

# *Astérisque*

YVES FÉLIX

CLAS LÖFWALL

**Sur le rayon de convergence de la série de Poincaré  
des anneaux locaux gradués**

*Astérisque*, tome 113-114 (1984), p. 183-186

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1984\\_\\_113-114\\_\\_183\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__113-114__183_0)

© Société mathématique de France, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LE RAYON DE CONVERGENCE DE LA SÉRIE DE POINCARÉ  
DES ANNEAUX LOCAUX GRADUÉS

par

Yves FÉLIX et Clas LÖFWALL

1. INTRODUCTION.

Soit  $A$  un anneau local d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  et de corps résiduel  $k$ .  
Notons  $H_A(t)$  la série de Hilbert  $\sum_{i \geq 0} \dim_k(\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1})t^i$  et  $0 < R_A$  le rayon de  
convergence de sa série de Poincaré  $P_A(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim_k \text{Tor}_i^A(k, k)t^i$ .

Depuis certaines études sur la croissance exponentielle de  $P_A(t)$  ([3], [4]),  
on sait que  $R_A > 1$  si et seulement si l'anneau  $A$  est d'intersection complète.  
Dans les autres cas  $R_A < 1$ . Dans [1] et [2] Avramov démontre que si  $R_A < 1$ ,  
alors  $R_A \leq \sqrt{2}/2$  dans deux cas suivants :

- a) lorsque  $\text{edim}(A) - \text{depth}(A) \leq 3$
- b) lorsque  $A$  est un anneau de Gorenstein vérifiant  $\text{edim}(A) - \text{depth}(A) \leq 4$ .

Ce texte fournit de nouvelles bornes pour  $R_A$ .

THÉORÈME 1 : Soit  $A$  un anneau local gradué,  $A = \bigoplus_{n \geq 0} A^n$ , avec l'idéal maximal  
 $\mathfrak{m} = \bigoplus_{n \geq 1} A^n$  et  $\mathfrak{m}$  engendré par  $A^1$ . Supposons que  $\dim(A^1) \geq p+1$  et  $A^{p+1} = 0$ .  
Alors  $R_A \leq 2^{-1/p}$ .

2. LIEN ENTRE  $R_A$  ET  $H_A(t)$  SI  $A$  EST UN ANNEAU LOCAL GRADUÉ.

Soit  $A$  un anneau gradué comme dans le théorème 1. Alors  $\text{Tor}_p^A(k,k)$  est muni d'une seconde graduation  $\text{Tor}^A = \bigoplus \text{Tor}^{A,q}$  telle que la différentielle canonique  $d$  sur  $A \otimes \text{Tor}^{A,q}(k,k)$  satisfasse

$$d[A \otimes \text{Tor}^A(k,k)]_p^q \subset A \otimes \text{Tor}^{A,q-1}(k,k).$$

On en déduit alors que

$$\left( \sum_{p \geq 0} (\dim A^n) t^n \right) \left( \sum_{p,q} (-1)^p (\dim \text{Tor}_p^{A,q}) t^{p+q} \right) = 1.$$

Notons  $[H_A(t)]^{-1} = [\sum (\dim A^n) t^n]^{-1}$ .

Clairement  $|\alpha_n| = \left| \sum_{p+q=n} (-1)^p \dim \text{Tor}_p^{A,q}(k,k) \right| \leq \sum_{p \leq n} \dim \text{Tor}_p^A(k,k)$ ,

et donc  $|\alpha_n| t^n \leq P_A(t)/(1-t)$ .

Supposons  $m^p = 0$  pour un certain  $p$ . Il en résulte que  $R_A \leq \rho$

où  $\rho = \inf\{|z|, z \text{ parcourant les racines de } H_A(t)\}$ .

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.

On a  $H_A(t) = 1 + a_1 t + \dots + a_p t^p$  où  $a_1 \geq p+1$ . Notons les racines de  $H_A(t)=0$   $z_1, z_2, \dots, z_p$  avec  $|z_1| \leq z_i, i = 2, \dots, p$ . Si  $a_p \geq 2$  alors

$$2 \leq \frac{1}{|z_1|} \cdot \frac{1}{|z_2|} \cdot \dots \cdot \frac{1}{|z_p|} \leq \left( \frac{1}{|z_1|} \right)^p$$

de telle sorte que  $|z_1| \leq 2^{-1/p}$ . Si  $a_p = 1$  le corollaire ci-dessous donne le résultat.

Lemme. Supposons que  $b_1, \dots, b_p$  soient des nombres réels positifs, tels que  $b_1 \cdot \dots \cdot b_p = 1$  et  $b_i \leq 2^{1/p}$  pour  $i = 1, \dots, p$ . Alors  $b_1 + \dots + b_p < p+1$ .

Démonstration. Utilisant les multiplicateurs de Lagrange on démontre que si  $b_1 + \dots + b_p$  atteint sa valeur maximale pour des  $b_i$  satisfaisant à  $b_i < 2^{1/p}$  pour tout  $i$ , alors tous les  $b_i$  sont égaux. Dans ce cas on

## SUR LE RAYON DE CONVERGENCE

a donc  $b_i = 1$  pour tout  $i$  et  $b_1 + \dots + b_p = p < p+1$ .

Si  $b_1 = \dots = b_a = 2^{1/p}$  et si les autres  $b_i$  sont strictement plus petits que  $2^{1/p}$ , le même raisonnement montre que pour une valeur maximale de  $b_1 + \dots + b_p$  on a nécessairement  $b_i = 2^{-a/p(p-a)}$ ,  $i = a+1, \dots, p$ . Il s'ensuit que

$$b_1 + \dots + b_p = a \cdot 2^{1/p} + (p-a) \cdot 2^{-a/p(p-a)} < a \cdot 2^{1/p} + (p-a) = a(2^{1/p} - 1) + p.$$

Ici  $a$  est un nombre entier entre 1 et  $p-1$ . Donc

$$b_1 + \dots + b_p < (p-1)(2^{1/p} - 1) + p = p + 1 + (p-1)2^{1/p} - p < p+1, \text{ où la dernière inégalité résulte du fait que } 2^{-1/p} > e^{-1/p} > 1 - 1/p = (p-1)/p.$$

Corollaire. Une équation  $1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{p-1} z^{p-1} + z^p = 0$  à coefficients complexes avec  $|a_1| \geq p+1$  admet toujours une racine  $\alpha$  satisfaisant à  $|\alpha| < 2^{-1/p}$ .

Démonstration. Soient  $z_1, \dots, z_p$  les racines de l'équation. Posons  $b_i = 1/|z_i|$ . Alors  $b_1 \cdot \dots \cdot b_p = 1$  et comme  $-a_1 = 1/z_1 + \dots + 1/z_p$  il s'ensuit que  $b_1 + \dots + b_p \geq p+1$ . Donc, en vertu du lemme, il existe un  $i$  tel que  $b_i > 2^{1/p}$ , i.e.  $|z_i| < 2^{-1/p}$ .

### 4. APPLICATIONS.

Théorème 2. Soit  $(A, m)$  un anneau local avec  $R_A < 1$ .

- 1) Si  $m^3 = 0$ , alors  $R_A \leq \sqrt{2}/2$ .
- 2) Si  $m^4 = 0$  et si  $A$  est un anneau gradué, alors  $R_A \leq 2^{-1/3}$ .
- 3) Si  $m^5 = 0$  et si  $A$  est un anneau de Gorenstein gradué alors  $R_A \leq 2^{-1/4}$ .

Démonstration. 1). On peut supposer que  $A$  est gradué, car  $P_A = P_{gr(A)}$  ( $gr(A) = \bigoplus_{i \geq 0} m^i/m^{i+1}$ ) (ceci est un résultat de Levin, cf. [5]). Le théorème 1 montre qu'il suffit de considérer le cas où  $\text{edim}(A) \leq 2$ . Alors nous savons par Scheja [6] que soit  $A$  est d'intersection complète, soit  $A$  est de Golod, et dans ce cas  $P_A(t) \geq 1/(1-2t^2)$  ce qui conduit au résultat.  
2), 3). Ceci résulte du Théorème 1 et des résultats a) et b) d'Avramov.

Remarque. Si  $A$  est un anneau local gradué, l'algèbre  $\text{Ext}_A(k,k)$  est en plus bigraduée. La sous-algèbre d'éléments de degré total zéro est alors la sous-algèbre notée  $\text{Ext}_A^{(1)}(k,k)$  et étudiée dans [5]. Les espaces  $\text{Ext}_A^i(k,k)$  où  $i$  est le degré total sont alors des  $\text{Ext}_A^{(1)}(k,k)$  modules.

Bibliographie

- [1] L. Avramov. On the convergence radius of Poincaré series of local rings, Mat.Inst., Stockholm Univ., Preprint nr 4, 1979.
- [2] L. Avramov. Sur la croissance des nombres de Betti d'un anneau local, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 289, p. Série A - 369, 1979.
- [3] L. Avramov. Differential graded model for local rings. Proceeding of Tokyo - to appear.
- [4] Y. Felix et J.C.Thomas. The radius of convergence of Poincaré series of loop spaces, à paraître dans Inventiones Math.
- [5] C. Löfwall. On the subalgebra generated by the one-dimensional elements in the Yoneda Ext-algebra, Mat. Inst., Stockholm Univ, Preprint nr 5, 1976.
- [6] G. Scheja. Über die Bettizahlen lokaler Ringe, Math. Ann., 155, 1964, p. 155 - 172.