

# *Astérisque*

A. LEGRAND

$\pi_1$  et  $d_2$

*Astérisque*, tome 113-114 (1984), p. 234-237

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1984\\_\\_113-114\\_\\_234\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__113-114__234_0)

© Société mathématique de France, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

$\pi_1$  et  $d_2$

A. LEGRAND

1) INTRODUCTION.

Nous avons comme but d'expliciter certaines actions du groupe fondamental de la base d'un fibré  $X \rightarrow E \rightarrow V$  sur l'homologie ou l'homotopie de la fibre. Il s'agit d'actions intervenant dans les différentielles de suites spectrales, comme par exemple la suite spectrale de Serre [Se]

$$E_{p,q}^2 = H_p(V, H_q(X)) \implies H_*(E)$$

ou, pour  $E$  fibré en groupes, la suite spectrale de Shih généralisée, [Sh], [L].

$$E_{p,q}^{p,q} = H^p(V, \pi_{-q}(X)) \implies \pi_*(\Gamma E) \quad (p+q \leq 1)$$

$\Gamma$  désignant le foncteur sections.

Dans ces formules, et dans la suite, lorsque le groupe fondamental de la base n'est pas nul, les groupes d'homologie et de cohomologie considérés sont à coefficients locaux.

2) Ext $_{\pi}$  et Ext.

Considérons  $\pi$  un groupe discret et deux  $\pi$ -modules  $A$  et  $B$ . Alors  $\text{Hom}(A,B)$  et  $\text{Ext}(A,B)$  sont naturellement des  $\pi$ -modules.

Un argument de suite spectrale donne la relation suivante entre  $\text{Ext}_{\pi}^*$  et  $\text{Ext}^*$  ( $\pi$  en indice signifie que l'anneau de base est l'algèbre  $\mathcal{Z}(\pi)$ ).

PROPOSITION 1. (Cartan). On a une longue suite exacte

$$(1) \dots \rightarrow H^n(\pi, \text{Hom}(A,B)) \rightarrow \text{Ext}_{\pi}^n(A,B) \rightarrow H^{n-1}(\pi, \text{Ext}(A,B)) \rightarrow H^{n+1}(\pi, \text{Hom}(A,B)) \rightarrow \dots$$

Soient  $V$  topologique tel que  $\pi_1(V) = \pi$  et  $L^*$  une résolution  $\pi$ -libre de  $A$ . Les morphismes naturels

$$\begin{aligned} (C_*(V) \otimes_{\pi} L_*) \otimes \text{Hom}_{\pi}(L_*, B) &\rightarrow C_*(V) \otimes_{\pi} B \\ \text{Hom}_{\pi}(C_*(V), L_*) \otimes \text{Hom}_{\pi}(L_*, B) &\rightarrow \text{Hom}_{\pi}(C_*(V), B) \end{aligned}$$

induisent les opérations de la proposition suivante :

PROPOSITION 2. Soit  $V$  topologique tel que  $\pi_1(V) = \pi$ . On a des opérations

$$\begin{aligned} * : H_p(V, A) \otimes \text{Ext}_{\pi}^q(A, B) &\rightarrow H_{p-q}(V, B) \\ * : H^p(V, A) \otimes \text{Ext}_{\pi}^q(A, B) &\rightarrow H^{p+q}(V, B). \end{aligned}$$

### 3) CLASSES D'UN $\pi$ -MODULE DIFFÉRENTIEL GRADUÉ.

Considérons un  $\pi$ -module différentiel gradué  $(C_*, d)$   $d$  étant de degré  $-1$ . Soient  $B_*$ ,  $Z_*$ ,  $H_*$  les groupes bord, cycle et homologie de  $(C_*, d)$ . On a deux suites exactes de  $\pi$ -modules.

$$(2) \quad 0 \rightarrow H_{q+1} \rightarrow C_{q+1}/B_{q+1} \xrightarrow{d} B_q \rightarrow 0$$

$$(3) \quad 0 \rightarrow B_q \rightarrow Z_q \longrightarrow H_q \rightarrow 0.$$

DÉFINITION 1.- On appelle  $q^e$  classe secondaire du  $\pi$ -module  $(C_*, d)$  la classe  $\xi_q^2 \in \text{Ext}_{\pi}^2(H_q, H_{q+1})$  définie par les suites exactes (2) et (3).

Donnons immédiatement une autre définition qu'on utilisera plus loin.

DÉFINITION 2. L'image  $\xi_q^1 \in H^1(\pi, \text{Hom}(H_q, H_{q+1}))$  de la classe secondaire  $\xi_q^2$  par le morphisme donné par (1) est appelée  $q^e$ -classe primaire de  $(C_*, d)$ .

REMARQUE 1. Si on utilise des notations cohomologiques ( $d$  de degré  $+1$ ) la  $q^e$ -classe secondaire  $\xi_2^q$  est dans  $\text{Ext}_{\pi}^2(H^q, H^{q-1})$  et la  $q^e$ -classe primaire est dans  $H^1(\pi, \text{Ext}(H^q, H^{q-1}))$ .

### 4) APPLICATIONS.

#### a) Suite spectrale de Serre.

Soient  $\pi$  un groupe discret,  $X$  un  $\pi$ -espace et  $X \rightarrow E \rightarrow V$  un fibré de groupe structural  $\pi$ . La classe de ce fibré est défini par  $\theta_0 \in H^1(V, \pi) = H^1(\pi_1(V), \pi)$ . Comme  $C_*(X)$  est un  $\pi$ -module on a des classes secondaires  $\xi_q^2 \in \text{Ext}_{\pi}^2(H_q(X), H_{q+1}(X))$ .

En utilisant le théorème de E.H. Brown,  $[B]$ ,  $[M]$ , on montre :

THOÈREME 1. La différentielle  $d_2 : H_p(V, H_q(X)) \rightarrow H_{p-2}(V, H_{q+1}(X))$  de la suite spectrale de Serre de  $X \rightarrow E \rightarrow V$  est donnée par

$$d_2(c) = c * \theta_0^* \xi_q^2$$

$$[\theta_0^* \xi_q^2 \in \text{Ext}_{\pi_1(V)}^2(H_q(X), H_{q+1}(X))].$$

INTERPRÉTATION. Par construction l'opération  $*$  du théorème 1 est la composée des homomorphismes bords

$$H_p(V, H_q(X)) \xrightarrow{\partial_3} H_{p-1}(V, B_q(X)) \xrightarrow{\partial_2} H_{p-2}(V, H_{q+1}(X)).$$

$\partial_3$  étant défini par (3) et  $\partial_2$  par (2). Le théorème 1 signifie donc que dans le cas d'un groupe structural discret l'action du groupe fondamental de la base sur l'homologie de la fibre se "lit" sur les bords. Signalons également

COROLLAIRE. Si  $\pi_1(V)$  est libre on a des opérations

$$o : H_p(V, H_q(X)) \otimes H^1(\pi_1(V), \text{Ext}(H_q(X), H_{q+1}(X))) \longrightarrow H_{p-2}(V, H_{q+1}(X))$$

et la classe  $\theta_0^* \xi_q^2$  est dans  $H^1(\pi_1(V), \text{Ext}(H_q(X), H_{q+1}(X)))$ . On a alors

$$d_2(c) = c \circ \theta_0^* \xi_q^2$$

ce qui signifie que seule la "torsion" de  $H_*(X)$  permet au groupe fondamental de la base de contribuer à la différentielle  $d_2$ .

b) Suite spectrale de Shih d'un fibré en groupes.

Si  $X$  est un groupe topologique, on sait  $[\tilde{M}]$  que son homotopie est l'homologie du complexe différentiel  $S_*(X)$  où  $S_q(X)$  est le groupe des  $q$ -simplexes singuliers de  $X$  (la structure de groupe est celle induite par celle de  $X$ ). Si  $\pi$  est un groupe discret opérant additivement sur  $X$  (i.e. chaque élément de  $\pi$  définit un automorphisme de  $X$ ), on a des classes secondaires  $\eta_q^2 \in \text{Ext}_{\pi}^2(\pi_q(X), \pi_{q+1}(X))$  et on peut montrer

THEOREME 1'. La différentielle  $d_2 : H^p(V, \pi_q(X)) \rightarrow H^{p+2}(V, \pi_{q+1}(X))$  de la suite spectrale de Shih généralisée d'un fibré en groupes abéliens  $X \rightarrow E \rightarrow V$  de groupe structural  $\pi$  discret (opérant additivement sur  $X$ ) est donnée par

$$d_2(c) = c * \theta_0^* \eta_q^2$$

5) GROUPE STRUCTURAL QUELCONQUE.

Soit  $X$  topologique. Le complexe des chaînes singulières  $C_*(X)$  étant libre, on a la suite exacte des coefficients universels.

$$(4) \quad 0 \rightarrow \text{Ext}(H_q(X), H_{q+1}(X)) \rightarrow H^{q+1}(X, H_{q+1}(X)) \rightarrow \text{Hom}(H_{q+1}(X), H_{q+1}(X)) \rightarrow 0$$

qui est une suite de  $\pi$ -module si  $X$  est un  $\pi$ -espace. Notons

$$\partial : H^0(\pi, \text{Hom}(H_{q+1}(X), H_{q+1}(X))) \rightarrow H^1(\pi, \text{Ext}(H_q(X), H_{q+1}(X)))$$

l'opérateur bord associé.

PROPOSITION 3.  $\quad \partial(1_{H_{q+1}(X)}) = \xi_q^1$

$\xi_q^1$  étant la  $q^e$ -classe primaire du  $\pi$ -espace  $X$  (cf. définition 2).

Si  $X$  est un  $G$ -espace ( $G$  groupe topologique quelconque) la suite (4) est une suite de  $\pi_0(G)$ -modules. On peut donc poser :

DÉFINITION 2'. On appelle  $q^e$ -classe primaire du  $G$ -espace  $X$  la classe

$$\xi_q^1 = \partial(1_{H_{q+1}}) \in H^1(\pi_0(G), \text{Ext}(H_q(X), H_{q+1}(X))).$$

On obtient ainsi pour l'homologie des  $G$ -espaces des classes analogues aux invariants primaires d'Eilenberg introduit dans [L] dans le cadre de la cohomologie (par des méthodes essentiellement homotopiques). On a donc pour la suite spectrale de Serre en homologie, dans le cas non simplement connexe, un calcul de la différentielle similaire à celui donné dans [L].

RÉFÉRENCES

- [B] : E.H. BROWN J.R. "Twisted tensor products" Ann. of Math., 69, (1959) 223-246.
- [L] : A. LEGRAND. "Homotopie des espaces de sections" Lecture note 941, Springer (à paraître).
- [M] J.P. MAY. "Simplicial objects in algebraic topology". Van Nostrand Math. studies (1967).
- [Se] J.P. SERRE. "Homologie singulière des espaces fibrés". Ann. of Math. 54 (1951), 425-505.
- [Sh] W. SHIH. Séminaire Cartan 1962-63. Exposé n° 6.