

# *Astérisque*

Y. FÉLIX

**Catégorie L.S. et invariant e**

*Astérisque*, tome 113-114 (1984), p. 179-182

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1984\\_\\_113-114\\_\\_179\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__113-114__179_0)

© Société mathématique de France, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Catégorie L.S. et invariant e.

par Y. Félix<sup>(\*)</sup>

La catégorie L.S. (Lusternik - Schnirelmann) d'un espace S,  $\text{cat}(S)$ , est le plus petit entier n tel que S puisse être recouvert par (n+1) ouverts contractibles dans S. Si S est un espace nilpotent rationnel, alors  $\text{cat}(S)$  se calcule à partir du modèle minimal de Sullivan  $(\wedge Z, d)$  de S comme suit :  $\text{cat}(S)$  est le plus petit entier p tel que le morphisme canonique d'écrasement  $(\wedge Z, d) \rightarrow (\wedge Z / \wedge^{>p} Z, \bar{d})$  admette une rétraction du niveau modèles minimaux [2].

Toomer [6] a montré que  $\text{cat}(S)$  peut être approximé par un invariant  $e(S)$  lié à la suite spectrale de Milnor - Moore  $E_{p,q}^r$ .

$$E_{p,q}^2 = \text{Tor}_{p,q}^{H_*(\Omega S; Q)}(Q, Q) \Rightarrow H_*(S; Q)$$

$$e(S) = \inf\{p \mid E_{s,q}^\infty = 0 \text{ pour } s > p\}.$$

Théorème [6]  $e(S) \leq \text{cat}(S)$ .

L'inégalité précédente peut être stricte. Considérons en effet l'espace  $W = (\mathbb{C}P^2 \vee S^2) \cup_{[\alpha, S^2]} e^7$  où  $\alpha \in \pi_5(\mathbb{C}P^2)$ .

J.M. Lemaire et F. Sigrist [5] ont en effet montré que  $\text{cat}(W) = 3$  et que  $e(W) = 2$ . Par après, Y. Félix et S. Halperin [2] ont montré que  $\text{cat}(W^n) = 3n$  et que  $e(W^n) = 2n$ , prouvant ainsi que la différence  $\text{cat} - e$  peut être arbitrairement grande.

Une question subsistait néanmoins :  $\text{cat}/e$  est-il borné ? La réponse est négative : une démonstration se trouve dans [3]. Le but de ce texte est de fournir un exemple explicite de c.w. complexe S infini, de type fini et vérifiant la propriété suivante : il existe une suite de squelettes  $S_k$  de S avec  $\text{cat}(S_k) > k$  et  $e(S_k) = 2$ .

L'espace S se construit par récurrence comme suit : notons  $S^{(n)}$  son n-squelette

---

\* chercheur qualifié FNRS.

$$S^{(2)} = S^2 \vee S^2 \vee S^2$$

$$S^{(4)} = S^{(2)} \cup_C \bigcup_{i=1}^6 C(S_i^3) \text{ où les 6 4-cellules de } S^{(4)} \text{ sont}$$

introduites pour tuer l'espace vectoriel  $[\pi(S^{(2)}) \otimes \mathbb{Q}, \pi(S^{(2)}) \otimes \mathbb{Q}]$ .  
 $S^{(4)}$  est le 4-squelette de  $P^2(\mathbb{F}) \times P^2(\mathbb{F}) \times P^2(\mathbb{F})$ .  $\pi_5(S^{(4)}) \otimes \mathbb{Q}$  est de dimension 10 et est engendré par des crochets de Whitehead d'ordre 3.

De façon générale,  $S^{(n+1)} = S^{(n)} \cup_C (VS^n)$  où les cellules de dimension  $n+1$  sont introduites pour tuer une base de l'espace vectoriel

$$[\pi(S^{(n)}) \otimes \mathbb{Q}, \pi(S^{(n)}) \otimes \mathbb{Q}] \wedge \pi_n(S^{(n)}) \otimes \mathbb{Q}.$$

L'espace  $S$  est donc construit par récurrence de telle sorte que son algèbre de Lie d'homotopie rationnelle  $\pi_*(S) \otimes \mathbb{Q}$  soit abélienne.

Théorème : Soit  $\ell \geq 11$ ,  $i = 1 +$  la partie entière de  $\log_2 \left(\frac{\ell}{11}\right)$  et  $n = (2 \cdot (11 \cdot 3^{i+1}) + 1)\ell + 1$ , alors

$$\text{cat}(S^{(n)}) \geq \ell - 1$$

$$e(S^{(n)}) = 2.$$

Démonstration : Comme toutes les applications d'attachements sont de simples crochets de Whitehead, il résulte de [1] que  $e=2$ . Comme d'autre part, l'algèbre de Lie d'homotopie rationnelle de  $S$  est abélienne, il résulte de [3] que  $S$  admet un modèle minimal  $(\wedge X, d)$  vérifiant  $dX \subset \wedge^3 X$  [ $\wedge^p X =$  mots de longueur  $p$  en  $X$ ] et  $X \wedge \ker d = X^2$ .

La wedge graduation munit alors la cohomologie d'une seconde graduation  $H^p(\wedge X, d) = \bigoplus_q H^{p,q}(\wedge X, d)$  vérifiant  $H^{p,q} \stackrel{p \geq 3}{=} 0$  [3, prop. 1].

Toutes ces équations fournissent les deux formules suivantes valables pour  $p \geq 3$ .

$$(1) \quad \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim (\wedge^{1+2i} X)^{p+i} = 0$$

$$(2) \quad \dim H^p(\wedge X, d) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim (\wedge^{2+2i} X)^{p+i}.$$

Notons  $P(S, t)$  la série de Poincaré de la cohomologie non sphérique de  $S$  :  $P(S; t) = \sum_{p \geq 4} \dim H^p(S; \mathbb{Q}) t^p$ . Les formules (1) et (2) peuvent alors

se résumer sous la forme d'une égalité entre séries formelles à coefficients complexes

$$\frac{\prod_{n \geq 1} (1+it)^{2n+\frac{1}{2}} \alpha_{2n+1}}{\prod_{n \geq 1} (1-it)^{2n-\frac{1}{2}} \alpha_{2n}} = 1+3it^{3/2} - P(S;t)$$

où  $\alpha_i = \dim \pi_i(S) \otimes \mathbb{Q}$ .

En développant formellement cette égalité, on obtient  $\alpha_2 = 3$ ,  $\alpha_5 = 10$ ,  $\alpha_8 = 39$ ,  $\alpha_{11} = 255$ , ...

Désignons par  $(\wedge X_{\geq n}, d)$  l'algèbre différentielle quotient de  $(\wedge X, d)$  par l'idéal différentiel engendré par  $X_{< n}$ . Il résulte alors de [3, prop. 1, cond  $C_n^*$ ] que

$$H^p(\wedge X_{\geq n}, d) = 0 \quad \forall n \geq 2, \quad p \geq 3$$

Dans  $(\wedge X_{\geq n}, d)$ ,  $X_n$  est entièrement formé de cocycles et  $d y$  est cubique, il faut donc que

$$\alpha_{3n-1} = \dim X_{3n-1} \geq C_{\alpha_n}^3 \quad (\text{si } n \text{ est impair}) \text{ ou } \geq C_{\alpha_n+2}^3$$

(si  $n$  est pair), mais de toutes façons il faut que

$$\alpha_{3n-1} \geq C_{\alpha_n}^3.$$

On en déduit que si  $n \geq 11$  et  $\alpha_n \geq n$ , alors  $\alpha_{3n-1} \geq 3n$ . Il en résulte l'existence d'une suite  $\alpha_{n_i}$  avec

$$\begin{aligned} n_0 &= 11 \\ 11.2^i &\leq n_i = 3n_{i-1} - 1 \leq 11.3^i \\ \alpha_{n_i} &\geq n_i. \end{aligned}$$

La suite des  $n_i$  étant formée alternativement d'éléments pairs et impairs, soit  $i$  le plus petit entier tel que  $\ell \leq 11.2^i$ . Il existe alors un entier impair de la forme  $n$ , situé entre  $11.2^i$  et  $11.3^{i+1}$  avec  $\alpha_n \geq \ell$ . Il résulte alors de [4, Th. 2.5] que

$$\ell-1 \leq \text{cat } X^{(2n+1)\ell+1} \leq \text{cat } X^{(2s+1)\ell+1}$$

avec  $s = 11 \cdot 3^{i+1}$  et  $i = 1 +$  la partie entière de  $\log_2 \frac{\ell}{11}$ .

Remarques et question.

1. L'équation  $dX \subset \wedge^3 X$  montre que l'espace vectoriel d'homotopie rationnelle  $\pi_*(S) \otimes \mathbb{Q}$  est concentré en degrés égaux à 2 modulo 3.

$$\pi_{3n}(S) \otimes \mathbb{Q} = \pi_{3n+1}(S) \otimes \mathbb{Q} = 0.$$

2. La même formule montre que l'homologie rationnelle en dimension plus grande que 3 est concentrée en degrés égaux à 1 modulo 3

$$H_{3n}(S; \mathbb{Q}) = H_{3n+2}(S; \mathbb{Q}) = 0 \quad n > 1.$$

3. La catégorie semble monter beaucoup plus vite que ne le donne le théorème précédent, à savoir :

$$\text{Espoir : } \text{cat } X^{(3n+1)} \geq n+1 \text{ pour } n > 1.$$

Bibliographie.

- [1] P. Andrews, M. Arkowitz. Sullivan's minimal models and higher order Whitehead products. Can. J. Math. 30, n° 5 (1978), 961-982.
- [2] Y. Félix, S. Halperin. Rational L.S. category and its applications. Trans. Am. Math. Soc. 273 (1982), 1-38.
- [3] Y. Félix, S. Halperin, J.C. Thomas. L.S. catégorie et suite spectrale de Milnor - Moore. Bull. Soc. Math. France 111 (1983).
- [4] Y. Félix, S. Halperin, J.C. Thomas. The homotopy Lie algebra for finite complexes. Publ. math. I.H.E.S. n° 56 (1983), 179-202.
- [5] J.M. Lemaire, F. Sigrist. Sur les invariants d'homotopie rationnelle liées à la L.S. catégorie. Comment. Math. Helv. 56 (1981), 103-122.
- [6] G.H. Toomer. Lusternik - Schnirelmann category and the Moore spectral sequence. Math. Z. 138 (1974) 123-143.