Astérisque

IMME VAN DEN BERG

Un principe de permanence général

Astérisque, tome 109-110 (1983), p. 193-208

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__109-110__193_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 109-110 (1983) p.193-208

UN PRINCIPE DE PERMANENCE GÉNÉRAL

par

Imme VAN DEN BERG

1. Introduction .

Il arrive parfois dans la mathématique qu'on présuppose ou démontre une propriété sur un certain domaine, et qu'on sait démontrer après coup, en remarquant que le caractère de la propriété et le type du domaine sont incompatibles, que la propriété est en fait valable sur un domaine plus grand .L'exemple suivant, pris de la topologie,illustre ce phénomène. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) = 0$ sur $]0,1[$. Alors on déduit de la différence entre ensembles fermés et ensembles ouverts que la propriété "$f(x) = 0$" est valable sur un ensemble plus grand que $]0,1[$: on reconnait $\{x \in \mathbb{R} / f(x) = 0\}$ comme fermé et $]0,1[$ comme ouvert. Des raisonnements qui tiennent ainsi compte de la différence entre deux types d'ensembles sont assez rares dans la mathématique classique ; par contre on les rencontre fréquemment dans la pratique de l'analyse nonstandard. Ceci est lié au fait que l'analyse nonstandard, contrairement à la mathématique classique est basée sur la distinction de divers types d'ensembles : elle distingue entre ensembles standard et nonstandard, ensembles internes et externes. On verra, qu'en plus de ces distinctions nécessaires il est possible d'en obtenir d'autres, qui sont également de grande importance.

Des propositions comme ci-dessus, qui affirment que le domaine de validité d'une certaine propriété est plus large qu'on avait cru auparavant, sont appelées dans la littérature nonstandard principes de continuité (Stroyan-Luxemburg [15]) ou principes de permanence (Robinson-Lightstone [14]). Nous adoptons le dernier terme mais nous en changeons, avec Lutz-Goze [12] et M. Diener [8] légèrement le contenu : nous appellerons principe de permanence un énoncé qui exprime la différence entre deux classes d'ensembles.

Considérons brièvement quelques exemples. La différence entre ensembles standard et ensembles nonstandard n'est pas très importante dans la pratique du point de vue permanence. Notons quand-même une exception : le principe de transfert permet de conclure qu'une propriété standard est vraie pour tous les éléments d'un ensemble standard, quand on ne l'a effectivement montrée que pour les éléments standard de cet ensemble.

Par contre, la proposition évidente "un ensemble externe n'est pas interne" possède un grand intérêt comme principe de permanence, ce qui est confirmé par une grande partie de la littérature nonstandard. Nous appelons cette proposition "principe de Cauchy" à l'instar de Stroyan et Luxemburg [15] , qui ont utilisé ce terme pour quelques cas particuliers. Voici à titre d'exemple une proposition, dont l'énoncé constitue une forme de permanence couramment appliquée et dont la démonstration est caractéristique de la méthode suivie pour obtenir des résultats de permanence. (Notation : l'ensemble des éléments standard d'un ensemble standard X sera noté $\underline{X}$) .

PROPOSITION : Soit P une propriété interne telle que $P(n)$ pour tous les $n \in \mathbb{N}$ standard. Alors il existe $\omega \in \mathbb{N}$ non limité tel que $P(n)$ pour tout $n \leq \omega$.

Démonstration : On définit l'ensemble I par

$$I = \{k \in \mathbb{N} / (\forall\ n \leq k)\ P(n)\} \quad .$$

Alors $\underline{\mathbb{N}} \subset I$. Or l'ensemble externe $\underline{\mathbb{N}}$ ne peut être égal à l'ensemble interne I . D'ou $\underline{\mathbb{N}} \subsetneq I$. Donc il existe $\omega \in \mathbb{N}$ non limité tel que $P(n)$ pour tout $n \leq \omega$. On voit que cette proposition dit qu'une certaine propriété est permanente dans le sens d'une relation d'ordre. Nous donnerons plus tard une généralisation de cette remarque (théorème 3.2).

Un autre principe de permanence, dû à M. Diener, exprime la différence entre deux classes d'ensembles externes, dites les galaxies et les halos.

Définitions : (i) Une galaxie est un ensemble externe de la forme $\bigcup_{n \in \underline{\mathbb{N}}} A_n$, où $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite interne d'ensembles internes.

(ii) Un halo est un ensemble externe de la forme $\bigcap_{n \in \underline{\mathbb{N}}} B_n$, où $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite interne d'ensembles internes.

On suppose par commodité souvent que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ci-dessus est croissante par inclusion et strictement croissante sur au moins $\underline{\mathbb{N}}$. Réciproquement, le fait qu'une suite interne $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit strictement croissante sur $\underline{\mathbb{N}}$ entraine que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est externe, ce qui donne un moyen de reconnaitre les galaxies. Il est clair que le complémentaire d'une galaxie dans un ensemble interne est un halo et que l'image directe et l'image réciproque d'une galaxie par une application interne sont des galaxies, pourvu qu'ils soient externes. On peut faire des remarques analogues pour les halos.

L'importance de la classe des galaxies et la classe des halos suit entre autres du fait que plusieurs ensembles externes qu'on rencontre souvent dans la pratique appartiennent à une des deux classes. Ainsi $\underline{\mathbb{N}}$ et la galaxie principale $\mathbb{G}(= \bigcup_{n\in \underline{\mathbb{N}}} [-n,n])$ sont des galaxies et l'ensemble des réels infinitésimaux $\mathrm{hal}(o) \quad (= \bigcap_{n\in \underline{\mathbb{N}}} [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}])$ et l'ensemble des réels nonlimités $\mathbb{H}\,(= \mathbb{R}-\mathbb{G})$ sont des halos.

Le principe de permanence qui dit que la classe des galaxies et la classe des halos sont disjointes s'appelle principe de Fehrele.

THÉORÈME (principe de Fehrele) : Aucune galaxie n'est un halo.

Démonstration : Soient G une galaxie et H un halo tels que $G \subset H$. Soient $(A_n)_{n\in \mathbb{N}}$ une suite interne croissante telle que $G = \bigcup_{n\in \underline{\mathbb{N}}} A_n$ et $(B_n)_{n\in \mathbb{N}}$ une suite interne décroissante telle que $H = \bigcap_{n\in \underline{\mathbb{N}}} B_n$. Alors $A_n \subset B_n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Par le principe de Cauchy il existe $\omega\in \mathbb{N}$ nonlimité tel que $A_\omega \subset B_\omega$. Alors on obtient un ensemble interne I tel que $G\subset I\subset H$ en choisissant par exemple $A_\omega = I$:

$$G = \bigcup_{n\in \underline{\mathbb{N}}} A_n \subset A_\omega = I \subset B_\omega \subset \bigcap_{n\in \underline{\mathbb{N}}} B_n = H .$$

Il suit du principe de Cauchy que $G \underset{\neq}{\subset} I \underset{\neq}{\subset} H$. Donc $G \underset{\neq}{\subset} H$.

Un cas spécial très utile du principe de Fehrele est le lemme séquentiel de Robinson, qui donne à nouveau un résultat de permanence dans le sens d'une relation d'ordre.

PROPOSITION (lemme de Robinson) : Soit $(a_n)_{n\in \mathbb{N}}$ une suite interne de nombres réels telle que $a_n \simeq 0$ pour tout $n\in \mathbb{N}$ standard. Alors il existe $\omega \in \mathbb{N}$ nonlimité telle que $a_n \simeq 0$ pour tout $n \leq \omega$.

Démonstration : On définit la suite interne $(b_k)_{k\in \mathbb{N}}$ par $b_k = \max_{n\leq k} |a_n|$. Alors la galaxie $\underline{\mathbb{N}}$ est strictement contenue dans l'ensemble $\{k\in \mathbb{N} / b_k \simeq 0\}$ car cet ensemble, image réciproque par une application interne de hal(o), est soit un halo, soit un ensemble interne. Soit $\omega \in \mathbb{N}$ nonlimité tel que $b_\omega \simeq 0$. Alors $a_n \simeq 0$ pour tout $n \leq \omega$.

Le principe de Fehrele permet d'obtenir des résultats de permanence dans diverses branches de la mathématique nonstandard, notamment dans une approche de la théorie des perturbations singulières des équations différentielles ordinaires (voir à ce titre [5] ; on trouvera d'autres références dans la bibliographie de cet ouvrage).

Il suit de la démonstration du principe de Fehrele qu'une galaxie incluse dans un halo est toujours séparé de ce halo par un ensemble interne. Lutz et Goze ont généralisé ce constat et ont formulé un principe de permanence qui dans notre terminologie ensembliste prendrait la forme suivante :

Principe de permanence (Lutz-Goze) : Soient E et F deux ensembles externes et I un ensemble interne tels que $F \subset I \subset E$. Alors $F \underset{\neq}{\subset} E$.

Cette proposition est alors une sorte de doublement du principe de Cauchy.

Le but de notre travail a été de déduire d'autres principes de permanence. Puisque la pratique a montré qu'on obtient souvent des résultats de permanence en reconnaissant certains types d'ensembles, nous avons d'abord cherché la possibilité de définir des nouveaux types d'ensembles externes. On y arrive si on généralise les définitions des galaxies et des halos en utilisant des ensembles d'indices quelconques.

DÉFINITIONS. (i) Une galaxie généralisée est un ensemble externe de la forme $\bigcup_{x \in \underline{X}} A_x$, où X est un ensemble standard et $(A_x)_{x \in X}$ est une famille interne d'ensembles d'internes.

(ii) Un halo généralisé est un ensemble externe de la forme $\bigcap_{y \in \underline{Y}} B_y$, où Y est un ensemble standard et où $(B_y)_{y \in Y}$ est une famille interne d'ensembles internes.

Afin de démontrer qu'aucune galaxie généralisée n'est un halo généralisé essayons d'imiter la démonstration du principe de Fehrele. Soient donc G une galaxie généralisée et H un halo généralisé tels que $G \subset H$. Il suffit de trouver un ensemble interne K tel que $G \subset K \subset H$. Soient $(A_x)_{x \in X}$ une famille interne telle que $G = \bigcup_{x \in \underline{X}} A_x$ et $(B_y)_{y \in Y}$ une famille interne telle que $H = \bigcap_{y \in \underline{Y}} B_y$. Définissons la relation interne $R \subset X \times Y$ ppar

$$R(x,y) \Leftrightarrow A_x \subset B_y \quad .$$

Le problème de trouver un ensemble interne K tel que $\bigcup_{x \in X} A_x \subset K \subset \bigcap_{y \in Y} B_y$ revient alors à démontrer l'existence d'un rectangle interne $I \times J$ tel que

$$\underline{X} \times \underline{Y} \subset I \times J \subset R \quad .$$

On verra que l'existence d'un tel rectangle interne $I \times J$ suit du principe d'idéalisation. Mais la démonstration montrera que la relation R aurait pu être une relation interne quelconque ; nous aurons prouvé ainsi quelque chose de plus général et c'est alors la proposition suivante que nous proposons appeler le principe de permanence général :

<u>Principe de permanence général</u> : Soient X et Y des ensembles standard. Soit $R \subset X \times Y$ une relation interne telle que $\underline{X} \times \underline{Y} \subset R$. Alors il existe des ensembles internes $I \subset X$ et $J \subset Y$ tels que $I \times J \subset R$.

L'étude présente possède la structure suivante. Dans la section 2 nous démontrons d'abord le principe de permanence général et ensuite qu'aucune galaxie généralisée ne peut être un halo généralisé. Nous considérons également quelques types de galaxies généralisées. Dans section 3, nous démontrons un théorème sur la durée de la permanence. Dans section 4 nous donnons une généralisation d'une sorte de théorème de classification concernant des coupures de Dedekind de $\mathbb{R}$ dans une galaxie et un halo [4] . Il paraîtra que ce théorème continue à être vrai pour des coupures de Dedekind en une galaxie généralisée et un halo généralisé dans des groupes ordonnés où la relation d'ordre est dense et totale.

Notre cadre de travail est l'axiomatique IST de Nelson [13]. Nous nous réservons en plus d'utiliser les ensembles externes assez librement, comme chez Hrbacek [11].

2. <u>Principe de permanence général</u> .

THÉORÈME 2.1. (principe de permanence général) : <u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>des ensembles standard. Soit</u> $R \subset Y \times Y$ <u>une relation interne telle que</u> $R(x,y)$ <u>pour tout</u> $x \in \underline{X}$ <u>et</u> $y \in \underline{Y}$. <u>Alors il existe des ensembles internes</u> $I \subset X$ <u>et</u> $J \subset Y$ <u>tels que</u> $R(x,y)$ <u>pour tout</u> $x \in I$ <u>et</u> $y \in J$.

<u>Démonstration</u> : On considère la relation interne $B(u,P)$ définie par

$$B(u,P) \Leftrightarrow u \in P \wedge P \subset R \wedge P \text{ est un produit cartésien.}$$

Afin de pouvoir appliquer le principe d'idéalisation on démontre qu'il existe pour tout ensemble fini standard $z \subset X \times Y$ un produit cartésien $P_z \subset X \times Y$ tel que $B(u,P_z)$ pour tout $u \in Z$. En effet, soit $z \subset X \times Y$ un ensemble fini standard. Soient p la projection de $X \times Y$ sur X et q la projection sur Y . Alors $p(z) \subset X$ et $q(z) \subset Y$. On définit le produit cartésien P_z par $P_z = p(z) \times q(z)$. Alors $P_z \subset X \times Y \subset R$. Donc $B(y,P_z)$ est vérifié par tout $u \in z$. Par le principe d'idéalisation il existe un ensemble interne P tel que $B(u,P)$ par tout $u \in \underline{X \times Y}$. Donc P est de la forme $I \times J$ où I et J sont des ensembles internes tels que $\underline{X} \subset I$, $\underline{Y} \subset J$ et $I \times J \subset R$.

<u>Remarque</u> : On peut démontrer de façon semblable un principe de permanence analogue pour des relations internes à n variables, pour tout $n \in \mathbb{N}$ standard.

Nous démontrons maintenant à l'aide du principe de permanence général qu'aucune galaxie généralisée n'est un halo généralisé.

DÉFINITION 2.2. : Soit X un ensemble standard et soit $(A_x)_{x \in X}$ une famille interne d'ensembles internes. Alors $\bigcup_{x \in \underline{X}} A_x$ sera appelé une prégalaxie généralisée et $\bigcap_{x \in \underline{X}} A_x$ sera appelé un préhalo généralisé. Une prégalaxie généralisée externe sera appelée galaxie généralisée et un préhalo généralisé externe sera appelé halo généralisé. Une galaxie généralisée qui n'est pas une galaxie sera appelée une galaxie strictement généralisée. Une halo généralisé qui n'est pas un halo sera appelé un halo strictement généralisé.

THÉORÈME 2.3. : Aucune galaxie généralisée n'est un halo généralisé.

Démonstration : Soient G une galaxie généralisée et H un halo généralisé tels que $G \subset H$. Soient X et Y deux ensembles standard et soient $(A_x)_{x \in X}$ une fami famille interne telle que $G = \bigcup_{x \in \underline{X}} A_x$ et $(B_y)_{y \in Y}$ une famille interne telle que $H = \bigcap_{y \in \underline{Y}} B_y$. On définit la relation interne $R \subset X \times Y$ par

$$R(x,y) \Leftrightarrow A_x \subset B_y \quad .$$

Alors $\underline{X} \times \underline{Y} \subset R$. Par le principe de permanence général il existe deux ensembles internes $I \supset \underline{X}$ et $J \supset \underline{Y}$ tels que $I \times J \subset R$. D'où

$$G = \bigcup_{x \in \underline{X}} A_x \subset \bigcap_{x \in I} A_x \subset \bigcap_{y \in J} B_y \subset \bigcap_{y \in \underline{Y}} B_y = H \quad .$$

Par le principe de Cauchy $G \underset{\neq}{\subset} \bigcup_{x \in I} A_x$ et $\bigcap_{y \in J} B_y \underset{\neq}{\subset} H$. Donc $G \neq H$.

Il nous est communiqué par L. Haddad que dans la littérature des théorèmes comme 2.3. sont plutôt présentés sous une autre forme. Ils sont alors appelés des principes de séparation. Le théorème 2.3. prendrait la forme suivante :

THÉORÈME 2.4. : Soient G_1 et G_2 deux prégalaxies généralisées telles que $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Alors il existe un ensemble interne I tel que $I \supset G_1$ et $I \cap G_2 = \emptyset$.

Malgré l'avantage indéniable de s'intégrer à la tradition avec cette présentation et malgré la perte légère d'information nous tenons à la version qui exprime la différence entre deux types d'ensembles. Car c'est cette version qui correspond le plus à notre but de déduire des résultats de permanence.

EXEMPLES 2.5.1. Soit $\omega \in \mathbb{R}$ positif nonlimité. Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des fonctions réelles croissantes. Soit $G_\omega \subset \mathbb{R}^+$ la prégalaxie généralisée définie par

$$x \in G_\omega \Leftrightarrow 0 \leq x \leq f(\omega) \quad \text{pour un} \quad f \in \underline{\mathfrak{F}} .$$

On va montrer que G_ω est une galaxie strictement généralisée.

(i) G_ω est externe : On voit facilement que G_ω est un demigroupe convexe : si $0 \leq x \leq f(\omega)$ et $0 \leq y \leq g(\omega)$ pour des $f,g \in \underline{\mathfrak{F}}$, alors $x + y \leq (f+g)(\omega)$. Or les seuls demi-groupes internes convexes inclus dans $\mathbb{R}^+$ sont $\{0\}$ er $\mathbb{R}^+$. Clairement $G_\omega \neq \{0\}$. D'autre part, il suffit d'appliquer le principe d'idéalisation à la formule $B(f,v)$ définie par

$$B(f,v) \Leftrightarrow f \in \mathfrak{F} \wedge f(\omega) < v$$

pour démontrer l'existence d'un élément $v \in \mathbb{R}^+$ qui majore tous les éléments de G_ω . Donc $G_\omega \neq \mathbb{R}^+$. Il en suit que G_ω est externe.

(ii) G n'est pas une galaxie : Si G était une galaxie, alors il existerait une suite interne strictement croissante de nombres réels $(a_n)_{n\in \mathbb{N}}$ telle que $G = \bigcup_{n\in \underline{\mathbb{N}}} [0,a_n]$. Pour chaque $n \in \underline{\mathbb{N}}$ on peut choisir $f_n \in \underline{\mathfrak{F}}$ tel que $a_n \leq f_n(\omega)$. Or en appliquant le principe de transfert au lemme de Du Bois-Reymond(1) on trouve $g \in \underline{\mathfrak{F}}$ tel que $f_n(x) < g(x)$ pour tout $n \in \underline{\mathbb{N}}$. Ceci est en contradiction avec le fait que $g(\omega) \in G_\omega$. Donc G_ω ne peut être une galaxie.

2.5.2. Tous les ensembles ne contenant que des éléments standard qui ne sont pas standardement finis sont des galaxies généralisées. Il est démontré dans [4] que ceux qui en plus ne sont pas externement dénombrables (c.à.d. ne sont pas en bijection avec $\underline{\mathbb{N}}$) sont des galaxies strictement généralisées. En effet, il existe une classification naturelle de ces galaxies généralisées par cardinalité :

PROPOSITION 2.6. : Soient X et Y deux ensembles standard infinis tels que $\text{card}(X) < \text{card}(Y)$. Alors il n'existe pas une famille interne $(A_x)_{x\in X}$ telle que $\underline{Y} = \bigcup_{x\in \underline{X}} A_x$.

Démonstration : Supposons que $(A_x)_{x\in X}$ soit une famille interne telle que $Y = \bigcup_{x\in \underline{X}} A_x$. Parce-que pour $x \in X$ standard les ensembles internes A_x ne contiennent que des éléments standard, il sont standard et donc standardement finis.

---

(1) Lemme de Du Bois-Reymond : Soit $f_n \in \mathfrak{F}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors il existent $g \in \mathfrak{F}$ et une suite $(a_n)_{n\in \mathbb{N}}$ de nombres réels tels que $f_n(x) < g(x)$ pour tout tout $x \in \mathbb{R}^+$ supérieur à a_n et pour tout $n \in \mathbb{N}$ [10] .

Soit $(A'_x)_{x\in X}$ le standardisé de $(A_x)_{x\in \underline{X}}$. Alors $Y = \bigcup_{x\in X} A'_x$. Par le principe de transfert tous les A'_x sont finis. Alors il existe une bijection de X dans $\bigcup_{x\in X} A'_x$ et donc dans Y. Ceci est en contradiction avec le fait que card $X <$ card Y.

2.5.3. Soit X un espace topologique. Soit $x \in X$ et soit $\mathcal{V}_x$ l'ensemble de tous les voisinages ouverts de x. On appellera la monade de x et on notera U_x le préhalo généralisé $\bigcap_{V\in \underline{\mathcal{V}_x}} V$. Voici un exemple d'une telle monade qui est un halo strictement généralisé. On considère $\mathbb{R}$ avec la topologie usuelle. Soit $\omega \in \mathbb{N}^+$ nonlimité. Soit W_ω la partie convexe de U_ω (une application du principe d'idéalisation à la formule $B(V,y)$ définie par $B(V,y) \Leftrightarrow V$ voisinage ouvert de $\omega \wedge y \in V \wedge y > \omega + 1$ montre que U_ω lui-même n'est pas convexe). Une démonstration un peu technique, basée sur le lemme de Du Bois-Reymond montre que W_ω est un halo strictement généralisé ; que W_ω est effectivement plus petit que la monade d'un réel standard suit du fait que clairement $W_\omega \subset \bigcap_{s\in \underline{S}}]\omega - s_\omega, \omega + s_\omega[$, où S est l'ensemble des suites de nombres réels strictement positifs (en fait $W_\omega = \bigcap_{s\in \underline{S}}]\omega - s_\omega, \omega + s_\omega[$).

On indique maintenant une différence majeure entre galaxies et galaxies strictement généralisées.

DEFINITION 2.7. <u>Soit</u> G <u>une galaxie généralisée. On dira que</u> G <u>possède une représentation coirssante si</u> $G = \bigcup_{x\in \underline{X}} A_x$ <u>où</u> X <u>est un ensemble standard totalement ordonné et</u> $(A_x)_{x\in X}$ <u>est une famille interne telle que</u> $x_1 < x_2$ <u>implique</u> $A_{x_1} \subset A_{x_2}$ <u>pour tout</u> $x_1, x_2 \in X$. <u>On dira que</u> G <u>possède une représentation disjointe si</u> $G = \bigcup_{y\in \underline{Y}} B_y$, <u>où</u> Y <u>est un ensemble standard et</u> $(B_y)_{y\in Y}$ <u>est une famille interne telle que</u> $B_{y_1} \cap B_{y_2} = \emptyset$ <u>pour tout</u> $y_1, y_2 \in Y$.

PROPOSITION 2.8. <u>Chaque galaxie possède une représentation croissante et une représentation disjointe.</u>

Démonstration : Comme il est indiqué dans [9], il existe deux façons équivalentes de représenter une galaxie G :

1) $G = \bigcup_{n\in \underline{\mathbb{N}}} A_n$, où $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite interne strictement croissante d'ensembles internes.

2) $G = f^{-1}(\underline{\mathbb{N}})$, où f est une application interne à valeur dans $\mathbb{N}$ qui est surjective.

Il suit de 1) que G possède une représentation croissante et il suit de 2) que G possède une représentation disjointe, car $G = \bigcup_{n\in \underline{N}} f^{-1}(n)$.

La galaxie généralisée G_ω de l'exemple 2.5.1. est un exemple d'une galaxie strictement généralisée qui possède une représentation croissante. Les ensembles externes qui ne contiennent que des éléments standards sont des exemples de galaxies généralisées qui possèdent une représentation disjointe. On va montrer que pour les galaxies strictement généralisées les deux représentations s'excluent mutuellement, contrairement à ce qui est le cas pour les galaxies. On démontre d'abord le lemme suivant.

LEMME 2.9. : <u>Soit F une prégalaxie incluse dans une galaxie strictement généralisée G qui possède une représentation croissante. Alors il existe un ensemble interne I tel que $F \subset I \subset G$</u> .

<u>Démonstration</u> : Soient $\bigcup_{n\in \underline{N}} A_n$ une présentation croissante de F et $\bigcup_{x\in \underline{X}} B_x$ une représentation croissante de G . On peut choisir pour tout $n \in \underline{N}$ un élément $x_n \in \underline{X}$ tel que $A_n \subset B_{x_n}$. Or G n'est pas une galaxie ; donc il existe $\xi \in \underline{X}$ tel que $B_\xi \not\subset \bigcup_{n\in \underline{N}} B_{x_n}$. Parce que $\{B_x \mid x \in X\}$ est totalement ordonné par l'inclusion il en résulte que $\bigcup_{n\in \underline{N}} B_{x_n} \subset B_\xi$. Posant $I = B_\xi$ on trouve

$$F = \bigcup_{n\in \underline{N}} A_n \subset \bigcup_{n\in \underline{N}} B_{x_n} \subset I \subset G .$$

THÉORÈME 2.10. <u>Une galaxie strictement généralisée ne possède pas à la fois une représentation croissante et une représentation disjointe.</u>

<u>Démonstration</u> : Soit G une galaxie strictement généralisée qui possède une représentation croissante. Supposons par l'absurde que $\bigcup_{x\in \underline{X}} A_x$ soit une représentation disjointe de G . On peut supposer sans restriction de la généralité que $A_x \neq \emptyset$ pour tout $x \in X$.
Choisissons une suite injective $(x_n)_{n\in \underline{N}}$ d'éléments de $\underline{X}$ et appelons F la prégalaxie $\bigcup_{n\in \underline{N}} A_{x_n}$. Parce que $A_{x_n} \neq \emptyset$ pour tout $n \in \underline{N}$ la prégalaxie F est externe, donc une galaxie. Par le lemme 2.9., il existe un ensemble interne $I \subset G$ tel que $F \subset I$. Parce-que F est externe la dernière inclusion est stricte. Plus précisément, l'ensemble H défini par $H = I - F$ est un halo. Définissons la famille interne $(B_x)_{x\in X}$ par $B_x = A_x \cap I$. Alors $H = \bigcup_{x\in \underline{X} - \{x_n | n\in \underline{N}\}} B_x$, en contradiction

avec le théorème 2.3.. Donc G ne peut être représenté de façon disjointe.

Il suit de la proposition 2.10. que, contrairement aux galaxies, une galaxie strictement généralisée qui possède une représentation croissante n'est jamais l'image réciproque par une application interne d'un ensemble qui ne contient que des éléments standards.

Remarquons enfin qu'on peut formuler un analogue du lemme séquentiel de Robinson pour des galaxies strictement généralisées qui possèdent une représentation croissante :

PROPOSITION 2.11. *Soit* G *une galaxie strictement généralisée qui possède une représentation croissante. Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite interne telle que* $a_n \in G$ *pour tout* $n \in \underline{\mathbb{N}}$. *Alors il existe* $\omega \in \mathbb{N}$ *nonlimité tel que* $a_n \in G$ *pour tout* $n \leq \omega$.

Démonstration : Par le lemme 3.7. il existe un ensemble interne I tel que $\bigcup_{n\in\underline{\mathbb{N}}} \{a_n\} \subset I \subset G$. Alors $a_n \in I$ pour tout $n \in \underline{\mathbb{N}}$. Donc il esite $\omega \in \mathbb{N}$ nonlimité tel que $a_n \in I$ pour tout $n \leq \omega$.

3. Existence d'une "durée" minimale de permanence.

Dans cette section on traitera un problème lié au principe de permanence général du théorème 2.1. .

Considérons d'abord un cas spécial du problème. Soit X un ensemble standard infini et soit P une propriété interne vérifiée par tous les éléments standards de X . Alors $\{x \in X\} | P(x)\}$ est un ensemble interne contenant strictement l'ensemble externe $\underline{X}$. Supposons qu'on "sorte" de l'ensemble $\underline{X}$ et qu'on s'éloigne de $\underline{X}$. Jusqu'où la propriété P est-elle vérifiée ?

On pourrait préciser le problème de la façon suivante. Une manière naturelle de sortir de X est la "chemin" tracé par une suite injective $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur X (car par le principe de standardisation $s_n \in \underline{X}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ limité et $s_n \notin \underline{X}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ nonlimité). Or par le théorème 2.1., il existe $\omega_s \in \mathbb{N}$ nonlimité tel que $P(s_n)$ est vérifiée pour tout $n \leq \omega_s$. Existe-t-il une "durée de permanence minimale uniforme", c.a.d. un indice nonlimité ω tel que $P(s_n)$ est vrai pour toutes les suites standard s sur X et pour tout $n \leq \omega$?

La réponse affirmative est une conséquence de la proposition suivante en prenant $f : \underline{X^{\mathbb{N}}} \longrightarrow \mathbb{N}$ égale à une prolongement interne de $\{(s,\omega_s) | s \in \underline{X^{\mathbb{N}}}\}$.

PROPOSITION 3.1. *Soit* X *un ensemble standard et soit* $f : X \longrightarrow \mathbb{N}$ *une application interne telle que* $f(x)$ *soit nonlimité pour tout* $x \in \underline{X}$. *Alors il existe* $\omega \in \mathbb{N}$ *nonlimité tel que* $\omega < f(x)$ *pour tout* $x \in \underline{X}$.

Démonstration : Par le théorème 2.3. la galaxie $\mathbb{N}$ est strictement incluse dans le préhalo généralisé $\bigcap_{x \in \underline{X}} [0, f(x)]$. Donc il existe $\omega \in \mathbb{N}$ nonlimité tel que $\omega < f(x)$ pour tout $x \in X$ standard.

Si on considère une relation R à deux variables le problème pourrait être formulé ainsi. Supposons que X et Y soient deux ensembles standard et que $\underline{X} \times \underline{Y} \subset R \subset X \times Y$. Existe-t-il $\omega \in \mathbb{N}$ nonlimité tel que $R(s_n, t_m)$ est vérifiée pour toutes les suites standard $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur X et $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ sur Y et pour tout $n, m \leq \omega$?

Le théorème 3.2. donne une réponse affirmative à cette question. On remarque que ce théorème pourrait être généralisé facilement pour des relations à n variables pour tout $n \in \mathbb{N}$ standard, ce qui constituerait une solution du cas général du problème.

THÉORÈME 3.2. Soient X et Y des ensembles standard et soit $R \subset X \times Y$ une relation interne telle que $R(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \underline{X} \times \underline{Y}$. Alors il existe $\omega \in \mathbb{N}$ nonlimité tel que $R(s_n, t_m)$ pour toutes les suites standard $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur X et $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ sur Y et pour tout $n, m \leq \omega$.

Démonstration : Soient S l'ensemble de toutes les suites sur X et T l'ensemble de toutes les suites sur Y. On définit la relation interne $U \subset S \times \mathbb{N} \times T \times \mathbb{N}$ par

$$U(s,n,t,m) \Leftrightarrow R(s_n, t_m).$$

Clairement $U \supset \underline{S} \times \underline{\mathbb{N}} \times \underline{T} \times \underline{\mathbb{N}}$. Par le principe de permanence général, appliqué à une relation à 4 variables, il existe des ensembles internes $I \supset \underline{S}$ et $J \supset \underline{T}$ et des nombres nonlimités ω_1 et ω_2 tels que $U \supset I \times [0,\omega_1] \times J \times [0,\omega_2]$. Il suit que chaque nombre ω nonlimité tel que $\omega < \min(\omega_1, \omega_2)$ suffit.

4. Ensembles munis d'une relation d'ordre dense totale.

Après avoir mentionné quelques propriétés générales des ensembles munis d'une relation d'ordre dense totale[(1)] on généralise le théorème de classification des coupures de Dedekind de $\mathbb{R}$ en une galaxie et un halo [4].

PROPOSITION 5.1. Soit A un ensemble interne muni d'une relation d'ordre dense totale. Soient X et Y deux ensembles standard et soient $f : X \to A$ et $g : Y \to A$ deux applications internes telles que $f(x) < g(y)$ pour tout $x \in \underline{X}$ et $y \in \underline{Y}$. Alors il existe $v \in A$ tel que $f(x) < v < g(y)$ pour tout $x \in \underline{X}$ et

(1) Une relation d'ordre dense totale $\leq$ sur un ensemble A est une relation d'ordre telle que (i) pour tout $x,y \in A$ tel que $x < y$ il existe. $V \in A$ tel que $x < V < y$ et (ii) pour tout $x,y \in A$ on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.

$y \in \underline{Y}$.

Démonstration : Il suffit d'appliquer le principe d'idéalisation à la formule

$$v \in A \wedge f(x) < v < g(y) \ .$$

Soit A un ensemble interne muni d'une relation d'ordre dense totale. On considère une galaxie G dans A telle que si $u \in G$ et $v \leq u$, alors $v \in G$. Soit X un ensemble standard et soit $(F_x)_{x \in X}$ une famille interne telle que $G = \bigcup_{x \in \underline{X}} F_x$. Appelons demi-droite et notons $]-\infty, a]$ un ensemble de la forme $\{u \in A \mid u \leq a\}$ $(a \in A)$. On va montrer d'abord que G s'écrit comme une réunion de demi-droites indexées par X . En effet, parce-que G est externe, G est différent de F_x pour tout $x \in X$. En particulier on peut choisir pour tout $x \in X$ un élément $f(x)$ de G tel que $u \leq f(x)$ pour tout $u \in F_x$. Alors $G = \bigcup_{x \in \underline{X}}]-\infty, f(x)]$

Par saturation on peut supposer en plus que f est une application de X dans A .

Le but de cette section est de démontrer le théorème de classification suivant.

THÉORÈME 4.2. Soit A un groupe ordonné tel que la relation d'ordre soit dense et totale sur A . Soit (G,H) une coupure de A en une galaxie généralisée G et un halo généralisé H . Alors il existe un sous groupe unique K de A et un élément a de A tel que, soit $G =]-\infty, a] \cup a+K$ et K est une galaxie, soit $G =]-\infty, a$ $G =]-\infty, a] - a+K$ et K est un halo généralisé.

Un exemple d'une coupure d'un groupe ordonné en une galaxie strictement généralisée et un halo strictement généralisé est donné par la coupure (G,H) de $\mathbb{R}$ définie par

$$G =]-\infty, 0] \cup G_\omega$$

où G_ω est la galaxie strictement généralisée de l'exemple 2.5.1.

Pour des raisons de lisibilité on ne donnera la démonstration du théorème que pour des groupes commutatifs. Pour obtenir la démonstration dans le cas noncommutatif il suffit d'apporter quelques changements techniques. La démonstration du théorème suivra dans les grandes lignes celle du théorème de classification des coupures de $\mathbb{R}$ en une galaxie et un halo.

On définit d'abord l'ensemble des différences Δ pour la coupure (G,H) par

$$\Delta = \{d \in A \mid d = h - g \ \text{ pour un } \ h \in H \ \text{ et un } \ g \in G\} \ .$$

On va montrer que l'ensemble K défini par

$$K = \{z \in A \mid |z| < d \text{ pour tout } d \in \Delta\}$$

est le sousgroupe de A cherché.

LEMME 4.3. (i) $G = \bigcup_{g \in G} g + K$, (ii) $H = \bigcup_{h \in H} h + H$, (iii) K <u>est un sousgroupe convexe de</u> A .

<u>Démonstration</u> : (i) et (ii) sont évidents, (iii) K n'est pas vide car $0 \in K$; K est clairement convexe. Soient $z, w \in K$ et $g \in G$. Alors $g + |z| \in G$. D'où $g + (|z| + |w|) = (g + |z|) + |w| \in G$.
Donc $|z| + |w| \in K$. Donc $z - w \in K$, car $|z - w| \leq |z| + |w|$. On en conclut que K est un sousgroupe convexe de A .

Soit maintenant X un ensemble standard et soit $f : X \to A$ une application interne telle que $G = \bigcup_{x \in \underline{X}}]-\infty, f(x)]$. On va montrer qu'il y a deux possibilités pour K .

LEMME 4.4. <u>Soit il existe une application interne</u> $\varphi : X \to A$ <u>telle que</u> $K = \bigcup_{x \in \underline{X}} [-\varphi(x), \varphi(x)]$, <u>soit il existe une application interne</u> $\psi : X \to A$ <u>telle que</u> $K = \bigcap_{x \in \underline{X}} [-\Psi(x), \Psi(x)]$ <u>et</u> $\Psi(x) \in \Delta$ <u>pour tout</u> $x \in \underline{X}$.

<u>Démonstration</u> : Supposons d'abord que G est de la forme $]-\infty, a] \cup a + K$ pour un certain $a \in A$. On définit l'application interne $\varphi : X \to A$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) - a & \text{si } a \leq f(x) \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Alors $K = \bigcup_{x \in \underline{X}} [-\varphi(x), \varphi(x)]$.

Deuxièmement, supposons qu'il n'existe pas un $a \in A$ tel que $G =]-\infty, a] \cup a + K$. Alors il existe pour tout $u \in G$ un $v > u$ tel que $v - u \notin K$, c.a.d. tel que $v - u \in \Delta$. En particulier on peut choisir pour tout $x \in \underline{X}$ un $y(x) \in \underline{X}$ tel que $f(y(x)) - f(x) \in \Delta$. Soit $y : X \to X$ le standardisé de $\{(x, y(x)) \mid x \in \underline{X}\}$. On définit l'application interne $\Psi : X \to A$ par

$$\Psi(x) = f(y(x)) - f(x) \quad .$$

Ainsi $\Psi(x) \in \Delta$ pour tout $x \in \underline{X}$. On va montrer que $K = \bigcap_{x \in \underline{X}} [-\Psi(x), \Psi(x)]$.

D'une part $K \subset \bigcap_{x \in \underline{X}} [-\Psi(x),\Psi(x)]$ car $\Psi(x) \in \Delta$ pour tout $x \in \underline{X}$. D'autre part, supposons que $|z| \leq \Psi(x)$ pour tout $x \in \underline{X}$. Soit $g \in G$ quelconque et soit $\xi \in \underline{X}$ tel que $g < f(x)$. Alors

$$g + |z| \leq f(\xi) + \Psi(\xi) = f(\xi) + f(y(\xi)) - f(\xi) = f(y(\xi)) \in G .$$

D'où $z \in K$. Donc $\bigcap_{x \in \underline{X}} [-\Psi(x),\Psi(x)] \subset K$. On en conclut que $K = \bigcap_{x \in \underline{X}} [-\Psi(x),\Psi(x)]$.

Remarquons que K n'est jamais réduit à $\{0\}$:. D'une part, si G est de la forme $]-\infty,a] \cup a + K$ pour un $a \in A$, alors K est externe ; d'autre part, si G n'est pas de cette forme, alors il existe une application interne $\Psi : X \to A$ telle que $K = \bigcap_{x \in \underline{X}} [-\Psi(x),\Psi(x)]$ et $\Psi(x) > 0$ pour tout $x \in \underline{X}$. Alors il existe par la proposition 4.1. un $v \in A$ tel que $\Psi(x) > v > 0$ pour tout $x \in \underline{X}$. Donc $K \supset [-v,v]$.

<u>Démonstration du théorème 4.2.</u> Soient Δ, K, X et $f : X \to A$ comme ci-dessus.

1) <u>Existence</u> : Supposons qu'il existe $a \in A$ tel que $G =]-\infty,a] \cup a + K$. Alors K, qui est un groupe par le lemme 4.3., est une prégalaxie par le lemme 4.4. En plus K est externe car G est externe. K est donc une galaxie généralisée.

Supposons maintenant que G n'est pas de la forme $]-\infty,a] \cup a + K$. Alors il existe par le lemme 4.4. une application interne $\Psi : X \to A$ telle que K soit un préhalo généralisé de la forme $\bigcap_{x \in \underline{X}} [-\Psi(x),\Psi(x)]$ et $\Psi(x) \in \Delta$ pour tout $x \in \underline{X}$. On peut donc choisir pour tout $x \in \underline{X}$ un élément $h(x) \in H$ tel que $h(x) - \Psi(x) \in G$. Soit $h : X \to A$ un prolongement interne de $\{(x,h(x)) | x \in \underline{X}\}$. Parce-que $f(x) < h(x)$ pour tout $x \in \underline{X}$ il existe par la proposition 4.1. un $a \in A$ tel que $f(x) < a < h(x)$ pour tout $x \in \underline{X}$. Le fait que $f(x) < a$ pour tout $x \in \underline{X}$ implique $a \in H$. On va montrer que $G =]-\infty,a] - a + K$.

D'une part $G \subset]-\infty,a] - a + K$ acr $a + K \subset H$ .par le lemme 4.3. (ii). Deuxièmement, soit $u < a + z$ pour tout $z \in K$. Alors $u \leq a - \Psi(\xi)$ pour un certain $\xi \in \underline{X}$. Or $a - \Psi(\xi) < h(\xi) - \Psi(\xi) \in G$. D'où $u \in G$. Donc $]-\infty,a] - a + K \subset G$. On en conclut que $G =]-\infty,a] - a + K$. En plus K est externe. Donc K est un halo généralisé.

2) <u>Exclusion mutuelle</u> : Si G était à la fois de la forme $]-\infty,a] \cup a + K$ et $]-\infty,b] - b + K$ pour un certain a et un certain b de A, alors K serait à la fois une galaxie généralisée et un halo généralisé, en contradiction avec le théorème 2.3..

3) <u>Unicité</u> : Soit d'abord K' un sousgroupe convexe de A tel que $K' \underset{\neq}{\subset} K$.
Alors il suit facilement du lemme 4.3. (i) et (ii) que K' ne suffit pas.

Deuxièmement, soit K'' un sousgroupe convexe de A tel que $K \underset{\neq}{\subset} K''$.
Soit d un élément positif de $K'' \setminus K$. Alors $d \in \Delta$. Soient $g \in G$ et $h \in H$ tel que $g + d = h$. Supposons que G soit de la forme $]-\infty, a] \cup a + K''$ pour un $a \in A$. Alors $a < g$. D'où $g - a \in K''$. Donc $g - a + d \in K''$, car K'' est un groupe. Or $a + g - a + d = h \in H$. Contradiction. Donc G n'est pas de la forme $]-\infty, a] \cup a + K''$. On démontre d'une façon similaire que G n'est pas de la forme $]-\infty, b] - b + K''$ pour un $b \in A$. Donc K'' ne suffit pas. Donc K est unique.

Remarquons qu'il suit de la démonstration que le groupe K peut être défini à partir du même ensemble d'indices que la galaxie généralisée G et le halo généralisé H .

Finalement nous indiquons un domaine d'application du théorème de classification de coupures.

Il est clair que ce théorème permet de classifier facilement toutes les formes possibles des galaxies et des halos convexes de $\mathbb{R}$. Or ces ensembles externes ne sont pas dépourvus d'intérêt. D'une part les galaxies convexes de $\mathbb{R}$ s'introduisent d'une manière naturelle dans l'approche nonstandard de l'étude de certaines équations différentielles ordinaires ; entre autres elles ont été utilisées pour définir "l'épaisseur de sauts" des solutions liées aux problèmes limites dans un champ lent-rapide [7] . D'autre part les halos convexes de $\mathbb{R}$ ont été utilisés pour caractériser des "régions de bonne approximation" de certaines méthodes d'approximation de fonctions réelles [3] .

RÉFÉRENCES

[1] E. BENOIT : thèse d'Etat (à paraître).

[2] I.P. VAN DEN BERG : Permanence principles in nonstandard analyses, 1981.

[3] I.P. VAN DEN BERG : Un point de vue nonstandard sur les développements en série de Taylor, ce volume.

[4] I.P. VAN DEN BERG et M. DIENER : Diverses applications du lemme de Robinson en analyse nonstandard, Comptes-Rendus de l'Acad. des Sc. de Paris (293) série I, 1981, p. 501-504.

[5] P. CARTIER : Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires, Séminaires Bourbaki, vol. 1981-1982; nov. 1981, exposé n° 580.

[6] C.C. CHANG et H.J. KEISLER : Model theory, North-Holland publ. Comp. Amsterdam, 1973.

[7] F. DIENER : Méthode du plan d'observabilité, thèse d'Etat, IRMA Strasbourg 1981.

[8] M. DIENER : halos et galaxies, ou de l'usage du lemme de Robinson : IRMA Strasbourg 1980.

[9] M. DIENER et I.P. VAN DEN BERG : Halos et galaxies, une extension du lemme de Robinson. Comptes-rendus de l'Acad. des Sc. de Paris (293) série I,1981, p. 385-388.

[10] G.H HARDY : Orders of infinity, the "Infinitärcalcul" of Paul du Bois-Reymond, Cambridge University Press,1910.

[11] K. HRBACEK : Nonstandard Set Theory, Am. Math. Monthly (86),1979,p. 659-677.

[12] R. LUTZ et M. GOZE : Nonstandard analysis. Practical guide with applications, Springer-Verlag,1981 .

[13] E. NELSON : Internal set theory : a new approach to nonstandard analysis, Bull. Amer. Math. Soc. (83), 1977, p. 1165-1198.

[14] A. ROBINSON-A.H. LIGHTSTONE : Non-Archimedian fields and asymptotic expansions, North-Holland publ. comp., Amsterdam,1975.

[15] K.D. STROYAN et W.A.J. LUXEMBURG : Introduction to the theory of infinitesimals, Academic Press, New York,1976.

Centre Universitaire de Tlemcen

B.P. 119

TLEMCEN (Algérie)