

Astérisque

IMME VAN DEN BERG

**Un point de vue nonstandard sur les développements
en série de Taylor**

Astérisque, tome 109-110 (1983), p. 209-223

http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__109-110__209_0

© Société mathématique de France, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UN POINT DE VUE NONSTANDARD SUR LES

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE DE TAYLOR

par Imme VAN DEN BERG .

1. Introduction .

La présente étude a été inspirée par un dessin de Poston et Stewart [5] . Ce dessin, reproduit ci-dessous (fig. 1), représente les graphes de la fonction sinus et des polynômes de son développement en série de Taylor à l'origine.

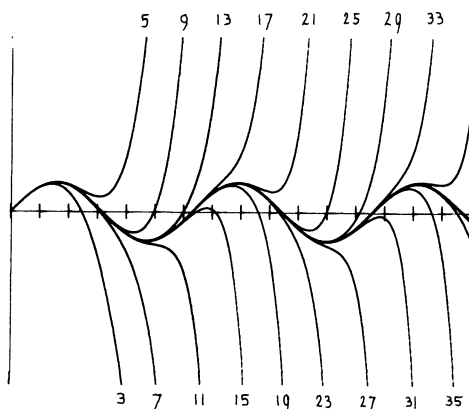


figure 1 : La fonction sinus approchée par les polynômes de son développement en

série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; les nombres indiquent leurs degrés.

Sur le dessin ci-dessus on observera que :

1) le graphe de la fonction sinus et celui de l'un de ses polynômes de Taylor ne peuvent pas être distingués sur une certaine distance, puis ils se séparent nettement.

2) Il existe une certaine régularité dans la façon dont les graphes des polynômes se séparent de la sinusoïde.

La régularité qui est manifestée par la figure 1 est encore plus prononcée dans la figure 2 :

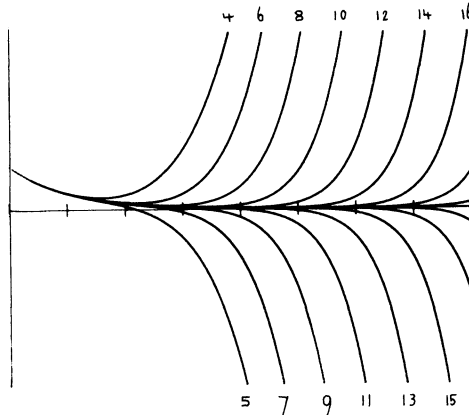


figure 2 : La fonction $x \rightarrow e^{-x}$ approchée par les polynômes de son développement en série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$; les nombres indiquent leurs degrés.

Apparemment les graphes des polynômes se séparent du graphe de l'exponentielle toujours de la même façon et à distance égale l'un de l'autre.

Le but de cette étude est de présenter une description mathématique de ces constatations visuelles. Nous proposons l'approche suivante dans des situations comme ci-dessus. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, soit P une approximation de f et soit $R = f - P$ la fonction erreur. Nous supposons que $f(0) = P(0)$.

1) Nous essayons de déterminer l'ensemble de tous les $x \in \mathbb{R}^+$ tels que $f(x) \approx P(x)$ et plus précisément sa composante convexe contenant 0. Notons cette composante convexe par H .

2) Nous essayons de décrire le comportement de R au delà de H .

Le présent travail, qui se bornera à présenter le problème et sa solution dans quelques cas simples, possède la structure suivante. Nous donnons dans la section 2 quelques préliminaires. Dans la section 3 nous exécutons le programme mentionné ci-dessus pour une classe de fonctions dont le développement de Taylor ressemble à celui de la fonction exponentielle. Dans la section 4 nous traitons un autre type de développements de Taylor. Enfin dans la section 5, nous proposons quelques

remarques générales sur la question.

2. Préliminaires .

1) L'étude utilise de façon essentielle les notions de "galaxie" et "halo", et divers principes de permanence. Nous voudrions référer le lecteur non familiarisé avec ces notions à l'article "Un principe de permanence général" dans ce volume, en particulier à son introduction.

2) Définitions et notations :

(i) l'ensemble des entiers positifs standard sera noté par \mathbb{N} .

(ii) soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors la α -galaxie (notation : α -gal) et le α -halo (notation : α -hal) seront définis par

$$\alpha\text{-gal} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-\alpha n, \alpha n]$$

$$\alpha\text{-hal} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[-\frac{\alpha}{n}, \frac{\alpha}{n}\right] .$$

La 1-galaxie sera appelée la galaxie principale et sera notée \mathbb{G} .

Le 1-halo sera appelé le halo de 0 et sera noté $\text{hal}(0)$.

(iii) La galaxie \mathbb{G} - $\text{hal}(0)$ sera appelée l'ensemble des nombres réels appréciables et sera notée par \mathbb{A} .

(iv) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction analytique (qu'on supposera toujours standard) et soit $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ son développement en série de Taylor à l'origine.

On notera $T_n(x)$ le terme général $c_n x^n$ de degré n et P_n le polynôme

$x \rightarrow \sum_{k=0}^n c_k x^k$ de degré n . La fonction erreur $f - P_n$ sera notée par

R_n . A R_n on associe la fonction S_n définie par $S_n(x) = \sup_{y \in [0, x]} |R_n(y)|$. La composante convexe contenant 0 de $\{x \in \mathbb{R}^+ \mid R_n(x) \approx 0\}$ sera notée H_n . Si, dans un certain contexte, il existe une ambiguïté sur f , alors on écrira $T_{n,f}$,

$P_{n,f}$, $R_{n,f}$, $S_{n,f}$ et $H_{n,f}$.

3) Nous allons donner quelques propriétés générales des ensembles H_n .

(i) H_n est un préhalo car $H_n = S_n^{-1}(\text{hal}(0)) [1],[2]$.

(ii) Si la fonction analytique f n'est pas un polynôme, alors $H_n = \text{hal}(0)^+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ standard. En effet, soit $x \approx 0$. Alors par continuité de S_n on a $S_n(x) \approx S_n(0) = 0$. Donc $\text{hal}(0) \subset H_n$.

D'autre part, supposons que $\text{hal}(0) \subset H_n$. Alors H_n contient un intervalle standard $[0, a]$ avec $a > 0$. Donc $f(x) \approx P_n(x)$ pour tout $x \in [0, a]$ et spécialement pour tout x standard de $[0, a]$. Il en suit que $f(x) = P_n(x)$ pour tout x standard de $[0, a]$, donc par transfert pour tout $x \in [0, a]$. D'où $f = P_n$ en contradiction avec le fait que f est supposé nonpolynomial. Donc $H_n = \text{hal}(0)^+$.

Si $n \in \mathbb{N}$ est standard on obtient donc pour les H_n un résultat uniforme, c'est à dire un résultat qui n'est pas spécifique au caractère individuel des fonctions. On verra que l'étude pour les $\omega \in \mathbb{N}$ nonlimités donne des résultats bien plus significatifs.

4) Soit $\omega \in \mathbb{N}$ nonlimité et supposons que f soit une fonction entière nonpolynomiale. Alors la suite de ses polynômes de Taylor $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur chaque intervalle $[-a, a]$, mais $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge par uniformément vers f sur \mathbb{R} . Ce fait a les conséquences suivantes pour le préhalo H_ω :

(i) H_ω est un halo : Parce-que f n'est pas un polynôme, \mathbb{R} n'est pas borné. Alors S_ω n'est pas borné. Donc l'image de S_ω contient $\text{hal}(0)^+$. Il en résulte [2] que $S_\omega^{-1}(\text{hal}(0)^+)$ est un halo. Donc H_ω est un halo.

(ii) $H_\omega \supset \mathbb{E}^+$: Parce-que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur chaque intervalle $[-a, a]$ on a $P_\omega(x) \approx f(x)$ sur chaque intervalle standard $[-a, a]$, donc sur \mathbb{E} . Donc $H_\omega \supset \mathbb{E}^+$. Par le principe de Fehrele [1], on a $H_\omega \supset \mathbb{E}^+$.

Si par contre la fonction analytique f n'est pas entière et si $\{x \in \mathbb{R}^+ \mid \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)\}$ est de la forme $[0, r[$ pour un certain $r \in \mathbb{R}$, alors $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur chaque intervalle $[0, a]$ avec $a < r$. Dans ce cas il est facile à voir que H_ω est un halo tel que $[0, r] - r + \text{hal}(0) \subset H_\omega \subset [0, r[$.

5) On a vu que si $\{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)\}$ est un ouvert, alors H_ω est un halo.

Or il suit du fait qu'on sait classifier toutes les coupures de Dedekind de \mathbb{R} en une galaxie et un halo [1],[3], que H_ω ne peut prendre que deux formes distinctes : il existe un sousgroupe convexe unique K de \mathbb{R} et un élément a de \mathbb{R} tels que, soit $H_\omega = [0, a] \cup a + K$ et K est un halo, soit $H_\omega = [0, a] - a + K$ et K est une galaxie.

6) Le théorème et le corollaire suivants nous ont permis de calculer, à un infinitésimal près, explicitement quelques intégrales et sommes infinies. Le théorème peut être vu comme une forme faible du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

THÉOREME 2.1. Soient f et g deux fonctions internes réelles mesurables telles que $f(x) \approx g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{E}$. Soit h une fonction standard intégrable telle que $|f(x)| \leq h(x)$ et $|g(x)| \leq h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $\int_{\mathbb{R}} f \approx \int_{\mathbb{R}} g$.

Démonstration : Les intégrales $\int_{\mathbb{R}} f$ et $\int_{\mathbb{R}} g$ existent, car $|f(x)| \leq h(x)$ et

$|g(x)| \leq h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\left| \int_{[-n,n]} f - \int_{[-n,n]} g \right| = \left| \int_{[-n,n]} (f-g) \right| \leq \int_{[-n,n]} |f-g| \leq 2n \sup_{x \in [-n,n]} |f(x)-g(x)| \approx 0.$$

D'où $\int_{[-n,n]} f \approx \int_{[-n,n]} g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par le lemme de Robinson, il existe

$\omega \in \mathbb{N}$ nonlimité tel que $\int_{[-\omega,\omega]} f \approx \int_{[-\omega,\omega]} g$. Parce que h est standard intégrable

$\int_{\mathbb{R}-[-\omega,\omega]} h \approx 0$. Alors $\int_{\mathbb{R}-[-\omega,\omega]} f \approx 0$ et $\int_{\mathbb{R}-[-\omega,\omega]} g \approx 0$. Donc

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}-[-\omega,\omega]} f + \int_{[-\omega,\omega]} f \approx \int_{[-\omega,\omega]} f \approx \int_{[-\omega,\omega]} g \approx \int_{[-\omega,\omega]} g + \int_{\mathbb{R}-[-\omega,\omega]} g = \int_{\mathbb{R}} g.$$

COROLLAIRE 2.2. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites internes telles que $a_n \approx b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ une série convergente standard telle que $|a_n| \leq c_n$ et $|b_n| \leq c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

7) Nous utiliserons enfin la formule de Stirling pour $n!$:

Formule de Stirling : Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$n! = \sqrt{2\pi} n^n \sqrt{n} e^{-n} e^{\frac{1}{12n+\theta}} \quad \text{avec } 0 < \theta < 1.$$

Pour $\omega \in \mathbb{N}$ nonlimité on obtient ainsi

$$\omega! = (1+\alpha) \sqrt{2\pi} \omega^\omega \sqrt{\omega} e^{-\omega} \quad \text{avec } \alpha \approx 0.$$

3. Les fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} a_{pn+q} \frac{x^{pn+q}}{(pn+q)!}$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{(n+1)+q}}{a_{pn+q}} = \frac{1}{p} + 1$.

La classe de fonctions réelles entières que nous traitons dans cette section est

constituée par toutes les séries de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_{pn+q} \frac{x^{pn+q}}{(pn+q)!}$ avec $p, q \in \mathbb{N}$,

$p < q$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{p(n+1)+q}}{a_{pn+q}} = \pm 1$. Notons cette classe par E . Les fonctions sui-

vantes sont des éléments de E : $x \rightarrow e^x$, $x \rightarrow P(x)e^x$ (P un polynôme), $x \rightarrow e^{-x}$, $x \rightarrow \sin x$. Remarquons que si $f \in E$, qu'alors $\int f \in E$ et $f' \in E$.

On verra que les fonctions appartenant à la classe E manifestent le comportement le plus simple par rapport au phénomène recherché : il existe une progression presque constante dans les "régions" où la différence entre la fonction et son approximation devient noninfinitésimale. Plus précisément, il existe une constante c telle que $R_{\omega+p}(x+c) \approx R_{\omega}(x)$ sur un certain ensemble contenant le passage de valeurs infinitésimales vers des valeurs appréciables.

On obtiendra les expressions pour $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$ par des calculs directs que nous présenterons explicitement pour les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ et

avec les a_n tous positifs. Dans le cas général les calculs sont analogues.

Avant de présenter les calculs nous faisons d'abord quelques remarques.

Remarquons premièrement que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_{pn+q} \frac{x^{pn+q}}{(pn+q)!} \in E$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[pn+q]{|a_{pn+q}|} = 1$,

car $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[pn+q]{|a_{pn+q}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{p(n+1)+q}}{a_{pn+q}} \right|$. On a donc, pour $\omega \in \mathbb{N}$ nonlimité,

$$\sqrt[p\omega+q]{|a_{p\omega+q}|} \approx 1.$$

Deuxièmement, nous voulons définir pour tout $\omega \in \mathbb{N}$ deux nombres ω'

et ω'' :

$$\omega' = \frac{\omega + \frac{1}{2} \log \omega}{e}$$

$$\omega'' = \frac{\omega'}{\sqrt[p\omega+q]{|a_{p\omega+q}|}}.$$

Notons qu'on n'a pas toujours $\omega'' \approx \omega'$, si ω est nonlimité. Par exemple, si $a_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\omega' - \omega'' \approx \frac{\log \omega}{e}$, un nombre nonlimité.

Nous démontrons maintenant un lemme calculatoire.

LEMME 3.1. Soit $x \in \sqrt{\omega}$ - hal . Alors

$$(1 + \frac{x}{\omega})^{\omega} = (1 + \eta) e^x \quad \text{avec} \quad \eta \approx 0$$

Démonstration : Soit $x \in \sqrt{\omega}$ - hal . Alors

$$\begin{aligned} \log(1 + \frac{x}{\omega})^{\omega} &= \omega \log(1 + \frac{x}{\omega}) \\ &= \omega(\frac{x}{\omega} - \frac{1}{2}(\frac{x}{\omega})^2 + \alpha(\frac{x}{\omega})^2) \quad (\alpha \approx 0) \\ &= x - (\frac{1}{2} - \alpha) \frac{x^2}{\omega} \\ &= x + \beta \quad (\beta \approx 0) \end{aligned}$$

D'où

$$(1 + \frac{x}{\omega})^{\omega} = e^{x+\beta} = e^{\beta} e^x = (1 + \eta) e^x \quad (\eta \approx 0)$$

PROPOSITION 3.2. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$ une série telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ et

telle que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\omega \in \mathbb{N}$ nonlimité. Alors on a pour
tout $u \in \mathbb{E}$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad T_{\omega}(\omega'' + u) &\approx \frac{e^{eu}}{\sqrt{2\pi}} \\ \text{ii)} \quad R_{\omega}(\omega'' + u) &\approx \frac{e^{eu}}{\sqrt{2\pi}(e-1)} \end{aligned}$$

En plus on a

$$\text{iii)} \quad H_{\omega} = [0, \omega''] - \omega'' + \mathbb{E} \quad .$$

Démonstration : (i) Soit $u \in \mathbb{E}$. Alors on a , en appliquant le lemme 3.1. :

$$\begin{aligned} T_{\omega}(\omega'' + u) &= a_{\omega} \frac{(\frac{\omega'}{\omega} + u)^{\omega}}{\omega!} \\ &= \frac{(\omega + \frac{1}{2} \log \omega + e^{\omega \sqrt{a_{\omega}} u})^{\omega}}{e} \\ &= \frac{(1 + \alpha) \sqrt{2\pi} \omega^{\omega} \sqrt{\omega} e^{-\omega}}{\omega!} \quad (\alpha \approx 0) \end{aligned}$$

$$= (1+\beta) \frac{\left(1 + \frac{\frac{1}{2} \log \omega + e^{\frac{u}{\sqrt{a}}}}{\omega}\right)}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\omega}} \quad (\beta \approx 0)$$

$$= (1+\beta)(1+\gamma) \frac{e^{\frac{1}{2} \log \omega + e^{\frac{u}{\sqrt{a}}}}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\omega}} \quad (\gamma \approx 0)$$

$$= (1+\delta) \frac{(e^{eu})^{\frac{1}{\sqrt{a}}}}{\sqrt{2\pi}} \quad (\delta \approx 0)$$

$$\approx \frac{e^{eu}}{\sqrt{2\pi}} .$$

ii) Soit $u \in \mathbb{E}$. Alors,

$$\begin{aligned} R_{\omega}(\omega' + u) &= \sum_{n=\omega+1}^{\infty} a_n \frac{\left(\frac{\omega'}{\sqrt{a}} + u\right)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=\omega+1}^{\infty} \frac{a_{\omega} \left(\frac{\omega'}{\sqrt{a}} + u\right)^{\omega}}{\omega!} \cdot \frac{\binom{a}{a-\omega} \left(\frac{\omega'}{\sqrt{a}} + u\right)^{n-\omega}}{\prod_{m=1}^{n-\omega} \omega + m} \\ &= T_{\omega}(\omega' + u) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\binom{a}{a-\omega+k} \left(\frac{\omega'}{\sqrt{a}} + u\right)^k}{\prod_{m=1}^k \omega + m} \\ &= (1+\alpha) \frac{e^{eu}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{m=1}^k \left(\frac{a}{\omega+m} - 1\right) \left(1 + \frac{\frac{1}{2} \log \omega + e^{\frac{u}{\sqrt{a}}}}{\omega}\right)^k}{(\sqrt{a})^k \prod_{m=1}^k \left(1 + \frac{m}{\omega}\right)} \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^k \quad (\alpha \approx 0) \\ &= (1+\alpha) \frac{e^{eu}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{m=1}^k (1+\beta_m)(1+\gamma)^k}{(1+\delta)^k \prod_{m=1}^k (1+\epsilon_m)} \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^k \\ &= (1+\alpha) \frac{e^{eu}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \end{aligned}$$

avec $\beta_m, \gamma, \delta, \epsilon_m$ et A_k définis par $1 + \beta_m = \frac{a_{\omega+m}}{a_{\omega+m-1}}$,

$$\gamma = \frac{\frac{1}{2} \log \omega + e^{\omega} \sqrt{a_{\omega}} u}{\omega}, \quad 1 + \delta = \omega \sqrt{a_{\omega}}, \quad \epsilon_m = \frac{m}{\omega} \quad \text{et} \quad A_k = \frac{\prod_{m=1}^k (1 + \beta_m)(1 + \gamma)^k}{(1 + \delta)^k \prod_{m=1}^k (1 + \epsilon_m)} \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^k$$

($k, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Clairement $\beta_m \approx 0$ pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\gamma \approx 0$, $\delta \approx 0$ et $\epsilon_m \approx 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Notons $\beta = \sup_{m \geq 1} \beta_m$. Alors $\beta \approx 0$, car β est majoré par tout réel standard strictement positif. Egalement $\epsilon_m > 0$ pour tout m ,

$m \in \mathbb{N} - \{0\}$. Alors $A_k \leq \frac{(1 + \beta)^k (1 + \gamma)^k}{(1 + \delta)^k} \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^k < \left(\frac{2}{e}\right)^k$. Par le corollaire 2.2., on

on a donc $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^k} = \frac{1}{e-1}$. D'où $R(\omega'' + u) = (1 + \alpha) \frac{e^{eu}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \approx \frac{e^{eu}}{\sqrt{2\pi}(e-1)}$.

(iii) Il suit de (ii) que $R_{\omega}(\omega'' + u) \approx \frac{e^{eu}}{\sqrt{2\pi}(e-1)}$ pour tout u limité.

Alors il existe, par le principe de Feherle, $v \in \mathbb{R}$ positif et nonlimité tel que

$$R_{\omega}(\omega'' + u) \approx \frac{e^{eu}}{\sqrt{2\pi}(e-1)} \quad \text{sur} \quad [\omega'' - v, \omega'' + v]. \quad \text{Sur} \quad [\omega'' - v, \omega''] - \omega'' + \mathbb{E} \quad \text{on a donc}$$

$$R_{\omega}(\omega'' + u) \approx \frac{e^{eu}}{\sqrt{2\pi}(e-1)} \approx 0. \quad \text{Or} \quad R_{\omega} \quad \text{est une fonction croissante. Parce que}$$

$R_{\omega}(0) = 0$ et $R_{\omega}(\omega'' - v) \approx 0$ on a $R_{\omega}(x) \approx 0$ pour tout $x \in [0, \omega'' - v]$. Donc

$R_{\omega}(x) \approx 0$ pour tout $x \in [0, \omega''] - \omega'' + \mathbb{E}$, par conséquent $H_{\omega} = [0, \omega''] - \omega'' + \mathbb{E}$.

PROPOSITION 3.3. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$ une série telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ et telle que

$a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $u \in \mathbb{E}$. Alors

$$R_{\omega}(\omega'' + u) \approx R_{\omega+1}\left(\omega'' + \frac{1}{e} + u\right).$$

Avant de démontrer la proposition 3.3., on démontre le lemme calculatoire suivant :

LEMME 3.4. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite standard telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ et telle

que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors on a pour tout $\omega \in \mathbb{N}$ nonlimité

(i) $\frac{\log a_{\omega}}{\omega} \approx 0$

$$(ii) \omega \left(a_{\omega}^{\frac{1}{\omega}} - a_{\omega+1}^{\frac{1}{\omega+1}} \right) \approx 0 .$$

Démonstration : (i) Soit $\omega \in \mathbb{N}$ nonlimité. Alors $a_{\omega}^{\frac{1}{\omega}} = (1 + \alpha)$ avec $\alpha \approx 0$.

D'où $a_{\omega} = (1 + \alpha)^{\omega}$. D'où $\log a_{\omega} = \omega \log (1 + \alpha)$. Donc $\frac{\log a_{\omega}}{\omega} = \log(1 + \alpha) \approx 0$.

(ii) On a, utilisant (i)

$$\begin{aligned} \omega \left(a_{\omega}^{\frac{1}{\omega}} - a_{\omega+1}^{\frac{1}{\omega+1}} \right) &= \omega \left(e^{\frac{\log a_{\omega}}{\omega}} - e^{\frac{\log a_{\omega+1}}{\omega+1}} \right) \\ &= \omega(1 + \alpha) \left(\frac{\log a_{\omega}}{\omega} - \frac{\log a_{\omega+1}}{\omega+1} \right) \quad (\alpha \approx 0) \\ &= \omega(1 + \alpha) \left(\frac{\log a_{\omega} - \log a_{\omega+1}}{\omega} + \frac{\log a_{\omega+1}}{\omega(\omega+1)} \right) \\ &= (1 + \alpha) \left(\log \frac{a_{\omega}}{a_{\omega+1}} + \frac{\log a_{\omega+1}}{\omega+1} \right) \\ &\approx 0 . \end{aligned}$$

Démonstration de la proposition 3.3. : On démontre d'abord que $(\omega+1)^{\omega} \approx \omega^{\omega} + \frac{1}{e}$.

En effet

$$\begin{aligned} (\omega+1)^{\omega} - \omega^{\omega} &= \frac{\omega+1 + \frac{1}{2}\log(\omega+1)}{e^{\omega+1}\sqrt{a_{\omega+1}}} - \frac{\omega + \frac{1}{2}\log \omega}{e^{\omega}\sqrt{a_{\omega}}} \\ &= \frac{1}{e^{\omega+1}\sqrt{a_{\omega+1}}} + \frac{\omega + \frac{1}{2}\log \omega + \alpha}{e^{\omega+1}\sqrt{a_{\omega+1}}} - \frac{\omega + \frac{1}{2}\log \omega}{e^{\omega}\sqrt{a_{\omega}}} \quad (\alpha \approx 0) \\ &= (1 + \beta) \frac{1}{e} + \omega' \left(\frac{1}{\omega+1\sqrt{a_{\omega+1}}} - \frac{1}{\omega\sqrt{a_{\omega}}} \right) + \frac{\alpha}{e^{\omega+1}\sqrt{a_{\omega+1}}} \quad (\beta \approx 0) \\ &\approx (1 + \beta) \frac{1}{e} + (1 + \gamma) \omega' \left(\omega\sqrt{a_{\omega}} - \omega+1\sqrt{a_{\omega+1}} \right) \quad (\gamma \approx 0) . \end{aligned}$$

Or $\omega' < \omega$. Il suit donc du lemme 3.4. que

$$(\omega + 1)'' - \omega'' \approx (1 + \beta) \frac{1}{e} + (1 + \gamma) \omega (\omega \sqrt{a_\omega} - \omega + 1 \sqrt{a_{\omega+1}}) \approx \frac{1}{e} .$$

Notons δ la différence entre $(\omega + 1)''$ et $\omega'' + \frac{1}{e}$. Soit $u \in G$. Alors

$$R_{\omega+1}(\omega'' + \frac{1}{e} + u) = R_{\omega+1}((\omega + 1)'' + (u - \delta)) \approx \frac{e^{e(u-\delta)}}{\sqrt{2\pi}(e-1)} \approx \frac{e^{eu}}{\sqrt{2\pi}(e-1)} \approx R_\omega(\omega'' + u)$$

Le cas général est formulé dans le théorème suivant :

THÉORÈME 3.5. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_{pn+q} \frac{x^{pn+q}}{(pn+q)!}$ une série telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{p(n+1)+q}}{a_{pn+q}} = \frac{1}{e}$

($p, q \in \mathbb{N}$, $q < p$). Alors on a pour tout $\omega = pn + q$ nonlimité.

$$(i) \quad R_\omega(\omega'' + u) \approx \frac{e^{eu}}{\sqrt{2\pi}(e^p - 1)} \quad (u \in \mathbb{C})$$

$$(ii) \quad H_\omega = [0, \omega''] - \omega'' + \mathbb{E}$$

$$(iii) \quad R_\omega(\omega'' + u) \approx R_{\omega+p}(\omega'' + \frac{p}{e} + u) \quad (u \in \mathbb{E}) .$$

Comparons maintenant les résultats théoriques avec ce qu'on observe sur les figures 1 et 2. D'une part on voit que le comportement régulier qu'on a démontré pour les polynômes de Taylor de degré nonlimité est déjà assez bien vérifié par les polynômes de degré 5 et plus. D'autre part, nous avons calculé la distance horizontale entre deux points, appartenant à deux polynômes successifs, de distance égale au graphe de la fonction approximée. Dans les deux cas les valeurs trouvées étaient légèrement supérieures aux valeurs théoriques $\frac{1}{e}$ (pour $x \rightarrow e^{-x}$) et $\frac{2}{e}$ (pour $x \rightarrow \sin x$). Ceci s'explique du fait que le deuxième terme de la différence $(n+p)'' - n''$ ne s'est pas encore suffisamment approché de 0 pour des n pas trop grands. En fait, ce deuxième terme est de l'ordre de $\frac{1}{n}$, comme le montre le calcul suivant (effectué pour la fonction $x \rightarrow e^{-x}$) :

$$\begin{aligned} (n+1)'' - n'' &= \frac{n+1 + \frac{1}{2} \log(n+1)}{e} - \frac{n + \frac{1}{2} \log n}{e} \\ &= \frac{1}{e} + \frac{1}{2e} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) . \end{aligned}$$

Finalement on remarque qu'on démontre facilement que, si $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} \in \mathbb{E}$,

qu'alors $R_{\omega, f'}(x) \approx R_{\omega, f}(x) \approx R_{\omega, \int f}(x)$ pour tout $x \in \frac{\omega^1}{\sqrt{|\alpha_\omega|}} + \mathbb{E}$;. Il en suit

que $H_{\omega, f'} = H_{\omega, f} = H_{\omega, \int f}$.

4. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ converge vers la fonction $x \rightarrow -\log(1-x)$

uniformément sur chaque intervalle $[0, r]$ avec $r < 1$. Alors $P_\omega(x) \approx \log(1-x)$ pour tout $x \in [0, 1] - 1 + \text{hal}(0)$. Donc $H_\omega \supset [0, 1] - 1 + \text{hal}(0)$ et, par le principe de Feherle, $H \supset [0, 1] - 1 + \text{hal}(0)$. Nous allons déterminer R_ω au-delà de H_ω

et nous en déduirons la taille de H_ω .

PROPOSITION 4.1. Soit $\omega \in \mathbb{N}$ nonlimité. Alors on a pour la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$:

$$(i) \quad R_\omega(1 - \frac{u}{\omega}) \approx \int_u^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (u \in A^+)$$

$$(ii) \quad H_\omega = [0, 1] - 1 + \frac{1}{\omega} - \text{gal} .$$

Démonstration : (i) Soit $\omega \in \mathbb{N}$ nonlimité et soit $u \in A^+$. Alors

$$R_\omega(1 - \frac{u}{\omega}) = \sum_{n=\omega+1}^{\infty} \frac{(1 - \frac{u}{\omega})^n}{n} \approx \int_u^\infty \frac{(1 - \frac{u}{\omega})^s}{s} ds$$

l'équivalence provenant du fait que $s \rightarrow \frac{(1 - \frac{u}{\omega})^s}{s}$ est une fonction monotone. D'où

$$\begin{aligned} R_\omega(1 - \frac{u}{\omega}) &\approx \int_\omega^\infty \frac{(1 - \frac{u}{\omega})^s}{s} ds \\ &= \int_u^\infty \frac{(1 - \frac{u}{\omega})^{\frac{\omega}{t}}}{t} dt && (t = \frac{\omega}{s}) \\ &= \int_u^\infty (1+\alpha)^t \frac{e^{-t}}{t} dt && (\alpha \approx 0) \end{aligned}$$

la dernière égalité étant une conséquence du lemme 3.1. Or $(1+\alpha)^t \frac{e^{-t}}{t} \approx \frac{e^{-t}}{t}$ pour tout $t \in \mathbb{E}$ tel que $t \geq u$. En plus $(1+\alpha)^t \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{2^t e^{-t}}{t}$ pour tout

$t \in \mathbb{R}$ tel que $t \geq u$, et $\int_u^\infty \frac{2^t e^{-t}}{t} dt$ est convergent. Donc on a par le

théorème 2.1. :

$$R_\omega(1 - \frac{u}{\omega}) \approx \int_u^\infty (1+\alpha)^t \frac{e^{-t}}{t} dt \approx \int_u^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt .$$

(ii) Un raisonnement analogue à celui de la démonstration de 3.2. (iii) montre que $H_\omega = [0,1] - 1 + \frac{1}{\omega}$ - gal .

On voit qu'on a obtenu de nouveau le résultat le plus simple qu'on avait pu attendre : on a trouvé une progression en $1 - \frac{1}{\omega}$ dans les "régions" où l'erreur R_ω dévient noninfinitésimale.

Il est possible d'illustrer ce résultat de la façon suivante. Remarquons qu'on a pour tout $x > 0$

$$\log x = -\log \frac{1}{x} = -\log(1 - (1 - \frac{1}{x})) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(1 - \frac{1}{x})^n}{n} .$$

Définissons les fonctions \tilde{P}_ω et \tilde{R}_ω par $\tilde{P}_\omega(x) = \sum_{n=1}^\omega \frac{(1 - \frac{1}{x})^n}{n}$ et

$\tilde{R}_\omega(x) = \log x - \tilde{P}_\omega(x)$; ($x > 0$) , et notons $\{x \geq 1 \mid \tilde{R}_\omega \approx 0\}$ par \tilde{H}_ω . Il suit de la proposition 4.1. que $\tilde{R}_\omega(1 + \omega) \approx \int_{\frac{1}{u}}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$ pour tout $u \in \mathbb{G}$ et que

$\tilde{H}_\omega = 1 + \omega$ -hal⁺ . On a donc théoriquement une progression linéaire dans les régions où l'erreur \tilde{R}_ω devient noninfinitésimale. En particulier $\tilde{H}_{2\omega} = 2\tilde{H}_\omega$.

C'est cette dernière propriété que nous avons essayée de mettre en évidence sur la figure 3 .

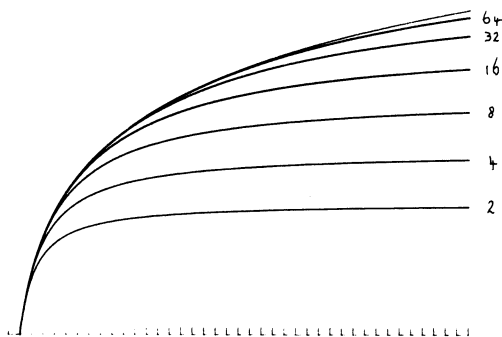


fig. 3 : La fonction logarithme approchée par les sommes partielles de la série $\sum_{n=1}^\omega \frac{(1 - \frac{1}{x})^n}{n}$

les nombres indiquent leurs degrés.

On y voit les graphes de la fonction logarithme et des fonctions $\tilde{P}_2, \tilde{P}_4, \tilde{P}_8, \tilde{P}_{16}, \tilde{P}_{32}$ et \tilde{P}_{64} . On a calculé les nombres x_n tels que $R_n(x_n) = 0,01$. Bien que les résultats pour les degrés moyennement élevés ne correspondent pas aussi bien à la théorie que dans le cas de la fonction exponentielle et de la fonction sinus, nous avons quand-même observé que $x_{64} - x_{32} = 2(x_{32} - x_{16})$ avec précision de deux décimales.

5. Quelques remarques qualitatives.

Le phénomène étudié dans ce travail est caractéristique d'un type bien défini de convergence de suites de fonctions vers une autre fonction. Il s'agit du cas où la convergence n'est pas uniforme sur un certain ouvert, mais par contre est uniforme sur chaque intervalle compact inclu dans cet ouvert. En effet, soient U un ouvert de \mathbb{R} et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)$ sur U , où la convergence est du type cité, et soit R_n la fonction erreur pour tout $n \in \mathbb{N}$. On choisit $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que l'effet de la convergence nonuniforme soit sensible. Notons I_n l'ensemble $\{x \in U \mid |R_n(x)| \leq \epsilon\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Clairement $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = U$ et $I_n \neq U$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc il existe une certaine progression dans les ensembles I_n : plus précisément, il existe une sous-suite strictement croissante par inclusion $(I_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_{n_k} = U$. Ainsi par exemple, on a constaté, avec $\epsilon > 0$ appréciable, dans la section 3 une progression presque linéaire et dans la section 4 une progression inversement linéaire. Evidemment il existe d'autres types de progression.

Les remarques précédentes montrent qu'on pourrait refaire cette étude pour des approximations par des polynomes de Taylor d'autres fonctions analytiques, et également pour d'autres formes d'approximation qui ne sont que "localement uniforme". Nous avons par exemple considéré des développements en série de Fourier de fonctions noncontinues. Ainsi, en développant en série de Fourier la fonction $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi-x}{2} & \text{si } x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

jusqu'à l'ordre ω , nous avons localisé le phénomène de Gibbs dans la $\frac{1}{\omega}$ -galaxie. (*)

(*) Ce résultat a déjà été obtenu indépendamment par J.L. Callot.

Notons finalement qu'on pourrait étudier dans le même esprit des suites de fonctions qui "ne divergent pas uniformément" d'une certaine fonction, comme c'est le cas pour certaines méthodes d'approximation basées sur des séries divergentes.

6. Références.

- [1] I.P. VAN DEN BERG : Un principe de permanence général, ce volume.
- [2] I.P. VAN DEN BERG et M. DIENER : Diverses applications du lemme de Robinson en analyse nonstandard. Comptes-Rendus de l'Acad. des Sc. de Paris, 293, série I, 1981, p. 501-504.
- [3] M. DIENER et I.P. VAN DEN BERG : Halos et Galaxies : une extension du lemme de Robinson. Comptes-Rendus de l'Acad. des Sc. de Paris, 291, série I, 1981, p. 385-388.
- [4] E. NELSON : Internal set theory : a new approach to nonstandard analysis. Bull. Amer. Math. Soc. (83) 1977, p. 1165-1198.
- [5] T. POSTON et I. STEWART : Catastrophe Theory and its applications. Pitman 1978.

Centre Universitaire de Tlemcen
B.P. 119
TLEMCEM , Algérie