JEAN-LOUIS CALLOT

Groupes vus au macroscope

Astérisque, tome 109-110 (1983), p. 225-234
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__109-110__225_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 109-110 (1983) p.225-234

GROUPES VUS AU MACROSCOPE

par

Jean-Louis CALLOT (Université d'Oran, Algérie)

Grâce à l'analyse non standard, il est possible d'introduire dans les problèmes d'approximation des objets infiniment voisins des objets limite. Ces nouveaux êtres ont un statut ambigu mais riche puisqu'ils sont de même nature que les approximants tout en contenant la totalité de l'information sur la limite.

Je voudrais illustrer ceci en donnant une présentation non standard de la démonstration, due à Gromov, du résultat suivant :

THEOREME. (Gromov 1980). Tout groupe de type fini à croissance polynômiale est presque nilpotent, (c'est à dire contient un sous groupe nilpotent d'indice fini).

Je ne donne pas une nouvelle démonstration de ce résultat mais une traduction non standard de la partie de la démonstration de Gromov qui fait appel à des limites d'espaces métriques.

Soit Γ un groupe de type fini et E un système générateur fini de Γ. Pour $\gamma \in \Gamma$ on appelle longueur de γ notée $\ell(\gamma)$ le plus petit entier n tel que γ soit égal à un produit de n éléments de $E \cup E^{-1}$. La croissance de Γ est définie au moyen de la fonction $c(r)$ qui à un nombre positif r associe le nombre d'éléments de Γ de longueur inférieure ou égale à r.

Le groupe Γ est à croissance polynômiale s'il existe d tel que

$$c(r) \leq r^d \quad \text{pour } r \text{ assez grand .}$$

Le degré de croissance est la borne inférieure des d satisfaisant cette inégalité. Le groupe Γ est à croissance exponentielle s'il existe $b > 1$ tel que

$$c(r) \geq b^r \quad \text{pour } r \text{ assez grand .}$$

On vérifie facilement que ces définitions ne dépendent pas du système générateur choisi.

Au moyen de la longueur on peut définir une métrique invariante à gauche sur Γ en posant :

$$d(x,y) = \ell(x^{-1}y) \quad .$$

Pour sa démonstration, Gromov introduit la famille d'espaces $\varepsilon\Gamma$, $\varepsilon > 0$ obtenus en munissant Γ de la métrique εd . Ceci revient, pour ε petit, à considérer Γ "vu de loin". Il montre que si Γ est à croissance polynômiale, on peut trouver une suite (ε_i) tendant vers zéro, telle que la suite d'espaces métriques $(\varepsilon_i\Gamma)$ converge vers une limite Y . L'espace ainsi obtenu est localement compact, connexe, localement connexe et de dimension finie. De plus le groupe de ses isométries est transitif. D'après un résultat de Montgomery et Zippin, on en déduit que ce groupe d'isométries est un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes. En utilisant le fait que tout sous-groupe d'un groupe de Lie connexe possède un sous groupe résoluble d'indice fini ou contient un groupe libre non abélien, et avec le résultat de Milnor et Wolf, qui ont montré qu'un groupe résoluble à croissance polynômiale est presque nilpotent, on aboutit au théorème de Gromov si on peut représenter assez bien le groupe Γ dans $\mathrm{Isom}\,(Y)$. Ceci se traduit par le lemme suivant :

LEMME ALGÉBRIQUE. Soit Γ un groupe de type fini à croissance polynômiale, et soit L un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes. Si pour tout sous-groupe de type fini $\Gamma' \subset \Gamma$ il existe un sous groupe $\Delta \subset \Gamma'$ d'indice fini dans Γ' tel que :

- soit Δ est abélien,
- soit pour tout entier p, il existe un homomorphisme de Δ dans L dont l'image contient au moins p éléments,

alors Γ est presque nilpotent.

A. Ombre dans un espace métrique.

Je rappelle quelques définitions ayant trait à l'ombre, notion qui remplace le passage à la limite en analyse non standard.

Soit (X,d) un espace métrique standard.

Un point de X est dit limité s'il est à distance non infiniment grande d'un point standard.

Deux points x et y de X sont dits infiniment voisins si leur distance est infiniment petite. On note $x \simeq y$ et $d(x,y) \simeq 0$.

Le halo d'une partie A de X est l'ensemble de tous les points de X qui sont infiniment voisins d'un point de A . On le note $h(A)$.

L'ombre d'une partie A de X est le standardisé du halo de A , c'est à dire l'unique ensemble standard qui a les mêmes points standard que le halo de A .

L'ombre de A est notée ${}^{o}A$.

L'ombre ainsi définie existe toujours mais, de même qu'une limite, elle peut différer notablement de la partie initiale. Si A est un ensemble fini, son ombre est exactement l'ensemble des ombres de ses points, mais dès que l'ensemble des ombres des points de A est infini, il s'ajoute des points non standard parce qu'un ensemble standard infini contient des points non standard. En particulier on peut vérifier que l'ombre est toujours fermée. Le passage à l'ombre effectue donc un "lissage" qui permet par exemple d'obtenir un arc continu à partir d'une suite de points (on en verra un exemple dans la suite). De plus les propriétés à l'infini de l'ombre de A ne traduisent pas nécessairement les propriétés à l'infini de A, puisque seuls interviennent dans la construction de ${}^{\circ}A$ les points presque standard de A.

Un espace métrique standard dans lequel toute partie limitée (c'est à dire incluse dans une boule standard) est infiniment voisine de son ombre est un espace propre (pour lequel les boules fermées sont compactes). Ceci découle de la caractérisation non standard des espaces compacts :

Un espace standard est compact si et seulement si chacun de ses points a une ombre.

Pour définir l'ombre d'un espace métrique quelconque, il faut le plonger isométriquement dans un espace standard, mais en prenant quelques précautions :

- l'ombre ne peut décrire que la partie limitée de l'image, donc s'il y a un point distingué dans l'espace qu'on étudie (par exemple l'élément neutre dans un groupe) il faut que ce point ait pour image un point limité.
- Il faut que l'ombre obtenue ne dépende pas du plongement choisi, pour cela il convient de réaliser ce plongement dans un espace propre.

PROPOSITION : Si (A,x_0) est un espace métrique pointé, X et X' deux espaces métriques standard propres et φ et φ' deux isométries de A dans X et X' respectivement telles que $\varphi(x_0)$ et $\varphi'(x_0)$ soient des points limités, alors les espaces $Y = {}^{\circ}\varphi(A)$ et $Y' = {}^{\circ}\varphi'(A)$ sont isométriques.

Démonstration : Pour définir une application standard de Y dans Y', il suffit de la définir pour les points standard de Y.

Soit y un point standard de Y. Par définition de l'ombre, il existe $a \in A$ tel que $y \simeq \varphi(a)$. La distance de a à x_0 est limitée. En effet :

$$d_A(a,x_0) = d_X(\varphi(a),\varphi(x_0)) \simeq d_X(y,\varphi(x_0))$$

qui est limitée puisque y est standard et $\varphi(x_0)$ est par hypothèse limitée. Donc $d_{X'}(\varphi'(a),\varphi'(x_0))$ est limitée ce qui entraine que $\varphi'(a)$ est un point limité et possède une ombre puisque X' est un espace propre.

Je pose $\Phi(y) = {}^{\circ}\varphi'(a)$.

Cette définition ne dépend pas du choix de a : si $\varphi(a') \simeq y$ alors $a' \simeq a$ et ${}^{\circ}\varphi'(a') \simeq \varphi'(a') \simeq \varphi'(a) \simeq {}^{\circ}\varphi'(a)$. Donc ${}^{\circ}\varphi'(a') = {}^{\circ}\varphi'(a)$ puisque ce sont des points standard.

En échangeant les rôles de Y et Y' et en utilisant le fait que X est propre, on voit que Φ est inversible donc bijective.

Finalement Φ est une isométrie : il suffit de le vérifier pour des points standard,
$d_X(y_1,y_2) \simeq d_X(\varphi(a_1),\varphi(a_2)) = d_A(a_1,a_2) = d_{X'}(\varphi'(a_1),(a_2)) \simeq d_{X'}(\Phi(y_1),\Phi(y_2))$.
Les termes extrèmes sont standard et équivalent, il sont donc égaux.

Certaines isométries de l'espace (A,x_o) induisent une isométrie de l'ombre de A .

LEMME d'isométrie. Soit (A,x_o) un espace métrique pointé plongeable dans un espace standard propre et θ une isométrie de A telle que $d_A(x_o,\theta(x_o))$ est limitée. L'ombre de θ est une isométrie de l'ombre de A .

Démonstration : D'après la proposition on peut considérer A comme une partie d'un espace standard propre avec x_o un point limité. L'ombre $\bar{\theta}$ de θ est définie en un point standard y de ${}^{\circ}A$ par

$$\bar{\theta}(y) = {}^{\circ}\theta(a) \quad \text{pour} \quad a \in A \quad \text{et} \quad a \simeq y \ .$$

L'application $\bar{\theta}$ est bien définie car :

- le point a étant équivalent à y est limité donc son image $\theta(a)$ est également limitée puisque $d(\theta(a),\theta(x_o)) = d(a,x_o)$ et que par hypothèse x_o et $\theta(x_o)$ sont limités, donc $\theta(a)$ possède une ombre (on est dans un espace propre).

- La valeur de $\bar{\theta}(y)$ ne dépend pas du point a choisi puisque si $a' \simeq a$ alors $\theta(a') \simeq \theta(a)$.

On vérifie facilement comme plus haut que $\bar{\theta}$ est une isométrie.

B. Ombre de l'image macroscopique d'un groupe.

Supposons maintenant que pour $\varepsilon > 0$ infiniment petit l'espace $\varepsilon\Gamma$, c'est à dire le groupe Γ muni de la distance $\varepsilon d(x,y) = \varepsilon \ell(x^{-1}y)$, soit plongeable dans un espace standard propre. Dans ce cas $\varepsilon\Gamma$ possède une ombre que je note Y.

. On peut immédiatement donner certaines propriétés de Y :

Y est localement compact : c'est un fermé d'un espace propre.

Y est connexe et localement connexe par arcs : si γ et γ' sont deux points de Γ il existe une suite $(\gamma_n)_{0 \leq n \leq N}$ vérifiant :

. $N = d(\gamma,\gamma') = \ell(\gamma^{-1}\gamma')$

.. $\gamma_o = \gamma$ et $\gamma_N = \gamma'$

... pour $0 \leq n \leq N$, $d(\gamma_n, \gamma_{n+1}) = 1$.

Si γ et γ' sont limités dans $\epsilon\Gamma$, tous les γ_n sont limités et cette suite a pour ombre un arc joignant ${}^o\gamma$ à ${}^o\gamma'$ dans Y .
Tout point standard de Y étant l'ombre d'un point limité de $\epsilon\Gamma$, chaque couple (y,y') de points standard de y peut être joint par un arc qui de plus est inclus dans la boucle de centre y et de rayon $2d_Y(y,y')$.

Le groupe des isométries de Y est transitif. Soient y et y' deux points standard de Y . On a $y = {}^o\gamma$ et $y' = {}^o\gamma'$ où γ et γ' sont des points limités de $\epsilon\Gamma$. Donc $\gamma'\gamma^{-1}$ est également limité dans $\epsilon\Gamma$ et la translation de $\epsilon\Gamma$ par $\gamma'\gamma^{-1}$ est une isométrie limitée de $\epsilon\Gamma$ qui transforme γ en γ' .
Son ombre est une isométrie de Y qui transforme y en y' .

C. Plongement.

Pour que $\epsilon\Gamma$ puisse être plongé dans un espace standard propre, il doit avoir certaines caractéristiques d'un espace propre.
Un espace métrique pointé (A,x_o) est S-propre si pour tout $R > 0$ standard et tout $\alpha > 0$ standard, il existe N standard tel que la boule de centre x_o et de rayon R puisse être recouverte par N boules de rayon α .

Une partie d'un espace standard propre satisfait clairement cette propriété mais on a la réciproque.

PROPOSITION. Si (A,x_o) est un espace métrique pointé S-propre, il peut être plongé isométriquement dans un espace standard propre de manière que x_o ait pour image un point limité.

Démonstration : La propriété d'être S-propre ne se vérifiant que sur des boules de rayon standard (donc limité) centrées en x_o , il suffit de montrer que chaque boule de rayon limité centrée en x_o peut être plongée dans un espace standard compact.
Soit $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite standard de réels > 0 telle que la somme des α_i soit finie et $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite standard d'entiers telle que pour chaque i la boule de centre x_o et de rayon R (standard) soit recouverte par N_i boules de rayon α_i .
Au moyen de ces deux suites, on construit un espace standard compact X et un plongement isométrique de la boule de rayon R dans cet espace.
Soient :

$$\Sigma = \{\underline{n} = (n_o,\dots,n_s),\ s \in \mathbb{N},\ n_i \in \mathbb{N},\ 1 \leq n_i \leq N_i\}$$

$$Z = \{f : \Sigma \to \mathbb{R}^+ \ \text{tq}\ f(n_o) \leq R \ \text{et}\ |f(n_o,\dots,n_{s+1}) - f(n_o,\dots,n_s)| \leq 2\alpha_s\} .$$

On munit Z de la distance du sup .

1) Z <u>est compact</u>. Il suffit de montrer que tout point de Z est infiniment voisin d'un point standard. Soit $f \in Z$ et $\bar{f}$ la fonction standard définie pour $\underline{n}$ standard par $\bar{f}(\underline{n}) = {}^\circ(f(\underline{n})$.

Les suites α_i et N_i étant standard, $\bar{f}$ appartient à Z .

Si $\underline{n}$ est de longueur limitée, donc standard on a $\bar{f}(\underline{n}) \simeq f(\underline{n})$ par définition de $\bar{f}$.

Si $\underline{n} = (n_o,\dots,n_\sigma)$ avec σ infiniment grand, alors pour tout s limité,

$$\bar{f}(n_o,\dots,n_s) \simeq (f(n_o,\dots,n_s)$$

donc d'après le lemme de Robinson, il existe ω infiniment grand tel que

$$\bar{f}(n_o,\dots,n_\omega) \simeq f(n_o,\dots,n_\omega)$$

et par définition de Z : $|\bar{f}(\underline{n}) - f(\underline{n})| \leq \sum_{s=\omega}^{\sigma} 2\alpha_s$.

Cette somme est infiniment petite puisque la série de terme général α_i converge. Donc f est infiniment voisine de la fonction standard $\bar{f}$ dans Z .

2) <u>La boule</u> B <u>de centre</u> x_o <u>et de rayon</u> R <u>se plonge isométriquement dans</u> Z . D'après le choix des N_i il existe une application φ de Σ dans B telle que les N_o points $\varphi(n_o)$, $1 \leq n_o \leq N_o$ forment un $2\alpha_o$-réseau dans B les N_s points $\varphi(n_o,\dots,n_s)$, $1 \leq n_s \leq N_s$ forment un $2\alpha_s$-réseau dans la boule de centre $\varphi(n_o,\dots,n_{s-1})$ et de rayon $2\alpha_{s-1}$.

Soit Φ l'application de B dans Z définie par :

$$\Phi(x)(\underline{n}) = d(x,\varphi(\underline{n})) .$$

Pour vérifier que Φ est une isométrie, notons Δ la distance dans Z de $\Phi(x)$ à $\Phi(y)$ pour deux points x et y de B . On a :

$$\Delta = \sup_{\underline{n}\in\Sigma} |d(x,\varphi(\underline{n})) - d(y,\varphi(\underline{n}))| .$$

Par l'inégalité triangulaire : $\Delta \leq d(x,y)$ et la construction de φ nous assure qu'on peut trouver un $\underline{n}$ tel que $\varphi(\underline{n})$ est aussi voisin qu'on veut de x . On aura donc pour tout $\epsilon > 0$

$$\Delta \geq d(x,y) - \epsilon .$$

Donc $\Delta = d(x,y)$

Les deux lemmes suivant montrent que l'hypothèse de croissance polynômiale de Γ permet de trouver un $\epsilon > 0$ infiniment petit pour lequel $\epsilon\Gamma$ est S-propre. On obtient même plus : la fonction $N(\alpha)$, nombre de boules de rayon α permettant de recouvrir la boule de rayon R admet une majoration polynômiale en $1/\alpha$, ce qui assure que l'ombre de $\epsilon\Gamma$ est de dimension finie au sens de Hausdorff.

Je désigne par $c(R)$ le cardinal de la boule de rayon R dans Γ, c'est à dire le nombre d'éléments de Γ qui peuvent s'écrire comme un mot de longueur inférieure à R.

LEMME. Toute boule de rayon R de Γ peut être recouverte par $c(R)/c(R/2n)$ boules de rayon $2R/n$.

Démonstration : Soient $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$ des points de la boule $B(1,R-R/2n) \subset \Gamma$ tels que : que : $d(\gamma_i,\gamma_j) > R/n$ si $i \neq j$ et k est maximal pour cette propriété.
Les boules $B(\gamma_i,R/2n)$ sont disjointes et incluses dans $B(1,R)$. Donc $k \leq c(R)/c(R/2n)$.
Comme k est maximal, les boules $B(\gamma_i,R/n)$ recouvrent $B(1,R-R/2n)$ et les boules $B(\gamma_i,2R/n)$ recouvrent $B(1,R)$.

LEMME. Si Γ a une croissance polynômiale de degré au plus d, il existe ω infiniment grand tel que pour tout entier $n \geq 2$ standard

$$\frac{c(\omega)}{c(\omega/n)} \leq n^{d+1}$$

et $$\frac{c(2^n\omega)}{c(\omega)} \leq f(n)$$ avec f une fonction standard.

En posant $\epsilon = \frac{1}{\omega}$, $\epsilon\Gamma$ est S-propre et Y de dimension inférieure à $d+1$.

Démonstration : Je montre la première famille d'inégalités par l'absurde, c'est à dire que je suppose que pour tout ω infiniment grand, il existe $n \geq 2$ standard tel que $c(\omega)/c(\omega/n) > n^{d+1}$.
Soit ω infiniment grand et $n_1 \geq 2$ standard tel que

$$\operatorname{Log} c(\omega/n_1) < \operatorname{Log} c(\omega) - (d+1)\operatorname{Log} n_1 .$$

Mais ω/n_1 est infiniment grand donc il existe $n_2 \geq 2$ standard tel que

$$\operatorname{Log} c(\omega/n_1.n_2) < \operatorname{Log} c(\omega) - (d+1)\operatorname{Log}(n_1.n_2) .$$

On peut continuer tant que $\omega/n_1.n_2,\ldots,n_i$ est infiniment grand.
Mais comme le degré de croissance de Γ est au plus d on a la majoration :

$$c(\omega) < \omega^{d+1/2} .$$

Donc si le produit N des n_i vérifie $\operatorname{Log} N > \frac{d+1/2}{d+1}\operatorname{Log}\omega$, on obtient $c(\omega/N) < 0$ ce qui est absurde.

Donc il existe un ω infiniment grand pour lequel la première famille d'inégalités est vraie. Il satisfait également la deuxième famille. En effet du premier lemme on déduit que $c(4\omega)/c(\omega)$ boules de rayon 4ω suffisent pour recouvrir

la boule de rayon 5ω .
Donc $c(5\omega) \leq c(4\omega)^2/c(\omega)$. On peut en déduire l'inégalité :

$$\mathrm{Log}\ c(2^n\omega) \leq 16^n(\mathrm{Log}\ c(\omega) - \mathrm{Log}\ c(\omega/4)) + \mathrm{Log}\ c(\omega/4)$$

d'où en utilisant la première famille d'inégalités :

$$\mathrm{Log}\ c(2^n\omega) \leq 16^{n+1}(d+1) + \mathrm{Log}\ c(\omega)$$

et $$\frac{c(2^n\omega)}{c(\omega)} \leq \exp\ (16^{n+1}(d+1))$$ qui est une fonction standard de n .

D. Fin de la démonstration.

Il reste à montrer, pour pouvoir appliquer le lemme algébrique et terminer ainsi la démonstration, que tout sous-groupe de type fini de Γ possède un sous groupe abélien d'indice fini ou une image homomorphe d'ordre arbitrairement grand dans le groupe des isométries de Y .

Le groupe Γ opère de façon naturelle sur l'espace métrique $\epsilon\Gamma$ par translation et à certaines de ces translations correspondent des isométries de Y en passant à l'ombre. Ce processus induit un homomorphisme standard λ de Γ dans Isom (Y) défini de la manière suivante :

si γ est un élément standard de Γ , $\lambda(\gamma)$ est l'ombre de la translation de $\epsilon\Gamma$ par γ .

Malheureusement l'image de λ est en général réduite à l'identité.
L'idée de la méthode permettant d'appliquer le lemme algébrique est d'introduire les homomorphismes λ_α définis par $\lambda_\alpha(\gamma)$ est l'ombre de la translation de $\epsilon\Gamma$ par $\alpha\gamma\alpha^{-1}$ et de montrer le lemme suivant :

LEMME. Si Γ' est un sous groupe standard de type fini qui ne contient pas de sous groupe abélien d'indice fini alors pour tout $\eta > 0$ standard il existe $\alpha \in \Gamma$ tel que :

- λ_α est un homomorphisme standard de Γ' dans Isom (Y)
- l'image de λ_α contient une isométrie non triviale qui ne déplace aucun point de la boule unité de plus que η .

Le groupe de Lie Isom (Y) n'ayant pas de sous groupe arbitrairement petit ceci entraîne que l'image de Γ' par λ_α peut être d'ordre arbitrairement grand par un choix convenable de α .

Démonstration : Il faut fixer d'abord quelques notations : j'appelle y_o l'ombre de l'élément neutre.

Soit $$\Delta(\gamma) = \sup_{y \in B(y_o,1)} d_y(y,\varphi_\gamma(y))$$

où φ_γ est l'ombre de la translation de $\epsilon\Gamma$ par γ . $\Delta(\gamma)$ est bien définie

pour tous les γ limités de $\epsilon\Gamma$ et mesure l'amplitude du déplacement de la boule $B(y_o,1)$ par φ_γ.
Si Γ' est un sous groupe de type fini de Γ engendré par les éléments limités dans $\epsilon\Gamma$:

$$\gamma_1,\ldots,\gamma_k \quad \text{je pose} \quad \Delta(\Gamma') = \max_{1\le i\le k} \Delta(\gamma_i) \; .$$

Je pose encore :

$$D(\gamma,R) = \sup_{\ell(\beta)\le R} \ell(\beta\gamma\beta^{-1}) = \sup_{\ell(\beta)\le R} d(\beta,\gamma\beta)$$

$$D(\gamma) = D(\gamma,\tfrac{1}{\epsilon})$$

et $$D(\Gamma') = \max_{1\le i\le k} D(\gamma_i) \; .$$

La boule $B(y_o,1)$ étant compacte on a $\Delta(\Gamma') \simeq \epsilon\, D(\Gamma')$.

Soit Γ' un sous groupe standard de type fini de Γ, engendrée par $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$.
Si $\lambda(\Gamma')$ est infini, on a le résultat du lemme pour $\alpha = 1$.
Si $\lambda(\Gamma')$ est fini, quitte à remplacer Γ' par le noyau de λ qui est d'indice fini on peut supposer que $\lambda(\Gamma') = \{id\}$.
Si l'une des fonctions $g_i(\mu) = D(\mu\,\gamma_i\,\mu^{-1}, R_o)$ avec R_o fixé est bornée, le centralisateur de γ_i est d'indice fini et Γ' contient un sous groupe abélien d'indice fini. Je suppose donc les g_i non bornées.
Comme $\lambda(\Gamma') = \{id\}$ on a $\Delta(\Gamma') = 0$ donc $\epsilon\, D(\Gamma') \simeq 0$.
Soit $\eta > 0$ standard, comme les fonctions g_i sont non bornées, il existe $\mu\in\Gamma$ tel que $\epsilon\, D(\mu\,\Gamma'\,\mu^{-1}) > \eta$ et on a $\epsilon\, D(\Gamma') < \eta$.
Il existe une suite $(\mu_n)_{0\le n\le N}$ telle que :

$$\mu_o = 1 \;,\; \mu_N = \mu \quad \text{et} \quad d(\mu_n,\mu_{n+1}) = 1 \; .$$

Et comme pour tout $\delta \in E \cup E^{-1}$ (E est le système de générateur de Γ) on a $D(\delta\gamma\delta^{-1}) \le D(\gamma) + 2$ on en déduit que :

$$\epsilon D(\mu_{n+1}\,\Gamma'\,\mu_{n+1}^{-1}) \simeq \epsilon D(\mu_n\,\Gamma'\,\mu_n) \; .$$

Donc il existe n_o tel que

$$\epsilon D(\mu_{n_o}\,\Gamma'\,\mu_{n_o}^{-1}) \simeq \eta$$

c'est à dire $$\Delta(\mu_{n_o}\,\Gamma'\,\mu_{n_o}^{-1}) = \eta$$

et pour $i = 1,\ldots,k$ $$\Delta(\mu_{n_o}\,\gamma_i\,\mu_{n_o}^{-1}) \le \eta \; .$$

Donc l'homomorphisme $\lambda_{\mu_{n_o}}$ a les propriétés demandées par le lemme.

RÉFÉRENCES

VAN DEN DRIES L., WILKIE A.J. : On Gromov's theorem concerning groups of polynomial growth. Preprint.

GROMOV M. : Groups of polynômial growth and expanding maps. Publ. Math. I.H.E.S. 53 (1981) .

LUTZ R., GOZE M. : Non standard Analysis. A practical guide with applications. Springer. L.N. in Math n° 881, Berlin (1981) .

NELSON F. : Internal Set Theory. Bull. Amer. Math. Soc. 83, novembre 1977.

TITS J. : Groupes à croissance polynômiale. Séminaire Bourbaki, exposé n° 572 1980/81 .

Jean-Louis CALLOT
Département de Mathématiques
B.P. 1524 ES-SENIA
ORAN (Algérie)