mathbb{Q}^2$. D'après la proposition 7.1.2, on a :

$$\operatorname*{ind}_{G_{\mathbb{Q}}\uparrow G_{\mathbb{A}}} = \left[\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Q}^x} \pi_{\mathbb{A},\lambda}\, \widetilde{S}_{\mathbb{A},\lambda} \otimes \operatorname*{ind}_{T_{\mathbb{Q}}\uparrow T_{\mathbb{A}}}\right] \oplus \left[\bigoplus_{\bar{\mu}\in(\mathbb{Q}^x-\{0\})/T_{\mathbb{Q}}} \operatorname*{ind}_{U_{\mathbb{A}}\uparrow G_{\mathbb{A}}} \pi_{\mathbb{A},\mu}\right] \oplus \operatorname*{ind}_{T_{\mathbb{Q}}\uparrow T_{\mathbb{A}}}$$

où $\widetilde{S}_{\mathbb{A},\lambda}$ est égale à $S_{\mathbb{A},\lambda} \otimes \chi^{\lambda}_{\mathbb{A}}$ pour un choix quelconque d'un caractère $\chi^{\lambda}_{\mathbb{A}}$ de $T^{\lambda}_{\mathbb{A}}$ trivial sur $T_{\mathbb{Q}}$ et valant -1 en -1. Comme le tore T est supposé vérifier la propriété $T_{\mathbb{A}} = T^{\infty}_{\mathbb{A}} T_{\mathbb{Q}}$, on en déduit la décomposition :

$$\operatorname*{ind}_{G_Z\uparrow G_R} = \left[\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Q}^x} \bigoplus_{\chi\in\hat{T}_{\mathbb{R}}} n_{\lambda,\chi}\, \pi_{\infty,\lambda} \widetilde{S}_{\infty,\lambda} \otimes \chi\right] \oplus \left[\bigoplus_{\Omega\in\mathbb{Q}^x} n_r \operatorname*{ind}_{U_{\mathbb{R}}\uparrow G_{\mathbb{R}}} \pi_{\infty,\mu_r}\right] \oplus \operatorname*{ind}_{T_{\mathbb{Z}}\uparrow T_{\mathbb{R}}}$$

où μ_r est un point de la conique $C_r : \mu_1^2 - m\mu_2^2 = r$.

<u>Etude de n_r :</u>

On remarque, tout d'abord, que la multiplicité n_r est nulle quand la conique C_r ne contient pas de points rationnels. On suppose, donc, que μ_r a ses coordonnées rationnelles. On pose $\rho_p = \operatorname{ind}_{U_p\uparrow G_p} \pi_{p,\mu_r}$. On a la formule $n_r = \prod_{p \text{ premier}} \operatorname{mult}(1_p,\rho_p)$. Comme $\rho_2(\omega_o) = 1$, on peut supposer que 1_p désigne la représentation triviale de $U_{\mathbb{Z}_p} \times G_{\mathbb{Z}_p}$ pour tout p premier. La représentation ρ_p se réalise dans $L^2(T_p)$ comme suit :

$$\rho_p(t,v;M)^{-1}f(N) = \mathfrak{X}(-\mu_r{}^t(MN)v)f(MN)$$

Donc l'ensemble des vecteurs dans $L^2(T_p)$ invariants par $G_{\mathbb{Z}_p}$ coïncide avec l'ensemble :

$$\{f \in L^2(T_p)/f(MN) = f(N),\ \forall M \in T_{\mathbb{Z}_p} \text{ et } N \in T_p \ ;\ \operatorname{support}(f) \subset \{M \in T_p/N^t\mu_r \in \mathbb{Z}_p^2\}$$

Par conséquent, $m(1_p,\rho_p)$ coïncide avec le nombre des $T_{\mathbb{Z}_p}$-orbites dans $\{N \in T_p/N^t\mu_r \in \mathbb{Z}_p\}$. Ce qui implique que n_r coïncide avec le nombre des $T_{\mathbb{A}}^\infty$-orbites dans $\{N \in T_{\mathbb{A}}/N^t\mu \in (\mathbb{R} \times \prod_p \mathbb{Z}_p)^2\}$.Ceci est égal au nombre des $T_{\mathbb{Z}}$-orbites dans $\bar{\mu}_r \cap Z^2$. Soit, enfin, $n_r = \#(C_r \cap \mathbb{Z}^2)/T_{\mathbb{Z}}$

<u>Calcul de $n_{\lambda,\chi}$</u> :

Soit $\chi_{\mathbb{A}}$ un caractère de $T_{\mathbb{A}}$ trivial sur $T_{\mathbb{Q}}$ dont la restriction χ_∞ à $T_{\mathbb{R}}$ soit χ. Il est déterminé par sa restriction sur $\mathbb{Z}_p$ et par la condition que $\chi_{\mathbb{A}}$ est trivial sur $T_{\mathbb{Z}}$. On note σ_p la représentation $\pi_{p,\lambda}\tilde{S}_{p,\lambda} \otimes \chi_p$. Elle opère dans l'espace $\mathcal{H}_{p,\lambda}$ en prolongeant $\pi_{p,\lambda}$. De plus, la multiplicité $n_{\lambda,\chi}$ est égale à :

$$n_{\lambda,\chi} = \sum_{\chi_{\mathbb{A}}} \prod_{p \text{ premier}} \operatorname{mult}(1_p,\sigma_p)$$

L'espace des vecteurs dans $\mathcal{H}_{p,\lambda}$ où $G_{\mathbb{Z}_p}$ opère trivialement est, évidemment, contenu dans $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_{p,\lambda}}$. Donc, une condition nécessaire pour que la multiplicité $n_{\lambda,\chi}$ soit non nulle est que λ soit un entier, comme expliqué au § 7.3. De plus, une condition nécessaire pour que l'ensemble des vecteurs dans $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_{2,\lambda}}$ laissés fixes par $\omega_o = (\frac{1}{2},0,I)$ soit non nul (et donc égal à $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_{2,\lambda}}$) est que $|\frac{\lambda}{2}|_2 \leq 1$. On suppose, donc, que λ est un entier pair non nul. Dans ce cas, $\mathrm{mult}(1_p,\sigma_p)$ coïncide avec la dimension du sous-espace de $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_{p,\lambda}}$ formé des vecteurs fixes sous l'action de $T_{\mathbb{Z}_p}$, via σ_p.

LEMME : Le groupe $T_{\mathbb{Z}_p}$ laisse invariant $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_{p,\lambda}}$ et son action y est diagonalisable.

On admet, pour un moment, ce lemme. Pour chaque $j \in \mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z}$, on note j_p l'élément dans $\mathbb{Z}/|\lambda|_p^{-1}\mathbb{Z}$ qu'il détermine. On note η_{j_p}, $j_p \in \mathbb{Z}/|\lambda|_p^{-1}\mathbb{Z}$, les $|\lambda|_p^{-1}$ caractères intervenant dans la diagonalisation de l'action de $T_{\mathbb{Z}_p}$ dans $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_{p,\lambda}}$, via ${}_{p,\lambda}$, et, si $j \in Z/\lambda Z$, on pose $\eta_j = \underset{p}{\otimes}\, \eta_{j_p}$. Pour que la multiplicité $\mathrm{mult}(1_p,\sigma_p)$ soit non nulle pour tout p premier il faut et il suffit qu'il existe $j \in Z/\lambda Z$ tel que $\underset{p\ \text{premier}}{\otimes} \chi_p = \eta_j^{-1}$ sur $\underset{p\ \text{premier}}{\pi} T_{\mathbb{Z}_p}$. D'autre part, le caractère $\chi \otimes \eta_j^{-1}$ se prolonge en un caractère $\chi_{\mathbb{A}}$ de $T_{\mathbb{A}}$ trivial sur $T_{\mathbb{Q}}$ si et seulement si $\chi \otimes \eta_j^{-1}$ est trivial sur $T_{\mathbb{Z}}$, ou encore, si et seulement si pour tout $M \in T_{\mathbb{Z}}$, $\chi(M) = \eta_j(M)$. Ainsi, la multiplicité $n_{\lambda,\chi}$ est égale au cardinal de l'ensemble

$$\{j \in \mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z}/\chi(M) = \eta_j(M),\quad \forall M \in T_{\mathbb{Z}}\}$$

On remarque, de plus, que $\{\eta_j(M),\ j \in \mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des valeurs propres de $\tilde{S}_{\bar{\infty},\lambda}(M)$ dans $\mathcal{H}_{\bar{\infty},\lambda} = \underset{p\ \text{premier}}{\otimes} \mathcal{H}_{\mathbb{Z}_{p,\lambda}}$ et

$\delta_\lambda(M) = \tilde{S}_{\mathbb{A},\lambda}(M) = \tilde{S}_{\infty,\lambda}(M) \otimes \tilde{S}_{\bar{\infty},\lambda}(M)$ sur $\mathcal{H}_{\infty,\lambda} \otimes \mathcal{H}_{\bar{\infty},\lambda} \simeq \mathcal{H}_\lambda$ pour tout $M \in T_{\mathbb{Z}}$. Donc, on peut remplacer $\tilde{S}_{\infty,\lambda}$, pour le calcul de $n_{\lambda,\chi}$ et dans la formule donnant la décomposition de $\mathrm{ind}_{G_{\mathbb{Z}} \uparrow G_{\mathbb{R}}}$, par la représentation projective de Weil $S'_{\infty,\lambda}$ qui, dans ce cas, est une vraie représentation, et remplacer $\tilde{S}_{\bar{\infty},\lambda}$ par la représentation W^λ de $T_{\mathbb{Z}}$ dans $\mathcal{H}_{\bar{\infty},\lambda}$ vérifiant $\delta_\lambda(M) = S'_{\infty,\lambda}(M) \otimes W^\lambda(M)$ sur $\mathcal{H}_\lambda$ pour tout $M \in T_{\mathbb{Z}}$. Ainsi la multiplicité

$n_{\lambda,\chi}$ est égale à la multiplicité du caractère χ dans la diagonalisation de W^λ dans $\mathcal{H}^-_{\infty,\lambda}$. On signale enfin que le groupe $T_{\mathbb{Z}}$ est engendré par -1 et, éventuellement, un élément M_0 qu'on peut choisir de la façon suivante, si $m>0$, M_0 est l'unité fondamentale de k ou son carré suivant que la norme de cette dernière est $+1$ ou -1 ; si $m=-1$, le groupe $T_{\mathbb{Z}}$ est engendré par $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et si $m<-1$, $T_{\mathbb{Z}}$ est réduit à $\{\pm 1\}$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & mb \\ b & a \end{pmatrix} \in T_p$ avec $b \neq 0$. Il est facile de voir que :

$$S'_{p,\lambda}(M)f(\xi) = c_{p,\lambda}(M) \int_{\mathbb{Q}_p} \left[\frac{\lambda a}{2mb}\xi^2 - \frac{\lambda}{mb}\xi z + \frac{\lambda a}{2mb} z^2\right] f(z)dz,$$

pour tout $f \in \mathcal{H}_{p,\lambda}$ et $\xi \in \mathbb{Q}_p$, et, où $c_{p,\lambda}(M)$ est une constante positive bien déterminée par le fait que l'opérateur $S'_{p,\lambda}(M)$ est unitaire. De plus, $S'_{p,\lambda}(-1)f(\xi) = f(-\xi)$.

Au § 7.3, on a donné un isomorphisme de $\mathcal{H}_{\infty,\lambda} \otimes \mathcal{H}^-_{\infty,\lambda}$ sur $\mathcal{H}_\lambda$ en associant à $\phi \otimes E_j$ la fonction $\mathcal{L}^i \mathcal{F}_0 \phi$. Par construction, on a :

$$\delta_\lambda(M)(\phi \otimes E_j) = \delta_\lambda(M)(\mathcal{L}^j \mathcal{F}_0 \phi) = S'_{\infty,\lambda}(M)\phi \otimes W^\lambda(M)E_j$$

$$= \sum_{i\in\mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z}} W^\lambda(M)_{j,i}\, S'_{\infty,\lambda}(M)\phi \otimes E_i$$

$$= \sum_{i\in\mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z}} W^\lambda(M)_{j,i}\, \mathcal{L}^i \mathcal{F}_0 S'_{\infty,\lambda}(M)\phi$$

où $(W^\lambda(M)_{j,i})$ représente la matrice de $W^\lambda(M)$ dans la base E_j, $j \in \mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z}$ et qu'on se propose de déterminer sur la base de la formule suivante qu'on vient d'établir :

$$\delta_\lambda(M)(\mathcal{L}^j \mathcal{F}_0 \phi) = \sum_{i\in\mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z}} W^\lambda(M)_{j,i}\, \mathcal{L}^i \mathcal{F}_0 S'_{\infty,\lambda}(M)\phi$$

Il est facile de voir que :

$$\delta_\lambda(M)\,\mathcal{Z}^j = \mathscr{X}\left(\frac{-ab}{2\lambda}k^2\right)\mathcal{Z}^{ak}A^{bk}\delta_\lambda(M)$$

Donc, il suffit d'étudier $\delta_\lambda(M)\mathcal{F}_o\phi$.

<u>1er cas</u> : $M = -1$. On a :

$$\delta_\lambda(M)\,\mathcal{F}_o\phi(t,v) = \mathscr{X}(-\lambda t)\sum_{n\in\mathbf{Z}}\phi(-v_1+n)\,\mathscr{X}(\lambda n v_2)$$

$$= \mathscr{X}(-\lambda t)\sum_{n\in\mathbf{Z}}\phi(-v_1-n)\quad(-\lambda n v_2)$$

$$= \mathcal{F}_o S'_{\infty,\lambda}(-1)\phi\ (t,v)$$

D'où $\delta_\lambda(-1)\,\mathcal{Z}^j\mathcal{F}_o\phi = \mathcal{Z}^{-j}\mathcal{F}_o S'_{\infty,\lambda}(-1)\phi = \mathcal{Z}^{\lambda-j}\,\mathcal{F}_o S'_{\infty,\lambda}(-1)\phi$. Donc, $W^\lambda(-1)_{j,i} = \delta_{j,\lambda-i}$. La matrice $W^\lambda(-1)$ a comme valeurs propres ± 1. L'espace propre associé à la valeur propre +1 (resp. -1) est engendré par les vecteurs $E_j+E_{\lambda-j}$ (resp. $E_j-E_{\lambda-j}$) et est de dimension égale à $[\frac{n+1}{2}]$ (resp. $n-[\frac{n+1}{2}]$). Ceci permet de résoudre le cas où $m<-1$. Les résultats précédents donnent $n_{\lambda,\chi} = [\frac{n+1}{2}]$ si $\chi(-1) = 1$ et $n_{\lambda,\chi} = n-[\frac{n+1}{2}]$ si $\chi(-1) = -1$.

<u>2ème cas</u> : La multiplicité $n_{\lambda,\chi}$ est, donc, égale, si $m \geq -1$, à la multiplicité de $\chi(M_o)$ comme valeur propre de $W^\lambda(M_o)$ opérant dans l'espace propre associé à la valeur propre +1 (resp. -1) de $W^\lambda(-1)$ si $\chi(-1) = 1$ (resp. $\chi(-1) = -1$). On va déterminer la matrice de $W^\lambda(M)$ pour $M\in T$ quelconque avec $M = \begin{pmatrix} a & mb \\ b & a\end{pmatrix}$, $b \neq 0$. On a :

$$\delta_\lambda(M)\,\mathcal{F}_o\phi(o,v) = \sum_{n\in\mathbf{Z}}\phi(av_1-mbv_2+n)\,\mathscr{X}\tfrac{\lambda}{2}[v_1v_2-(av_1-mbv_2)(-bv_1+av_2)-2n(-bv_1+av_2)]$$

$$= \sum_{n\in\mathbf{Z}}\phi(av_1-mbv_2+n)\,\mathscr{X}\tfrac{\lambda}{2}\Big[\frac{a}{mb}\,v_1^2-amb\Big(\frac{n}{mb}\Big)^2-2v_1\Big(\frac{av_1-mbv_2}{mb}+\frac{n}{mb}\Big)+$$

$$amb\Big(\frac{av_1-mbv_2}{mb}+\frac{n}{mb}\Big)^2\Big]$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}/mb\mathbb{Z}} \mathcal{X}\left(\frac{\lambda a}{2mb} v_1^2 - \frac{\lambda a}{2mb} j^2\right)\tilde{\phi}(s_j)$$

où $s_j = \dfrac{av_1-mbv_2}{mb} + \dfrac{j}{mb}$, $\tilde{\phi}(s) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Psi(s+k)$ et

$\Psi(s) = \phi(mbs)\ \mathcal{X}(-\lambda v_1 s + \frac{\lambda amb}{2} s^2)$. De plus, on a :

$$\tilde{\phi}(s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \tilde{\phi}(\xi)\ \mathcal{X}(-n\xi)d\xi\ \mathcal{X}(ns)$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi(\xi+k)\ \mathcal{X}(-n(\xi+k))d\xi\ \mathcal{X}(ns)$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \psi(\xi)\ \mathcal{X}(-n\xi)d\xi\ \mathcal{X}(ns)$$

$$= \frac{1}{|mb|} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \phi(\eta)\ \mathcal{X}\left[-\frac{\lambda}{mb}\eta\ (v_1+\frac{n}{\lambda})+\frac{\lambda a}{2mb}\eta^2\right]d\eta\ \mathcal{X}(ns)$$

$$= \frac{1}{|mb|C_{p,\lambda}(M)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{X}\left[-\frac{\lambda a}{2mb}(v_1+\frac{n}{\lambda})^2+ns\right]S'_{\infty,\lambda}(M)\phi(v_1+\frac{n}{\lambda})$$

On pose $* = \dfrac{1}{|mb|C_{p,\lambda}(M)}$. On a, alors, la formule :

$$\delta_\lambda(M)\mathcal{F}_o\phi(o,v) = *\sum_{n\in\mathbb{Z}} S'_{\infty,\lambda}(M)\phi(v_1+\frac{n}{\lambda}) \sum_{j\in\mathbb{Z}/mb\mathbb{Z}} \mathcal{X}\left[-\frac{\lambda a}{2mb} j^2 - \frac{\lambda a}{2mb}(\frac{n}{\lambda})^2 - n(v_2-\frac{j}{mb})\right]$$

$$= *\sum_{i\in\mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z}} \sum_{k\in i} S'_{\infty,\lambda}(M)\phi(v_1+\frac{k}{\lambda}) \sum_{j\in\mathbb{Z}/mb\mathbb{Z}} \mathcal{X}\left[-\frac{\lambda a}{2mb} j^2 - \frac{\lambda a}{2mb}(\frac{k}{\lambda})^2 - k(v_2-\frac{j}{mb})\right]$$

On remplace j par $j+a(\frac{k-k_o}{\lambda})$ où k_o est un élément fixé de i, on obtient :

$$\delta_\lambda(M)\mathcal{F}_o\phi(o,v) = *\sum_{i\in\mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z}} \sum_{k\in i} S'_{\infty,\lambda}(M)\phi(v_1+\frac{k}{\lambda}) \sum_{j\in\mathbb{Z}/mb\mathbb{Z}} \mathcal{X}\left[-\frac{\lambda a}{2mb}j^2 - \frac{\lambda a}{2mb}(\frac{k_o}{\lambda})^2 + \frac{k_o j}{mb}\right]\mathcal{X}(-kv_2)$$

$$= \sum_{i\in\mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z}} \alpha_i \sum_{k\in i} S'_{\infty,\lambda}(M)\phi(v_1+\frac{k}{\lambda})\ \mathcal{X}(-kv_2)$$

où $\alpha_i = *\sum_{j\in\mathbb{Z}/mb\mathbb{Z}} \mathcal{X}\left[-\frac{\lambda a}{2mb} j^2 - \frac{\lambda a}{2mb}(\frac{k_o}{\lambda})^2 + \frac{k_o j}{mb}\right]$ qui est une constante indépendante du choix de k_o. On écrira i au lieu de k_o.

Il en résulte que :

$$\delta_\lambda(M)\,\mathcal{Z}^k\,\mathcal{F}_o\phi(o,v) = \mathfrak{X}\left(-\frac{ab}{2\lambda}k^2\right)\mathcal{Z}^{ak}A^{bk}\delta_\lambda(M)\,\mathcal{F}_o\phi$$

$$= \mathfrak{X}\left(-\frac{ab}{2\lambda}k^2\right)\sum_{i\in\mathbb{Z}/mb\mathbb{Z}}\alpha_i\,\mathcal{Z}^{ak}A^{bk}\delta_\lambda(M)\,\mathcal{F}_o\phi$$

Or, on a vu au § 7.7 la formule de commutation suivante :

$$A^k\mathcal{Z}^j = \mathfrak{X}\left(-\frac{1}{\lambda}jk\right)\mathcal{Z}^jA^k$$

et que l'opérateur A laisse invariant l'image de $\mathcal{F}_o$. Il en découle que :

$$\delta_\lambda(M)\,\mathcal{Z}^k\mathcal{F}_o\phi = \mathfrak{X}\left(-\frac{ab}{2\lambda}k^2\right)\sum_{i\in\mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z}}\alpha_i\,\mathcal{Z}^{ak+i}\,\mathfrak{X}\left(-\frac{1}{\lambda}ibk\right)\mathcal{F}_oS'_{\infty,\lambda}(M)\phi$$

$$= \mathfrak{X}\left(\frac{ab}{2\lambda}k^2\right)\sum_{i\in\mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z}}\alpha_{i-ak}\left(-\frac{i}{\lambda}bk\right)\mathcal{Z}^i\mathcal{F}_oS'_{\infty,\lambda}(M)\phi$$

Ce qui signifie que :

$$W^\lambda(M)_{k,i} = \alpha_{i+ak}\,\mathfrak{X}\left(-\frac{i}{\lambda}bk\right)\mathfrak{X}\left(\frac{ab}{2\lambda}k^2\right)$$

$$= *\sum_{j\in\mathbb{Z}/mb\mathbb{Z}}\left[-\frac{\lambda a}{2mb}\left(j^2+\left(\frac{i}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{k}{\lambda}\right)^2\right)+\frac{ik}{\lambda mb}+\frac{j}{mb}(i-ak)\right]$$

où $*$ est une constante positive.

Une fois arrivé là, on est étonné de ne pas voir une expression symétrique en i,k ; comme on sait qu'elle doit l'être. Mais, pour se convaincre de la symétrie, il suffit de remarquer que les nombres a et mb sont premiers entre eux et on a le droit, alors, de remplacer j par $-aj$. On remarque, aussi, que la constante $*$ est là pour rendre unitaire l'opérateur $W^\lambda(M)$.

On remarque, enfin, que pour $m = -1$, $M_o = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et la matrice de $W^\lambda(M_o)$ est $\left\{\chi(\frac{ik}{\lambda})\right\}$. Il reste à montrer le lemme précédent.

<u>Démonstration du lemme</u> :

Il suffit de montrer que si $M = \begin{pmatrix} a & mb \\ b & a \end{pmatrix} \in T_{\mathbb{Z}_p}$ avec $b \neq 0$, l'opérateur $\tilde{S}_{p,\lambda}(M)$ laisse invariant $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_{p,\lambda}}$ et est représenté par une matrice symétrique dans la base E_{j_p}, $j_p \in \mathbb{Z}/|\lambda|_p^{-1}\mathbb{Z}$. Or

$$(\tilde{S}_{p,\lambda}(M)E_{j_p},E_{k_p}) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi\left[\frac{\lambda a}{2mb}\xi^2 - \frac{\lambda}{mb}\xi Z + \frac{\lambda a}{2mb}Z^2\right] E_p(Z - j_p|\lambda|_p)E_p(\xi - k_p|\lambda|_p)\,dZ\,d\xi$$

La symétrie en résulte immédiatement. Reste l'invarian . En revenant à la caractérisation de $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_{p,\lambda}}$ donnée au § 7.7, il faut voir que :

i) $\tilde{S}_{p,\lambda}(M)E_{j_p}$ est une fonction sur $\mathbb{Q}_p$ invariant par translation par $\mathbb{Z}_p$

ii) le support de $\tilde{S}_{p,\lambda}(M)E_{j_p}$ est contenu dans $|\lambda|_p Z_p$.

On va montrer d'abord i) sur la base de la formule :

$$\tilde{S}_{p,\lambda}(M)E_{j_p}(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi\left[\frac{\lambda a}{2mb}\xi^2 - \frac{\lambda}{mb}\xi Z + \frac{\lambda a}{2mb}Z^2\right] E_{j_p}(Z)\,dZ$$

Si $|mb|_p = 1$, c'est évident. On suppose $|mb|_p < 1$ et, donc, $|a|_p = 1$ puisque $a^2 - mb^2 = 1$. L'égalité $(a+1)(a-1) = mb^2$ implique que $\frac{a+1}{mb}$ ou $\frac{a-1}{mb}$ se trouve dans $\mathbb{Z}_p$: c'est clair pour $p \neq 2$. Pour $p = 2$, le nombre $a-1$ ou $a+1$ est de norme $1/2$.

On suppose que $|a-1|_2 = 1/2$. L'autre cas se traite de la même façon. Donc, $\left|\frac{a+1}{mb}\right|_2 = 2|b|_2$. Si $|b|_2 \leq 1/2$, le résultat est évident. Si $|b|_2 = 1$, comme m est sans facteur carré, $|m|_2$ vaut $1/2$ ou 1 et, donc, $\left|\frac{a-1}{mb}\right|_2 \leq 1$. Ceci étant, on suppose que $\frac{a+1}{mb} \in \mathbb{Z}_p$. L'autre cas se traite de la même façon. Pour $u \in \mathbb{Z}_p$, on a :

$$\frac{\lambda a}{2mb}(\xi+u)^2 - \frac{\lambda}{mb}(\xi+u)z + \frac{\lambda a}{2mb}z^2$$

$$= \frac{\lambda a}{2mb}\xi^2 - \frac{\lambda}{mb}\xi(z+u) + \frac{\lambda a}{2mb}(z+u)^2 + \lambda\frac{a+1}{mb}\xi u - \lambda\frac{a+1}{mb}zu$$

Si $\lambda z \in \mathbb{Z}_p$ et $\lambda\xi \in \mathbb{Z}_p$, on voit que $\lambda\frac{a+1}{mb}\xi u - \lambda\frac{a+1}{mb}zu \in \mathbb{Z}_p$

En faisant le changement de variable $z \to z+u$, on obtient i) modulo ii).

Pour montrer ii), on va distinguer deux cas :

<u>1er cas</u> : $\frac{\lambda a}{2mb} \in \mathbb{Z}_p$. Dans ce cas :

$$\tilde{S}_{p,\lambda}(M)E_{j_p}(\xi) = C_{p,\lambda}(M)\int_{\mathbb{Z}_p} \mathfrak{X}\left[\frac{\lambda a}{2mb}\xi^2 - \frac{\lambda}{mb}(z+j_p|\lambda|_p)\xi + \frac{\lambda a}{2mb}(z+j_p|\lambda|_p)^2\right]dz$$

$$= C_{p,\lambda}(M)\,\mathfrak{X}\left[\frac{\lambda a}{2mb}\xi^2 - \frac{\lambda}{mb}\xi j_p|\lambda|_p + \frac{\lambda a}{2mb}(j_p|\lambda|_p)^2\right]\int_{\mathbb{Z}_p}\mathfrak{X}\left[\frac{\lambda a}{2mb}z^2 + (\frac{\lambda a}{mb}j_p|\lambda|_p - \frac{\lambda}{mb}\xi)z\right]dz$$

$$= \dots \int_{\mathbb{Z}_p}\mathfrak{X}\left[(\frac{\lambda a}{mb}j_p|\lambda|_p - \frac{\lambda}{mb}\xi)z\right]dz$$

$$= C_{p,\lambda}(M)\,\mathfrak{X}\left[\frac{\lambda a}{2mb}\xi^2 - \frac{\lambda}{mb}\xi j_p|\lambda|_p + \frac{\lambda a}{2mb}(j_p|\lambda|_p)^2\right]E_p(\frac{\lambda a}{mb}j_p|\lambda|_p - \frac{\lambda}{mb}\xi)$$

Si $\lambda\xi \notin \mathbb{Z}_p$, comme $|aj_p\lambda|\lambda|_p|_p = |aj_p|_p \le 1$, on a :

$$|\frac{\lambda a}{mb}j_p|\lambda|_p - \frac{\lambda}{mb}\xi|_p = |\frac{\lambda}{mb}\xi| = |\frac{1}{mb}|_p \,.\, |\lambda\xi|_p > 1 \quad \text{car} \quad |mb|_p \le 1.$$

Ce qui signifie que $\tilde{S}_{p,\lambda}(M)E_{j_p}(\xi) = 0$. D'où ii) dans ce cas.

<u>2ème cas</u> : $\frac{\lambda a}{2mb} \notin \mathbb{Z}_p$. On pose $|\frac{\lambda a}{2mb}|_p = p^{2n+\varepsilon}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon = 0$ ou 1.

On a :

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \mathfrak{X}\left[\frac{\lambda a}{2mb}z^2 + \left(\frac{\lambda a}{mb}j_p|\lambda|_p - \frac{\lambda}{mb}\xi\right)z\right]dz$$

$$= \sum_{z\in\mathbb{Z}/p^{n+\varepsilon}\mathbb{Z}} \int_{p^{n+\varepsilon}\mathbb{Z}_p} \mathfrak{X}\left[\frac{\lambda a}{2mb}z^2+\left(\frac{\lambda a}{mb}j_p|\lambda|_p-\frac{\lambda}{mb}\xi\right)z\right]\mathfrak{X}\left[\frac{\lambda a}{2mb}p^{2n+2\varepsilon}u^2 + p^{n+\varepsilon}u\left(\frac{\lambda a}{mb}z + \frac{\lambda a}{mb}j_p|\lambda|_p - \frac{\lambda}{mb}\xi\right)\right]du$$

$$= p^{-n-\varepsilon} \sum_{z\in\mathbb{Z}/p^{n+\varepsilon}\mathbb{Z}} \mathfrak{X}\left[\frac{\lambda a}{2mb}z^2 + \left(\frac{\lambda a}{mb}j_p|\lambda|_p-\frac{\lambda}{mb}\xi\right)z\right] \int_{\mathbb{Z}_p} \mathfrak{X}\left[p^{n+\varepsilon}u\left(\frac{\lambda a}{mb}z + \frac{\lambda a}{mb}j_p|\lambda|_p - \frac{\lambda}{mb}\xi\right)\right]du$$

$$= p^{-n-\varepsilon} \sum_{z\in\mathbb{Z}/p^{n+\varepsilon}\mathbb{Z}} \mathfrak{X}\left[\frac{\lambda a}{2mb}z^2+\left(\frac{\lambda a}{mb}j_p|\lambda|_p-\frac{\lambda}{mb}\xi\right)z\right]E_p\left[p^{n+\varepsilon}\left(\frac{\lambda a}{mb}z + \frac{\lambda a}{mb}j_p|\lambda|_p - \frac{\lambda}{mb}\xi\right)\right]$$

On suppose que $\lambda\xi \notin \mathbb{Z}_p$. Mais, $|\lambda az|_p \leq 1$ et $|\lambda aj_p|\lambda|_p|_p \leq 1$, donc,

$$\left|p^{n+\varepsilon}\left(\frac{\lambda a}{mb}z + \frac{\lambda a}{mb}j_p|\lambda|_p- \frac{\lambda}{mb}\xi\right)\right|_p = p^{-n-\varepsilon}\left|\frac{\lambda\xi}{mb}\right|_p = p^n|2\xi|_p > 1$$

sauf, éventuellement, pour $p = 2$. Mais, dans ce cas, λ étant un entier pair, $|\xi|_2 > 2$ et donc $|2\xi|_2 > 1$. Il s'en suit que $\tilde{S}_{p,\lambda}(M)E_{j_p}(\xi) = 0$.

D'où ii). D'où le lemme.

Mohamed Hachmi SLIMAN
Département de Mathématiques
de la Faculté des Sciences
Campus Universitaire du Belvédère
Tunis, Tunisie

RÉFÉRENCES

{ A.K.} L.Auslander,B.Kostant : Polarisations and unitary representations of solvable Lie groups . Inventiones Math. 14 (1971) p. 255-354 .

{ A.M.} L.Auslander,C.C.Moore : Unitary representations of solvable Lie groups . Memoirs of the Amer.Math.Soc. 62 1966)

{ Be} P.Bernat,N.Conze,M.Duflo,M.L.Nahas,M.Raïs,P.Renouard,M.Vergne .Représentations des groupes de Lie résolubles .Monographie de la Soc.Math.de France.Dunod.Paris (1972) .

{ Bern} I.N.Bernstein : All reductive groups are tame . Functional Analysis and applications 8 (1974) p. 91-93 .

{ Bl } R.Blattner : Group extention representation and the structure space . Pacific Journal of Math. 15 (1965) p.1101-1113 .

{ Bo1} A.Borel : Linear algebraic groups . W.A.Benjamin,Inc. New-York (1969)

{ Bo2 }------- :Groupes linéaires algébriques . Annals of Math. 1 (1956) p.20-82 .

{ Bo3 }------- :Some finiteness properties of adele groups over number fields . I.H.E.S. n°16 (1963) p.101-126 .

{ Bo4 }------- :Introduction aux groupes arithmétiques . Hermann .Paris . (1969) .

{ Bo5 }------- :Formes automorphes et séris de Dirichlet d'aprés R.P.Langlands . Séminaire Bourbaki (1974-75) n°466 .

{ B.G} A.Borel,H.Garland :Laplacien and the discrete spectrum of an arithmetic group . Amer.Journal of Math. 105 (1983) p.309-335 .

{ B.H} A.Borel,Harish-Chandra :Arithmetic subgroups of algebraic groups . Annals of Math. 75 (1962) p.485-535 .

{ B.M} A.Borel,G.D.Mostow :On semi-simple automorphisms of Lie algebras . Annals of Math. 61 (1955) p.389-405 .

{ B.T} A.Borel,J.Tits :Groupes réductifs . I.H.E.S. n°27 (1965) p.55-152 .

{ B..} A.Borel,...:Proceeding of symposia in pure Math. vol. IX . Amer.Math.Soc.Providence ,Rhode Island (1966) .

RÉFÉRENCES

{Br} J.Brézin : *Harmonic analysis on compact solvmanifold .*
Lecture notes in Math. 602 (1977) .

{Cha1} Harish-Chandra : *Harmonic analysis on reductive p-adic groups .*
Lecture notes in Math. 162 (1970) .

{Cha2} -------------- :*Automorphic forms on semi-simple Lie groups .*
Lecture notes in Math. 62 (1968) .

{Cha3} -------------- :*Representations of semi-simple Lie groups on a Banach space .*
Transactions of the Amer.Math.Soc. 75 (1953) p.185-243 .

{Che} C.Chevalley :*Théorie des groupes de Lie . Tome II .*
Hermann . Paris .(1951) .

{Co} H.Cohn : *A second course in number theory .*
John Willy & sons,Inc. (1962) .

{Dix1} J.Dixmier :*Sur les représentations unitaires des groupes de Lie algébriques .*
Annales de l'institut de Fourrier 7 (1957) p.315-328 .

{Dix2} -------- :*Les C^*-algèbres et leurs représentations .*
Gauthiers-Villars .Paris (1964) .

{Dix3} --------- :*Algèbres enveloppantes .*
Gauthiers-Villars .Paris (1974).

{Dix4} --------- :*Représentations induites holomorphes des groupes résolubles algébriques .*
Bulletins de la Soc.Math.de France. 94 (1966) p.181-206 .

{D.M.} J.Dixmier,P.Malliavin :*Factorisations des fonctions et des vecteurs indéfiniment différenciables.Bulletins de la Soc.Math.de France 102 (1978) p.305-330 .*

{Du1} M.Duflo :*Caractères des groupes et des algèbres de Lie résolubles .*
Annales scientifiques de l'E.N.S. 4 (1970) p.23-74 .

{Du2} ------- :*Sur les extensions des représentations irréductibles des groupes de Lie nilpotents . Annales scientifiques de l'E.N.S. 4 (1972) p.71-120 .*

{Du3} ------- :*Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques .*
Acta-Mathematica 149 (1983) P. 153-213 .

{Gelb1} S.Gelbart :*Automorphic forms on adele groups .*
Annals of Math.studies Princeton university press 83 (1975) .

{Gelb2} --------- :*Weil's representation and the spectrum of the metaplectic group .*
Lecture notes in Math. 530 (1976) .

{G.G.P.S.1} I.M.Gelfand,M.I.Graev,Pyatetskii-Shapiro :Representations of adele groups . Soviet math. A.M.S.translations vol5 n°3 (1964) p.657-661 .

{G.G.P.S.2} -- :Representation theory and automorphic forms . W.B.Saunders .Philadelphia . (1969)

{Gl } J.Glimm :Type I C^*-algebra . Annals of math. 73 (1961) p.572-612 .

{Go1} R.Godement :A theory of spherical functions . Transaction of the Amer.Math.Soc. 73 (1952) p.496-556 .

{Go2} ---------- :Groupes linéaire algébriques sur un corps parfait . Séminaire Bourbaki (1960-61) n°206 .

{Ho1} R.Howe : Frobenius reciprocity for unipotent algebraic groups over $\mathbb{Q}$. Amer.Journal of Math. 93 (1971) p.163-172 .

{Ho2} ------ :On character of Weil's representation . Transaction of the Amer.Math.Soc. 177 (1973) p.287-298 .

{Ho3 }------ :Topics in harmonic analysis on solvable algebraic groups . Pacific Journal of Math. 73 (1977) p.383-435 .

{Hu } J.Humphreys:Linear algebraic groups . Springer-Verlag . (1975) .

{I.M} N.Iwahori,H.Matsumoto :On some Bruhat decomposation . I.H.E.S. 25 (1965) p.5-48 .

{J.L} H.Jacquet,R.P.Langlands:Automorphic forms on Gl(2) . Lecture notes in Math. 114 (1970) .

{K1 } A.A.Kirillov:Unitary representations of nilpotent Lie groups . Uspekhi Math.Nauk 106 (1962) p.57-110 .

{K2 } ------------:Eléments de la théorie des représentations . Editions Mir Moscou (1974) .

{La1} R.P.Langlands:On the functional equations satisfied by Eisenstein series . Lecture notes in Math. 544 (1976) .

{La2 }-------------:Dimensions of spaces of automorphic forms . Proc.in symposium in pure math. IX A.M.S.Providence (1966) p.253-257 .

{L.P} G.Lion,P.Perrin:Extensions des représentations des groupes unipotents p-adiques . Lecture notes in math. 880 (1981) p.337-356 .

{Li } R.Lipsman: The C.C.R. property for algebraic groups . Preprint dep. of math. University of Maryland College Park (1973) .

{Ma1} G.W.Mackey: *Unitary representation of group extensions I .* Acta Mathematica 99 (1958) p.265-311 .

{Ma2} ----------: *Induced representations of locally compact groups .* Annals of Math. 58 (1953) p.193-221 .

{Ma3} ----------: *Induced representations of locally compact groups I .* Annals of Math. 55 (1952) p.101-139 .

{Ma4} ----------: *The theory of unitary representation .* Mimeographed notes .University of Chicago .Lectures in Math. (1956) .

{Moo1} C.C.Moore: *Extensions and low dimensional cohomology theory of locally compact groups.* Transactions of the Amer.Math.Soc. 113 (1964) p.40-86 .

{Moo2} ----------: *Decomposition of unitary representations defined by discrete subgroups of nilpotent groups .* Annals of Math. 82 (1965) p.146-182 .

{M.V1} H.Moscovici, A.Verona: *Cocycle representations of solvable Lie groups .* Math.Zeitchrift Springer Verlag (1978) p.1-12 .

{M.V2} --------------------: *Harmonically induced representations of nilpotent Lie groups .* Inventiones Math. 48 (1978) p.61-73 .

{Mos1} G.D.Mostow: *Fully reducible subgroups of algebraic groups .* Amer.Journal of Math. 78 (1956) p.200-221 .

{Mos2} ----------: *Homogenious spaces with finite invariant measure .* Annals ,of Math. 75 (1962) p.17-37 .

{Mos3} ----------: *Factor spaces of solvable groups .* Annals of Math. 60 (1954) p.1-27 .

{Mos4} ----------: *Representative functions on discrete groups and solvable arithmetic groups.* Amer.Journal of Math. 92 (1970) p.1-31 .

{M.T} G.W.Mostow, T.Tamagawa: *On the compactness of arithmetically defined homogenious spaces .* Annals of Math. 76 (1962) p.446-463 .

{N } J.V.Neumann: *On infinite direct product .* Compositio Mathematica 6 (1938) p.1-77 .

{O } T.Ono : *On some arithmetic properties of linear algebraic groups .* Annals of Math. 70 (1959) p.266-290 .

{Pe } P.Perrin: *Représentation de Schrödinger, indice de Maslov et groupe métaplectique .* Lecture notes in Math. 880 (1981) p.370-407 .

{Po } L.Pontrijagin: *Topological groups .* Princeton University press (1946) .

{Pu1}<u>L.Pukanszky</u>:*Characters of algebraic solvable Lie groups .*
Journal of functional analysis 3 51969) p.435-494 .

{Pu2}-----------:*Unitary representations of solvable Lie groups .*
Annales scientifiques de l'E.N.S. 4 (1971) p.457-608 .

{Pu3}-----------:*On the theory of exponentiel Lie groups.*
Transactions of the Amer.Math.Soc. 126 (1967) p.487-507 .

{Pu4}-----------:*Leçons sur les représentations de groupes .*
Dunod Paris (1966) .

{Ri} <u>L.Richardson</u>:*Decompositions of the L^2 spaces of a general compact nilmanifold .*
Amer.Journal of Math. 93 (1971) p.173-189 .

{Ro1}<u>J.Rosenberg</u>:*Square integrable factor representations of locally compact groups .*
Transactions of the Amer.Math.Soc. 237 (1978) p.1-33 .

{Ro2}-----------:*Realisations of square integrable representations of unimodular Lie groups on L^2 cohomology spaces .Transactions of the Amer.Math.Soc. 261 (1980) p.1-32 .*

{Sa} <u>P.Samuel</u>:*Théorie algébrique des nombres .*
Hermann Paris (1967) .

{Se} <u>J.P.Serre</u>:*Cours d'arithmétique .*
Presse unversitaire de France (1970)

{Wal}<u>N.Wallach</u>:*Harmonic analysis on homogenious spaces .*
Marcel Dekker,Inc. New York (1973) .

{War}<u>G.Warner</u>:*Harmonic analysis on semi-simple Lie groups. Vol. I & II .*
Springer Verlag (1972) .

{We1}<u>A.Weil</u> :*L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications .*
Paris (1951)

{We2}-------:*Sur certains groupes d'opérateurs unitaires .*
Acta Mathematica 111 (1964) p.143-211 .

{We3}-------:*Basic number theory .*
Springer Verlag (1969) .

{We4}-------:*Adeles and algebraic groups .*
Institute for advanced study Princeton N.J. (1961) .

{Wei}<u>E.Weiss</u>:*Algebraic number theory .*
Mc Graw-Hill Book company,Inc. (1963) .

ABSTRACT

Let G be a linear algebraic group defined over Q with Lie algebra $\underline{g}$. We, first , develop a Mackey's little group theory for the adele group G_A and, then, a reductive little group theory.This is analogous to Duflo's machinery, in the local case, and uses the, so called by him, forms on $\underline{g}$ of unipotent type. This allows to give a decomposition of $L^2(G_A/G_Q)$, generalizing the Moore's one in the unipotent case, and reducing the central decomposition to the reductive case. As consequences, we establish that the discrete part is a sum, with finite multiplicities, of unitary irreducible restricted infinite tensor product representations of G_A and, if μ denotes the measure giving the central decomposition of the continuous part, the set of factor representations of G_A, whose restriction to G_R is a multiple of a given irreducible representation, is a μ-null set. Moreover, when G is an irreductible solvable group, there is no multiplicity in the discrete part.

As usually, we obtain, from these informations, some ones on the decomposition of $L^2(G_R/G_Z)$, especially when we have strong approximation. We give, in the last chapter, some examples which illustrate the machinery used.

Independently of the adelic work, we prove that a necessary and sufficient condition for the discrete part of $L^2(G_R/G_Z)$ to have only finite multiplicities is that any decomposable torus in G centralizes the unipotent radical, modulo, of course, the condition that the center of the irreducible component of G is anisotropic. This is a global analogous result to the Lipsman's one, in the local case, concerning the CCR property.